MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik

Linjär algebra 2

Senast korrigerad: 2006-02-10

Övningar

Linjära rum

1. Låt $v_1, \ldots, v_m$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Ge bevis eller motexempel till följande påståenden. Satser ur boken får användas.
   a) Om varje vektor i $\mathbb{R}^n$ kan skrivas som linjär kombination av $v_1, \ldots, v_m$ så är $v_1, \ldots, v_m$ en bas för $\mathbb{R}^n$.
   b) Om varje vektor i $\mathbb{R}^n$ kan skrivas som linjär kombination av $v_1, \ldots, v_m$ på precis ett sätt så är $m = n$.
   c) Om någon vektor i $\mathbb{R}^n$ kan skrivas som linjär kombination av $v_1, \ldots, v_m$ på precis ett sätt så är $v_1, \ldots, v_m$ linjärt oberoende.
2. Antag $e_1, \ldots, e_n$ är en bas för vektorrummet V. Låt W vara det delrum av V som spänns upp av $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n, e_n - e_1$. Bestäm dimensionen av W, och ange en bas för W.
3. Visa att polynomen $1, x+1, x^2+1, \ldots, x^n+1$ utgör en bas för rummet P_n av polynom av grad $\leq n$. Ange koordinaterna för polynomet $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ i denna bas.
4. Låt M vara mängden av alla 2×3-matriser A sådana att
$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Visa att M är ett underrum av vektorrummet av alla 2×3-matriser, och bestäm en bas för M.
5. Låt V vara det vektorrum som består av alla 3×3-matriser med enbart nollor på huvuddiagonalen. Finn en bas för V.
6. Bestäm för vilka a som vektorn $(a, 2, 3, 4)$ blir en linjärkombination av vektorerna
$$(1,0,1,0), \quad (1,-1,2,1) \quad (0,1,1,1), \quad (3,-4,1,-2).$$
7. Låt V vara mängden av alla polynom $p(x)$ av högst grad 4 sådana att $p(0) + p'(1) = p(1) = 0$ (där $p'(x)$ som vanligt betecknar derivatan av $p(x)$). Visa att V är ett vektorrum, och bestäm en bas för V.
8. Antag vektorerna $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_4$ i $\mathbb{R}^4$ är linjärt oberoende. Är då följande tre vektorer linjärt beroende eller ej:
$$\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \quad \mathbf{w}_2 = 2\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4, \quad \mathbf{w}_3 = 3\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 + 3\mathbf{v}_4.$$

Euklidiska rum

9. Vektorerna $\mathbf{v}_1 = (0,2,1,0)$ och $\mathbf{v}_2 = (1,-1,0,0)$ är givna i det euklidiska rummet $\mathbb{R}^4$. Bestäm en ON-bas för det delrum av $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$, och utvidga sedan denna till en ON-bas för hela $\mathbb{R}^4$.
10. Låt A vara en inverterbar $n \times n$-matris och låt X och Y vara kolonnvektorer ($n \times 1$-matriser). Visa att $(X|Y) = Y^tA^tAX$ definierar en skalärprodukt i $\mathbb{R}^n$.
11. Bestäm en ON-bas för det underrum av $\mathbb{R}^4$ som definieras av ekvationen
$$x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0.$$
12. Ange en ON-bas (ortonormal bas) för det underrum av R^4 (med den vanliga skalärprodukten) som spänns upp av vektorerna $\{(1,3,-1,5)\,,(-3,-1,3,9)\,,(5,7,-5,1)\}$.

13. I rummet av 2×2-matriser definierar vi

$$(A \mid B) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} b_{ij}$$

för matriser $A = (a_{ij})$ och $B = (b_{ij})$. Visa att detta ger en skalärprodukt. Bestäm sedan avståndet i detta rum mellan $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

14. Låt P_3 vara vektorrummet av reella polynom i en variabel, av grad högst 3, med skalärprodukten

$$(p(x) \mid q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Låt V vara delmängden av polynom med $\int_0^1 p(x)dx = 0$. Visa att V är ett delrum till P_3, och finn en bas till V. Bestäm $V^\perp$.

15. Visa att för standardskalärprodukten på $\mathbb{R}^n$ gäller att $(\mathbf{u} \mid A\mathbf{v}) = (A^t\mathbf{u} \mid \mathbf{v})$ för varje $n \times n$-matris A.

16. Låt $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ beteckna standardskalärprodukten på $\mathbb{R}^n$. För en inverterbar $n \times n$-matris A definierar vi $(\mathbf{u} \mid \mathbf{v}) = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}$. Visa att detta ger en ny skalärprodukt på $\mathbb{R}^n$.

17. Visa att om $a_1, \ldots, a_n$ är positiva reella tal, så gäller att

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2.$$

Determinanter

18. Låt $A = (a_{ik})_{4\times 4}$ vara den 4×4-matris där $a_{ik} = 4 - |k - i|$. Bestäm $\det A$.

19. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 11 & 13 & 17 & x \\ x & 17 & 13 & 11 \\ 11 & 13 & x-6 & 23 \\ 23 & x-6 & 13 & 11 \end{vmatrix} = 0.$$

20. En $n \times n$–matris

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kallas *skevsymmetrisk* om $A^t = -A$, d. v. s. om $a_{ij} = -a_{ji}$ för alla i och j mellan 1 och n.

(i) Bevisa att om A är en skevsymmetrisk $n \times n$–matris där n är ett *udda* tal, så är $\det A = 0$. (*Ledning:* Vad är $\det(-A)$?)

(ii) Beräkna

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -5 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ -3 & -4 & 5 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 15 & 3 & 0 & 7 & -4 \\ -1 & 0 & 26 & -10 & 2 & 3 & 8 \\ -15 & -26 & 0 & 6 & -5 & 11 & -12 \\ -3 & 10 & -6 & 0 & -1 & 13 & -20 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 0 & 2 & -8 \\ -7 & -3 & -11 & -13 & -2 & 0 & -4 \\ 4 & -8 & 12 & 20 & 8 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

21. Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 7 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

22. Lös ekvationen
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ x & x^2 & x^3 & x^4 & 1 \\ x^2 & x^3 & x^4 & 1 & x \\ x^3 & x^4 & 1 & x & x^2 \\ x^4 & 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$$

23. Beräkna för alla heltal $n \geq 1$ determinanten
$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

24. Låt
$$A_k = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_1 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{k-2} & b_{k-1} & c_{k-1} \\ & & & a_{k-1} & b_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, ..., n$$

där a_i, b_i, c_i är reella tal och $a_i c_i > 0$, för $i = 1, 2, ..., n$. Beteckna $p_k(\lambda) = \det(\lambda E - A_k)$ och definera $p_0(\lambda) = 1$.

(i) Visa att $p_k(\lambda)$ kan rekursivt beräknas ur $p_{k-1}(\lambda)$ och $p_{k-2}(\lambda)$. Ange relationen mellan dessa tre polynom.

(ii) Visa att p_k och p_{k-1} inte har gemensamma nollställen.

(iii) Om λ_0 är ett nollställe till något polynom, p_i, så gäller $p_{i+1}(\lambda_0)p_{i-1}(\lambda_0) < 0$.

Linjära avbildningar och matriser

25. Låt $F : V \to W$ vara en linjär avbildning och låt $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Betrakta följande påståenden:

(i) $v_1, v_2, \dots, v_n$ är linjärt oberoende i V.

(ii) $F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_n)$ är linjärt oberoende i W.

a) Avgör om (i) $\Rightarrow$ (ii) är sant eller falskt. Om du anser att påståendet är sant skall du bevisa det. Om du anser att påståendet är falskt skall du ge ett motexempel.

b) Samma uppgift för (ii) $\Rightarrow$ (i).

26. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av $F(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ där
$$y_1 = 2x_2 - 4x_3, \quad y_2 = x_2 - 2x_3, \quad y_3 = -7x_2 + 14x_3.$$
Bestäm en bas i nollrummet för F^2 (d.v.s. sammansättningen $F \circ F$).

27. Låt $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ vara den linjära avbildning som i standardbaser representeras av matrisen
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$
Bestäm baser för avbildningens nollrum och värderum.

28. Matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ definierar en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ på det vanliga sättet (d. v. s. genom $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$). Bestäm transformationsmatrisen för T med avseende på basen $(1, 0, 1)$, $(0, 2, 0)$, $(-1, 0, 1)$ för $\mathbb{R}^3$ och basen $(0, 1)$, $(1, 0)$ för $\mathbb{R}^2$.

29. Låt $F : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ vara den linjära avbildning som ges av $F\big(p(x)\big) = (x + 1)p'(x)$ (där $p'(x)$ betecknar derivatan). Låt e vara basen $e = (1, x, x^2, x^3)$.

(i) Ange matrisen A för F i basen e.

(ii) Bestäm en bas e' av egenvektorer till F och matrisen A' för F i denna bas.

30. Låt e_1, e_2, e_3, e_4 vara en bas i ett fyrdimensionellt vektorrum V. Antag att den linjära avbildningen F på V har matrisframställningen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestäm F:s matrisframställning i basen

$$f_1 = e_1 - 2e_2 + e_4, f_2 = 3e_2 - e_3 - e_4, f_3 = e_3 + e_4, f_4 = 2e_4.$$

(ii) Bestäm dimension av värderummet och nollrummet till F.

(iii) Välj en bas i $V(F)$ och komplettera den till en bas i V. Bestäm F:s matrisframställning i denna bas.

31. Man definierar *dualrummet* till ett vektorrum V som V^* som mängden av linjära avbildningar $T : V \to \mathbb{R}\}$. Antag nu att $\dim V = n$ och låt $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ vara en bas för V.

(i) Visa att för varje $i \in \{1, \ldots, n\}$ finns det precis ett element $f_i \in V^*$, sådant att $f_i(\mathbf{e}_i) = 1$ men att $f_i(\mathbf{e}_j) = 0$ för alla $j \neq i$.

(ii) Visa att $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ är en bas för V^*.

(iii) Bestäm $\dim(V^*)$.

32. Bestäm x så att följande matris får så liten rang som möjligt

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 & x \\ 15 & -10 & -35 & -5 \\ 6 & -4 & -14 & -x \\ 15 & -3 & -9 & -6 \end{pmatrix}.$$

33. Ange matrisen för den linjära avbildning på $P_3(\mathbb{R})$ som ges av $F(p(t)) = p''(t) + p'(t) + p(t)$ i standardbasen $\{1, t, t^2\}$.

34. Bestäm matrisen för den linjära avbildning $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ som utgörs av den ortogonala projektionen på det underrum som spänns upp av $(1, 1, 0, 0)$ och $(0, 1, 1, 1)$.

Bestäm baser för radrum(A), kolonnrum(A), nollrum(A) och nollrum(A^t), där A är en av matriserna i följande tre uppgifter.

35.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & -9 & -1 & 9 \\ 5 & 3 & 17 & 8 & -6 \end{pmatrix}.$$

36.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & 4 & -5 \\ 8 & -2 & -3 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

37.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna (om möjligt) inversen till matriserna i följande två uppgifter.

38.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

39.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Generalisera resultatet till en $n \times n$-matris av samma typ.

40. Bestäm (om möjligt) en linjär avbildning $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sådan att nollrummet är $[(1,2,3,4),(0,1,2,3)]$ och värderummet utgöres av lösningarna till $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Egenvärden och diagonalisering

41. Bestäm egenvektorerna till den linjär avbildning som har matrisen

$$\begin{pmatrix} -3 & -11 & -9 \\ 2 & 10 & 9 \\ -2 & -11 & -10 \end{pmatrix}.$$

42. Låt $F : P_3 \to P_3$ vara den linjära avbildning som ges av $F\big(p(x)\big) = (x+1)p'(x)$ (där $p'(x)$ betecknar derivatan).
    (i) Ange matrisen A för F i basen $\{1, x, x^2, x^3\}$.
    (ii) Bestäm en bas av egenvektorer till F och matrisen A' för F i denna bas.

43. Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & -a \end{pmatrix}$$

Bestäm för vilka värden på a, b och c som A är matrisen för en spegling av $\mathbb{R}^3$ i ett plan genom origo, och bestäm i de aktuella fallen planets ekvation.

44. Låt $T : P_2 \to P_2$ genom $T(a + bx + cx^2) = a + 2c + (ka + 5b)x + (4a + 3c)x^2$.
    (i) Visa att T är en linjär avbildning.
    (ii) Visa att T är diagonaliserbar om och endast om $k = 0$.

45. Låt V vara det delrum av $C[0,1]$ som spännes upp av funktionerna $\sin xe^x$, $\cos xe^x$, $\sin xe^{-x}$ och $\cos xe^{-x}$.
    (i) Bevisa att dessa funktioner utgör en bas för V.
    (ii) Låt $D\ V \to V$ vara den avbildning som ges av vanlig derivation. Bestäm matrisen för D med avseende på denna bas.
    (iii) Bestäm sekularekvationen för matrisen i ii), och undersök hur många reellla rötter den har. Är matrisen diagonaliserbar?

46. Antag att den kvadratiska $n \times n$-matrisen A uppfyller $A^{n-1} \neq 0$, men $A^n = 0$. Visa att om $A^{n-1}u \neq 0$ för en viss vektor $u \in \mathbb{R}^n$ så är $u, Au, A^2u, \ldots, A^{n-1}u$ en bas för $\mathbb{R}^n$. Visa att A inte är diagonaliserbar.

47. Låt $f(x)$ vara ett polynom och A och B vara två $n \times n$-matriser. Antag att $A = M^{-1}BM$, där M är en godtycklig inverterbar matris. Visa att
    (i) A och B har samma egenvärden
    (ii) $f(A) = M^{-1}f(B)M$ och $f(A)$ och $f(B)$ har samma egenvärden.

48. Visa att matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ är diagonaliserbar. Bestäm sedan A^n för godtyckliga heltal $n \geq 1$.

49. Undersök om matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

har några egenvärden, samt bestäm i förekommande fall dessa tillsammans med motsvarande egenvektorer. Är matrisen diagonaliserbar?

50. Låt V vara det underrum av $C(\mathbb{R})$ som består av funktioner av typen $f(x) = p(x)e^x$ där $p(x)$ är ett polynom av grad ≤ 3. Ange matrisen för derivationsoperatorn $D : V \to V$ i basen $e^x, xe^x, x^2e^x, x^3e^x$. Är avbildningen $D : V \to V$ diagonaliserbar?

51. Visa att om en 2×2-matris har negativ determinant, så kan den diagonaliseras.

52. Ge exempel på en 3×3-matris $A \neq 0$ sådan att $A^2 = 0$. Visa att en sådan matris ej kan diagonaliseras.

53. Ge exempel på en matris $A \neq E$ med $A^3 = E$. Visa att en sådan matris ej kan diagonaliseras.

54. För vilka värden på a är matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonaliserbar?

55. Sök en matris B sådan att $B^2 = A$, där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

56. Bestäm en ON-bas av egenvektorer till den linjära avbildning som i någon given ON-bas har matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

57. Antag att A, B och C är tre $n \times n$–matriser, sådana att $AB = CA$. Visa att om varje egenvärde för A är skilt från 0, så har B samma egenvärden som C.

58. En $n \times n$–matris A är *nilpotent* om det finns något positivt heltal m sådant att $A^m = 0$. Visa att den enda symmetriska nilpotenta $n \times n$–matrisen är nollmatrisen. (Ledning: Vilka egenvärden kan en nilpotent matris ha?)

59. Låt A vara en symmetrisk matris. Visa att alla egenvärden till A^2 måste vara ≥ 0. Visa vidare att om λ är ett egenvärde till A^2 så måste $\sqrt{\lambda}$ eller $-\sqrt{\lambda}$ vara ett egenvärde till A.

60. Lös differentialekvationssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= 6y_1 + 12y_2 - 4y_3 \\ y_2' &= -3y_1 - 9y_2 + 4y_3 \\ y_3' &= -6y_1 - 14y_2 + 6y_3 \end{aligned}$$

61. Fibonaccitalen F_n definieras som bekant rekursivt som $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ för $n \geq 2$. Visa att rekursionsformeln kan skrivas som

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Härled med hjälp av matrisdiagonalisering en sluten formel för F_n.

62. Antag A är en $n \times n$-matris. Visa att om A har n egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (räknade med sin multiplicitet), så är

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + \cdots + a_{nn}$$

(dvs. summan av egenvärdena = summan av matrisens diagonalelement. Ledning: tänk på sambandet mellan rötter och koefficienter i en algebraisk ekvation).

Kvadratiska former

63. Visa att mängden av alla punkter i planet, vars koordinater i en ortonormerad bas satisfierar ekvationen $x^2 + 6xy + 9y^2 + 3x - y = 0$, är en parabel. Ange dess axel och brännpunkt.

64. Ange typen av ytan $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xz = k$ för olika värden på k.

65. Visa att $x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + x + y + z = 2$ är en ellipsoid. Bestäm centrum för ellipsoiden. Notera att ellipsoiden är en rotationsyta, och bestäm rotationsaxeln.

66. Visa att $x^2 + 6xy + 4xz + 10y^2 + 14yz + 6z^2 \geq 0$ för alla x, y, z med likhet om och endast om $x = y = z = 0$.

67. Bestäm x_1 och x_2 så att $12x_1^2 + 12x_1x_2 + 7x_2^2$ blir så stort som möjligt då $x_1^2 + x_2^2 = 1$ förutsätts.

Svar till vissa uppgifter:

Observera att det kan förekomma felaktigheter här. Om du misstänker att du hittat en sådan, så tala gärna om det för oss!

1. b) och c) sanna.
2. Dimensionen är $n-1$ och $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n$ är en bas.
3. $(a_0 - \sum_1^n a_j, a_1, \ldots, a_n)$.
4. En bas är t.ex.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Dimensionen är 6.
6. Endast för $a = -1$.
7. T.ex. $1 - 3x^3 + 2x^4$, $x - 3x^3 + 2x^4$, $x^2 - 2x^3 + x^4$.
8. Linjärt oberoende.
9. $\frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1,0)$, $\quad \frac{1}{\sqrt{30}}(5,-1,2,0)$, $\quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2,0)$, $\quad (0,0,0,1)$.
12. $\frac{1}{6}(1,3,-1,5)$, $\frac{1}{2}(-1,-1,1,1)$.
13. $\sqrt{105}$. — 21. -99.
18. 20.
19. Rötterna är -41, 7, och 23 (dubbelrot).
21. -99.
22. Endast $x = 1$.
23. $D_{2k-1} = 0$, $D_{2k} = (-1)^k$.
26. En bas är $(1,0,0)$, $(0,2,1)$.
27. $(-2,-1,1,0,0)$, $(-2,-18,0,7,1)$ för nollrummet; $(1,1,3,-2)$, $(0,1,0,-1)$, $(0,3,1,-3)$ för värderummet.
28. Matrisen är

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

29. (i) Matrisen är

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

30. (i) Matrisen är

$$\begin{pmatrix} 6 & -9 & 9 & 6 \\ 2 & -4 & 10 & 10 \\ 8 & -16 & 40 & 40 \\ 0 & 3 & -21 & -24 \end{pmatrix}.$$

(ii) 2 och 2.

31. (iii): Samma som V.
32. $x = 2$.
33. Matrisen är

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

34. Projektionen har matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

35. Radrum: $(1,2,2,1,1),\ (0,1,-1,-2,0),\ (0,0,0,1,1)$;
kolonnrum: $(1,3,-2,5),\ (2,5,1,3),\ (1,5,-1,8)$;
nollrum(A): $(-4,1,1,0,0),\ (4,-2,0,-1,1)$;
nollrum(A^t): $(3,-2,1,1)$.

36. Radrum: $(1,-4,-1,4,-5),\ (0,6,1,-5,8)$;
kolonnrum: $(3,1,8,1),\ (1,1,3,0)$;
nollrum(A): $(-2,1,-6,0,0)$, $(1,0,5,1,0)$, $(-3,0,-8,0,1)$;
nollrum(A^t): $(-5,-1,2,0)$, $(-1,1,0,2)$.

37. Radrum: $(1,2,1,0,1),\ (-1,1,1,2,1),\ (0,1,1,1,2),\ (2,1,1,1,1)$;
kolonnrum: $(1,-1,0,2)$, $(2,1,1,1)$, $(1,1,1,1)$, $(0,2,1,1)$;
nollrum(A): $(1,4,-11,3,2)$;
nollrum(A^t) $=\{(0,0,0,0)\}$, bas saknas.

38. Inversen existerar och är

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -7 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 10 \\ -2 & 6 & 10 & -8 \end{pmatrix}.$$

39. Inversen existerar och elementet på plats (i,j) i inversen är 0 om $j<i$ och $(-1)^{j-i}$ annars.

40.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

41. $(x_1,x_2,x_3)=s(-\frac{11}{2},1,0)+t(-\frac{9}{2},0,1)$.

43. $a^2+b^2=1$ och $c=1$. Planet får ekvationen $(a-1)x+bz=0$.

45. (ii)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

48.

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A^n=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5^n+3 & 5^n-1 \\ 3\cdot 5^n-3 & 3\cdot 5^n+1 \end{pmatrix}.$$

49. Ett enda egenvärde -1, ej diagonaliserbar.

50.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ej diagonaliserbar.

54. Endast för $a=0$.

55. T.ex.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

56. $(0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, $(4/3\sqrt{2},-1/3\sqrt{2},1/3\sqrt{2})$, $(1/3,2/3,-2/3)$.

61. $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right)$.

63. Axeln parallell med vektorn $(-3,1)$ och brännpunkten $(-3/40,1/40)$.

64. Ellipsoid för $k>0$, en punkt för $k=0$ och ingen geometrisk betydelse för $k<0$.

67. $x_1=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $x_2=\frac{2}{\sqrt{13}}$.