ISSN: 1401-5617

Volym i $\boldsymbol{R}^n$ och en utvidgning av Pythagoras sats

Niclas Larson

Research Reports in Mathematics
Number 7, 2004

Department of Mathematics
Stockholm University

Electronic versions of this document are available at
http://www.math.su.se/reports/2004/7

Date of publication: May 21, 2004
2000 Mathematics Subject Classification: Primary 15A15.
Keywords: algebra, didaktik, geometri, Pythagoras sats, volym.

Postal address:
Department of Mathematics
Stockholm University
S-106 91 Stockholm
Sweden

Electronic addresses:
http://www.math.su.se/
info@math.su.se

Två uppsatser med anknytning till linjär algebra

Filosofie licentiatavhandling

av

Niclas Larson

Uppsats 2

Volym i $\mathbf{R}^n$
och
en utvidgning av
Pythagoras sats

Detta är andra delen i licentiatavhandlingen "Två uppsatser med anknytning till linjär algebra". Avhandlingen kommer att presenteras vid ett seminarium måndagen den 14 juni 2004 klockan 10.15 i sal 306, hus 6, matematiska institutionen, Stockholms universitet, Kräftriket. Opponent är Hans Thunberg, universitetslektor vid Kungliga tekniska högskolan.

Innehåll

1 Förord

Bakgrunden till detta verk är att jag som gymnasielärare i Stockholms stad tillsammans med 19 andra lärare erbjöds att ägna mig åt forskarstudier under halva delen av min arbetstid i fyra år. Vad min avhandling skulle omfatta var då okänt. Vid ett tillfälle kom jag i kontakt med Jan-Erik Björk, som vid upplysningen om att jag var idrottslärare genast började prata om matematiska problem inom idrotten. Vi talades vid med jämna mellanrum och vid en av våra sammankomster nämndes det problem som är bakgrunden till uppsatsen om myran, som är den del av avhandlingen jag påbörjade först. Det största målet var för mig att beskriva problemet och dess lösning så utförligt som möjligt, för att göra avhandlingen läsbar för en större grupp. Dessutom präglas uppsatsen av de didaktiska aspekterna vid angrepp på problem av detta slag.

Så småningom inleddes också arbetet med avhandlingens andra del, det vill säga denna uppsats. Här handlar det om två problem med redan väl kända lösningar, nämligen hur man beräknar volym i $\mathbf{R}^n$ för kroppar av olika dimension samt att Pythagoras sats har en motsvarighet för areor och volymer. Målsättningen är att göra undersökningen mer omfattande än de redan existerande samt att betrakta problemens lösningar ur ett didaktiskt perspektiv. Gemensamma nämnare för avhandlingens båda delar är det flitiga användandet av linjär algebra samt de didaktiska aspekterna.

Det finns många personer som bör framhållas för sitt stöd vid skrivandet av denna avhandling. Jag nämner här, utan hänsyn till ordning, de som jag för tillfället kan minnas. Mina handledare Christian Gottlieb och Torbjörn Tambour för ovärdelig hjälp med de matematiska problemen och formuleringarna samt min biträdande handledare Jan-Erik Björk. Hans Thunberg på KTH har ställt upp som opponent. Mina rumskamrater Anders Göransson, Samuel Lundqvist, Kirsti Nordström och Mattias Ringkvist har agerat bollplank samt gett tips om konsten att skriva i LaTeX. Min pappa Anders Larson har som vanligt hjälpt till med korrekturläsning. Slutligen vill jag framhålla min fru Jenny Larson för sitt moraliska stöd och önska henne lycka till med sin doktorsavhandling inom omvårdnad samt tacka våra katter Molle och Moses för sin uppiggande närvaro även om framför allt den sistnämnda ibland obstruerat arbetet genom att lägga sig på böcker och papper.

Den jag emellertid främst vill tillägna avhandlingen är Pepsi, som aldrig fick uppleva slutförandet av den.

Stockholm och Norrtälje den 21 maj 2004

Niclas Larson

2 Inledning

Pythagoras sats är nog ett av de mest kända matematiska resultaten. Den är något som nästan alla stött på i sin grundskoleutbildning eller motsvarande. Den är nog också något som väldigt många till stora delar både förstått under sin skoltid och kommer ihåg efter den. Satsen är både konkret och lättbegriplig, så länge man håller sig till rätvinkliga trianglar i planet. Därmed inte sagt att man förstått alla delar av den eller att man alltid räknar rätt.

Tittar man på satsen ur ett vektorgeometriskt perspektiv, upptäcker man att den har större användningsområden än för rätvinkliga trianglar. Den enklaste formen av Pythagoras är identisk med avståndsformeln i $\mathbf{R}^2$. Om man har en vektor $\mathbf{u}$ med koordinaterna (x, y) i en ON-bas, gäller för längden av $\mathbf{u}$ (kallad $|\mathbf{u}|$) att

$$|\mathbf{u}|^2 = x^2 + y^2$$

En motsvarighet till denna avståndsformel finns i rummet (det vill säga $\mathbf{R}^3$) och där får vi för $\mathbf{u} = (x, y, z)$ då

$$|\mathbf{u}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Eftersom avstånd som geometriskt begrepp inte existerar i $\mathbf{R}^n$ om $n > 3$, måste avstånd definieras rent algebraiskt. Det mest naturliga sättet att göra detta är en utveckling av avståndsformeln i planet och rummet, så att om $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, har vi

$$|\mathbf{u}|^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2$$

Ovan har vi utvidgat Pythagoras sats från avståndsberäkningar i planet ($\mathbf{R}^2$), via avståndsberäkningar i rummet ($\mathbf{R}^3$) till det rent algebraiska avståndet i $\mathbf{R}^n$. Vi skall nu studera motsvarande generaliseringar för area- och volymbegreppen. Dessutom kommer en generalisering av Pythagoras sats, som kan användas för areor och volymer. De flesta slutsatserna är redan kända, men denna framställning har också målsättningen att jämföra olika metoder att nå fram till rseultatet.

3 Area i planet

Att beräkna en area i planet är något som uppkommer relativt tidigt inom den linjära algebran. Om vi har två vektorer $\mathbf{u}_1 = (x_1, y_1)$ och $\mathbf{u}_2 = (x_2, y_2)$ i $\mathbf{R}^2$, spänner dessa upp en parallellogram. Vi ska titta på tre olika vägar som leder fram mot samma resultat för hur man beräknar arean av denna parallellogram.

Vi inleder med ett av de vanligaste sätten att visa areaberäkningen. För att göra detta måste vi först införa begreppet skalärprodukt.

Definition 1 (skalärprodukt). *För två vektorer i planet, kallade* $\boldsymbol{u}_1$ *och* $\boldsymbol{u}_2$*, definieras skalärprodukten av dem som*

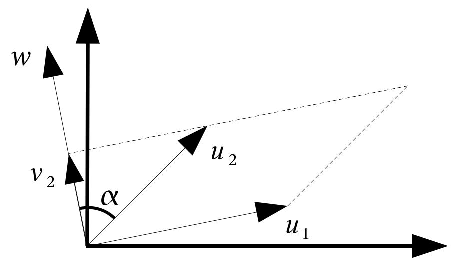
$$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 \;=\; |\boldsymbol{u}_1| \cdot |\boldsymbol{u}_2| \cos\alpha$$

där $|\boldsymbol{u}_i|$ *är längden av vektorn* $\boldsymbol{u}_i$ *och* α *är vinkeln mellan vektorerna. Två vektorer är ortogonala (vinkelräta) mot varandra precis då deras skalärprodukt är lika med 0.*

Om basen är ortonormerad gäller även att skalärprodukten mellan vektorerna blir

$$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 \;=\; x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Antag nu att $\mathbf{u}_1 = (x_1, y_1)$ och $\mathbf{u}_2 = (x_2, y_2)$ spänner upp en parallellogram i planet. Konstruera en ny vektor $\mathbf{w}$ genom att vrida $\mathbf{u}_1$ 90° moturs. Då gäller att $\mathbf{w} = (-y_1, x_1)$. Sök därefter projektionen för $\mathbf{u}_2$ på $\mathbf{w}$ och kalla denna $\mathbf{v}_2$.



Eftersom $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{v}_2$, så gäller att parallellogrammens area

$$A = |\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{v}_2|$$

Då vi har $|\mathbf{u}_1| = |\mathbf{w}|$ och $\mathbf{v}_2 // \mathbf{w}$ gäller också

$$\begin{aligned} A &= |\mathbf{w}| \cdot |\mathbf{v}_2| \;=\; \big||\mathbf{w}| \cdot |\mathbf{u}_2| \cdot \cos\alpha\big| \\ &= |\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_2| \;=\; |-y_1 x_2 + x_1 y_2| \\ &= \left| \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right| \;=\; |\det(\,\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2\,)| \end{aligned}$$

där $\mathbf{u}_i$ är en kolonnmatris med vektorns koordinater, det vill säga

$$\mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

Vi får alltså arean av parallellogrammen genom att beräkna determinanten man får när man sätter vektorernas koordinater i kolonnerna.[1] Detta ska visa sig vara ett viktigt resultat. Ovanstående bevis är relativt enkelt och lättöverskådligt.

[1]Egentligen är det korrekta uttryckssättet att "man beräknar determinanten av den matris man får genom att sätta vektorernas koordinater i kolonnerna", eftersom determinanten är det tal man får av en funktion från matrisen. Emellertid blir detta språk för invecklat i längden. Därför väljer vi att använda determinant även som uttryck för matrisen.

Det leder också ganska omgående fram till ett resultat. Tyvärr är det inte så enkelt att generalisera denna metod till högre dimensioner, varför vi behöver titta på några andra framkomliga vägar.

Vi inleder nästa åskådning med fallet då de två vektorerna är vinkelräta mot varandra. Då beräknar vi arean av rektangeln, som de spänner upp, genom att multiplicera vektorernas längder med varandra. Det vill säga

$$A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = |\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2|$$

Arean av rektangeln går även att beräkna med hjälp av determinanten för 2×2-matrisen $(\,\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2\,)$, som vi ju nyss visat. För att ännu en gång visa sambandet mellan determinanten och arean går vi tillbaka till uttrycket för längden av en vektor. Antag att $\mathbf{u}_1 = (x_1, y_1)$ och $\mathbf{u}_2 = (x_2, y_2)$ är två ortogonala vektorer i $\mathbf{R}^2$. Dessa spänner då upp en rektangel och

$$A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \;=\; |\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2| \;=\; \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2} \cdot \sqrt{(x_2)^2 + (y_2)^2}$$

vilket innebär att

$$A^2 \;=\; ((x_1)^2 + (y_1)^2)((x_2)^2 + (y_2)^2) \;=\; (x_1x_2)^2 + (x_1y_2)^2 + (y_1x_2)^2 + (y_1y_2)^2$$

Kvadratkomplettera det sista ledet

$$\begin{aligned} & (x_1x_2)^2 + (x_1y_2)^2 + (y_1x_2)^2 + (y_1y_2)^2 \\ = \;& (x_1x_2 + y_1y_2)^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + (x_1y_2)^2 + (y_1x_2)^2 \end{aligned}$$

Men $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ är ortogonala, vilket innebär att

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \;=\; x_1x_2 + y_1y_2 \;=\; 0$$

Så vi får

$$A^2 \;=\; (x_1y_2)^2 + (y_1x_2)^2 - 2x_1x_2y_1y_2 \;=\; (x_1y_2 - y_1x_2)^2$$

Beräknar vi så kvadraten av determinanten som bildas av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ får vi

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2 = (x_1y_2 - y_1x_2)^2$$

vilket alltså är samma sak som resultatet innan.

Eftersom arean är positiv, medan determinanten inte behöver vara det, har vi alltså

$$A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \;=\; \left| \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right| \;=\; |x_1y_2 - y_1x_2|$$

då $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$.

Detta var ett ganska omständligt sätt att få fram det önskade resultatet. Det är heller inte särskilt lätt att generalisera till $\mathbf{R}^n$ för $n \geq 3$. Innan vi tittar på hur man ska göra då vektorerna inte är ortogonala mot varandra, ska vi därför betrakta ännu ett angreppssätt.

Även här gäller det att man först tänker sig $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ som två ortogonala vektorer. I detta fall ska vi även anta $|\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_2| = 1$. Då är matrisen $U = (\,\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2\,)$ en ortogonal matris, det vill säga $U^* = U^{-1}$, där U^* är den transponerade matrisen av U. Eftersom man alltid har

$$\det(U) = \det(U^*) \qquad \text{och} \qquad \det(U) \cdot \det(U^{-1}) = 1$$

måste då gälla

$$\det(U) \cdot \det(U^{-1}) \;=\; \det(U) \cdot \det(U^*) \;=\; 1$$

så

$$|\det(U)| \;=\; |\det(U^*)| \;=\; 1$$

Därmed gäller

$$|\det(\,\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2\,)| \;=\; |\det(U)| \;=\; 1 \;=\; A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$$

vilket visar att beloppet av determinanten är lika med arean om det handlar om två ortogonala och normerade vektorer.

Om vektorerna är ortogonala, men inte normerade, kan man enligt räknereglerna för determinanter bryta ut en faktor motsvarande vektorns längd ur den kolonnen:

$$\begin{aligned}
|\det(\,\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2\,)| &= |\mathbf{u}_1| \cdot |\det(\,\mathbf{u}_1/|\mathbf{u}_1| \quad \mathbf{u}_2\,)| \\
&= |\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2| \cdot |\det(\,\mathbf{u}_1/|\mathbf{u}_1| \quad \mathbf{u}_2/|\mathbf{u}_2|\,)| \\
&= |\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2| \cdot 1 \;=\; |\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2| \\
&= A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)
\end{aligned}$$

vilket åter visar ett önskat resultat. Denna metod är också betydligt enklare att generalisera till högre dimensioner, vilket naturligtvis är bra.

Om vektorerna inte är ortogonala mot varandra gäller som bekant inte att man får arean av parallellogrammen de spänner upp genom att ta produkten av deras längder. Enligt den vanliga definitionen av parallellogrammens area gäller då $A = bh$. Om vi nu har två vektorer $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$, som inte är parallella eller ortogonala, ska vi söka den ena vektorns vinkelräta projektion mot den andra. Utgår vi från $\mathbf{u}_1$ (man kan säga att vi låter $\mathbf{u}_1$ vara basen i den tidigare areaformeln) ska vi då hitta projektionen för $\mathbf{u}_2$ på en vektor vinkelrät mot $\mathbf{u}_1$. Detta är samma sak som att hitta en vektor $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{w}_1$ där $\mathbf{w}_1$ är projektionen av $\mathbf{u}_2$ på $\mathbf{u}_1$. Men då gäller ju att $\mathbf{w}_1 // \mathbf{u}_1$, så man kan skriva $\mathbf{w}_1 = \lambda \mathbf{u}_1$ för något $\lambda \in \mathbf{R}$. Alltså gäller $A = |\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2 - \lambda \mathbf{u}_1|$ för detta tal λ.

Om vi nu går över till att titta på determinanten som bildas av vektorerna, vet vi sen tidigare att

$$A = |\det(\,\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2\,)|$$

om $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$. Tittar vi tillbaka på förra stycket gäller att det finns ett tal λ sådant att $\lambda\mathbf{u}_1$ är precis lika med projektionen av $\mathbf{u}_2$ på $\mathbf{u}_1$ och då gäller också $\mathbf{u}_1 \perp (\mathbf{u}_2 - \lambda\mathbf{u}_1)$, vilket gör att vi kan använda determinanten för beräkning av arean. Det vill säga

$$A = |\det(\,\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 - \lambda\mathbf{u}_1\,)|$$

Men den andra kolonnen är här $\mathbf{u}_2$ minus ett reellt tal gånger den första kolonnen. Att addera eller subtrahera en kolonn med en faktor multiplicerat med den andra kolonnen ändrar inte determinanten. Därför får vi

$$|\det(\,\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2\,)| \;=\; |\det(\,\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 - \lambda\mathbf{u}_1\,)| \;=\; A$$

så arean är alltså beloppet av determinanten vars kolonner är vektorerna som spänner upp parallellogrammen, även om vektorerna inte är ortogonala mot varandra. Ett mycket intressant och viktigt resultat. Det framgår också att det inte spelar någon roll vilken av vektorerna vi projicerar ortogonalt mot den andra, eftersom det bara påverkar vilken av kolonnerna man ska förändra med hjälp av talet λ och den andra kolonnen. (Emellertid får vi olika λ beroende på vilken vektor vi börjar med.)

Det tredje sättet att visa hur man får arean av en rektangel samt det sista om hur man behandlar arean av en parallellogram är som synes betydligt krångligare än det första sättet. Emellertid kommer vi att ha nytta av detta förfarande vid senare tillfälle, då dessa metoder är enklare att generalisera.

4 Volym i rummet

Motsvarande gäller för volymberäkning i rummet. Tre vektorer $\mathbf{u}_i = (x_i, y_i, z_i)$ för $i = 1, 2, 3$ spänner upp en parallellepiped. Även här gäller som bekant att om de tre vektorerna är vinkelräta mot varandra, får vi volymen av rätblocket de spänner upp genom att multiplicera deras längder. Alltså

$$V(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = |\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2| \cdot |\mathbf{u}_3|$$

Här går det att visa, på samma sätt som för area i planet, att man i fallet med parvis ortogonala vektorer även kan få volymen genom att beräkna determinanten som bildas av vektorerna. Gången är alltså densamma som ovan. Om vi har tre stycken parvis ortogonala och dessutom normerade vektorer $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ kommer matrisen

$$B = (\,\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3\,)$$

att vara ortogonal. Som vanligt är $\mathbf{u}_i$ här kolonnmatriser med vektorns koordinater som element. Att B är ortogonal innebär då enligt tidigare resonemang att $|\det(B)| = 1$, vilket visar att volymen i detta fall även kan fås genom determinanten. Skulle vektorerna ej vara normerade gör man också precis som i planet och bryter ut en faktor motsvarande vektorns längd från den kolonnen. Därmed är det klart att för parvis ortogonala vektorer gäller

$$V(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \;=\; |\det(\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3)| \;=\; \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \right|$$

Detta hade också kunnat visas genom att gå tillbaka till uttrycket för längden av respektive vektor, vilket vi gjorde på sidan 6 då vi beräknade arean i planet. Det orsakar emellertid väsentligt mycket mer arbete i rummet. De fyra (2^2) termer man fick i $\mathbf{R}^2$ blir till 3^3 stycken, det vill säga 27 termer i $\mathbf{R}^3$. Vi avstår därför från att visa detta.

Vi släpper nu kravet på att de tre vektorerna ska vara parvis ortogonala. Har vi tre stycken vektorer $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$, som är linjärt oberoende, spänner dessa upp en parallellepiped. Är vektorerna inte parvis ortogonala får vi volymen av denna genom att först beräkna arean av basytan och sedan multiplicera denna med höjden mot den ytan. Detta förfarande påminner om det som beskrivits ovan.

Vi inleder nu med att sätta $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$. Man konstruerar därefter en vektor $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{w}_1$, där $\mathbf{w}_1$ är projektionen av $\mathbf{u}_2$ på $\mathbf{v}_1$. Därmed kommer $\mathbf{v}_2$ att vara ortogonal mot $\mathbf{v}_1$ samt att ligga i samma plan som $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Eftersom $\mathbf{w}_1 // \mathbf{v}_1$ kan vi alltså skriva $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \lambda \mathbf{v}_1$. Nästa steg är att utifrån $\mathbf{u}_3$ konstruera en vektor $\mathbf{v}_3$ ortogonal mot nyss beskrivna plan. Detta görs lämpligen genom att subtrahera $\mathbf{u}_3$ först med dess projektion på $\mathbf{v}_1$ och därefter med dess projektion på $\mathbf{v}_2$. Vi kan därmed enligt samma resonemang som tidigare skriva $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \lambda_1 \mathbf{v}_1 - \lambda_2 \mathbf{v}_2$, för två tal λ_1 och λ_2. Nu gäller att $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ är parvis ortogonala och vi får därmed parallellepipedens volym genom att ta produkten av deras längder.

För vi åter samma resonemang med determinanter, vet vi att

$$V(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \;=\; V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \;=\; |\det(\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3)|$$

Men kolonnmatriserna $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ är ju bara kolonnmatriserna $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ subtraherat med linjärkombinationer av de övriga kolonnerna. Detta påverkar som bekant inte determinantens värde, så

$$|\det(\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3)| = |\det(\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3)|$$

Därmed kan vi dra slutsatsen att

$$V(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = |\det(\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3)|$$

det vill säga volymen av parallellepipeden är lika med beloppet av determinanten vars kolonner är $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$, även om dessa inte är ortogonala mot varandra.

Av ovanstående resonemang framgår också att det inte spelar någon roll vilken yta man väljer som basyta. Vi har ju tre val till detta och det är inte helt självklart att man får samma belopp på volymen oavsett vilken yta man börjar med. Här framgår detta genom att skillnaden visar sig i determinantens kolonner, på det sätt att beroende på var man väljer att börja kommer olika kolonner att behålla sitt ursprungliga utseende och de övriga att ändras med hjälp av subtraktion av andra kolonner. Eftersom detta ändå lämnar determinanten oförändrad, spelar det alltså ingen roll vilken kolonn som behåller sitt ursprungliga utseende och i vilken ordning man ändrar de övriga kolonnerna. Detta motsvarar i praktiken vilken yta man väljer som basyta.

5 Volymberäkning i $\mathbf{R}^n$

Om vi nu utvidgar till $\mathbf{R}^n$ där $n > 3$, hamnar vi inför ett liknande problem som när vi talade om avstånd. Volym existerar inte i geometrisk mening, utan måste definieras rent algebraiskt. Även här är det nära till hands att utveckla volymbegreppet från $\mathbf{R}^3$ och sätta

$$V(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = |\det(\, \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{u}_n \,)|$$

där $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ är vektorer som spänner upp en parallellepiped i $\mathbf{R}^n$ och determinanten består av motsvarande kolonnmatriser. Varje vektor (kolonnmatris) har koordinater (element) enligt $\mathbf{u}_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})$ för $i = 1, 2, \ldots, n$.

Vad som inte heller kan anses som självklart är vad som menas med att n stycken vektorer spänner upp en parallellepiped i $\mathbf{R}^n$. I $\mathbf{R}^3$ är detta mer eller mindre givet, eftersom en parallellepiped är en kropp med en viss form. I $\mathbf{R}^n$, för $n > 3$ existerar ju ingen sådan kropp i geometrisk mening. Därför är det på sin plats att precisera vad som menas.

Definition 2 (parallellepiped och dess volym). *Om vi i $\mathbf{R}^n$ (för $n > 3$) har n stycken linjärt oberoende ortsvektorer (det vill säga de utgår från origo) kallade $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, säger vi att*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{u}_i \; ; \; 0 \leq \alpha_i \leq 1 \right\}$$

är parallellepipeden som spänns upp av vektorerna $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$.
Vi definierar också parallellepipedens volym som

$$V(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n) = |\det(\, \boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \ldots \quad \boldsymbol{u}_n \,)|$$

Summan i ovanstående definition ger en punkt i parallellepipeden, eftersom den består av tal mellan 0 och 1 multiplicerat med respektive vektor. Parallellepipeden är alltså mängden av samtliga sådana summor, det vill säga mängden av samtliga punkter man erhåller inom varje ortsvektors räckvidd.

Ovanstående gäller i ett ortonormerat system. Där definierar vi som vanligt skalärprodukten mellan två vektorer som

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = x_1^{(i)} x_1^{(j)} + x_2^{(i)} x_2^{(j)} + \cdots + x_n^{(i)} x_n^{(j)}$$

Två vektorer är ortogonala mot varandra om och endast om deras skalärprodukt är 0.

Vi ska nu se att den ovanstående definitionen av volym i $\mathbf{R}^n$ ger många egenskaper som överensstämmer med volym i $\mathbf{R}^3$ och area i $\mathbf{R}^2$. Vi koncentrerar oss på jämförelsen med $\mathbf{R}^3$, eftersom detta kommer att omfatta även det som kan inträffa i $\mathbf{R}^2$. Det mest elementära fallet är om två vektorer är parallella. I rummet innebär detta att basarean blir 0 och följdaktligen blir även volymen av den urartade parallellepipeden 0. I $\mathbf{R}^n$ innebär det att två av vektorerna eller kolonnvektorerna är linjärt beroende. En känd sats säger då att den tillhörande determinanten och därmed volymen är 0.

Nästa intressanta fall är då samtliga vektorer är parvis ortogonala. I rummet innebär detta att kroppen blir ett rätblock och att man kan få volymen genom att multiplicera längden av de tre vektorerna som spänner upp det. Fungerar motsvarande i $\mathbf{R}^n$? Det enklaste fallet är om vi har n stycken normerade vektorer, det vill säga vektorer med längden 1. Matrisen A som bildas av dessa vektorer blir då en ortogonalmatris. Det innebär att $A^{-1} = A^*$, med andra ord att den inverterade matrisen till A är identisk med den transponerade matrisen. Eftersom det gäller att

$$\det(A^*) = \det(A) \qquad \text{och} \qquad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

innebär det att vi får

$$\det(A^*)\det(A) \;=\; \det(A^{-1})\det(A) \;=\; 1$$

Eftersom $\det(A^*) = \det(A)$ måste det betyda att $|\det(A)| = 1$ vilket innebär att volymen av parallellepipeden, som de ortogonala vektorerna av längden 1 spänner upp, är 1.

Om längden av någon vektor är något annat tal än 1, kan vi bryta ut detta tal från denna kolonn i determinanten. Denna faktor ska sedan multipliceras med den återstående determinanten för att få den ursprungliga. Detta innebär att om vi har n stycken ortogonala vektorer $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ gäller att om $|\mathbf{u}_i| \neq 1$ kan vi göra om determinanten enligt följande:

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_i & \cdots & \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \;=\; |\mathbf{u}_i| \det\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{w}_i & \cdots & \mathbf{u}_n \end{pmatrix}$$

där $\mathbf{w}_i = \mathbf{u}_i / |\mathbf{u}_i|$ och därmed gäller att $|\mathbf{w}_i| = 1$.

Gör vi på samma sätt med samtliga vektorer får vi då:

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \;=\; |\mathbf{u}_1| \cdots |\mathbf{u}_n| \det\begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 & \cdots & \mathbf{w}_n \end{pmatrix}$$

Skulle längden redan vara 1 för någon vektor innebär detta naturligtvis inget problem, eftersom vi då bara bryter ut faktorn 1. Sätt nu

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 & \cdots & \mathbf{w}_n \end{pmatrix}$$

Detta är en matris med samma egenskaper som tidigare nämnts, nämligen en ortogonal matris. Vi kan då använda samma resonemang som tidigare och konstatera att volymen blir den förväntade, nämligen

$$|\mathbf{u}_1| \cdots |\mathbf{u}_n| \cdot |\det(B)| \;=\; |\mathbf{u}_1| \cdots |\mathbf{u}_n| \cdot 1 \;=\; |\mathbf{u}_1| \cdots |\mathbf{u}_n|$$

vilket alltså är produkten av längden av vektorerna.

6 Ej ortogonala vektorer i $\mathbf{R}^n$ för $n > 3$

Vi påminner först om att volymen av parallellepipeden som spänns upp av n vektorer definieras som determinanten med dessa vektorer som kolonner. Vi har visat att denna definition är lämplig om vektorerna är parvis ortogonala. Målsättningen är nu att visa att denna definition är lämplig även om ortogonalitet mellan vektorerna inte råder. För att göra detta gör vi en ny definition.

Definition 3 (parallellogram). *Om vi i $\mathbf{R}^n$ för $n > 3$ har k stycken linjärt oberoende ortsvektorer $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ där $1 \leq k < n$ säger vi att*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{u}_i \;;\; 0 \leq \alpha_i \leq 1 \right\}$$

är parallellogrammen som spänns upp av vektorerna $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$.

Denna definition påminner mycket om den för parallellepiped och de är speciellt anpassade för våra behov. Nedan kommer några mer allmänt kända definitioner.

Definition 4 (linjärt hölje). *Om vi i $\mathbf{R}^n$ för $n > 3$ har k stycken vektorer $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ där $1 \leq k < n$ säger vi att*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{u}_i \;;\; \alpha_i \in \mathbf{R} \right\}$$

är det linjära höljet som spänns upp av vektorerna. Vi betecknar detta med

$$[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k]$$

Anmärkning. Vi har här inte ställt något krav på att vektorerna ska vara linjärt oberoende. Om två eller flera av vektorerna skulle vara linjärt beroende kan man emellertid erhålla samma linjära hölje av ett färre antal vektorer.

Då en parallellepiped i $\mathbf{R}^n$ spänns upp av n stycken vektorer, som inte nödvändigtvis är parvis ortogonala, vill man förändra utseendet på parallellepipeden så att den består av ortogonala vektorer fast ändå bibehåller samma volym. För att göra detta säger vi att till vektorföljden $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ hör följden av de successiva höjderna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ bestående av parvis ortogonala vektorer. Hur denna följd konstrueras återkommer vi strax till.

Sats 1. *Givet ett delrum L av $\mathbf{R}^n$, så finns för varje vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n$ en entydigt bestämd vektor $\boldsymbol{v} \in L$ sådan att $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ är ortogonal mot alla vektorer i L, nämligen vektorn*

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}_1}{|\boldsymbol{u}_1|^2} \cdot \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}_k}{|\boldsymbol{u}_k|^2} \cdot \boldsymbol{u}_k$$

där $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ är en godtycklig bas i L av parvis ortogonala vektorer.

Bevis. Om L spänns upp av k stycken parvis ortogonala (och därmed också linjärt oberoende) vektorer så är $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ ortogonal mot varje vektor $\mathbf{u}_j$ för $1 \leq j \leq k$ ty

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}_j \\
= \; & \left(\mathbf{u} - \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|^2} \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_j}{|\mathbf{u}_j|^2} \cdot \mathbf{u}_j + \cdots + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_k}{|\mathbf{u}_k|^2} \cdot \mathbf{u}_k\right)\right) \cdot \mathbf{u}_j \\
= \; & \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_j - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|^2} \cdot \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_j - \cdots - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_j}{|\mathbf{u}_j|^2} \cdot \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_j - \cdots - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_k}{|\mathbf{u}_k|^2} \cdot \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_j \\
= \; & \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_j - 0 - \cdots - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_j}{|\mathbf{u}_j|^2} \cdot |\mathbf{u}_j|^2 - \cdots - 0 \\
= \; & \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_j - \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_j \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

då $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ för $i \neq j$ när $1 \leq i \leq k$ och $1 \leq j \leq k$, eftersom $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ är parvis ortogonala. Därav följer också att $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ är ortogonal mot allt i L.

Vektorn $\mathbf{v}$ är entydigt bestämd, eftersom om vi har en annan vektor $\mathbf{v}' \in L$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v}'$ är ortogonal mot allt i L, så har vi

$$(\mathbf{u} - \mathbf{v}') \cdot \mathbf{u}_j \;=\; (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}_j \;=\; 0 \qquad \text{för } 1 \leq j \leq k$$

så

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \cdot \mathbf{u}_j = 0 \qquad \text{för alla } j$$

Eftersom $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ ligger i L innebär detta att den inte kan vara ortogonal mot alla $\mathbf{u}_j$, om inte $\mathbf{v} - \mathbf{v}' = 0$. Därmed har vi visat att $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$. $\square$

Definition 5 (projektion på delrum). *Den entydigt bestämda vektorn, som nyss beskrivits, kallas projektionen av vektorn* $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n$ *på delrummet* L*. Denna vektor benämns* $\boldsymbol{u}_L$*.*

Definition 6 (följden av successiva höjder). *Till vektorföljden* $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ *hör följden av de successiva höjderna* $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$*. Dessa konstrueras genom att först sätta* $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1$ *och sedan sätta*

$$\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{v}_{L_{j-1}} \qquad \text{för } 1 < j \leq n$$

där $\boldsymbol{v}_{L_{j-1}}$ *är projektionen av* $\boldsymbol{u}$ *på det* $(j-1)$*-dimensionella delrummet* L_{j-1}*.*

Man kan säga att $\mathbf{v}_j$ är en slags höjd mot parallellogrammen som spänns upp av $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}$, därav namnet successiva höjder. Den sista höjden som konstrueras är

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{u}_n - \mathbf{v}_{L_{n-1}}$$

och då har man erhållit n stycken ortogonala vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Varje vektor $\mathbf{v}_j$ har skapats endast genom subtraktion mellan $\mathbf{u}_j$ och $\mathbf{v}_{L_{j-1}}$. Den sistnämnda vektorn kan härledas till att skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{j-1}$. Därför kan varje vektor $\mathbf{v}_j$ skrivas som $\mathbf{u}_j$ subtraherat med vektorerna $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{j-1}$ multiplicerade med reella tal. Tänker vi oss nu $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ och $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ som kolonnvektorer i två determinanter, gäller enligt de vanliga räknereglerna därmed att

$$|\det(\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n)| \;=\; |\det(\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_n)|$$

Eftersom $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ är parvis ortogonala, vet vi sedan tidigare att

$$|\det(\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n)| \;=\; |\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2| \cdots |\mathbf{v}_n|$$

Nyss nämnda samband ger därmed

$$|\det(\mathbf{u}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_n)| \;=\; |\mathbf{v}_1| \cdots |\mathbf{v}_n| \;=\; V(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$$

så egenskapen att man får volymen genom att successivt konstruera vektorer ortogonalt mot varandra och sedan multiplicera deras längder med varandra gäller även om $n > 3$.

7 Två vektorer i $\mathbf{R}^3$

Man kan säga att två vektorer i $\mathbf{R}^3$ spänner upp en parallellogram i rummet. Parallellogrammen ligger i det plan som spänns upp av de två vektorerna. Det krävs naturligtvis att de två vektorerna är linjärt oberoende, det vill säga att de inte är parallella. Vi får alltså en area i rummet genom att titta på arean i det aktuella planet. För att beräkna denna area kan man gå till väga på samma sätt som tidigare. Om parallellogrammen spänns upp av två ortogonala vektorer $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$, gäller att $A = |\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2|$. Är vektorerna inte ortogonala får man, precis som förut, skapa en ny vektor $\mathbf{v}_2$ genom att ta $\mathbf{u}_2$ subtraherat med dess projektion på $\mathbf{u}_1$. För detta gäller

$$\mathbf{v}_2 \;=\; \mathbf{u}_2 - \lambda\mathbf{u}_1 \;=\; \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_1|^2} \cdot \mathbf{u}_1$$

enligt ett känt samband i den linjära algebran. Nu gäller $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{v}_2$ så

$$A = |\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{v}_2|$$

För att beräkna $|\mathbf{v}_2|$ kan vi använda oss av Pythagoras sats. Vi får då

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_2|^2 \;&=\; |\mathbf{u}_2|^2 - \left|\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_1|^2} \cdot \mathbf{u}_1\right|^2 \\ &=\; |\mathbf{u}_2|^2 - \frac{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)^2}{|\mathbf{u}_1|^4} \cdot |\mathbf{u}_1|^2 \\ &=\; |\mathbf{u}_2|^2 - \frac{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)^2}{|\mathbf{u}_1|^2} \end{aligned}$$

Detta ger i sin tur

$$A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \;=\; A(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) \;=\; |\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{v}_2| \;=\; |\mathbf{u}_1| \cdot \sqrt{|\mathbf{u}_2|^2 - \frac{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)^2}{|\mathbf{u}_1|^2}}$$

eller

$$A^2 \;=\; |\mathbf{u}_1|^2 \cdot \left(|\mathbf{u}_2|^2 - \frac{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)^2}{|\mathbf{u}_1|^2}\right) \;=\; |\mathbf{u}_1|^2 \cdot |\mathbf{u}_2|^2 - (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)^2$$

Det sista kan skrivas som determinanten

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 \end{vmatrix}$$

De fyra elementen i matrisen, som bidar determinanten, är vanliga skalärprodukter. Till exempel har vi

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Om vi nu skriver $\mathbf{u}_i$ som en kolonnmatris, det vill säga

$$\mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

går matrisen i den ovanstående determinanten att skriva genom en matrisprodukt

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* \end{pmatrix} (\, \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \,) \;=\; (\, \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \,)^* \cdot (\, \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \,) \;=\; U^* \cdot U$$

där $U = (\, \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \,)$. Determinanten av detta, det vill säga $\det(U^* \cdot U)$, kallas för Gramdeterminanten.

8 Areaberäkning med hjälp av vektorprodukten

Definition 7 (vektorprodukt). *För två vektorer* $\boldsymbol{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *och* $\boldsymbol{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ *i* $\mathbf{R}^3$ *definierar vi som vanligt vektorprodukten mellan dem som*

$$\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Vektorprodukten av två vektorer är alltså en ny vektor med koordinater enligt ovanstående. Om vi beräknar längden av denna vektor kommer intressanta saker att uppdagas.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2|^2 &= (y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (z_1x_2 - z_2x_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\
&= (y_1z_2)^2 - 2y_1y_2z_1z_2 + (y_2z_1)^2 \\
&\quad + (z_1x_2)^2 - 2z_1z_2x_1xz_2 + (z_2x_1)^2 \\
&\quad + (x_1y_2)^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + (x_2y_1)^2
\end{aligned}$$

Vi jämför detta med motsvarande Gramdeterminant

$$\begin{aligned}
\det(U^* \cdot U) &= \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 \end{vmatrix} \\
&= ((x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2)((x_2)^2 + (y_2)^2 + (z_2)^2) \\
&\quad - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \\
&= (x_1x_2)^2 + (x_1y_2)^2 + (x_1z_2)^2 \\
&\quad + (y_1x_2)^2 + (y_1y_2)^2 + (y_1z_2)^2 \\
&\quad + (z_1x_2)^2 + (z_1y_2)^2 + (z_1z_2)^2 \\
&\quad - (x_1x_2)^2 - (y_1y_2)^2 - (z_1z_2)^2 \\
&\quad - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_2z_1z_2 - 2y_1y_2z_1z_2
\end{aligned}$$

Förenklas det sista och jämförs med föregående uttryck, ser man sambandet

$$|\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2|^2 \;=\; \det(U^* \cdot U) \;=\; A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)^2$$

det vill säga

$$|\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2| = A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$$

så beloppet av vektorprodukten mellan två vektorer är alltså identiskt med arean av parallellogrammen, som vektorerna spänner upp.

Ett annat sätt att definiera vektorprodukt är att vektorprodukten av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ är en ny vektor, med en längd lika stor som arean av parallellogrammen de två första vektorerna spänner upp. Detta stämmer överens med det nyligen visade resultatet. Den nya vektorn är för övrigt ortogonal mot de båda första och riktad så att orienteringen av de tre vektorerna blir positiv.

Koordinaterna i vektorprodukten visar något mycket intressant. Tittar vi till exempel på den tredje koordinaten, ser vi att den är $x_1y_2 - x_2y_1$, men absolutbeloppet av detta är ju detsamma som arean av en parallellogram i $\mathbf{R}^2$ som spänns upp av två vektorer $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ och $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$. I vårt fall i rummet kan detta jämföras med att $z_1 = z_2 = 0$ i $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Absolutbeloppet av den tredje koordinaten är alltså lika med arean av parallellogrammens projektion i xy-planet, ty detta är ju vad som erhålls om vi sätter z-koordinaterna till noll. Likaledes blir beloppet av vektorproduktens första koordinat lika med arean av parallellogrammens projektion i yz-planet och den andra koordinaten får man genom att projicera i xz-planet.

Eftersom arean av den ursprungliga parallellogrammen är lika med längden av vektorprodukten får vi detta samband:

$$\begin{aligned}
(A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2))^2 &= |\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2|^2 \\
&= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 \\
&= (A_{yz})^2 + (A_{xz})^2 + (A_{xy})^2
\end{aligned}$$

där till exempel A_{xy} betyder arean av parallellogrammens projektion i xy-planet. Detta är mycket intressant, eftersom det visar att kvadraten på parallellogrammens area är lika med summan av kvadraterna på areorna av parallellogrammens projektioner i de tre planen som spänns upp av två av koordinataxlarna. Det handlar om ett slags utvidgning av Pythagoras sats. Då man beräknar längden av en vektor gäller ju sambandet att längden i kvadrat är lika med summan av kvadraterna på vektorns projektioner på koordinataxlarna. Här har vi alltså motsvarande sats då två vektorer spänner upp en parallellogram. Då får man titta på projektionerna i xy-, xz- och yz-planen istället.

9 Vinkeln mellan två vektorer

Ett annat sätt att beräkna arean av en parallellogram i rummet är att titta på vinkeln mellan vektorerna. Om vinkeln mellan de två vektorerna är α innebär detta

$$A = |\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2| \cdot \sin\alpha$$

eftersom $|\mathbf{u}_2| \cdot \sin\alpha$ är projektionen av $\mathbf{u}_2$ ortogonalt mot $\mathbf{u}_1$ i planet som spänns upp av dessa vektorer.

För att beräkna α använder man sig av den vanliga skalärprodukten. Vi har då

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = |\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2| \cdot \cos\alpha$$

eller

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2|}$$

En förutsättning för att $\cos\alpha$ ska vara definierat för alla $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ är att absolutbeloppet av denna kvot är mindre än eller lika med 1. Detta följer emellertid av Cauchy-Schwarz olikhet, som ju säger att

$$|\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2| \leq |\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2|$$

Detta ger

$$A = |\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2| \cdot \sin\left(\arccos \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2|}\right) \tag{1}$$

Vi gör nu en omskrivning med hjälp av trigonometriska ettan, det vill säga $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, som ger att

$$\begin{aligned} \sin\left(\arccos \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2|}\right) &= \sqrt{1-\left(\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2|}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(|\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2|)^2}{(|\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2|)^2} - \frac{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)^2}{(|\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2|)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(|\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2|)^2 - (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)^2}}{|\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2|} \end{aligned}$$

Sätts detta in i (1) får vi

$$A = |\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2| \frac{\sqrt{(|\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2|)^2 - (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)^2}}{|\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2|} = \sqrt{(|\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2|)^2 - (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)^2}$$

Med andra ord har vi

$$A^2 = (|\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2|)^2 - (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)^2$$

vilket känns igen från tidigare.

10 Arean av en k-dimensionell parallellogram

Vi är nu framme vid det sista fallet som kan uppkomma. Det är att k stycken vektorer spänner upp en parallellogram i $\mathbf{R}^n$ för $n > 3$. Enligt Definition 3 gäller att $1 \leq k < n$, vilket gör att fallet $k = n$ ej kan uppkomma. Detta har ju också behandlats tidigare, då det handlar om volymen av en parallellepiped. Fallet $k = 1$ behandlades redan i första avsnittet, det handlar ju bara om längden av en vektor i $\mathbf{R}^n$. Därför kommer detta avsnitt att behandla parallellogrammer som spänns upp av 2 till $n-1$ vektorer.

Definition 8 (arean av en parallellogram). *Om k stycken vektorer $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ i $\mathbf{R}^n$, där $n > 3$ och $1 < k < n$, spänner upp en parallellogram, definierar vi arean av denna parallellogram som*

$$(A(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k))^2 \;=\; \det\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1^* \\ \boldsymbol{u}_2^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_k^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \ldots & \boldsymbol{u}_k \end{pmatrix}\right) \tag{2}$$

där som förut $\boldsymbol{u}_i$ är en kolonnmatris med den tillhörande vektorns koordinater som element, det vill säga

$$\boldsymbol{u}_i = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ \vdots \\ x_n^{(i)} \end{pmatrix}$$

Anmärkning. Högra ledet i (2) är ett exempel på Gramdeterminanten, som beskrevs på sidan 15.

Det innebär alltså att parallellogrammens area i kvadrat är lika med Gramdeterminanten. För att arean ska vara väldefinierad, krävs att Gramdeterminanten är icke-negativ. Detta visar vi med hjälp av vissa egenskaper för bilinjära och kvadratiska former. Först repeterar vi definitionerna av dessa.

Definition 9 (bilinjär form). *En bilinjär form är en funktion*

$$B : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

som är linjär i både första och andra argumentet.

Det vill säga om $B(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ är en bilinjär form innebär det att

$$B(\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}, \mathbf{u}_2) = B(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + B(\mathbf{v}, \mathbf{u}_2) \qquad \text{och} \qquad B(\alpha\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \alpha B(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$$

samt motsvarande för andra argumentet. Till en bilinjär form hör en matris B, sådan att den bilinjära formen $B(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ kan uttryckas $\mathbf{u}_1^* B \mathbf{u}_2$ i en viss bas. Matrisen ser olika ut för olika baser.

Definition 10 (kvadratisk form). *En kvadratisk form är en funktion*

$$B : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

som erhålls om man i den bilinjära formen $B(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ byter ut $\boldsymbol{u}_2$ mot $\boldsymbol{u}_1$. En kvadratisk form har alltså utseendet $B(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1)$.

Ett exempel på en bilinjär form är den vanliga skalärprodukten. Låt $B(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2$. Då kommer $k \times k$-matrisen B med elementen $b_{ij} = B(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j$ att vara en matris för den bilinjära formen skalärprodukt i basen $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$

i det linjära höljet $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k]$. Eftersom B är en symmetrisk matris finns det en känd sats som säger att den bilinjära formen kan uttryckas med en kanonisk bas (se Shilovs klassiska lärobok [5], sidan 126). Med en kanonisk bas menas en bas $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ där $B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ för $i \neq j$.

Den tillhörande kvadratiska formen antar positiva värden för alla vektorer utom nollvektorn, då den antar värdet 0. Detta inses lätt genom att skalärprodukten av en vektor med sig själv alltid är positiv, med undantag för nollvektorn då skalärprodukten är noll. Om en bilinjär form är symmetrisk och den tillhörande kvadratiska formen antar positiva värden för alla vektorer utom nollvektorn, är den bilinjära formen positivt definit. Sats 27 i [5] (sidan 131) säger att ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att en symmetrisk matris ska definiera en positivt definit bilinjär form är att de determinanter man får via elementen i de m första raderna och kolonnerna alltid är positiva för $m \geq 1$. Eftersom det var ett nödvändigt villkor att de nyss nämnda determinanterna är positiva för att den tillhörande bilinjära formen ska vara positivt definit, innebär det alltså att om den bilinjära formen är positivt definit så är även dessa determinanter positiva.

Kopplar vi nu detta till Gramdeterminanten

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k \end{vmatrix}$$

ser vi att detta är ett fall där ovanstående stämmer in. Det är en symmetrisk matris, eftersom $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_i$ och vi har $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i \geq 0$, vilket innebär att den är positivt definit. Därmed kan slutsatsen dras att Gramdeterminanten alltid är positiv.

Vi ska nu se att definitionen av area med hjälp av Gramdeterminanten stämmer överens med en del egenskaper som visats i tidigare avsnitt. Vi låter alltså vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ spänna upp en parallellogram i $\mathbf{R}^n$ för $k < n$. Med tidigare tolkningar av $\mathbf{u}_i$ som en kolonnmatris med den tillhörande vektorns koordinater som element, får vi då enligt Definition 8

$$(A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k))^2 \; = \; \det \left(\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{u}_k^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_k \end{pmatrix} \right)$$

Lemma 1. *Om vi har k stycken parvis ortogonala vektorer $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k$ i $\mathbf{R}^n$, spänner dessa upp en parallellogram vars area är lika med produkten av vektorernas längder. Det vill säga*

$$A(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k) = |\boldsymbol{u}_1| \cdot |\boldsymbol{u}_2| \cdots |\boldsymbol{u}_k|$$

Bevis. Eftersom $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ är parvis ortogonala, blir skalärprodukten $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ för $i \neq j$. Det ger följande beräkning

$$\begin{aligned}
(A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k))^2 &= \det\left(\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{u}_k^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_k \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k \end{vmatrix} \\
&= |\mathbf{u}_1|^2 |\mathbf{u}_2|^2 \cdots |\mathbf{u}_k|^2 \\
&= (|\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2| \cdots |\mathbf{u}_k|)^2
\end{aligned}$$

vilket visar att arean i kvadrat är lika med kvadraten på produkten av sidornas längder. Eftersom både arean och längderna är positiva, är beviset klart. $\square$

Att parallellogrammens area är lika med produkten av vektorernas längder då vektorerna är ortogonala stämmer väl överens med tidigare iakttagelser.

Sats 2. *Låt vektorerna $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ spänna upp en parallellogram i $\mathbf{R}^n$. Om vi konstruerar successiva höjder $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ till dessa vektorer enligt Definition 6, gäller att arean av parallellogrammen är lika med produkten av höjdernas längder. Det vill säga*

$$A(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k) = |\boldsymbol{v}_1| \cdot |\boldsymbol{v}_2| \cdots |\boldsymbol{v}_k|$$

Vi ska titta på två olika bevis till denna sats.

Bevis 1. Om vektorerna är linjärt oberoende, men inte nödvändigtvis parvis ortogonala, kan vi precis som förut konstruera successiva höjder. Vi gör detta i en matris i taget av de två matriser som bildar Gramdeterminanten. I den vänstra av de två matriserna bildar vektorerna radmatriser. Vi inleder med att sätta $\mathbf{v}_1^* = \mathbf{u}_1^*$. Därefter konstruerar vi successivt höjderna $\mathbf{v}_j^*$ ortogonalt mot tidigare höjder enligt Definition 6 på sidan 14, då man sätter $\mathbf{v}_j^* = \mathbf{u}_j^* - \mathbf{v}_{L_{j-1}}^*$. Varje sådan förändring påverkar endast en rad i matrisprodukten, eftersom förändring av rader i den vänstra matrisen i en multiplikation påverkar motsvarande rader i produkten. Förändringen består av subtraktion med övriga rader multiplicerade med reella tal och påverkar därför inte determinanten.

Exakt samma procedur görs med den högra matrisen, där alltså kolonnerna successivt görs om. Dessa kolonner kommer då också att vara identiska med raderna i den vänstra matrisen. På samma sätt gäller att förändring av kolonnerna i den högra matrisen i en multiplikation endast förändrar motsvarande kolonner i produkten. Därmed förändras inte determinanten av denna procedur heller.

Vi har nu konstruerat en ny parallellogram med samma area som den ursprungliga. Den nya parallellogrammen spänns upp av de ortogonala vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Lemma 1 ger nu att arean är lika med produkten av de successiva höjdernas längder och beviset är klart. □

Anmärkning. Om två av vektorerna, säg $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$, är linjärt beroende kommer rad 1 och 2 (samt kolonn 1 och 2) i Gramdeterminanten att skilja sig åt endast genom att rad 1 är ett reellt tal multiplicerat med rad 2. Determinanten och därmed arean av (den urartade) parallellogrammen blir då följdaktligen noll. När vi konstruerar successiva höjder och har $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ linjärt beroende, kommer vi att få $\mathbf{v}_2 = 0$. Därmed blir även produkten av höjdernas längder noll.

Bevis 2. Vi har de två matriserna

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k \end{pmatrix}$$

och

$$Y = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k \end{pmatrix}$$

där $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ i X är vektorer som inte behöver vara parvis ortogonala, medan $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ i Y är k stycken parvis ortogonala vektorer.

Som vi tidigare sett är X matrisen för den bilinjära formen skalärprodukt uttryckt i basen $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ i det linjära höljet av $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k]$. Matrisen Y är motsvarande för $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. De successiva höjderna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ kan konstrueras enligt följande, vilket berörs redan på sidan 9 även om begereppet successiva höjder inte införts då:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \lambda_1^{(2)} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \lambda_2^{(3)} \mathbf{u}_2 - \lambda_1^{(3)} \mathbf{u}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_k &= \mathbf{u}_k - \lambda_{k-1}^{(k)} \mathbf{u}_{k-1} - \cdots - \lambda_1^{(k)} \mathbf{u}_1 \end{aligned}$$

Detta gör att transformationsmatrisen mellan de båda baserna får utseendet

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_1^{(2)} & -\lambda_1^{(3)} & \cdots & -\lambda_1^{(k)} \\ 0 & 1 & -\lambda_2^{(3)} & \cdots & -\lambda_2^{(k)} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -\lambda_3^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

som ger $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ uttryckt i basen $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$. Därmed har vi också sambandet $C^*XC = Y$ ([5], sidan 115), vilket medför $\det(C^*XC) = \det(Y)$. Men C är en övre triangulär matris med ettor i huvuddiagonalen, så $\det(C) = 1$. Vi har ju dessutom alltid $\det(C^*) = \det(C)$, vilket ger $\det(X) = \det(Y)$. Eftersom $\det(X)$ enligt Definition 8 är arean av parallellogrammen i kvadrat och $\det(Y)$ är lika med produkten av de successiva höjdernas längder i kvadrat är beviset färdigt. □

De olika koefficienterna $\lambda_i^{(j)}$ är ganska besvärliga att räkna ut. Det är därför omständligt att räkna ut de successiva höjderna $\mathbf{v}_i$ med hjälp av dessa. Här finns emellertid ett sätt att gå runt problemet. Vi börjar med att införa beteckningen δ_i för determinanten man får av de i första raderna och kolonnerna i X. Betraktar vi nu matriserna X och Y från föregående stycke, är deras element i övre vänstra hörnet identiska. Det är längden i kvadrat av den första vektorn, vilket alltså ger $|\mathbf{v}_1|^2 = \delta_1$. Tar vi elementen i de två första raderna och kolonnerna av X, är determinanten av detta arean i kvadrat av parallellogrammen som spänns upp av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Vi har då

$$(A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2))^2 \; = \; (A(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2))^2 \; = \; \delta_2$$

Men detta ger ju också

$$|\mathbf{v}_2|^2 \; = \; \frac{(A(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2))^2}{|\mathbf{v}_1|^2} \; = \; \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

Vi kan fortsätta och resonera på samma sätt och få fram ett generellt uttryck för längden av $\mathbf{v}_i$, nämligen

$$|\mathbf{v}_i|^2 = \frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}$$

11 Pythagoras sats

Här skall vi nu komma till en generalisering av Pythagoras sats. Vi inleder med två definitioner.

Definition 11 (koordinatplan). *Om vi i $\mathbf{R}^n$ har standardbasen $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ säger vi att det k-dimensionella koordinatplanet $\Pi(a_1, \ldots, a_k)$ är det delrum av $\mathbf{R}^n$ som spänns upp av basvektorerna $\boldsymbol{e}_{a_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{a_k}$ där a_i är olika tal $1 \leq a_i \leq n$ och $a_i < a_j$ för $i < j$. Det finns $\binom{n}{k}$ sådana koordinatplan i $\mathbf{R}^n$.*

Definition 12 (projektion i koordinatplan). *För en vektor $\boldsymbol{v} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ sägs dess projektion i koordinatplanet $\Pi(a_1, \ldots, a_k)$ vara vektorn $(x_{a_1}, \ldots, x_{a_k})$, där a_i är tal enligt föregående definition.*

Det handlar alltså nu om det mest generella fallet av Pythagoras sats, det vill säga när k stycken vektorer spänner upp en parallellogram i $\mathbf{R}^n$. Denna parallellogram kan projiceras i $\binom{n}{k}$ stycken k-dimensionella koordinatplan. Projektionen blir en k-dimensionell parallellepiped i respektive koordinatplan. Med dessa fakta i tankarna är vi nu redo att formulera satsen.

Sats 3 (Pythagoras sats). *Kvadraten på arean av den ursprungliga parallellogrammen är identisk med summan av kvadraterna på respektive parallellepipeds volym.*

Projektionen i ett koordinatplan blir alltså en parallellepiped och dess volym är ju som bekant lika med determinanten man erhåller av matrisen där vektorernas koordinater bildar kolonnerna. Tittar vi på arean av den ursprungliga parallellogrammen, får vi den genom Gramdeterminanten. Vi har alltså

$$\begin{aligned}(A(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k))^2 &= \det\left(\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1^*\\ \vdots\\ \mathbf{u}_k^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_k\end{pmatrix}\right)\\ &= \det\left(\begin{pmatrix}x_1^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{(k)} & \cdots & x_n^{(k)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(k)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_n^{(1)} & \cdots & x_n^{(k)}\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

För volymen av parallellepipeden man får genom att projicera parallellogrammen i $\Pi(a_1,\ldots,a_k)$ gäller att man får kvadraten på den genom att beräkna determinanten av matrisprodukten man får då man väljer ut kolonnerna $a_1,\ldots,a_k$ i den första matrisen och motsvarande rader i andra matrisen.[2] Vi får därför

$$V^2 = \det\left(\begin{pmatrix}x_{a_1}^{(1)} & \cdots & x_{a_k}^{(1)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{a_1}^{(k)} & \cdots & x_{a_k}^{(k)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{a_1}^{(1)} & \cdots & x_{a_1}^{(k)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{a_k}^{(1)} & \cdots & x_{a_k}^{(k)}\end{pmatrix}\right)$$

Det blir alltså $\binom{n}{k}$ stycken sådana parallellepipeder och målet är att visa att summan av deras volymer i kvadrat är identisk med kvadraten på arean av parallellogrammen. Detta följer av nästa sats, som även är känd under namnet Cauchy-Binets sats. Det finns flera olika varianter av denna sats och ibland kallas den för Binet-Cauchys sats [3].

Sats 4 (Cauchy-Binet). *Låt X vara en $k \times n$-matris och Y en $n \times k$-matris där $k \leq n$. För varje delmängd $S = \{a_1,\ldots,a_k\}$ av $\{1,\ldots,n\}$ låter vi X_S vara den $k \times k$-delmatris av X som bildas av kolonnerna med kolonnindex i S och på samma sätt Y_S vara den delmatris av Y som bildas av raderna med radindex i S. Då gäller*

$$\det(XY) = \sum_S \det(X_S)\det(Y_S) \tag{3}$$

där summationen tas över alla stigande delmängder S av $\{1,\ldots,n\}$.

[2] Ett enklare sätt att beräkna volymen är att direkt beräkna determinanten för den ena av matriserna, men detta är mindre intressant för tillfället.

Anmärkningar.

1. I fallet $k = n$ är detta den vanliga produktregeln för determinanter.
2. Vårt fall är ett specialfall av Sats 4, eftersom vi alltid har $Y = X^*$. Detta leder till $Y_S = X_S^*$ och därmed $\det(X_S) = \det(Y_S)$. Enligt räknereglerna för determinanter innebär det att

$$VL = \det(XX^*) \qquad \text{och} \qquad HL = \sum_S (\det X_S)^2$$

För att beviset ska bli tydligare, repeterar vi först två kända definitioner.

Definition 13 (multilinjär funktion). *Låt α och α' vara två reella tal. En funktion $f : V_1 \times \cdots \times V_k \to W$, där V_i och W är vektorrum, är multilinjär om det för varje i gäller*

$$\begin{aligned} & f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \alpha\boldsymbol{v}_i + \alpha'\boldsymbol{v}_i', \ldots, \boldsymbol{v}_k) \\ = \;& \alpha f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_k) + \alpha' f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i', \ldots, \boldsymbol{v}_k) \end{aligned}$$

Definition 14 (alternerande funktion). *En funktion $f : V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ är alternerande, om det för varje i och j gäller*

$$f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_k) \; = \; -f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$$

Funktionsvärdet skiftar alltså tecken om två variabler byter plats. En följd av detta är att funktionsvärdet är 0 om minst två variabler i den är lika.

Bevis för Sats 4. Vi ska titta på detta i tre steg. Det första steget är att visa att (3) är multilinjär både i raderna för X och i kolonnerna för Y i både vänstra och högra ledet. Med detta menas för vänstra ledet att den är linjär för varje rad i X och varje kolonn i Y. Vi börjar med att titta på första raden i X och hålla övriga rader där samt hela Y fix. En ändring av första raden i X påverkar endast första raden i XY.

Låt därför

$$XY = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1' + \mathbf{u}_1'' \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix}$$

där $\mathbf{u}_i$ är radmatriser med k element. Då gäller enligt räknereglerna för determinanter

$$\det(XY) \; = \; \det \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1' + \mathbf{u}_1'' \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix} \; = \; \det \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1' \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1'' \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix}$$

Låt nu

$$XY = \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix}$$

där λ är ett reellt tal. Då gäller enligt räknereglerna

$$\det(XY) \;=\; \det \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix} \;=\; \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix}$$

Dessa två exempel visar att vänstra ledet är linjärt i första raden för X. Det inses lätt att motsvarande gäller för övriga rader i X, eftersom en förändring av den i:te raden i X endast påverkar motsvarande rad i XY. På samma sätt gäller också att en förändring av den i:te kolonnen i matrisen Y endast påverkar motsvarande kolonn i matrisprodukten XY. Därför gäller att XY är multilinjär i raderna för X och kolonnerna för Y.

Nu till högra ledet. En förändring av första raden i X påverkar endast $\det(X_S)$. Eftersom högra ledet är en summa av olika termer, räcker det med att visa att varje enskild term är linjär. Vi låter nu $\mathbf{u}_i^{(S)}$ vara en radmatris med k stycken element från rad i i X, där de k elementen väljs ut från de kolonner som ingår i S. Då kan vi om

$$X_S = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1'^{(S)} + \mathbf{u}_1''^{(S)} \\ \mathbf{u}_2^{(S)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_k^{(S)} \end{pmatrix} \qquad \text{respektive} \qquad X_S = \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{u}_1^{(S)} \\ \mathbf{u}_2^{(S)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_k^{(S)} \end{pmatrix}$$

använda oss av precis samma resonemang för att inse att även högra ledet är multilinjärt för raderna i X och kolonnerna i Y.

Det första steget i beviset är därmed klart, nämligen att båda leden i (3) är multilinjära i både variablerna X och Y.

Det andra steget innebär att visa att både vänstra och högra ledet är alternerande, vilket noggrannare sagt innebär att avbildningarna

$$\begin{aligned} X &\mapsto \det(XY) \\ Y &\mapsto \det(XY) \\ X &\mapsto \det(X_S)\det(Y_S) \\ Y &\mapsto \det(X_S)\det(Y_S) \end{aligned}$$

alla är alternerande. Med det menas att om två rader i X eller två kolonner i Y skiftar plats, kommer båda leden att byta tecken. För XY gäller att om rad 1 och rad 2 i X byter plats, kommer även rad 1 och 2 i XY att göra det. Enligt räknereglerna för determinanter innebär detta att $\det(XY)$ skiftar tecken. Att motsvarande gäller om två andra rader i X eller två kolonner i Y byter plats är lätt att inse. Därmed är det klart att vänstra ledet är alternerande.

För högra ledet gäller att om rad 1 och rad 2 byter plats i X, kommer även dessa rader att byta plats i X_S för varje S. Därmed byter $\det(X_S)$ tecken i samtliga fall, vilket leder till att alla termer $\det(X_S)\det(Y_S)$ byter tecken och därmed gör även hela summan det. På samma sätt inses även här att detta gäller även om två andra rader i X byter plats eller om två kolonner i Y gör det.

Det andra steget i beviset är nu klart, nämligen att både vänstra och högra ledet i uttrycket är alternerande.

Att både vänstra och högra ledet är multilinjära och alternerande innebär att vi kan visa satsen genom ett resonemang med enkla specialfall. Detta är det tredje steget i beviset. Låt Y vara en godtycklig $n \times k$-matris och

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

det vill säga X har en etta för elementen a_{ii} där $1 \leq i \leq k$ och en nolla på övriga positioner. Då kommer $XY = Y_S$ för $S = \{1, 2, \ldots, k\}$, vilket självklart ger $\det(XY) = \det(Y_S)$ för detta S. Det gäller också för detta S att X_S är enhetsmatrisen, så $\det(X_S) = 1$ och därmed $\det(X_S)\det(Y_S) = \det(Y_S)$. För övriga S gäller att $\det(X_S) = 0$. Vi har därmed visat (3) för detta specialfall.

Det inses lätt att samma sak gäller om vi justerar X för övriga delmängder S. Om vi har $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$ med $1 \leq a_i \leq n$ och $a_i < a_j$ för $i < j$, får vi samma effekt som ovan genom att på rad i i X sätta en etta i kolonn a_i och en nolla i övriga kolonner. Detta samt steg 1 och steg 2 i beviset visar satsen. $\square$

Sats 4 är nu alltså visad och som tidigare påpekades var detta det slutgiltiga steget för att bevisa den generaliserade versionen av Pythagoras sats. Hur det hänger ihop kräver en förklaring.

Först och främst gäller att om parallellogrammen spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ så utgör dessa vektorer raderna i matrisen X från Sats 4. I vårt fall gäller för vänstra ledet i (3) enligt anmärkning 2 på sidan 25 att vi har

$$\det(XY) = \det(XX^*)$$

vilket är Gramdeterminanten för matrisen X. Vänsterledet är därför (enligt Definition 8) lika med den ursprungliga parallellogrammens area i kvadrat.

Då parallellogrammen projiceras i respektive koordinatplan erhålls $\binom{n}{k}$ stycken k-dimensionella parallellepipeder. Enligt Definition 12 får man vektorerna som spänner upp parallellepipederna genom att från respektive rad i X välja ut k stycken kolonner som koordinater i respektive vektor. Detta ger k stycken vektorer i $\mathbf{R}^k$, som är precis lika med raderna i någon av matriserna X_S. Volymen av denna parallellepiped är enligt Definition 2 lika med $\det(X_S)$. Genom att låta S genomlöpa alla delmängder av $\{1,\ldots,n\}$ på det sätt som beskrivs i Sats 4, kommer man att erhålla samtliga $\binom{n}{k}$ parallellepipeder som uppstår vid projiceringen. Detta innebär att $\sum_S \big(\det(X_S)\big)^2$ är summan av kvadraterna på respektive parallellepipeds volym och enligt anmärkning 2 är det samma sak som högra ledet i (3).

Därmed gäller alltså att Pythagoras sats följer av Sats 4.

12 Yttre produkt

Ett annat sätt att visa Sats 4 är att använda sig av yttre produkt. Vi inleder detta med några fakta om yttre produkt, när vi arbetar med $\mathbf{R}^n$ som ett vektorrum över kroppen $\mathbf{R}$.

Definition 15 (yttre potens). *Beteckna $\mathbf{R}^n\times\cdots\times\mathbf{R}^n$ (k gånger) med $(\mathbf{R}^n)^k$. En n:te yttre potens av $\mathbf{R}$ är ett vektorrum $\bigwedge^k(\mathbf{R}^n)$ där vi har en multilinjär och alternerande funktion*

$$\psi:\ (\mathbf{R}^n)^k \ \to\ \bigwedge\nolimits^k(\mathbf{R}^n)$$

sådan att för varje multilinjär och alternerande funktion

$$f:\ (\mathbf{R}^n)^k \ \to\ \mathbf{R}$$

gäller att det finns en unik linjär funktion

$$g:\ \bigwedge\nolimits^k(\mathbf{R}^n) \ \to\ \mathbf{R}$$

sådan att

$$f = g\circ\psi$$

Definition 16 (yttre produkt). *Bilderna av ψ har utseendet*

$$\psi(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_k$$

där $\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_k$ kallas den yttre produkten av $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$. Dessa är generatorer i $\bigwedge^k(\mathbf{R}^n)$, vars element består av summor av yttre produkter.

Låt $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ vara standardbasen i $\mathbf{R}^n$ och säg $k\le n$. Vi kan då välja (med återläggning) k vektorer ur $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ på n^k olika sätt, för att bilda den yttre produkten $\psi(\mathbf{e}_{a_1},\ldots,\mathbf{e}_{a_k})$. Eftersom ψ är alternerande kommer emellertid flera av dessa element att vara noll eller lika så när som på tecken. Vi kan därför säga att vi väljer k vektorer ur $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ på så sätt att vi alltid har $a_i < a_j$ för $1\le i<j\le k$. Då finns det $\binom{n}{k}$ sätt att välja dessa vektorer. Låter vi ψ

verka på dessa kombinationer, erhåller vi $\binom{n}{k}$ stycken yttre produkter. Dessa utgör en bas till den yttre potensen $\bigwedge^k(\mathbf{R}^n)$, som alltså är ett $\binom{n}{k}$-dimensionellt vektorrum.

Vi är nu redo att bevisa Sats 4 med hjälp av yttre produkt. Minns att det vi ska visa är likheten

$$\det(XY) = \sum_S \det(X_S)\det(Y_S)$$

Som i Sats 4 låter vi S genomlöpa alla stigande delmängder $\{a_1, \ldots, a_k\}$ av $\{1, \ldots, n\}$. Då är de $\binom{n}{k}$ olika vektorerna $\mathbf{e}_S = \mathbf{e}_{a_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{a_k}$ en bas i $\bigwedge^k(\mathbf{R}^n)$. Låt även $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ vara radvektorerna i X där för varje $1 \le i \le k$ gäller

$$\mathbf{u}_i = (x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})$$

Lemma 2. *Med nyss givna benämningar gäller*

$$\boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_k = \sum_S (\det X_S)\boldsymbol{e}_S$$

Bevis. För att göra beviset mer lättöverskådligt, gör vi ett bevis med två vektorer i $\mathbf{R}^3$. Detta bevis kan enkelt utvidgas till att gälla för k vektorer i $\mathbf{R}^n$. Vi låter $\mathbf{u}_1 = (x_1, x_2, x_3)$ och $\mathbf{u}_2 = (y_1, y_2, y_3)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 &= (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) \wedge (y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3) \\
\\
&= x_1y_1\, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 \;+\; x_1y_2\, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \;+\; x_1y_3\, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \\
&\quad + x_2y_1\, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \;+\; x_2y_2\, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2 \;+\; x_2y_3\, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \\
&\quad + x_3y_1\, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \;+\; x_3y_2\, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 \;+\; x_3y_3\, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3 \\
\\
&= 0 \;+\; x_1y_2\, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \;+\; x_1y_3\, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \\
&\quad - x_2y_1\, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \;+\; 0 \;+\; x_2y_3\, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \\
&\quad - x_3y_1\, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \;-\; x_3y_2\, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \;+\; 0 \\
\\
&= (x_1y_2 - x_2y_1)\, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \;+\; (x_1y_3 - x_3y_1)\, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \\
&\quad + (x_2y_3 - x_3y_2)\, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \\
\\
&= \sum_S (\det X_S)\mathbf{e}_S
\end{aligned}$$

□

Vi ska nu hålla Y fix, även om den kan vara godtycklig. Däremot låter vi X variera. Betrakta funktionen $f: \ (\mathbf{R}^n)^k \to \mathbf{R}$ där

$$f(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) = \det(XY) \tag{4}$$

Denna funktion är multilinjär och alternerande, vilket visas på samma sätt som i inledningen av det första beviset på sidan 25. Eftersom f har dessa egenskaper, finns det en funktion $\psi : (\mathbf{R}^n)^k \to \bigwedge^k \mathbf{R}^n$ som f faktoriseras genom. Då existerar också en unik funktion $g : \bigwedge^k \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sådan att $f = g \circ \psi$. För denna funktion gäller:

$$g(\mathbf{e}_S) = \det(Y_S)$$

Detta visas i steg 3 på sidan 27, där ju X har $\mathbf{e}_S$ i sina rader.

Eftersom g är linjär, gäller då:

$$g\left(\sum_S \det(X_S)\mathbf{e}_S\right) = \sum_S \big(\det(X_S) \cdot g(\mathbf{e}_S)\big) = \sum_S \det(X_S)\det(Y_S) \tag{5}$$

Vi har nu

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) &= g \circ \psi(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) \\
&= g\big(\psi(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)\big) \\
&= g(\mathbf{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_k) \\
&= g\left(\sum_S \det(X_S)\mathbf{e}_S\right) && \text{[enligt Lemma 2]} \\
&= \sum_S \det(X_S)\det(Y_S) && \text{[enligt (5)]}
\end{aligned}$$

En jämförelse med (4) ger nu

$$\det(XY) = \sum_S \det(X_S)\det(Y_S)$$

vilket avslutar beviset.

13 Sammanfattning

En målsättning med texten har varit att angripa problemen på olika sätt och jämföra de svårigheter som blir aktuella. För härledningen av areaberäkning i planet visades tre olika metoder. Den mest komplicerade av dessa härledningar visade sig vara den lämpligaste då man skulle generalisera begreppet till högre dimensioner. Om man ska visa härledning av areaberäkningen, kan det därför vara lämpligt att välja metod efter vilken målsättning man har. Är areaberäkning slutmålet, väljer man förmodligen den enklaste härledningen. Vill man kunna generalisera, är det lämpligare med den tredje metoden.

Vid beviset för Sats 4 väljer vi också två olika metoder. Det första beviset är ganska långt och omständligt. Beviset som använder yttre produkt blir mer kortfattat, men det kräver en betydligt högre förkunskap. Man kan säga att vi flyttar svårigheterna från det första beviset till att man behöver förstå yttre produkt för att tillgodogöra sig det andra beviset. Även här kan man välja bevis efter målgruppen och vilken målsättning man har med beviset.

14 Lästips

Det finns ett antal publicerade artiklar, som anknyter till det som behandlats här. [4] angriper problemet på samma sätt, men gör det inte lika grundläggande. Den artikeln har tjänat som stor inspirationskälla till denna sammanställning.

En något annorlunda beskrivning görs i [1], där arean av en k-dimensionell parallellogram samt beviset för sats 4 endast berörs med hänvisningar till annan litteratur. Artikelns huvudinnehåll är att dra liknande slutsatser för Lebesguemåttet i mätbara mängder.

I [8] utgår man från en axiomatisk beskrivning av volymbegreppet i $\mathbf{R}^n$. Man ställer först vissa krav, som man vill att begreppet ska uppfylla och visar därefter att volymen av n-dimensionella parallellepipeder erhålls med hjälp av determinanter. Även här är måtteori inblandad.

Artikel [9] behandlar ett specialfall med arean av sidorna i en rätvinklig teatraeder i rummet. Tre av sidorna ligger i de vanliga koordinatplanen och summan av kvadraterna på deras areor är lika med kvadraten på arean av den fjärde sidan.

[7] är en längre artikel, som visar flera aspekter på Pythagoras sats. Den tar även upp lite historiska fakta.

Referenser

[1] D. R. Conant; W. A. Beyer: Generalized Pythagorean theorem, *Amer. Math. Monthly* **81** (1974), 262–265.

[2] S. Lang: *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1997.

[3] M. Marcus; H. Minc: *A survey of matrix theory and matrix inequalities*, Dover Publications, 1992.

[4] G. J. Porter: k-volume in $\mathbf{R}^n$ and the generalized Pythagorean theorem, *Amer. Math. Monthly* **103** (1996), no. 3, 252–256.

[5] G. E. Shilov: *An Introduction to the Theory of Linear Spaces*, Prentice-Hall, 1961.

[6] A. Tengstrand: *Lineär algebra med vektorgeometri*, Studentlitteratur, 1994.

[7] D. Veljan: The 2500-year-old Pythagorean Theorem, *Math. Mag.* **73** (2000), no. 4, 259–272.

[8] J. D. Weston: Volume in vector spaces, *Amer. Math. Monthly* **66** (1959), 575–577.

[9] A. Zirakzadeh: The generalized Pythagorean theorem in the n-dimensional Euclidean space, *Math. Student* **30** (1962), 143–146.