



Stockholms  
universitet

# En modell för spatial tillväxt

Yanxiong Li

Kandidatuppsats 2009:5  
Matematisk statistik  
Juni 2009

[www.math.su.se/matstat](http://www.math.su.se/matstat)

Matematisk statistik  
Matematiska institutionen  
Stockholms universitet  
106 91 Stockholm

# En modell for spatial tillvaxt

Yanxiong Li\*

Juni 2009

## Sammanfattning

I denna uppsats undersöks Richardsons modell för tillväxt på  $\mathbf{Z}^d$  och de teoretiska resultaten redovisas. Modellen kan tänkas beskriva ett smittsamt fenomen som sprids från nod till nod på  $\mathbf{Z}^d$ . De viktigaste resultaten säger att tillväxten är linjär i varje fix riktning och att det smittade området skalar med tiden konvergerar mot en deterministisk asymptotisk form. För att undersöka spridningen i en fix riktning används subadditiva ergodsatsen. Den asymptotiska formen som fås då alla riktningar betraktas simultant är svår att karaktärisera teoretiskt och för att undersöka hur den ser ut i 2 dimensioner genomförs datorsimuleringar. Dessa visar att det finns en tendens att smittan växer snabbare längs axlarna än längs diagonalerna. Det skulle betyda att den asymptotiska formen är mindre än en cirkel som anpassas efter smittspridningen längs axlarna.

*Nyckelord:* spatial tillväxt, Richardsons modell, asymptotisk form, subadditiva ergodsatsen.

---

\*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms universitet, 106 91, Sverige. E-post: liyx2se@gmail.com. Handledare: Maria Dejifen.

# En modell för spatial tillväxt

Yanxiong Li \*

4 juni 2009

## Sammanfattning

I denna uppsats undersöks Richardsons modell för tillväxt på  $\mathbf{Z}^d$  och de teoretiska resultaten redovisas. Modellen kan tänkas beskriva ett smittsamt fenomen som sprids från nod till nod på  $\mathbf{Z}^d$ . De viktigaste resultaten säger att tillväxten är linjär i varje fix riktning och att det smittade området skalat med tiden konvergerar mot en deterministisk asymptotisk form. För att undersöka spridningen i en fix riktning används subadditiva ergodsatsen. Den asymptotiska formen som fås då alla riktningar betraktas simultant är svår att karaktärisera teoretiskt och för att undersöka hur den ser ut i 2 dimensioner genomförs datorsimuleringar. Dessa visar att det finns en tendens att smittan växer snabbare längs axlarna än längs diagonalerna. Det skulle betyda att den asymptotiska formen är mindre än en cirkel som anpassas efter smittspridningen längs axlarna.

*Nyckelord:* spatial tillväxt, Richardsons modell, asymptotisk form, subadditiva ergodsatsen.

---

\*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms Universitet, SE-106 91 Stockholm. E-post: liyx2se@gmail.com. Handledare: Maria Deijfen.

## Abstract

This thesis deals with Richardson model for growth in  $\mathbf{Z}^d$  and relevant theoretical results are presented. The model can be used to describe an infective phenomenon that is spreading between nodes in  $\mathbf{Z}^d$ . The most important result is that the infection grows linearly in every fixed direction and the infected area scaled by time converges to a deterministic asymptotic form. In order to examine growth in a fixed direction, the subadditive ergodic theorem is applied. To theoretically characterize, the asymptotic form which is gotten when all directions are considered simultaneously is difficult and with the aim of finding how the form in 2 dimensions looks a computer simulation is made. The result of simulation shows that there is a tendency that the infection grows faster along axes than along diagonals. This could mean that the asymptotic form is smaller than the circle which is adjusted after the growth along axes.

*Key words:* spatial growth, Richardson model, asymptotic form, subadditive ergodic theorem.

## Innehåll

<b>1 Inledning</b>	<b>4</b>
1.1 Spatial tillväxt . . . . .	4
1.2 Syfte och frågeställning . . . . .	5
<b>2 Richardsons modell</b>	<b>5</b>
2.1 Inledande beskrivning . . . . .	5
2.2 Matematisk beskrivning . . . . .	6
<b>3 Tillväxt i en fix riktning</b>	<b>7</b>
3.1 Subadditiva ergodsatsen . . . . .	7
3.2 Tillväxt hos Richardsons modell i en fix riktning . . . . .	8
3.2.1 Subadditivitet och andra villkor . . . . .	8
3.2.2 Konstant tillväxt . . . . .	9
<b>4 Formsatsen</b>	<b>10</b>
4.1 Formulering av formsatsen . . . . .	10
4.2 Richardsons modell i 1 dimension . . . . .	11
<b>5 Simuleringar</b>	<b>12</b>
5.1 Metod . . . . .	12
5.2 Resultatredovisning och diskussion . . . . .	12
<b>6 Slutsatser</b>	<b>13</b>

# 1 Inledning

## 1.1 Spatial tillväxt

Med spatial tillväxt menas hur ett fenomen utvecklar sig i något slags rum. Rummet kan vara diskret, t.ex.  $\mathbf{Z}^d$ , eller kontinuerligt, t.ex.  $\mathbf{R}^d$ . Att en droppe bläck droppas på ett papper och sedan perkolerar åt alla håll är ett exempel på 2-dimensionell tillväxt, och en ballong som blåses upp kan vara ett exempel på 3-dimensionell. Båda tillväxterna är kontinuerliga. Ett diskret exempel kan illustreras av en skogsbrand, träden i skogen representeras av noderna i en lattice i 2 dimensioner, och elden, som står för tillväxten, sprider sig från träd till träd. Liknande exempel är ett virus som infekterar människor, information som överförs mellan folk osv.

Innan vi går vidare, bör en begränsning nämnas hos exemplet med ballongen, nämligen att här är ballongens form bestämd i förväg. Är ballongen rund från början, blir den rund även i uppblåst tillstånd, är den i cylinderform, blir den en cylinder även uppblåst, men så är inte nödvändigtvis fallet när det gäller spatial tillväxt. Det finns inte alltid en förutbestämd begränsning av hur det ockuperade rummet kommer att se ut till slut. Det är precis detta, vilken form det ockuperade rummet får med tiden, som väcker stort intresse hos många. Det är också där som begreppet asymptotisk form kommer in i bilden.

För att beskriva spatial tillväxt, behövs en modell. En god modell, menar Sundberg(1997), är ”en starkt förenklad bild, som tar fasta på och ofta överbetonar några karaktäristiska kännetecken, men ändå tydligt liknar verkligheten”. För att modellera spatial tillväxt behövs regler som beskriver:

1. rummet där tillväxten äger rum,
2. hur tillväxten utvecklar sig i rummet,
3. hur tillväxten utvecklar sig i ett tidsperspektiv.

Om en eller flera av ovanstående regler innehåller någon form av slumpmässighet, då är modellen stokastisk. Den spatiala tillväxten modelleras då ofta med hjälp av en stokastisk process. I allmänhet är en stokastisk process  $\{X(t), t \in T\}$  en samling av stokastiska variabler där  $X(t)$  är en stokastisk variabel för varje  $t \in T$ . Om index  $t$  markerar tid, kan  $X(t)$  i samband med spatial tillväxt beteckna det ockuperade området vid tid  $t$ . Lite senare kommer vi att stöta på några viktiga egenskaper hos stokastiska processer, nämligen subadditivitet, stationäritet och ergodicitet. Modellen som beskrivs i uppsatsen heter Richardsons modell och det är regel två och tre som innehåller slumpmässighet.

## 1.2 Syfte och frågeställning

Huvudsyftet med uppsatsen är att beskriva Richardsons modell och de teoretiska resultaten, samt att göra en datorsimulering av modellen för att undersöka hur den asymptotiska formen ser ut; går spridningen fortare längs koordinat-axlarna än längs diagonalerna eller tvärtom? Simuleringen utförs i Matlab.

## 2 Richardsons modell

### 2.1 Inledande beskrivning

En av de enklaste modellerna för diskret spatial tillväxt är den så kallade Richardson modellen, vilken publicerades av Richardson (1973). Modellen är ett specialfall av så kallad första passage perkolation (FPP), vilken introducerades av Hammersley och Welsh (1965) som en modell för att beskriva att hur en vätska flyter genom ett poröst medium. FPP äger rum på  $\mathbf{Z}^d$ , och varje kant i  $\mathbf{Z}^d$ -lattice bifogas en stokastisk variabel som representerar den tiden det tar för vätskan för att flyta igenom kanten. I Richardsons modell, antas varje passagetid som tillhör varje kant att vara oberoende och lika fördelade, i.i.d.<sup>1</sup>  $Exp(\lambda)$ <sup>2</sup>. Modellen fungerar i alla dimensioner, men i det här kapitlet beskrivs den i 2 dimensioner, dvs. på  $\mathbf{Z}^2$ . I slutet av nästa kapitel behandlas Richardsons modell i 1 dimension, som visar sig vara betydligt lättare att analysera.

Rummet  $\mathbf{Z}^2$  består av punkter som ligger på noderna i ett oändligt kvadratisk lattice, där avståndet från en punkt till var och en av dess närmaste fyra grannar i lattice är lika med ett. Punkter på avstånd 1 är förbundna med en kant. Vi betraktar ett fenomen, t.ex. ett virus, som sprids från punkt till punkt i denna struktur. En punkt i taget blir smittad och smittorna är oberoende av varandra. Tillståndet av en punkt är antingen osmittad eller smittad. De smittade punkterna kan inte återställa sig, vilket betyder att det smittade området bara blir större och större.

Enligt Richardsons modell, antas det att vid tiden noll är det bara en punkt i lattice som är smittad, eller ockuperad. Vi kan anta att detta är origo. Nästa potentiella smittade punkt kan bara vara en av de fyra punkter som ligger närmast origo. Alla fyra har lika stor möjlighet att bli nästa smittad punkt. Hur nästa punkt blir smittad kan nu liknas vid ett tävlingslopp. Antag att kanten mellan en smittad punkt och en osmittad punkt representeras av en tävlingsdeltagare. I det första steget finns det bara fyra deltagare som springer från origo vid samma tidpunkt mot varsin punkt, dvs. de fyra närliggande punkterna. Tiderna de tar att nå sina mål är i.i.d. exponentialfördelade. Den som på kortast tid genomför loppet får smitta, eller

---

<sup>1</sup>Independent and Identically Distributed på engelska

<sup>2</sup>Exponentialfördelningen är här parametriserad så att  $\lambda$  anger väntevärdet



ockupera, den punkt som deltagaren sprungit mot. Tiden till att den andra punkten blir smittad blir alltså den kortaste tiden bland de fyra deltagarna. De andra deltagarna blir tvungna att gå tillbaka till respektive startpunkt och förbereda sig för nästa tävling. Detta åstadkoms genom antagandet om exponentialfördelning (som är minneslös). Efter den första omgången, blir det i lattice två smittade punkter med sex osmittade punkter omkring sig. Nu börjar tävlingen om igen med sex deltagare som försöker nå de sex punkterna. Tävlingarna fortsätter tills vidare, tills alla punkterna i latticet är smittade.

Hur stor möjlighet att en punkt blir smittad beror på hur många av punktens närmaste grannar som är smittade. I den första omgången, finns det fyra deltagare som strävar mot fyra mål (punkter), med andra ord dessa fyra punkter har bara en smittad punkt bland sina närmaste grannar, så varje punkt har 25 procents sannolikhet att bli nästa smittade punkt och varje deltagare har 25 procents sannolikhet att vinna tävlingen. Om en punkt har två smittade punkter bland sina fyra närmaste grannar, har punkten dubbelt så stor sannolikhet att bli nästa smittade punkt än de punkter som bara har en smittad granne. Smittning kommer att gå allt snabbare när fler punkter blir smittade, dvs. ju fler medtävlare desto större chans att få ett bra resultat.

Frågan nu är hur det smittade området utvecklar sig eller hur området ser ut efter lång tid? En annan intressant fråga är hur snabbt området växer?

De är spännande frågor men tyvärr är det ingen som har fullständigt svar på dem. En viss inblick kan man dock få genom den så kallade formsatsen vilken först formulerades av Richardson (1973) och är ett av de viktigaste resultaten för Richardsons modell. Den påstår, kortfattat, att mängden av smittade punkter växer linjärt i tiden åt varje håll och det smittade rummet skalad med tiden konvergerar mot en bestämd asymptotisk form  $\mathbf{A}$ . Här menas, den asymptotiska formen, den formen då tiden går mot oändligheten.

Richardsons modell utvecklades senare av Häggström och Pemantle (1998, 2000), till så kallad två-typs Richardsons modell, där två olika fenomen konkurrerar med varandra om att ockupera hela rummet. En kontinuum-version utvecklades också av Deijfen (2002).

## 2.2 Matematisk beskrivning

Richardsons modell definieras på följande sätt. Till varje kant  $e$ , som har ändpunkter  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{Z}^d$  och  $|e| = 1$ , anslutes en exponentialfördelad stokastisk variabel  $\tau(e)$  med väntevärde  $\lambda$ ,  $\lambda > 0$ . Variablerna på olika kanter är oberoende och variabeln  $\tau(e)$  anger den tid som smittan tar på sig från punkt  $\mathbf{u}$  till punkt  $\mathbf{v}$  genom kant  $e$ . Tillämpning av exponentialfördelning medför att smittprocessen blir 'Markovian', dvs. en händelse som skulle inträffa efter tidpunkt  $t$  beror bara på situationen vid tidpunkt  $t$  och har inget att göra med situationen före tidpunkt  $t$ .

För punkter  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{Z}^d$ , betecknar  $\mathfrak{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  alla möjliga stigar mellan punkterna. För varje stig  $r \in \mathfrak{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , som består av en serie av kanter  $e_i$ , dvs.  $r = (e_1, \dots, e_n)$ , definieras passagetiden för stigen som:

$$T(r) \equiv \sum_i \tau(e_i) \quad (1)$$

Första-passage-tiden  $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , dvs. den kortaste tiden att ta sig från  $\mathbf{x}$  till  $\mathbf{y}$  definieras som:

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf \{T(r) : r \in \mathfrak{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} \quad (2)$$

Med  $\mathbf{0}$  som står för origo, betyder  $T(\mathbf{0}, \mathbf{y})$  den kortaste tiden som smittan tar på sig från  $\mathbf{0}$  till punkt  $\mathbf{y}$ .

För att undersöka hur smittan beter sig längs en bestämd axel, definieras  $a_{0,n} \equiv T(\mathbf{0}, n\hat{e}_1)$ , där  $\hat{e}_i$  betecknar en enhet vektor på  $i^{\text{th}}$  axeln, och  $a_{m,n} \equiv T(m\hat{e}_1, n\hat{e}_1)$ ,  $0 \leq m \leq n$ . Samma argument som används för att studera tillväxt längs axlarna kan användas för att studera tillväxt i en godtycklig fix riktning.

### 3 Tillväxt i en fix riktning

I det här kapitlet presenteras den subadditiva ergodsatsen, och sedan undersöks om Richardsons modell uppfyller villkoren för satsen och vilken slutsats som kan fås.

#### 3.1 Subadditiva ergodsatsen

Inom sannolikhets teori, är subadditiv ergodisk teori ett av de viktigaste framstegen de senaste tjugo åren. Teorin utvecklades först av Hammersley och Welsh(1965), och vidareutvecklades av Kingman (1968). Uppkomst och utveckling av teorin är i stor utsträckning motiverade av dess tillämpning i FPP. Kingmans resultat förbättrades av Liggett (1985) som formulerade en version med svagare villkor. Liggetts version presenteras nedan.

**Theorem 3.1 (Subadditiva ergodsatsen)** Låt  $\{X_{m,n}\}$  vara en samling av stokastiska variabler indexerad av heltal  $m$  och  $n$ , där  $0 \leq m < n$ , och antag att följande villkor är uppfyllda:

- (i)  $X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n}$ .
- (ii)  $\{X_{m+1,m+k+1} : k \geq 1\}$  och  $\{X_{m,m+k} : k \geq 1\}$  har samma fördelning, för varje  $m \geq 0$ .
- (iii) För varje  $k \geq 1$ , är  $\{X_{nk,(n+1)k} : n \geq 1\}$  en stationär process.
- (iv) För varje  $n$ ,  $-\infty < E[X_{0,n}] < \infty$  och  $E[X_{0,n}] \geq -cn$ ,  $c$  är konstant.

Då gäller:

- (v)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[X_{0,n}]}{n}$  existerar och är lika med  $r \equiv \inf_n \frac{E[X_{0,n}]}{n}$ .
- (vi)  $X \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_{0,n}}{n}$  existerar nästan säkert<sup>3</sup> och i  $L_1$ <sup>4</sup>.
- (vii)  $E[X] = r$ .

Om den stationära processen i (iii) är ergodisk, då är  $X = r$  n.s.

Det betyder att, om alla villkor uppfylls, konvergerar följden  $\frac{X_{0,n}}{n}$  nästan säkert mot ett konstant, dvs.  $r$  i satsen ovan, när  $n$  går mot oändligheten.

### 3.2 Tillväxt hos Richardsons modell i en fix riktning

Med samband med Richardsons modell, ska vi först reda ut om  $a_{0,n}$  uppfyller alla villkor för den subadditiva ergodsatsen och vidare vilken slutsatsen kan bli.

#### 3.2.1 Subadditivitet och andra villkor

Följden  $\{a_{m,n}\}$  har en 'subadditiv' egenskap, nämligen:

$$a_{0,n} \leq a_{0,m} + a_{m,n} \quad (3)$$

Olikheten gäller eftersom:

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \inf \{T(r'') : r'' \in \mathfrak{R}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\} \quad (4)$$

$$\leq \inf \{T(r'') : r'' \in \mathfrak{R}(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \mathbf{y} \in r''\} \quad (5)$$

$$= \inf \{T(r) : r \in \mathfrak{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} + \inf \{T(r') : r' \in \mathfrak{R}(\mathbf{y}, \mathbf{z})\} \quad (6)$$

$$= T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + T(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (7)$$

Resonemanget i olikhet (5) är följande. Betrakta mängden  $\mathfrak{R}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  av stigar som börjar i punkt  $\mathbf{x}$  och slutar vid punkt  $\mathbf{z}$ , och mängden  $\{r \in \mathfrak{R}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) : \mathbf{y} \in r\}$  av sådana stigar som samtidigt går förbi punkt  $\mathbf{y}$ . Det gäller att

$$\{r \in \mathfrak{R}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) : \mathbf{y} \in r\} \subset \mathfrak{R}(\mathbf{x}, \mathbf{z}),$$

vilket betyder att det i mängden  $\mathfrak{R}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  finns fler möjligheter att upptäcka ett snabbt förlopp. Detta medför olikhet (5).

Villkor (ii) säger att följden  $\{X_{m+1, m+k+1} : k \geq 1\}$  ska vara stationär i  $m$ , och i den starkare formen av villkor (iii), i slutet av satsen, krävs att  $\{X_{nk, (n+1)k} : n \geq 1\}$  är ergodisk för varje  $k \geq 1$ . Begreppet ergodicitet ska

<sup>3</sup>Man säger att  $X_n \rightarrow X$  nästan säkert (n.s.), om  $P(X_n \rightarrow X) = 1$

<sup>4</sup>Att  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_{0,n}}{n}$  existerar i  $L_1$  betyder att  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[X_{0,n}]}{n}$  existerar.

vi inte gå in närmare på i det här arbetet, men i princip är en ergodisk följd  $Y_n$  en följd sådan att  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f(Y_m)$  konvergerar mot  $Ef(Y_0)$  för varje funktion  $f$  för vilken  $Ef(Y_0) < \infty$ , se Durrett (1995) för en formell definition av ergodicitet och fler detaljer kring detta. Att följder av oberoende lika fördelade variabler (i.i.d.-följder) är både stationära och ergodiska följer direkt från definitionerna. Detta gäller även funktioner av i.i.d.-följder som ärver dessa egenskaper; se Durrett (1995). När det gäller Richardson modellen, så är passagetiderna  $\{a_{m,n}\}$  funktioner av passagetiderna  $\{\tau(e_i)\}$  på kanterna, som ju är oberoende och lika fördelade. Från detta följer att  $\{a_{m,n}\}$  uppfyller villkor (ii) och den starkare formen av villkor (iii).

Vad gäller villkoret (iv), har vi att  $E[a_{0,n}] \leq nE[a_{0,1}]$ . Om  $E[a_{0,1}] < \infty$ , följer det att  $E[a_{0,n}] < \infty$ . Enligt Richardsons modell är  $\tau(e_i)$  i.i.d. exponentialfördelade vilket leder till att  $E[a_{0,1}] \leq E[\tau(e_i)] = \lambda$ ,  $0 < \lambda < \infty$ . Således uppfylls villkoret (iv) också.

### 3.2.2 Konstant tillväxt

Då alla de nödvändiga villkoren som behövs för att tillämpa subadditiva ergodsatsen är uppfyllda, kan slutsatsen dras att:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{0,n}}{n} \rightarrow \mu(=r) \quad \text{n.s.} \quad (8)$$

Detta betyder att hastigheten för smittan längs en axel, dvs. inversen av  $\frac{a_{0,n}}{n}$ , konvergerar nästan säkert mot en konstant  $\frac{1}{\mu}$  när  $n$  går mot oändligheten. Talet  $\mu$  kallas för tidskonstant och beror bara på fördelningen för kantvariablerna  $\tau(e_i)$  och dimensionen  $d$  hos latticet. Det är naturligt att man undrar att, om  $d$  och fördelningen för  $\tau(e_i)$  är givna, kan man då räkna ut värdet av  $\mu$  explicit. Tyvärr är det fortfarande en öppen fråga, men lite ljus kan fås från Smythe och Wierman (1978) och Janson (1981). T.ex. i Richardson modellen, där passagetiderna på kanterna är exponentialfördelade, kan man visa att  $\mu > 0$ , se t.ex. Smythe och Wierman (1978).

För att analysera smittans tillväxt i en godtycklig riktning  $\vec{x}$ , kan en enhetsvektor i denna riktning definieras som  $\hat{x} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ . Eftersom det inte är säkert att punkten  $\hat{x}$  tillhör  $\mathbf{Z}^d$ , bedöms  $\hat{x}$  som smittad när den närmaste punkten till  $\hat{x}$  i  $\mathbf{Z}^d$  blir smittad. Således kan vi på liknande sätt som  $a_{0,n}$ , definiera:  $b_{0,n}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{T}(\mathbf{0}, n\hat{x})$ . Med hjälp av samma argument som längs axlarna, dvs. för  $a_{0,n}$ , gäller slutsatsen (8) även för  $b_{0,n}(\mathbf{x})$ , dvs att för varje riktning  $\vec{x}$  finns ett tal  $\mu(\mathbf{x}) > 0$  sådant att  $\frac{b_{0,n}(\mathbf{x})}{n}$  konvergerar nästan säkert mot  $\mu(\mathbf{x})$ , när  $n$  går mot oändligheten. Vi har alltså att smittans tillväxt är linjär i tiden i varje fix riktning. Nästa steg är att analysera hur tillväxten beter sig när alla riktningar betraktas simultant. Detta beskrivs i den så kallade formsatsen.

## 4 Formsatsen

### 4.1 Formulering av formsatsen

För att förstå formsatsen, kan man tänka sig att man befinner sig vid origo och blickar ut över det smittade området från en luftballong. Luftballongen kan styras så tillvida att den kan flyga upp, dyka ned eller stå still. Syftet är att få en överblick av hela det smittade området. Frågan är hur snabbt ballongen ska flyga upp. Om det går för långsamt är det till ingen nytta eftersom hela synfältet kommer att fyllas med smitta, och om det går för snabbt kommer området att försvinna ur sikte. Men om ballongen flyger upp med samma hastighet som det smittade området växer till sig kan området hela tiden ligga under uppsikt på samma skala. Frågan är hur den rätta hastigheten kan bestämmas, och hur formen på området då ser ut.

I föregående avsnitt visades att smittan växer linjärt i tiden i varje fix riktning. Det betyder att den rätta hastigheten för ballongen ska vara jämn, dvs. höjden som ballongen flyger upp per tidsenhet ska vara konstant. Formsatsen handlar om den bild av det smittade området som man då ser nere på latticet. Enligt formsatsen konvergerar området mot en deterministisk form, dvs en form som är förutbestämd. På grund av att modellen innehåller slumpmässighet, skulle man kunna tänka sig att det smittade området inte konvergerar mot en deterministisk form, utan att olika former skulle kunna uppkomma vid olika realisationer av modellen. Att det inte är så följer av formsatsen, som säger att på rätt skala kommer formen av det smittade området att konvergera mot en deterministisk form.

Genom resultat från tillämpningen av den subadditiva ergodsatsen, vet vi att tillväxten hos smitta i en fix riktning är linjär i tiden. Enligt formsatsen består den egenskapen även när samtidig tillväxt åt alla håll undersöks. Detta är huvudresultatet för Richardsons modell. Nästa fråga blir hur det smittade rummet ser ut. Eftersom modellen är diskret, bör det smittade rummet definieras om så att det blir kontinuerligt på något sätt. Först definieras:

$$\mathbf{W}(t) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{Z}^d : a(\mathbf{0}, \mathbf{x}) \leq t \right\} \quad (9)$$

som mängden av smittade punkter vid tid  $t$ .

Sedan definieras:

$$\widetilde{\mathbf{W}}(t) = \{ \mathbf{y} + B : \mathbf{y} \in \mathbf{W}(t) \} \quad (10)$$

där  $B = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d$  är en enhets kub med mittpunkt i origo.  $\widetilde{\mathbf{W}}(t)$  är alltså en kontinuum-version av det smittade rummet vid tid  $t$ .

**Theorem 4.1 (Formsatsen)** *Det finns en mängd  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^d$  sådan att för alla  $\epsilon > 0$  gäller nästan säkert att*

$$(1 - \epsilon)\mathbf{A} \subseteq \frac{\widetilde{\mathbf{W}}(t)}{t} \subseteq (1 + \epsilon)\mathbf{A}$$

för stora  $t$ .

Slutsatsen är att det smittade rummet skalat med tiden konvergerar nästan säkert mot en deterministisk mängd  $\mathbf{A}$ . Med andra ord,  $P(T < \infty) = 1$ , där:

$$T = \inf \left\{ s : (1 - \epsilon)\mathbf{A} \subseteq \frac{\widetilde{\mathbf{W}}(t)}{t} \subseteq (1 + \epsilon)\mathbf{A} \text{ gäller för alla } t \geq s \right\}. \quad (11)$$

Men att utförligt eller ens approximativt redovisa vilken form mängden  $\mathbf{A}$  har är mycket komplicerat. Svårigheterna beror på att rummet  $\mathbf{Z}^d$  inte är rotations-invariant, vilket betyder att  $\mathbf{Z}^d$  inte blir densamma om rummet roteras till vilken annan grad som helst förutom de som är en multipel av 90 grader. Detta medför att smittans tillväxt i rummet beter sig olika längs axlarna i förhållande till t ex längs diagonalerna. Att studera detta är ett av syftena med datorsimuleringen med Richardsons modell i 2 dimension i kapitel 5.

## 4.2 Richardsons modell i 1 dimension

I Richardsons modell i 1 dimension, är punkterna ordnade på en oändlig rak linje. I det här fallet kan samma slutsats som ovan dras utan hjälp av de satser som presenterats. Den väsentliga skillnaden jämfört med det flerdimensionella fallet är, att mellan två godtyckliga punkter, finns det nu bara en stig för att ta sig från den ena punkten till den andra punkten. Då blir  $a_{0,n} = \sum_{i=1}^n \tau(e_i)$ .

Tidskonstant  $\mu$  blir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{0,n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \tau(e_i)}{n} = E[\tau(e_i)] = \lambda \quad \text{n.s.}, \quad (12)$$

där den andra likheten följer från stora talens lag.

Det smittade området  $\frac{\widetilde{\mathbf{W}}(t)}{t}$  är ett intervall i 1 dimension. Låt  $H_t$  vara den högra ändpunkten som är smittad vid tidpunkt  $t$ , och skriv  $T_{H_t} = T(0, H_t)$  för tidpunkten då  $H_t$  blir smittad. Vi har att  $t \in [T_{H_t}, T_{H_{t+1}})$  och det är klart att  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{H_t}}{t} = 1$ . Alltså har vi att:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H_t}{t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_t}{T_{H_t}} \cdot \frac{T_{H_t}}{t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sum_{i=1}^n \tau(e_i)} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{n.s.} \quad (13)$$

Så den eftertraktade deterministiska mängden  $\mathbf{A}$  är lika med intervallet  $[-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}]$ .

## 5 Simuleringar

Teoretiskt har det ovan beskrivits att den asymptotiska formen av det smittade området i Richardsons modell konvergerar nästan säkert mot en deterministisk form  $\mathbf{A}$  när tid  $t$  går mot oändligheten. Eftersom  $\mathbf{Z}^d$  inte är rotations-invariant, sker tillväxten dock med olika hastighet i de olika riktningarna. Hur det sker i verkligheten är av stort intresse. Således är syftet med datorsimuleringen av Richardsons modell att undersöka detta. Simuleringen av Richardsons modell i 2 dimensioner utförs i Matlab.

### 5.1 Metod

Simuleringen baseras på de tävlingar mellan passagetiderna på kanterna som beskrevs i avsnitt 2.1. Där beskriver vi hur tiden tills nästa punkt blir smittad kan ses som en tävling mellan de kanter som förbinder smittade och osmittade noder. Låt  $R(n)$  vara mängden av kanter som löper mellan en smittad nod och en osmittad nod, när exakt  $n$  noder är smittade. Detta är deltagarna i tävlingen i steg  $n$ . Tiden tills den  $(n+1)$ :te noden blir smittad är exponentialfördelad med väntevärde  $\frac{\lambda}{R(n)}$  och eftersom de  $R(n)$  tävlingsdeltagarna har lika stora möjligheter att vinna tävlingen, kan en vinnare väljas ut slumpmässigt och vinnartiden blir ett utfall av den exponentialfördelade variabeln med väntevärde  $\frac{\lambda}{R(n)}$ .

För att testa skillnaden i spridningshastighet mellan  $xy$ -axlar och diagonalerna, valdes punkterna  $(99, 0), (0, 99), (-99, 0), (0, -99)$  på  $x$ - och  $y$ -axel och punkterna  $(70, 70), (-70, 70), (-70, -70), (70, -70)$  på diagonalerna ut (alla med samma avstånd till origo). Modellen simulerades sedan 120 gånger och varje gång registrerades tiderna när dessa punkter blev smittade. Varje simulering gav alltså fyra observationer av spridningen längs axlar och fyra observationer av spridningen längs diagonalerna. Fördelen med detta är att vi får flera observationer från varje simulering somgång och därmed sparar simuleringstid. Nackdelen är att de fyra observationer av t.ex. spridningen längs axlarna som vi får från en och samma simulering somgång inte är oberoende, eftersom de baseras på samma realisation av passagetider på kanterna. Beroendet bör dock vara svagt eftersom punkterna ligger långt ifrån varandra. Med tillräckligt många simulering somgångar bör vi kunna få en bra bild av de två tillväxterna och hur de skiljer sig åt!

### 5.2 Resultatredovisning och diskussion

I Tabell 1 ges några exempel på simuleringstider och hur många punkter som blivit smittade vid de olika tidpunkterna. Formsatsen säger att den deterministiska mängden  $\mathbf{A}$  ska visa sig, när  $t$  går mot oändlighet. Det framgår dock tydligt i Tabell 1 att, med de resurser vi har tillgång till, så blir simuleringen mycket tidskrävande när  $t$  blir stort. I Figur 1 visas ett exempel på

$t$	Simuleringstid (ca.)	Antal smittade pkt. (ca.)
20	50 sek.	5,500
40	650 sek.	25,900
80	6,000 sek.	109,070

Tabell 1: Datorsimulerings effektivitet

	På axlarna	På diagonalerna	Skillnaden
MedelV.	43.470	43.831	-0.361
Std Av.	1.141	1.091	1.315

Tabell 2: Smittans tillväxt längs två olika riktningar

hur det smittade området ser ut vid tidpunkt 80. Det är precis den formen vi får se om vi tittar ner från ballongen.

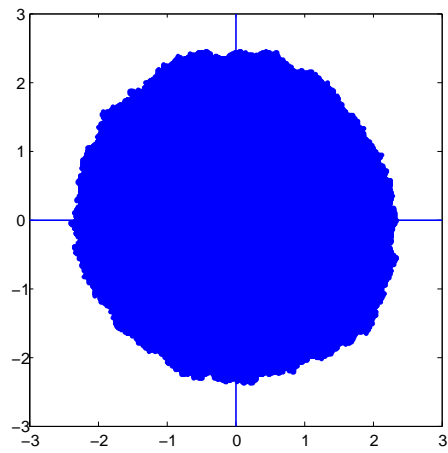
Resultatet av jämförelsen mellan spridningshastighet längs axlarna och längs diagonalerna finns i Tabell 2, där genomsnittsvärdet anges av de 4\*120 observationerna av smittspridningen längs axlarna och motsvarande 4\*120 observationer längs diagonalerna. Det framgår att smittan sprider sig snabbare längs axlarna, men med hänsyn till standardavvikelse som är större än deras skillnad kan vi å enda sidan inte dra en säker slutsats. Å andra sidan, av de 120 fallen, är det 72 fall där smittan i genomsnitt har en snabbare tillväxt längs axlarna och i 48 fall är det tvärtom. Så det verkar som att det finns en tendens att smittan längs axlarna har en snabbare tillväxt.

## 6 Slutsatser

Vi har beskrivit Richardsons modell för spatial tillväxt. Genom att tillämpa subadditiva ergodsatsen på Richardsons modell följer att smittan växer linjärt i tiden i varje fix riktning och att den asymptotiska spridningshastigheten i varje riktning nästan säkert är konstant, trots att modellen är stokastisk. När vi sedan undersöker hur tillväxten ser ut åt alla håll simultant, säger den så kallade formsatsen att den linjära tillväxten består. Vidare säger formsatsen att det smittade området skalat med tiden konvergerar nästan säkert mot en deterministisk mängd, när tiden går mot oändligheten. Att beskriva hur den mängden ser ut är mycket svårt och är fortfarande en öppen fråga. Detta beror på att diskreta rummet  $\mathbf{Z}^d$  inte är rotations-invariant.

Med hjälp av en datorsimulering av Richardsons modell, får vi ändå lite information om hur det smittade området utvecklar sig. Resultatet är att det finns en tendens att smittan växer snabbare längs axlarna än längs diagonalerna. Det betyder att det smittade området är större längs axlarna än längs diagonalerna. Med mer tid och större datorkraft, kan vi få ett tydligare och mer trovärdigt resultat.





Figur 1: Det smittade området vid tid  $t = 80$  på skalan  $1/t$ .

## Referenser

Deijfen, M. (2002): Asymptotic shape in a continuum growth model, *Adv. Appl. Probab.* **35**, 303-318.

Durrett, R. (1995): Probability: Theory and Examples, *Duxbury Press*, 335-340.

Hammersley, J. och Welsh D. (1965): First passage percolation, subadditive processes, stochastic networks and generalized renewal theory, *1965 Proc. Internat. Res. Semin., Statist. Lab., Univ. California, Berkeley*, 61-110, Springer.

Häggström, O. och Pemantle, R. (1998): Firstpassage percolation and a model for competing spatial growth, *J. Appl. Probab.* **35**, 683-692.

Häggström, O. och Pemantle, R. (2000): Absence of mutual unbounded growth for almost all parameter values in the two-type Richardson model, *Stoch. Proc. Appl.* **90**, 207-222.

Janson, S. (1981): An upper bound for the velocity of first-passage percolation, *J. Appl. Prob.* **18**, 256-262.

Liggett, T. (1985): An improved subadditive ergodic theorem, *Ann. Probab.* **13**, 1279-1285.

Richardson, D. (1973): Random growth in a tessellation, *Pro. Cambridge Phil. Soc.* **74**, 525-528.

Smythe, R.T. och Wierman, J.C. (1978): First-passage percolation on the square lattice, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. **671**, Springer.

Sundberg, R. (1997): Kompendium i Tillämpad matematisk statistik, 8, SU.