



Stockholms  
universitet

# Erdős-Rényi-grafer

Jiong Cao

Kandidatuppsats 2010:1  
Matematisk statistik  
Januari 2010

[www.math.su.se](http://www.math.su.se)

Matematisk statistik  
Matematiska institutionen  
Stockholms universitet  
106 91 Stockholm

# Erdős-Rényi-grafer

Jiong Cao\*

Januari 2010

## Sammanfattning

Detta arbete har till syfte att beskriva den så kallade fasövergången hos Erdős-Rényi-grafer då kantsannolikheten är lämpligt skalad. Genom att approximera utforskningsprocessen för en grafkomponent med en förgreningsprocess, kan vi dra slutsatsen att en jättekompont i grafen existerar om och endast om den förväntade graden hos en nod är större än 1. Det teoretiska resultatet illustreras med en simulering.

---

\*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms universitet, 106 91, Sverige. E-post: caojiong80@hotmail.com. Handledare: Maria Deijfen.

## **Abstract**

The purpose of this thesis is to describe the phase transition for Erdős-Rényi random graphs when the edge probability is suitable scaled. By relating the exploration process of a graph component to a branching process, we establish that a giant component exists with positive probability if and only if the expected degree of a vertex exceeds 1. The theoretical result is illustrated graphically with a simulation.

## Förord

Denna uppsats utgör ett examensarbete om 15 högskolepoäng och leder till en kandidatexamen i matematisk statistik vid Matematiska institutionen, Stockholms Universitet.

Jag vill tacka Maria Deijfen, min handledare på Matematiska institutionen vid Stockholms Universitet, som har besvarat mina frågor och gett goda råd under arbetets gång.

Jag vill även tacka Andreas Nordvall Lagerås på AFA Försäkring, som introducerade mig för ämnet och vara till stor hjälp under inledande handledning.

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Förgreningsprocesser</b>	<b>6</b>
2.1	Poisson - approximation av binomialfördelning . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Utforskningsprocessen</b>	<b>8</b>
3.1	Ett exempel . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Förgreningsprocesstolkning av utforskningsprocessen och huvudresultat</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Simulering av Erdős-Rényi-grafer</b>	<b>12</b>
5.1	Metod . . . . .	12
5.2	Resultat . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Slutsats</b>	<b>14</b>

# 1 Inledning

Erdős-Rényi-grafen, som introducerades av Erdős och Rényi 1960, är den enklaste tänkbara modellen för en slumpgraf. Grafen innehåller  $n$  stycken noder som betecknas  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Således finns det  $\binom{n}{2}$  olika möjliga par av noder, d.v.s. möjliga kanter som oberoende kopplar samman noderna parvis med en viss sannolikhet  $p$ . Antalet grannar<sup>1</sup> till en given nod är alltså binomialfördelat med parametrar  $n - 1$  och  $\lambda$ . För att den förväntade graden (grannar) hos denna nod,  $(n - 1) \cdot p$ , ska förbli ändlig då  $n \rightarrow \infty$  låter man  $p = \lambda/n$  för något  $\lambda > 0$ . Så konstruerar man den så kallade Erdős-Rényi-grafen med två parametrar som betecknas  $G(n, p)$ .

Om den förväntade graden hos en nod i denna graf är större än 1, d.v.s. om  $\lambda > 1$ , så kommer det med sannolikhet 1 att finnas en så kallade *jättekompont* i grafen då  $n \rightarrow \infty$ . En komponent i en graf är en sammanhängande samling noder, d.v.s. varje nod i komponenten är sammanlänkad med varje annan nod i komponenten via en kedja av kanter. En jättekompont är ett asymptotiskt begrepp och betyder att komponenten är av samma storleksordning som hela grafen. Mer exakt, om  $X_n$  är andelen noder i komponenten så ska det gälla att  $X_n \rightarrow c > 0$ . Om den förväntade graden hos en nod å andra sidan är mindre än 1, så kommer grafen bara att innehålla små komponenter, d.v.s. komponenter där  $X_n \rightarrow 0$ . Detta är vad som brukar kallas för fasövergången för Erdős-Rényi-grafen.

Det primära syftet med denna uppsats är att studera fasövergången hos Erdős-Rényi-grafer. För att kunna beskriva fasövergången matematiskt ska vi relatera den så kallade utforskningsprocessen för en grafkomponent till en förgreningsprocess. För detta ändamål ska vi:

- Ge en matematisk beskrivning av förgreningsprocesser och en grundläggande sats från förgreningsprocessteorin, utforska komponenter i Erdős-Rényi-grafer, tolka utforskningsprocesser med hjälp av förgreningsprocesser samt simulera Erdős-Rényi-grafer.

Dessutom ska vi, med hjälp av Matlab, göra en datorsimulering av Erdős-Rényi-grafen i avsikt att kunna undersöka hur väl de teoretiska resultaten stämmer överens med simuleringen.

Resten av uppsatsen är upplagd så att avsnitt 2 innehåller en matematisk beskrivning av förgreningsprocesser som är användbara i analysen av

---

<sup>1</sup>Två noder som är direkt sammanbundna med en kant är grannar.

fasövergången och ett viktigt begrepp inom sannolikhetsteorin. I avsnitt 3 behandlas utforskandet av sammanhängande komponenter i Erdős-Rényi-grafer och huvudresultatet angående existens av en stor komponent formuleras. Avsnitt 4 ger en matematisk tolkning av fasövergången med hjälp av förgreningsprocesser. Slutligen presenteras simuleringar av Erdős-Rényi-grafer i avsnitt 5.

## 2 Förgreningsprocesser

I förgreningsprocesser betraktar man utvecklingen av en population där varje individ, under sin livstid, föder ett slumpmässigt antal barn. Dessa barn kommer att i sin tur föda ett slumpmässigt antal barn, o.s.v. Enligt Shelton Ross [1] beskrivs förgreningsprocesser som en Markov - kedja  $X_n, n = 0, 1, \dots$  som anger antalet individer i generation  $n$ , d.v.s. det sammanlagda antalet barn som produceras av individerna i generation  $n - 1$ . Reglerna för reproduktionen är att alla individer föder barn enligt samma fördelning, oberoende av varandra, d.v.s. antalet barn till en viss individ bestäms hela tiden av samma fördelning som för den enda individen i generation 0. Vanligtvis antas att populationen vid tid  $t = 0$  består av en enda individ (en stamfader) som själva utgör generation 0. Stamfadern kommer att få ett slumpmässigt antal barn enligt en given sannolikhetsfördelning och dessa utgör generation 1. Varje individ i generation 1 kommer att i sin tur få ett antal barn, vilka alla tillsammans utgör generation 2 o.s.v.

Man kan formulera olika problem för en sådan process t.ex. vad som händer med förgreningsprocessen i långa loppet. Av särskilt intresse är att ta reda på risken för extinktion, d.v.s. sannolikheten att populationen dör ut, under antagandet att populationen startar med en individ, d.v.s.  $X_0 = 1$ . Vi vill alltså undersöka sannolikheten att hela populationen förr eller senare dör ut. Matematiskt kan det uttryckas som:

$$\pi_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0 \mid X_0 = 1) \quad (1)$$

Denna storhet beror av väntevärdet för antalet barn som varje individ producerar under sin livstid, vilket formuleras i följande grundläggande sats från förgreningsprocessteorin.

**Sats 2.1.** *Betrakta en förgreningsprocess  $X_n, n = 0, 1, \dots$  där antas att initialpopulationen består av en enda individ och varje individ producerar i genomsnitt  $\lambda$  barn. Låt  $\pi_0$  beteckna sannolikheten att hela populationen dör*



ut och låt vidare  $T$  beteckna det sammanlagda antalet individer som genereras i processen. Då gäller:

$$\lambda < 1 \Rightarrow \pi_0 = 1 \Rightarrow P(T < \infty) = 1 \quad (2)$$

$$\lambda > 1 \Rightarrow \pi_0 < 1 \Rightarrow P(T = \infty) > 0 \quad (3)$$

I satsen visar (2) att utdöende sker med sannolikheten 1 om väntevärdet  $\lambda$  för antalet barn per individ är mindre än och lika med 1. Däremot säger (3) att om väntevärdet  $\lambda$  är större än 1, då kommer hela populationen att explodera med positiv sannolikhet. Det är denna egenskap hos förgreningsprocesser som kommer att vara till hjälp.

## 2.1 Poisson - approximation av binomialfördelning

Poisson - approximation av binomialfördelning är av principiell betydelse när vi studerar slumpstrukturen hos graden av en given nod i Erdős-Rényi-grafen. För att visa detta approximativa samband anger vi två sannolikhetsgenererande funktioner, en för binomialvariabel och en för poissonvariabel.

- Om  $Y \sim Bin(n, p)$ , så gäller:

$$\begin{aligned} g_y(t) = E[t^Y] &= \sum_{k=0}^n t^k \cdot P(Y = k) \\ &= \sum_{k=0}^n t^k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (tp)^k \cdot (1-p)^{n-k} \\ &= (tp + q)^n \end{aligned}$$

- Om  $Z \sim Po(\lambda)$ , så gäller:

$$\begin{aligned} g_z(t) = E[t^Z] &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \cdot P(Z = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \cdot e^{t\lambda} \\ &= e^{\lambda(t-1)} \end{aligned}$$

Om  $g_{Y_n}(t) \rightarrow g_Z(t)$  så vet vi att  $Y_n \rightarrow Z$  i fördelning, se Sats 5.1 i [1]. Vi får följande resultat:

**Sats 2.2.** *Låt  $Y_n$  vara binomialfördelad med parametrar  $n$  och  $p = \lambda/n$ . Då gäller att  $Y_n \rightarrow Z$  i fördelning, där  $Z$  är Poissonfördelad med parameter  $\lambda$ .*

*Bevis.*

$$g_Z(t) = \left(\frac{\lambda}{n}t + 1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{\lambda}{n}(t-1)\right)^n \rightarrow e^{\lambda(t-1)} \quad \square$$

Högerledet är den sannolikhetsgenererande funktionen för en Poisson( $\lambda$ )-variabel, och satsen följer alltså från Sats 5.1 i [1].

### 3 Utforskningsprocessen

Betrakta en Erdős-Rényi-graf  $G(n, p)$  där vi har ett fixt antal noder  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  och där varje nodpar förbinds med sannolikhet  $p = \lambda/n$ . Hur länkar dras mellan noderna innefattar ett element av slump. Man kan alltså inte säkert säga vilken nod som är sammanlänkad med vilka andra. Den resulterande grafen kan vara uppdelad i separata (sammanhängande) komponenter där ingen kant förbinder noder tillhörande olika komponenter. Vi är intresserade av storleken av den största av dessa komponenter. Denna storhet sägs vara beroende av förväntade antalet noder till en given nod. För att beskriva detta ska vi utforska alla möjliga sammanhängande komponenter i grafen, se [2: avsnitt 4.1.2] för mer detaljer. Men vi definierar först vad som menas med en sammanhängande komponent.

**Definition 3.1.** *Betrakta en graf som innehåller ett antal noder  $V=(v_1, v_2 \dots v_n)$  och  $\binom{n}{2}$  möjliga kanter. Två noder  $v_i$  och  $v_j$  är sammanlänkade om det finns en väg från den enda till den andra. Två noder  $v_i$  och  $v_j$  sägs tillhöra samma komponent i grafen om  $v_i$  och  $v_j$  är sammanlänkade. En graf kan alltså delas in i ett antal komponenter. Låt  $C(v_i)$  beteckna den sammanhängande komponenten som innehåller en given nod  $v_i$ , där  $i = 1, 2, \dots, n$  och låt  $|C(v_i)|$  anger antalet noder som finns med i  $C(v_i)$ .*

Med denna definition tillgänglig ska vi börja med att utforska en sammanhängande komponent av en godtycklig nod, säg noden  $v_1$ , i en Erdős-Rényi graf  $G(n, \lambda/n)$ . Vi ska alltså identifiera de noder som tillhör samma komponent som  $v_1$ . Först och främst kan man tänka sig att de noder som direkt sammanlänkar till noden  $v_1$  är grannar. Dessa noder är, enligt definition 3.1, elementer till  $C(v_1)$ , d.v.s. den sammanhängande komponenten av noden  $v_1$ . Detta antal är helt beroende av hur länkar dras mellan noderna, vilket sker slumpmässigt med sannolikhet  $p$ . Antalet är alltså en stokastisk variabel som

vi betecknar med  $X_1$ . För noden  $v_1$  finns  $n - 1$  möjliga grannar och var och en av dessa är förbundna med  $v_1$  med sannolikhet  $p$ . Antalet grannar till noden  $v_1$  är alltså binomialfördelat med parametrar  $n - 1$  och  $p = \lambda/n$ , d.v.s. sannolikheten att  $v_1$  har precis  $k$  grannar ges av

$$P(X_1 = k) = \binom{n-1}{k} q^{n-1-k} p^k \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (4)$$

där  $q := 1 - p$ . Beteckning:  $X_1 \sim \text{Bin}(n - 1, p)$ .

Skulle det vara så att  $X_1 = 0$ , då kommer  $|C(v_1)| = 1$ , vilket innebär att det inte finns någon nod som sammanlänks till noden  $v_1$  och därmed utgörs en egen komponent av själva noden  $v_1$ . om det skulle vara att  $X_1 \geq 1$  kommer det att finnas åtminstone 1 grannar till noden  $v_1$ . Låt  $v_{i_1}, \dots, v_{i_{X_1}}$  beteckna dessa noder. De noder som vi alltså har upptäckt tillhör  $C(v_1)$ . Det är värt att påpeka att vi har tagit ett steg från noden  $v_1$  för att kunna besöka dess grannar genom ett visst antal kanter. Tar vi två steg var kommer vi att befinna oss? Denna fråga föranleder oss att även utforska grannarnas grannar. Då är vi intresserade av antalet grannar av t.ex. noden  $i_1$ . Detta antal, som vi betecknar  $X_2$ , är också en stokastisk variabel. För noden  $i_1$  är fördelningen för antal grannar inte riktigt densamma som noden  $v_1$ , eftersom en del av de  $n$  initialt noderna, alltså  $1 + X_1$ , nu redan har varit med i  $C(v_1)$  och därmed inte längre deltar i utforskningsprocessen. Så gäller:

$$X_2 \sim \text{Bin}(n - 1 - X_1, p) \quad (5)$$

Betingat på  $X_1$  är alltså även  $X_2$  binomialfördelat.

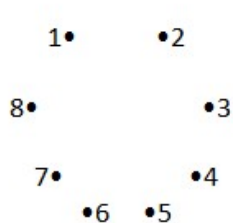
Skulle vi ta fler och fler steg kommer vi att upptäcka alla möjliga noder som sammanbinds till noden  $v_1$  genom grannar, grannars grannar o.s.v. Vi kan då få exempelvis stokastiska variabler  $X_3, X_4, \dots, X_i$  vars fördelning följer regeln  $\text{Bin}(N_i, p)$ , där  $N_i = n - 1 - X_1 - \dots - X_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Sökningen av grannar fortsätter så länge det finns någon icke-utforskad nod kvar i grafen. När alla noder i komponenten är utforskade har vi upptäckt hela komponenten. Utforskningsprocessen fortsätter då genom att vi väljer en av de återstående noderna i grafen (om det finns några) och startar om sökningen från denna nod. Vi utforskar på detta sätt även den komponent som denna nod tillhör. Vi fortsätter tills alla noder i hela grafen har blivit utforskade. Efter denna process har vi klarlagt alla komponenter i grafen. Låt  $C_{max}$  beteckna den största komponenten i grafen, d.v.s.

$$|C_{max}| = \max\{|C(v_i)|\} \quad i = 1, \dots, n.$$

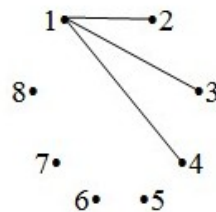
I denna uppsats ska vi uteslutande fokusera oss på utforskandet av sammanhängande komponenter för stora nodmängder. Detta betyder att asymptotiska resultat, då  $n \rightarrow \infty$ , kan antas gälla med god noggrannhet. Enligt ovanstående resonemang om utforskandet av sammanhängande komponenter är antalet grannar till en given nod binomialfördelat med parametrar  $N_i$  och  $p = \lambda/n$ . En viktig iakttagelse är nu att, om nodmängden är stor, så kommer antalet redan utforskade noder för ett fixt  $i$  med stor sannolikhet att vara mycket litet i förhållande till  $n$ . Alltså har vi att  $N_i = n - 1 - X_i - \dots - X_i \approx n$  och, enligt Sats 2.2, kan vi då approximera en  $\text{Bin}(N_i, \lambda/n)$  - fördelning med en Poisson - fördelning med parameter  $\lambda$ . Det förväntade antalet medlemmar i varje nytt steg i utforskningsprocessen är alltså ungefär Poisson - fördelat i början av processen.

### 3.1 Ett exempel

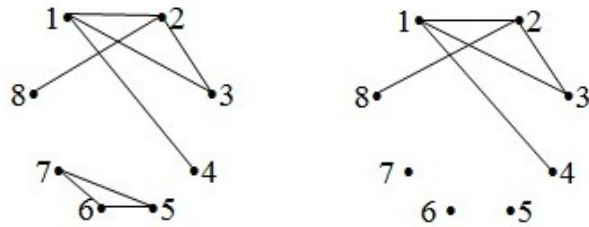
Betrakta grafen i (a), som kan tänkas vara ett utfall av Erdős-Eényi-modellen. Vi har  $n = 8$  noder och 28 möjliga kanter, av vilka de 8 kanter som finns med i bilden har blivit realiserade. Vi vill utforska komponenterna i grafen med hjälp av tidigare utforskningsprocess. Vi startar med nod 1. Från denna nod går det att ta sig till noderna 2, 3 och 4 - detta är grannarna till nod 1 och de upptäcks alltså i det första steget i utforskningsprocessen, se (b). I nästa steg går utforskningsprocessen vidare till grannarna till dessa noder, vilket i exemplet bara är nod 8, som är granne med nod 2, se (c). Efter detta steg finns inga utforskade grannar kvar till någon av noderna i denna komponent, och hela komponenten är alltså utforskad. Vi går då vidare och utforskar de andra komponenter i grafen på samma sätt. Då alla noder i grafen har utforskats i processen har vi alltså hittat två komponenter, där den första,  $C(1)$ , är den största med fem noder, se (d).



(a)  $n = 8$



(b) Komponentens med tre noder



(c) Komponenten med fem noder

(d) Den största komponenten med fem noder

Figur 1: Ett tänkbart utfall av Erdős-Rényi-grafer.

## 4 Förgreningsprocesstolkning av utforskningsprocessen och huvudresultat

I förgreningsprocesstolkningen av fasövergången hos Erdős-Rényi-grafer fungerar den givna noden vid tid  $t = 0$  som stamfader och en födelse i förgreningsprocessen svarar mot uppkomsten av grannar i utforskningsprocessen, där varje nod genererar ett poissonfördelat antal grannar med väntevärde  $\lambda$ . Om  $\lambda < 1$  är, enligt sats 2.1, den totala avkommen i denna förgreningsprocess ändlig med sannolikhet 1. Detta betyder att förgreningsprocessen så småningom dör ut och existens av en jättekompont i utforskningsprocessen är därmed omöjligt. Om  $\lambda > 1$  däremot, finns en positiv sannolikhet att förgreningsprocessen exploderar, vilket betyder att en jättekompont är möjlig. Man kan visa att en jättekompont faktiskt existerar i detta fall, och att dess storlek ges av slutstorleken hos den approximerande förgreningsprocessen (och alltså är deterministisk). Detta kräver dock ytterligare argument som garanterar att förgreningsprocessapproximationen håller tillräckligt länge. Vi har dock motiverat följande sats:

**Sats 4.1.** *Betrakta en Erdős-Rényi-graf  $G(n, \lambda/n)$  för något  $\lambda > 0$ . Låt  $|C_{max}|/n$  beteckna andelen noder i slumpgrafan som ingår i den största sammanhängande komponenten. Då gäller följande.*

Det existerar en funktion  $g(\lambda)$  sådan att

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} |C_{max}|/n \rightarrow g(\lambda)) = 1 \quad (6)$$

där

$$g(\lambda) \begin{cases} = 0 & \text{om } \lambda < 1 \\ > 0 & \text{om } \lambda > 1 \end{cases}$$

## 5 Simulering av Erdős-Rényi-grafer

Teoretiskt har det ovan beskrivits att Erdős-Rényi-grafen har en fasövergångs-fenomen som kan förstås matematiskt i term av förgreningsprocesser. Syftet med det här avsnittet är att illustrera det teoretiska resultatet med en datorsimulering.

### 5.1 Metod

Existensen av en stor sammanhängande komponent undersöks enligt följande algoritm:

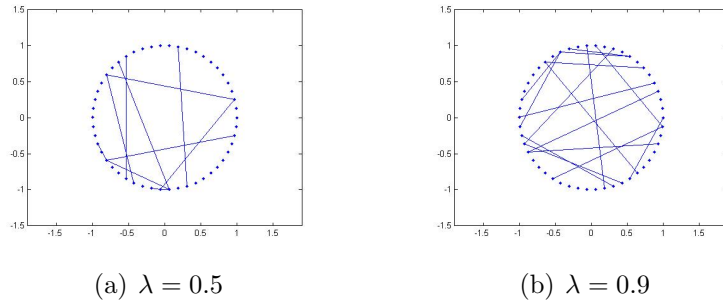
- Vi fixerar  $p \in (0, 1)$  och  $n$  i Erdős-Rényi-grafer.
- Vi använder de trigonometriska funktionerna - sinus och cosinus för att noderna i slumpgrafen grafiskt placeras på en cirkel med lika stort avstånd emellan sig. Som mått på vinklar använder vi radianer som ligger mellan 0 och  $2\pi$  med inkrement på  $\frac{2\pi}{n}$ , där  $n$  är samma som nodmängden.
- Vi inför en  $n \times n$  nollmatrix  $A$  av följande utseende:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

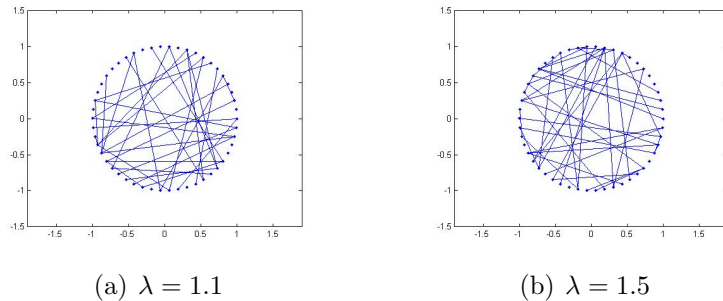
För varje nodpar  $(v_i, v_j)$  med  $i < j$  låter vi sedan datorn dra ett slumpantal som är likformigt fördelat på intervallet  $[0,1]$ . Om slumptalet är mindre än  $p$  ändrar vi element  $A_{ij}$  och  $A_{ji}$  i matrisen till en etta. Vi ritar sedan en kant mellan noderna  $v_i$  och  $v_j$  om  $A_{ij} = 1$ . Detta betyder precis att en kant skapas mellan noderna  $v_i$  och  $v_j$  med sannolikhet  $p$ . Matrisen  $A$  är förstas symmetrisk och eftersom ingen kant börjar och slutar i samma nod består diagonalen endast av nollor.

### 5.2 Resultat

Vi ska simulera Erdős-Rényi-grafer med ovanstående algoritm med  $n = 50$  och testar olika värden på  $p$ . Detta val av parametrarna kommer att ge en illustration av hur Erdős-Rényi-grafer beter sig vid fasövergången.



Figur 2: Två Erdős-Rényi-grafer med  $\lambda < 1$ .



Figur 3: Två Erdős-Rényi-grafer med  $\lambda > 1$ .

Vi väljer  $p = 0.01, 0.018, 0.022$  respektive  $0.03$  för att se hur grafens beteende förändras i takt med  $\lambda$ . För  $p = 0.01$  vilket medför att  $\lambda = 0.5$  som det i (a) av Figur 2 innehåller grafen små komponenter inom vilka utgörs den största komponenten av 15 noder. Istället väljer vi  $p = 0.018$  sådant att  $\lambda = 0.9$ . Det framgår av (b) i Figur 2 att 25 sammanlänkade noder ingår i den största komponenten. Väljer man  $p = 0.022$  då  $\lambda = 1.1$  uppvisar (a) i Figur 3 den största komponenten som innehåller 37 noder och för  $p = 0.03$  vilket ger  $\lambda = 1.5$  ökas de sammanhängande noder till 43. Detta visas i (b) av Figur 3.

Det framgår av dessa observationer att grafen kommer att innehålla en jättekompont när  $\lambda$  passerar 1 då fasövergången sker. Detta kan illustreras av (b) i Figur 2 och (a) i Figur 3. I 3(a) visas grafen med en tätt sammanhängande komponent inom vilket nästan alla noder är kopplade till varandra då  $\lambda > 1$  i jämförelse med en betydligt mindre komponent i 2(b) då  $\lambda < 1$ . Det var precis vad fasövergången talar om.

## 6 Slutsats

Avsikten med denna uppsats har varit att ge en inblick i fasövergången hos Erdős-Rényi-grafer. Genom att tillämpa en förgreningsprocess på utforskningsprocessen för en grafkomponent kan vi dra slutsats att en jättekompont i grafen existerar om och endast om fasövergången sker. När vi undersöker hur grafen beter sig med hjälp av simuleringen kan vi konstatera att de teoretiska resultaten består.



## Referenser

- [1] Gut, A (1995): *An intermediate course in probability*. Springer
- [2] Hofstad, R. (2006): *Random Graphs med Complex Networks*. 11 - 14, 23 - 50.
- [3] Ross, S. (2008): *Introduction to Probability Models*. upplagen 9, 233 - 236. Academic Press