ISSN: 1401-5617

Beitrag zur Theorie der Fouriermultiplikatoren über endliche Gruppen

Mats Erik Andersson

Research Reports in Mathematics
Number 12, 2000

Department of Mathematics
Stockholm University

Electronic versions of this document are available at
http://www.matematik.su.se/reports/2000/12

Date of publication: August 16, 2000
1991 Mathematics Subject Classification: Primary 43A22 Secondary 43A15.

Postal address:
Department of Mathematics
Stockholm University
S-106 91 Stockholm
Sweden

Electronic addresses:
http://www.matematik.su.se
info@matematik.su.se

BEITRAG ZUR THEORIE DER FOURIERMULTIPLIKATOREN ÜBER ENDLICHE GRUPPEN

Mats Erik Andersson

In der harmonischen Analysis ist das Poissonsche Integral von großer Bedeutung. Über die Kreisgruppe läßt es sich anfänglich für integrierbare Funktionen wie folgt einführen.

$$\widehat{P_r f}(n) = r^{|n|}\,\hat{f}(n), \qquad P_r f(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\hat{f}(n)\,e^{in\theta},$$

wobei $0 \leqslant r \leqslant 1$. Eine sehr umfangreiche Literatur dafür ist vorhanden.

Es läßt sich offenbar fragen, in welchem Ausmaß endliche, zyklische Gruppen – anstelle der Kreisgruppe – eine ausführbare, ähnliche Theorie gestatten. Dabei entstehen zweierlei Arten von Abwandlung des Poissonschen Integrals. Es sei χ ein primitiver Charakter der Ordnung n über die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Der vollständige Poissonsche Integralkern ${p_r}^{(n)}$ bezüglich χ wird folgendermaßen definiert.

$${p_r}^{(2k+1)} = \sum_{j=-k}^{k} r^{|j|}\chi^j \qquad \text{bzw.}$$

$${p_r}^{(2k)} = r^k\chi^k + \sum_{j=-k+1}^{k-1} r^{|j|}\chi^j.$$

Das normalisierte Haarsche Maß auf $\mathbb{Z}_n$ wird mit $\lambda = \lambda_n$ bezeichnet. Das Poissonsche Integral selbst wird durch

$$P_r^{(n)} f = {p_r}^{(n)} * f, \quad f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$$

eingeführt. Es ist leicht einzusehen, daß für $0 \leqslant r \leqslant 1$ immer ${p_r}^{(n)} \geqslant 0$ ist. Somit gilt für alle $1 \leqslant p \leqslant \infty$

$$\|P_r^{(n)} f\|_p \leqslant \|P_r^{(n)} |f|\,\|_p \leqslant \|f\|_p.$$

Die Norm ist hier diejenige, die dem Raum $L^p(\mathbb{Z}_n, \lambda_n)$ zugeordnet ist.

Offenbar bildet ${P_r}^{(n)}$ eine Gruppe im Operatorraum $B(L^1, L^1)$ von beschränkten Operatoren auf $L^1 = L^1(\mathbb{Z}_n)$, und zwar bezüglich des komplexen Parameters r in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und bei festem n, mit Einheitselement ${P_1}^{(n)}$. Für $0 \leqslant r \leqslant 1$ sind die L^p-verbessernden Eigenschaften von Interesse. Weissler [W] hat gezeigt, daß im Falle $p \geqslant 2$ folgendes gilt.

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Für $r \geqslant 0$ besteht die Norm-Ungleichung

$$\|P_r f\|_p \leqslant \|f\|_2, \quad \textit{für alle } f \in L^2(\mathbb{T}),$$

und zwar dann und nur dann, wenn $r \leqslant 1/\sqrt{p-1}$.

Es ist jetzt zu untersuchen, ob eine ähnliche Charakterisierung auch für $P_r^{(n)}$ und $\mathbb{Z}_n$ nachweisbar ist. Man möge also eine exakte Schranke $r_n(p)$ derart finden, daß

$$\|\, p_r{}^{(n)} * f\|_p \leqslant \|f\|_2, \quad \text{für alle } f \in L^p(\mathbb{Z}_n) \text{ und } 0 \leqslant r \leqslant r_n(p), \text{ wobei } p \geqslant 2.$$

Wohlbekannt – mittels $f = 1 + a\chi + a\overline{\chi}$ leicht nachweisbar – ist die Notwendigkeit der Bedingung $r_n(p) \leqslant 1/\sqrt{p-1}$.

Umfangreicher wird die Fragestellung, wenn die gleiche Aufgabe für Multiplikatoren $m_r{}^{(k)}$ auf $L^2(\mathbb{Z}_n)$ gestellt wird. Diese Funktionen werden so definiert:

$$m_r{}^{(k)} = \sum_{j=-k}^{k} r^{|j|}\chi^j$$

Hier unterliegt k der Bedingung $k < n/2$. Offenbar sind $p_r{}^{(2k+1)}$ und $m_r{}^{(k)}$ für $n = 2k+1$ identisch. Zudem sieht man sofort ein, daß ein belegter Wert $r_n(p) = 1/\sqrt{p-1}$ genau denselben Wert für alle $m_r{}^{(k)}$ bringt. Wenn aber $r_n(p)$ kleiner ist, oder gar unbekannt, so wird ein Studium von $m_r{}^{(k)}$ aufschlußreiche Erkenntnisse bringen.

Nun ist in der Literatur kaum etwas über L^p-verbessernde Eigenschaften von $p_r{}^{(n)}$ zu erfahren. Lediglich sind $r_2(p) = r_4(p) = 1/\sqrt{p-1}$ und $r_3(p) < 1/\sqrt{p-1}$ bekannt; man siehe hierzu die Bemerkungen in [A]. Weiter ist von diesem Autor in [A2], für den Fall $\mathbb{Z}_n$ und $m_r{}^{(1)}$, die genaue Schranke $r \leqslant 1/\sqrt{p-1}$ mit $n \geqslant 4$ gezeigt, allerdings nur für ganze und gerade Zahlen $p \geqslant 2$. Als die Arbeit [A2] ihre endgültige Form bekam, ist es mir bewußt geworden, daß das darin eingesetzte Majorantenprinzip sich ein wenig ergänzen läßt. Die jetzige Darstellung ist folglich dem Studium der Multiplikatoren $m_r{}^{(2)}$ gewidmet. Insbesondere wird den Wert $r_5(p) = 1/\sqrt{p-1}$ für alle geraden p bestätigt. In der Tat hat man ein bestimmtes Endergebnis vor Augen:

Hauptsatz. *Es sei ein Charakter χ über $\mathbb{Z}_n$ von ungerader Ordnung* $\mathrm{Ord}(\chi) \geqslant 5$ *gegeben. Zu jeder ganzen Zahl $l \geqslant 1$ hat man für alle $0 \leqslant r \leqslant 1/\sqrt{2l-1}$ die genaue Multiplikatornorm* $\|m_r{}^{(2)}\|_{L^2 \to L^{2l}} = 1$.

Es muß bemerkt werden, daß das hier eingesetzte Verfahren ganz ungeeignet für ein allgemeines Studium der Norm $\|m_r{}^{(2)}\|_{L^2 \to L^p}$ ist.

1. Vorbereitendes. Dank der Einschränkung auf ganze, gerade Zahlen für p steht eine elementare Taylorentwicklung zur Verfügung. Man lege einen Charakter χ der Ordnung $n = \mathrm{Ord}(\chi) \geqslant 2M+1$ fest und betrachte für $r \geqslant 0$ die reelle Funktion

$$m_r = 1 + r(\chi + \overline{\chi}) + r^2(\chi^2 + \overline{\chi}^2) + \cdots + r^M(\chi^M + \overline{\chi}^M).$$

Für eine beliebige, reelle Funktion der Gestalt

$$f = a_0 + a_1\chi + \overline{a_1}\,\overline{\chi} + \cdots + a_M\chi^M + \overline{a_M}\,\overline{\chi}^M$$

gewinnt man aus dem Hardy–Littlewoodschen Majorantensatz [H-L] eine Abschätzung

$$\|f * m_r\|_{2l} \leqslant \big\| \, |a_0| + |a_1| r(\chi + \overline{\chi}) + \cdots + |a_M| r^M(\chi^M + \overline{\chi}^M) \big\|_{2l}.$$

Mit dem Ziel eine Ungleichung der Art

$$\|f * m_r\|_{2l} \leqslant C(r, M, n, 2l) \, \|f\|_2$$

für reelle f jener Art zu beweisen, ist es folglich ausreichend, die Bedingungen $a_0 = 1$ und $a_1, \ldots, a_M \geqslant 0$ zuzufügen. Der Fall $a_0 = 0$ ist per Grenzübergang zu erledigen. Die Identität

$$\|f * m_r\|_{2l}^{2l} = \int \big\{ 1 + a_1 r(\chi + \overline{\chi}) + \cdots + a_m r^M(\chi^M + \overline{\chi}^M) \, \big\}^{2l} \, d\lambda_n$$

führt zum Studium des folgenden Ausdrucks:

$$\begin{aligned} &\big\{ 1 + a_1 r(\chi + \overline{\chi}) + \cdots + a_m r^M(\chi^M + \overline{\chi}^M) \, \big\}^{2l} \\ &\qquad = \sum_{s_1 + \cdots + s_M \leqslant M} \binom{2l}{s_1, \ldots, s_M} r^{\sum m s_m} \, a_1^{s_1} \ldots a_M^{s_M} \prod_{m=1}^{M} (\chi^m + \overline{\chi}^m)^{s_m}. \end{aligned}$$

Führt man jetzt die entscheidende Größe

$$\rho(n; s_1, \ldots, s_M) = \int_{\mathbb{Z}_n} \prod_{m=1}^{M} (\chi^m + \overline{\chi}^m)^{s_m} \, d\lambda_n$$

ein, so ist offenkundig, daß

$$\prod_{m=1}^{M} (\chi^m + \overline{\chi}^m)^{s_m} = \sum \Big\{ \prod_{m=1}^{M} \binom{s_m}{j_m} \chi^{m(s_m - 2j_m)} \, ; \, 0 \leqslant j_m \leqslant s_m \Big\}.$$

Hieraus folgt eine zweite Deutung:

$$\rho(n; s_1, \ldots, s_M) = \sum \Big\{ \binom{s_1}{j_1} \cdots \binom{s_M}{j_M} ; \, 2 \sum\nolimits_{m=1}^{M} m j_m \equiv \sum\nolimits_{m=1}^{M} m s_m \bmod n \Big\}.$$

Dauraus läßt sich leicht folgender Hilfssatz beweisen.

Hilfssatz 1.1. *Mit der obigen Vereinbarung für die reelle Funktion f besteht die Darstellung*

$$\|f * m_r\|_{2l}^{2l} = \sum_{s_1 + \cdots + s_M \leqslant 2l} \binom{2l}{s_1, \ldots, s_M} r^{\sum m s_m} \rho(n; s_1, \ldots, s_M) \, a_1^{s_1} \ldots a_M^{s_M}.$$

Die entscheidende Idee in [A2] war es, die Größen $\rho(n; s)$ und $\rho(n + 2; s)$ zu vergleichen. Ein gezielter Einsatz eines verallgemeinerten Größenvergleichs ist der nächsten Aussage zu entnehmen.

Hilfssatz 1.2. *Es sei $n \geqslant 2M + 1$. Wenn die Größe $\rho(n+2; s_1, \ldots, s_M)$, unter der Bedingung $\sum s_m \leqslant 2l$, für keine Wahl der Parameter $s_1, \ldots, s_M \geqslant 0$, größer als die Zahl $\rho(n; s_1, \ldots, s_M)$ ist, so folgt daraus die Abschätzung $C(r, M, n + 2, 2l) \leqslant C(r, M, n, 2l)$.*

Im Beweis ist es vorübergehend zweckmäßig, eine Schreibweiße $\|f\|_{p,n}$ anzuwenden, bei der das Kleingeschriebene n die Ordnung der Gruppe $\mathbb{Z}_n$ angibt. Der Charakter wird über beide Gruppen mit χ bezeichnet. Dank der Hilfssätze hat man jetzt

$$\begin{aligned}\|f * m_r\|_{2l,n+2}^{2l} &= \sum_{s_1+\cdots+s_M \leqslant 2l} \binom{2l}{s_1,\ldots,s_M} r^{\sum m s_m} \rho(n+2; s_1,\ldots,s_M)\, a_1^{s_1}\ldots a_M^{s_M} \\ &\leqslant \sum_{s_1+\cdots+s_M \leqslant 2l} \binom{2l}{s_1,\ldots,s_M} r^{\sum m s_m} \rho(n; s_1,\ldots,s_M)\, a_1^{s_1}\ldots a_M^{s_M} \\ &= \|f * m_r\|_{2l,n}^{2l} \leqslant C(r,M,n,2l)^{2l}\,\|f\|_{2,n}^{2l} = C(r,M,n,2l)^{2l}\,\|f\|_{2,n+2}^{2l}.\end{aligned}$$

Es ist jetzt einleuchtend, daß die gewünschte Ungleichung $C(r,M,n+2,2l) \leqslant C(r,M,n,2l)$ besteht.

In der vorangehenden Arbeit [A2] konnte eben diese Schlußfolgerung für $M = 1$ und alle $n \geqslant 4$ eingesetzt werden. Daraus ergab sich die Bestimmung der Konstanten $C(r,1,4,2l)$ und $C(r,1,5,2l)$ als die verbleibende, größere Aufgabe, deren Ausarbeiten auch etwas an Aufwand gekostet hat.

Leider zeigt es sich, daß die Voraussetzung in Hilfssatz 1.2 nicht einmal für $M = 2$ und gerade Ordnung n erfüllt sein muß. Allerdings ist jene Eigenschaft für ungerade Ordnungen in der Tat wahr, was zunächst zu erklären ist.

Es seien zuerst natürliche Zahlen $c_k(s,t)$ durch

$$(1+x)^s(1+x^2)^t = \sum_{k=0}^{s+2t} c_k(s,t)\, x^k$$

eingeführt, wobei

$$c_k(s,t) = c_{s+2t-k}(s,t) \quad \text{und} \quad c_k(s+1,t) = c_k(s,t) + c_{k-1}(s,t)$$

hervorzuheben sind.

Hilfssatz 1.3. *Wenn $s \geqslant 1$ und $t \geqslant 0$ ganze Zahlen sind, so besteht für $0 \leqslant k \leqslant \nu = t + \left[\frac{s+1}{2}\right]$ die Ungleichung $0 \leqslant c_{k-1}(s,t) \leqslant c_k(s,t) \leqslant c_\nu(s,t)$.*

Der Beiweis läuft über mehrere elementare Stufen, wobei der nächste Schritt aus dem vorletzten mittels der Zerlegung $c_k(s+1,t) = c_k(s,t) + c_{k-1}(s,t)$ erfolgt. Wenn von Multiplizität die Rede ist, wird die Anzahl aller Index k angegeben, deren Koeffizienten $c_k(s,t)$ gleich dem Maximum aller Koeffizienten ausfallen. Dabei sind s und t festzuhalten. Es wird jeweils derjenige Koeffizient ausgeschrieben, der unter den Maximalen auch den kleinsten Index besitzt.

Beobachtung 1. (1) *$c_k(0,t) = 0$ wenn k ungerade ist.*

(2) *Ungerade t ergibt $c_{k-2}(0,t) \leqslant c_k(0,t) \leqslant c_{t-1}(0,t) = c_{t+1}(0,t)$ wenn $k \leqslant t+1$; $c_{t-1}(0,t)$ ist maximal.*

(3) *Gerade t ergibt $c_{k-2}(0,t) \leqslant c_k(0,t) \leqslant c_t(0,t)$ für $k \leqslant t$; $c_t(0,t)$ ist einfaches Maximum.*

Beobachtung 2. *$c_k(1,t)$ ist wachsend für $k \leqslant t+1$. Wenn t gerade ist, wird $c_{t+1}(1,t)$ ein doppeltes Maximum, während ungerade t den Wert $c_{t-1}(1,t)$ zum vierfachen Maximum macht.*

Beobachtung 3. *$c_k(2,t)$ ist wachsend für $k \leqslant t+1$. Gerade t macht $c_{t+1}(2,t)$ zum alleinigen Maximum, während $c_{t-1}(2,t)$ für ungerade t ein dreifaches Maximum ist.*

Beobachtung 4. *Für $k \leqslant t+2$ ist $c_k(3,t)$ wachsend mit k und $c_{t+2}(3,t)$ ist doppeltes Maximum.*

Von nun an läßt sich, wenn die Symmetrie $c_k(s,t) = c_{s+2t-k}(s,t)$ mit einbezogen wird, eine allgemeine Aussage induktiv bewiesen:

Beobachtung 5. *Für $s \geqslant 4$ ist $c_k(s,t)$ wachsend mit wachsendem k, wenn nur $0 \leqslant k \leqslant t + \left[\frac{s+1}{2}\right] = \nu$. Hier ist $c_\nu(s,t)$ ein einfaches bzw. doppeltes Maximum, je nachdem s gerade oder ungerade ist.*

Der Hilfssatz 1.3 ist jetzt die Zusammenfassung der vier letzteren Beobachtungen und ist damit bewiesen worden.

Um die Zahl $\rho(n;s,t)$ verständlich zu machen, führe man zuerst die Menge $V(n;s,t) = \{0 \leqslant k \leqslant s+2t\,;\, 2k \equiv s+2t \bmod n\}$ ein. Dabei ergibt sich

$$\begin{aligned}\rho(n;s,t) &= \sum \left\{ \binom{s}{i}\binom{t}{j}\,;\, k \in V(n;s,t),\ 0 \leqslant i \leqslant s,\ 0 \leqslant j \leqslant t,\ k = i+2j \right\} \\ &= \sum \left\{ c_k(s,t)\,;\, k \in V(n;s,t) \right\}.\end{aligned}$$

Hilfssatz 1.4. *Unter den Bedingungen $n \geqslant 5$ und $s \geqslant 1$ neben $t \geqslant 0$, gibt es eine Injektion $\phi : V(n+2;s,t) \to V(n;s,t)$ derart, daß $c_{\phi(k)}(s,t) \geqslant c_k(s,t)$ für alle $k \in V(n+2;s,t)$.*

Man nehme zum Beweis ein beliebiges $k \in V(n+2;s,t)$. Für eine ganze Zahl r ist dann $2k = s+2t+r(n+2)$ und somit $2(k-r) = s+2t+rn$, d.h. $\phi(k) = k-r$ ist ein Element in $V(n;s,t)$. Klar ist außerdem, daß ϕ wachsend für $0 \leqslant k \leqslant \frac{s}{2}+t$, bzw. abnehmend für $k \geqslant \frac{s}{2}+t$, ist. Weiter ist $\phi(k) \leqslant \frac{s}{2}+t$ dann und nur dann, wenn $k \leqslant \frac{s}{2}+t$. Schließlich gibt $k < l \leqslant \frac{s}{2}+t$ mit $k,l \in V(n+2;s,t)$

$$\phi(k) = s+2t+r_1 n < s+2t+r_2 n = \phi(l).$$

Dank der Symmetrie $c_k(s,t) = c_{s+2t-k}(s,t)$ muß ϕ injektiv sein. Da $s \geqslant 1$, bestätigt nun Hilfssatz 1.3 die gesuchte Ungleichung $c_{\phi(k)}(s,t) \geqslant c_k(s,t)$.

Somit ist die Majorantentechnik erreicht:

Satz 1.5. *Für alle ganze Zahlen $s,t \geqslant 0$ und ungerade $n \geqslant 5$ besteht die Ungleichung $\rho(n;s,t) \geqslant \rho(n+2;s,t)$.*

Im Falle, daß $s \geqslant 1$, zeigt nämlich Hilfssatz 1.4

$$\begin{aligned}\rho(n+2;s,t) &\leqslant \sum \left\{ c_{\phi(k)}(s,t)\,;\, k \in V(n+2;s,t) \right\} \\ &\leqslant \sum \left\{ c_k(s,t)\,;\, k \in V(n;s,t) \right\} = \rho(n;s,t).\end{aligned}$$

Dagegen hat man mit $s=0$ die Berechnung (wobei $n+2$ und n ungerade sind)

$$\begin{aligned}\rho(n+2;0,t) &= \sum \left\{ \tbinom{t}{j}\,;\, 4j \equiv 2t \bmod n+2 \right\} = \sum \left\{ \tbinom{t}{j}\,;\, 2j = t + r(n+2) \right\} \\ &\leqslant \sum \left\{ \tbinom{t}{j-r}\,;\, 2(j-r) = t+rn \right\} \leqslant \sum \left\{ \tbinom{t}{i}\,;\, 2i = t+rn \right\} \\ &= \sum \left\{ \tbinom{t}{i}\,;\, 4i \equiv 2t \bmod n \right\} = \rho(n;0,t).\end{aligned}$$

Der Satz ist somit vollständig bewiesen.

Jetzt ist die Lage derart, daß nach Hilfssatz 1.2 die Abschätzung $C(r,2,n,2l) \leqslant C(r,2,5,2l)$ für alle ungeraden n vorhanden ist. Das Ziel ist also die Festlegung von $C(1/\sqrt{2l-1},2,5,2l) = 1$. Mit anderen Worten bleibt also nun ein Studium der (L^2, L^{2l})-Verbesserung des entsprechenden Multiplikators über $\mathbb{Z}_5$.

Eine Besonderheit der Ordnung fünf ist die Symmetrie

$$\rho(5;s,t) = \rho(5;t,s), \quad \text{alle } s,t \geqslant 0.$$

Diese Eigenschaft kommt keiner anderen Ordnung zu. Zu ihrem Beweis bemerke man, daß zu jedem nichttrivialen Charakter χ über $\mathbb{Z}_5$, auch der Charakter χ^2, als Zufallsgröße des Wahrscheinlichkeitsraums $(\mathbb{Z}_5, \lambda_5)$ gesehen, mit dem ursprünglichen χ gleichverteilt ist. Somit ensteht die Identität

$$\begin{aligned}\rho(5;s,t) &= \int_{\mathbb{Z}_5} (\chi+\overline{\chi})^s(\chi^2+\overline{\chi}^2)^t \, d\lambda_5 \\ &= \int_{\mathbb{Z}_5} (\chi^2+\overline{\chi}^2)^s\big(\{\chi^2\}^2+\overline{\{\chi^2\}}^2\big)^t \, d\lambda_5 = \rho(5;t,s).\end{aligned}$$

2. Ordnung fünf. So wie eben erläutert möchte man jetzt die Norm-Ungleichung $\| p_r{}^{(5)} * f\|_{2l} \leqslant \|f\|_2$ mit $r = 1/\sqrt{2l-1}$ erreichen. Da $p_r{}^{(5)}$ positiv für $0 \leqslant r \leqslant 1$ auskommt, genügt es zu zeigen, daß für alle positiven Zahlen a und b eine Ungleichung besteht:

$$\Big\| 1 + \frac{a}{\sqrt{2l-1}}(\chi+\overline{\chi}) + \frac{b}{2l-1}(\chi^2+\overline{\chi}^2) \Big\|_{2l} \leqslant \big\| 1 + a(\chi+\overline{\chi}) + b(\chi^2+\overline{\chi}^2) \big\|_2.$$

Hier ist χ ein Charakter der Ordnung fünf über $\mathbb{Z}_5$. Gemäß der Überlegung im ersten Abschnitt muß folgendes bestätigt werden;

$$\sum_{s+t\leqslant 2l} \binom{2l}{s,t} \left(\frac{a}{\sqrt{2l-1}}\right)^s \left(\frac{b}{2l-1}\right)^t \rho(s,t) \leqslant \sum_{s+t\leqslant l} \binom{l}{s,t} (2a^2)^s\,(2b^2)^t.$$

Der Kürze halber wurde hier, und wird auch weiterhin, $\rho(5;s,t)$ durch $\rho(s,t)$ ersetzt.

Das hier gewählte Verfahren sucht die linke Seite darart abzuschätzen, daß die Majorante – in ihrer Form als Potenzreihe in $2a^2$ und $2b^2$ – der rechten Seite ähnelt und trivialerweise von dieser letzteren majoriert wird.

Es zeigt sich aber, daß die Glieder von niedrigem Grad sehr heikler Wechselwirkung unterliegen, weshalb nur die späteren Glieder einigermaßen übersichtlich zu handhaben sind. Lediglich die Glieder mit entweder s oder t ungerade werden mittels der elementaren Beziehung $2xy \leqslant x^2+y^2$ in zwei Summanden zerlegt. Aus Gründen der Übersichtligkeit empfiehlt sich eine abkürzende Schreibweise, bei festen a, b und l versteht sich,

$$A = 2a^2, \qquad B = 2b^2, \qquad \alpha = a/\sqrt{2l-1}, \qquad \beta = b/(2l-1)$$

und

$$\sigma(s,t) = \big[2^{s+t}(2s-1)!!\,(2t-1)!!\,(2l-1)^t\big]^{-1}.$$

Hier und fortan tritt die Vereinbarung $(-1)!! = 1$ auf.

Zu zeigen ist also

$$\sum_{s+t\leqslant 2l}\binom{2l}{s,t}\alpha^s\beta^t\rho(s,t)\leqslant\sum_{s+t\leqslant l}\binom{l}{s,t}A^sB^t.$$

Die linken Glieder werden in vier Fälle eingestuft (immer mit $s+t\geqslant 1$):

$$\begin{aligned}\binom{2l}{2s,2t}\alpha^{2s}\beta^{2t}&=\tfrac{l(l-1)\dots(l-s-t+1)(2l-1)(2l-3)\dots(2l-2s-2t+1)}{s!\,t!\,(2s-1)!!\,(2t-1)!!}\cdot\frac{a^{2s}b^{2t}}{(2l-1)^{s+2t}}\\&\leqslant\binom{l}{s,t}\frac{(2l-1)^{s+t}}{(2s-1)!!\,(2t-1)!!}\cdot\frac{a^{2s}b^{2t}}{(2l-1)^{s+2t}}=\sigma(s,t)\binom{l}{s,t}A^sB^t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\binom{2l}{2s+1,2t}\alpha^{2s+1}\beta^{2t}&=\tfrac{l(l-1)\dots(l-s-t+1)}{s!\,t!}\cdot\tfrac{(2l-1)(2l-3)\dots(2l-2s-2t+1)}{(2s-1)!!\,(2t-1)!!\,(2l-1)^{s+2t}}\\&\qquad\times 2a^sb^t\cdot\frac{l-s-t}{2s+1}\,\frac{a^{s+1}b^t}{\sqrt{2l-1}}\\&\leqslant\tbinom{l}{s,t}\tfrac{a^{2s}b^{2t}}{(2s-1)!!\,(2t-1)!!\,(2l-1)^t}\\&\qquad+\tfrac{s+1}{2(2s+1)^2}\tbinom{l}{s+1,t}\tfrac{a^{2(s+1)}b^{2t}}{(2s-1)!!\,(2t-1)!!\,(2l-1)^t}\\&=\tbinom{l}{s,t}\sigma(s,t)A^sB^t+\tfrac{s+1}{2(2s+1)}\tbinom{l}{s+1,t}\sigma(s+1,t)A^{s+1}B^t\end{aligned}$$

und dazu analog

$$\binom{2l}{2s,2t+1}\alpha^{2s}\beta^{2t+1}\leqslant\tbinom{l}{s,t}\sigma(s,t)A^sB^t+\tfrac{t+1}{2(2t+1)}\tbinom{l}{s,t+1}\sigma(s,t+1)A^sB^{t+1}.$$

Schließlich ist der vierte, ungerade Fall spürbar heikler:

$$\begin{aligned}\binom{2l}{2s+1,2t+1}\alpha^{2s+1}\beta^{2t+1}&=\tfrac{l(l-1)\dots(l-s-t+1)}{s!\,t!}\cdot\tfrac{(2l-1)(2l-3)\dots(2l-2s-2t+1)}{(2s-1)!!\,(2t-1)!!\,(2l-1)^{s+2t}}\\&\qquad\times 2\sqrt{2}\,\tfrac{l-s-t}{2s+1}\,\tfrac{a^{s+1}b^t}{\sqrt{2l-1}}\cdot\tfrac{2l-2s-2t-1}{2t+1}\,\tfrac{a^sb^{t+1}}{\sqrt{2}(2l-1)}\\&\leqslant\tbinom{l}{s,t}\tfrac{(2l-2s-2t)}{(2s-1)!!\,(2t-1)!!\,(2l-1)^{t+1}}\,\frac{a^{2(s+1)}b^{2t}}{(2s+1)^2}\\&\qquad+\tbinom{l}{s,t}\tfrac{(2l-2s-2t-1)^2}{2(2s-1)!!\,(2t-1)!!\,(2l-1)^{t+2}}\,\frac{a^{2s}b^{2(t+1)}}{(2t+1)^2}\\&\leqslant\tfrac{s+1}{2s+1}\tbinom{l}{s+1,t}\tfrac{a^{2(s+1)}b^{2t}}{(2s+1)!!\,(2t-1)!!\,(2l-1)^t}\\&\qquad+\tfrac{t+1}{2t+1}\tbinom{l}{s,t+1}\tfrac{a^{2s}b^{2(t+1)}}{(2s-1)!!\,(2t+1)!!\,(2l-1)^{t+1}}\\&=\tfrac{s+1}{2s+1}\tbinom{l}{s+1,t}\sigma(s+1,t)A^{s+1}B^t+\tfrac{t+1}{2t+1}\tbinom{l}{s,t+1}\sigma(s,t+1)A^sB^{t+1}.\end{aligned}$$

Es ist günstig, bei festem l drei weitere Bezeichnungen einzuführen:

$$M(s,t)=\binom{2l}{s,t}\alpha^s\beta^t\quad\text{und}\quad S(s,t)=\binom{l}{s,t}A^sB^t,\quad T(s,t)=\sigma(s,t)\,S(s,t).$$

Die vier vorangehenden Ungleichungen können jetzt komprimiert gedeutet werden:

Hilfssatz 2.1. *Mit den eingeführten Bezeichnungen gelten bei festem $l \geqslant 2$ diese Beziehungen:*

$$
\begin{aligned}
M(2s,2t) &\leqslant T(s,t),\\
M(2s+1,2t) &\leqslant T(s,t) + \frac{s+1}{2(2s+1)}\,T(s+1,t),\\
M(2s,2t+1) &\leqslant T(s,t) + \frac{t+1}{2(2t+1)}\,T(s,t+1) \quad \textit{und}\\
M(2s+1,2t+1) &\leqslant \frac{s+1}{2s+1}\,T(s+1,t) + \frac{t+1}{2t+1}\,T(s,t+1).
\end{aligned}
$$

Zum besseren Verständnis ist es hilfreich, die Zahl $s+t$ als M-Grad bzw. S-Grad von $M(s,t)$ und $S(s,t)$ zu benennen. Offenbar wandeln sich Glieder von M-Grad $2n$ in Ausdrücke von S-Grad n um, während M-Grad $2n+1$ zu S-Grad n und $n+1$ führt.

Leider sind diese vier Arten Ungleichungen nicht ausreichend; die Beiträge mit kleinem M-Grad sind allzu sehr aneinander korreliert. Die Glieder vom kleinsten Grad bedürfen also einiger elementaren Berechnungen, deren Ergebnisse aus einer Tafel abzulesen sind:

$\rho(s,t)$	$t=0$	1	2	3	4	5
$s=0$	1	0	2	0	6	2
1	0	0	2	2	8	$*$
2	2	2	4	6	14	$*$
3	0	2	6	12	$*$	$*$
4	6	8	14	$*$	$*$	$*$
5	2	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$

Aus der Tafel geht hervor, daß die Glieder von M-Grad kleiner gleich fünf, wie folgt ausfallen.

$$
\begin{aligned}
&1 + 2M(2,0) + 2M(0,2) + 2M(2,1) + 2M(1,2) + 6M(4,0) + 2M(3,1)\\
&\quad + 4M(2,2) + 2M(1,3) + 6M(0,4) + 2M(5,0) + 8M(4,1) + 6M(3,2)\\
&\quad + 6M(2,3) + 8M(1,4) + 2M(0,5).
\end{aligned}
$$

Hilfssatz 2.1 macht zuerst eine Aussage über diejenigen Glieder von geraden Argumenten:

$$
\begin{aligned}
&1 + 2M(2,0) + 2M(0,2) + 6M(4,0) + 4M(2,2) + 6M(0,4)\\
&\qquad \leqslant 1 + 2\,\sigma(1,0)\,S(1,0) + 2\,\sigma(0,1)\,S(0,1) + 6\,\sigma(2,0)\,S(2,0)\\
&\qquad\qquad + 4\,\sigma(1,1)\,S(1,1) + 6\,\sigma(0,2)\,S(0,2)\\
&\qquad = 1 + S(1,0) + \tfrac{1}{2l-1}\,S(0,1) + \tfrac{1}{2}\,S(2,0) + \tfrac{1}{2l-1}\,S(1,1) + \tfrac{1}{2(2l-1)^2}\,S(0,2).
\end{aligned}
$$

Die restlichen Glieder sind heikler. Wie eben erwähnt, sind die Abschätzungen aus dem Hilfssatz ungünstig für Glieder mit kleinem Grad. Eine vorbereitende Spaltung wird deswegen individuell vor dem Einsatz der Ungleichung $2xy \leqslant x^2 + y^2$ durchgeführt. Jene von Grad drei und vier sind wie folgt:

$$\begin{aligned}
2M(2,1) &= \tfrac{2l(l-1)}{2l-1}\cdot 2a^2 b \\
&\leqslant \frac{1}{2l-1}\,S(2,0)+\frac{l-1}{2l-1}\,S(0,1),\\
2M(1,2) &= \tfrac{2l(l-1)}{2l-1}\cdot 2\tfrac{ab}{\sqrt{2l-1}}\,b \\
&\leqslant \frac{1}{2(2l-1)^2}\,S(1,1)+\frac{l-1}{2l-1}\,S(0,1),\\
2M(3,1) &= \tfrac{l(l-1)(2l-3)}{3}\cdot 2\,\tfrac{a^2}{\sqrt{2l-1}}\,\tfrac{2ab}{2l-1} \\
&\leqslant \frac{2l-3}{6(2l-1)}\,S(2,0)+\frac{2l-3}{3(2l-1)^2}\,S(1,1)\\
2M(1,3) &= \tfrac{2l(l-1)(2l-3)}{3(2l-1)}\cdot 2\,\tfrac{ab}{\sqrt{2l-1}}\,\tfrac{b^2}{2l-1} \\
&\leqslant \frac{2l-3}{6(2l-1)^2}\,S(1,1)+\frac{2l-3}{3(2l-1)^3}\,S(0,2).
\end{aligned}$$

Wenn nun alle schon behandelten Beiträgen summiert werden, erfolgt ein erster Schritt.

Hilfssatz 2.2. *Wenn $l \geqslant 2$, so folgt daraus*

$$\sum_{0\leqslant s+t\leqslant 4}\rho(s,t)\,M(s,t)\leqslant 1+S(1,0)+S(0,1)+\tfrac{4l}{3(2l-1)}\,S(2,0)$$
$$+\tfrac{3l-2}{(2l-1)^2}\,S(1,1)+\tfrac{10l-9}{6(2l-1)^3}\,S(0,2).$$

Insbesondere gilt $\|\,p_r{}^{(5)}*f\|_4\leqslant\|f\|_2$ für alle $f:\mathbb{Z}_5\to\mathbb{C}$ und $|r|\leqslant 1/\sqrt{3}$.

Die zweite Aussage folgt aus der ersten, indem die Koeffizienten in der Hauptungleichung allesamt kleiner oder gleich eins ausfallen.

Bei M-Grad fünf ist es vorteilhaft, für die restlichen Glieder einen leicht abgewandelten Hilfssatz einzusetzen. Rückblickend läßt sich in allen Ungleichungen aus Hilfssatz 2.1 ein Faktor $(2l-3)/(2l-1)$ in der rechten Seite wieder einführen, sobald der Fall $l\geqslant 3$ betrachtet wird. Folglich ist M-Grad fünf folgendermaßen zu bewältigen.

$$\begin{aligned}
2M(5,0) &\leqslant \frac{2l-3}{6(2l-1)}\,S(2,0)+\frac{2l-3}{200(2l-1)}\,S(3,0),\\
6M(3,2) &\leqslant \frac{3(2l-3)}{2(2l-1)^2}\,S(1,1)+\frac{2l-3}{12(2l-1)^2}\,S(2,1),\\
6M(2,3) &\leqslant \frac{3(2l-3)}{2(2l-1)^2}\,S(1,1)+\frac{2l-3}{12(2l-1)^3}\,S(1,2),\\
8M(1,4) &\leqslant \frac{2(2l-3)}{3(2l-1)^3}\,S(0,2)+\frac{2l-3}{6(2l-1)^3}\,S(1,2)\quad\text{und}\\
2M(0,5) &\leqslant \frac{2l-3}{6(2l-1)^3}\,S(0,2)+\frac{2l-3}{200(2l-1)^4}\,S(0,3).
\end{aligned}$$

Lediglich ein Glied von M-Grad fünf wird gesondert behandelt (weiterer Zuschuß zu $S(2,0)$ kann nicht geduldet werden):

$$\begin{aligned} 8M(4,1) &= \tfrac{4l(l-1)(l-2)(2l-3)}{3} \cdot 2\, \tfrac{ab}{2l-1}\, \tfrac{a^3}{2l-1} \\ &\leqslant \frac{(l-2)(2l-3)}{3(2l-1)^2}\, S(1,1) + \frac{2l-3}{(2l-1)^2}\, S(3,0). \end{aligned}$$

Die eben hergeleiteten Beziehungen lassen sich jetzt mit dem Ergebnis im letzten Hilfssatz zusammenlegen.

Hilfssatz 2.3. *Wenn $l \geqslant 3$, so besteht die Ungleichung*

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leqslant s+t \leqslant 5} \rho(s,t)\, M(s,t) \leqslant 1 + S(1,0) + S(0,1) + \frac{10l-3}{6(2l-1)}\, S(2,0) \\ + \frac{2l^2+20l-27}{3(2l-1)^2}\, S(1,1) + \frac{2(5l-6)}{3(2l-1)^3}\, S(0,2) \\ + \frac{2l-3}{2l-1}\left\{\frac{1}{200} + \frac{1}{2l-1}\right\} S(3,0) + \frac{2l-3}{12(2l-1)^2}\, S(2,1) \\ + \frac{2l-3}{4(2l-1)^3}\, S(1,2) + \frac{2l-3}{200(2l-1)^4}\, S(0,3). \end{aligned}$$

Schließlich werden alle höheren Glieder, d.h. von M-Grad mindestens sechs, unter der vollen Einbeziehung des Hilfssatzes 2.1 behandelt:

$$\begin{aligned} &\sum_{6 \leqslant s+t \leqslant 2l} \binom{2l}{s,t} \alpha^s \beta^t\, \rho(s,t) \\ &\quad = \sum_{3 \leqslant s+t \leqslant l} \rho(2s,2t)\, M(2s,2t) + \sum_{3 \leqslant s+t < l} \rho(2s+1,2t)\, M(2s+1,2t) \\ &\qquad + \sum_{3 \leqslant s+t < l} \rho(2s,2t+1)\, M(2s,2t+1) \\ &\qquad + \sum_{2 \leqslant s+t < l} \rho(2s+1,2t+1)\, M(2s+1,2t+1) \\ &\quad \leqslant \sum_{3 \leqslant s+t \leqslant l} V(s,t)\, \sigma(s,t)\, S(s,t), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} V(s,t) = \rho(2s,2t) + \rho(2s+1,2t) + \rho(2s,2t+1) + \tfrac{s}{2s-1}\, \rho(2s-1,2t) \\ + \tfrac{t}{2t-1}\, \rho(2s,2t-1) + \tfrac{s}{2s-1}\, \rho(2s-1,2t+1) + \tfrac{t}{2t-1}\, \rho(2s+1,2t-1). \end{aligned}$$

Bei der Ungleichung wurde Hilfssatz 2.1 angewandt, allerdings abgeschwächt durch $(s+1)/2(2s+1) \leqslant (s+1)/(2s+1)$. Diese Abwandlung ist für die nachstehende Berechnung günstig.

Es ist also wünschenswert die Ungleichung $V(s,t)\,\sigma(s,t)\leqslant 1$ zu belegen. Da $\rho(s,t)=\rho(t,s)$ ist, wie schon gezeigt wurde, so ist offenbar $V(s,t)=V(t,s)$. Weiter besteht für $s,t\geqslant 1$

$$\begin{aligned}
V(s,t) = \int_{Z_5} &(\chi+\overline{\chi})^{2s-1}(\chi^2+\overline{\chi}^2)^{2t-1}\Big[(\chi+\overline{\chi}+\chi^2+\overline{\chi}^2)(1+\chi+\overline{\chi}+\chi^2+\overline{\chi}^2)\\
&\quad + \tfrac{s}{2s-1}(\chi^2+\overline{\chi}^2+\chi+\overline{\chi}+2)+\tfrac{t}{2t-1}(\chi+\overline{\chi}+\chi^2+\overline{\chi}^2+2)\Big]\,d\lambda_5\\
&= 4^{s+t-1}\cdot 5^{-1}\big(20+\tfrac{6s}{2s-1}+\tfrac{6t}{2s-1}\big)\\
&\quad + \big(\tfrac{s}{2s-1}+\tfrac{t}{2t-1}\big)\int_{\mathbb{Z}_5^*}(\chi+\overline{\chi})^{2s-1}(\chi^2+\overline{\chi}^2)^{2t-1}\,d\lambda_5\\
&< 4^{s+t}\,\big(1+\tfrac{3}{10}\,\tfrac{s}{2s-1}+\tfrac{3}{10}\,\tfrac{t}{2t-1}\big),
\end{aligned}$$

weil über $\mathbb{Z}_5^*=\mathbb{Z}_5\setminus\{0\}$ genau einer unter $\chi+\overline{\chi}$ und $\chi^2+\overline{\chi}^2$ negativ ausfällt. Wesentlich analog erfolgt die Bestimmung

$$V(s,0)=4^s\big(1+\tfrac{3}{10}\,\tfrac{s}{2s-1}\big)-\tfrac{s}{2s-1}\int_{\mathbb{Z}_5^*}(\chi+\overline{\chi})^{2s}\,d\lambda_5,$$

woraus sich auch für $t=0$ (und $s=0$) die gleiche Abschätzung ergibt. Somit ist die Ungleichung $V(s,t)\,\sigma(s,t)\leqslant 1$, wo $s+t\leqslant l$, schwächer als die Beziehung

$$1+\frac{3}{10}\,\frac{s}{2s-1}+\frac{3}{10}\,\frac{t}{2t-1}<2^{-(s+t)}(2s-1)!!\,(2t-1)!!\,(2s+2t-1)^t.$$

Allerdings zeigt sich, daß bei gegebener Summe $u=s+t$ das rechte Glied minimal für $t=1$ und das linke wiederum maximal für $t=1$ ausfallen. Folglich ist der Bestand von

$$1+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\,\frac{u-1}{2u-3}<2^{-u}(2u-1)!!\;=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdots\tfrac{2u-1}{2}$$

ausreichend für die gefragte Ungleichung, was tatsächlich für $u\geqslant 3$ zutrifft.

Hilfssatz 2.4. *Wenn $s+t\geqslant 3$ und $l\geqslant 3$, so besteht $V(s,t)\,\sigma(s,t)<1$. Insbesondere gilt für $l\geqslant 3$ die Ungleichung*

$$\sum_{6\leqslant s+t\leqslant 2l}\rho(s,t)\,M(s,t)\leqslant\sum_{s+t=3}V(s,t)\sigma(s,t)S(s,t)+\sum_{4\leqslant s+t\leqslant l}S(s,t).$$

Man erinnere sich jetzt, daß dieser Textabschnitt eine ganz bestimmte Ungleichung als Ziel hat:

$$\sum_{0\leqslant s+t\leqslant 2l}\rho(s,t)\,M(s,t)\leqslant\sum_{0\leqslant s+t\leqslant l}S(s,t).$$

Ein Vergleich aller Beiträge in den Hilfssätzen 2.3 und 2.4 macht klar, daß nur die überdeckenden Glieder von S-Grad drei immer noch ungewiß sind. Diese sind aber leicht zu vollziehen, wenn nämlich die beiden Ungleichungen addiert werden und dabei – der Reihe nach – die Koeffizienten für $S(3,0)$, $S(2,1)$, $S(1,2)$ und $S(0,3)$ wie folgt ausfallen.

$$V(3,0)\,\sigma(3,0) + \tfrac{2l-3}{2l-1}\big\{\tfrac{1}{200} + \tfrac{1}{2l-1}\big\} < \tfrac{8}{15}\big(1 + \tfrac{9}{50}\big) + \tfrac{1}{100} + \tfrac{1}{2l-1} < \frac{17}{20},$$

$$V(2,1)\,\sigma(2,1) + \frac{2l-3}{12(2l-1)^2} < \tfrac{8}{3(2l-1)} \cdot \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{12(2l-1)} < \frac{5}{6},$$

$$V(1,2)\,\sigma(1,2) + \frac{2l-3}{4(2l-1)^3} < \tfrac{4}{(2l-1)^2} + \tfrac{1}{4(2l-1)^2} \leqslant \frac{17}{100} \quad \text{bzw.}$$

$$V(0,3)\,\sigma(0,3) + \frac{2l-3}{200(2l-1)^4} < \tfrac{8}{15(2l-1)^3} \cdot \tfrac{59}{50} + \tfrac{1}{200(2l-1)^3} < \frac{1}{125}.$$

Hier wurde $l \geqslant 3$ angewandt, sowie die vorher hergeleitete Abschätzung für $V(s,t)$. Damit ist der Beweis des gewünschten Satzes mit Ordnung fünf vollständig erbracht.

Satz 2.5. *Wenn χ ein nicht trivialer Charakter über $\mathbb{Z}_5$ ist, so besteht für alle $a, b \geqslant 0$ und ganze $l \geqslant 1$ die Normungleichung*

$$\Big\|1 + \frac{a}{\sqrt{2l-1}}(\chi + \overline{\chi}) + \frac{b}{2l-1}(\chi^2 + \overline{\chi}^2)\Big\|_{2l} \leqslant \big\|1 + a(\chi + \overline{\chi}) + b(\chi^2 + \overline{\chi}^2)\big\|_2.$$

Hauptsatz 2.6. *Wenn $0 \leqslant r \leqslant 1/\sqrt{2l-1}$ und $l \geqslant 1$ ganz ist, so ist $P_r^{(5)}$ hyperkontraktiv; genauer gesagt besteht $\|P_r^{(5)}\|_{L^2 \to L^{2l}} = 1$.*

Zu gegebener Funktion $f\colon \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{C}$ bezeichne f^* diejenige Abwandlung $f^*\colon \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{R}$, die $\big|(|f|)\widehat{\ }\big| = (f^*)\widehat{\ }$ genügt. Dann ergibt sich aus der Positivität von ${p_r}^{(5)}$ und dem Hardy–Littlewoodschen Satze

$$\begin{aligned} \|\,{p_r}^{(5)} * f\|_{2l} &\leqslant \|\,{p_r}^{(5)} * |f|\,\|_{2l} \leqslant \|\,{p_r}^{(5)} * f^*\|_{2l} \\ &\leqslant \|f^*\|_2 = \|f\|_2, \end{aligned}$$

wobei Satz 2.5 beim Übergang in die zweite Zeile angewandt wurde. Somit besteht für $\|P_r^{(5)} f\|_{2l} \leqslant \|f\|_2$, die behauptete Ungleichung; trivialerweise ist ja $P_r^{(5)} 1 = 1$ und daher immer $\|P_r^{(5)}\|_{L^2 \to L^{2l}} \geqslant 1$.

3. Schlußfolgerung. Nun sind fast alle Bauelemente des erzielten Hauptsatzes vorhanden. Vorerst erlauben Hilfssatz 1.2, Satz 1.5 einschließlich Hauptsatz 2.6 nur eine geschwächte Aussage:

Satz 3.1. *Für ungerade Ordnung $n = \mathrm{Ord}(\chi) \geqslant 5$ und ganze Zahlen $l \geqslant 1$ besteht $\|f * {m_r}^{(2)}\|_{2l} \leqslant \|f\|_2$, wobei reellwertige $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{R}$ neben $0 \leqslant r \leqslant 1/\sqrt{2l-1}$ zu berücksichtigen sind.*

Wüßte man, daß ${m_r}^{(2)}$ positiv ist, so folgte aus dem angeführten Satz auch der allgemeine Fall mit komplexwertigen Funktionen. Der dazu nötige Schluß ist schon im Hauptsatz 2.6 angewandt worden.

Es wird jetzt behauptet, daß mit $l \geqslant 2$, $n \geqslant 5$ und $0 \leqslant r \leqslant 1/\sqrt{2l-1}$ immer ${m_r}^{(2)} > 0$ ist. Man hat nämlich

$$1 + re^{i\theta} + re^{-i\theta} + r^2e^{2i\theta} + r^2e^{-2i\theta} = \left(2r\cos\theta + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4} - 2r^2.$$

Somit führt $0 \leqslant r < \sqrt{6}/4$ die strenge Positivität ${m_r}^{(2)} > 0$ mit sich. Aus der Beziehung $1/\sqrt{2l-1} \leqslant 1/\sqrt{3} < \sqrt{6}/4$ folgt also die Behauptung. Näheres zur Positivität des Multiplikators ${m_r}^{(k)}$ kann aus der Darstellung [S] von Sidon gewonnen werden.

Nun ist also ${m_r}^{(2)}$ positiv für die betrachteten Fälle, ausgenommen $l = 1$, wo die Aussage sowieso trivial ist. Damit führt eine Wiederholung der Schlußfolge von Hauptsatz 2.6, jetzt auf Satz 3.1 angewandt, zu der gesuchten Aussage:

Hauptsatz 3.2. *Wenn χ ein Charakter von maximaler Ordnung über eine endliche zyklische Gruppe von ungerader Ordnung $n \geqslant 5$ ist und wenn gleichzeitig $l \geqslant 1$ ganz ist, so besitzt die Funktion*

$${m_r}^{(2)} = 1 + r\chi + r\overline{\chi} + r^2\chi^2 + r^2\overline{\chi}^2,$$

als Faltungsmultiplikator gesehen, für alle $0 \leqslant r \leqslant 1/\sqrt{2l-1}$ die Multiplikatornorm $\|{m_r}^{(2)}\|_{L^2 \to L^{2l}} = 1$.

References

[A] M.E. Andersson, Remarks on hypercontractivity for the smallest groups, *Proceedings of the Marcus Wallenberg Symposium in Honor of Matts Essén. Held in Uppsala, Sweden, June 15–18, 1997*, Acta Universitatis Upsaliensis, C. 64, Uppsala, 1999, pp. 51–60.

[A2] ———, Two examples of subspaces in L^{2l} spanned by characters of finite order, *Colloq. Mathematicum (wird demnächst erscheinen).*

[H-L] G.H. Hardy und J.E. Littlewood, A problem concerning majorants of Fourier series, *Quart. J. Math.* **6** (1935), 304–315.

[S] S. Sidon, Ein Satz über positive harmonische Polynome, *Jahresbericht d. DMV* **35** (1926), 97–99.

[W] F.B. Weissler, Logarithmic Sobolev inequalities and hypercontractive estimates on the circle, *J. Funct. Anal.* **37** (1980), 218–234.

Mats Erik Andersson, Matematiska institutionen, Stockholms universitet, SE-106 91 Stockholm

E-mail address: matsa@matematik.su.se