



Stockholms
universitet

Empirisk studie av t-fördelningens anpassning till log-avkastningen hos ett urval av aktier på Stockholmsbörsen

Niklas Jungner

Empirisk studie av t -fördelningens anpassning till log-avkastningen hos ett urval av aktier på Stockholmsbörsen

Niklas Jungner *

21 januari 2009

Sammanfattning

I denna uppsats undersöks huruvida en t -fördelning kan anpassas till log-avkastningen från 24 vanliga aktier på Stockholmsbörsen. Det visar sig att t -fördelningen ger en mycket god anpassning till datamaterialet, helt i linje med tidigare forskningsresultat. Det skattade antalet frihetsgrader, då vi betraktar den dagliga avkastningen, hamnar i intervallet 2.5 till 4.7 för samtliga aktier. I uppsatsen föreslås även en enkel linjär regressionsmodell med stokastiska koefficienter som ett sätt att beskriva sambandet mellan avkastningsperiodens längd och antalet frihetsgrader. Denna kan användas till att prediktera frihetsgraderna då det saknas data för att göra en ordentlig skattning.

*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms Universitet, 106 91 Stockholm. E-post: niklas.jungner@gmail.com Handedare: Thomas Höglund.

Abstract

This thesis investigates whether a t -distribution can be fitted to the log-returns of 24 common stocks on the Stockholm Stock Exchange. It turns out that the t -distribution fits the data very nicely, a result that is in agreement with previous studies. The estimated number of degrees of freedom, when considering daily returns, ranges between 2.5 and 4.7 for the different stocks. In addition, a simple linear regression model with random coefficients is suggested as a way of describing the relation between return period length and degrees of freedom. This model may be used to predict the degrees of freedom when there are insufficient data to obtain a proper estimate.

Förord

Denna uppsats utgör ett examensarbete om 15 högskolepoäng och leder till en kandidatexamen i matematisk statistik vid Matematiska institutionen, Stockholms Universitet. Arbetet med uppsatsen har pågått på halvfart under hela höstterminen 2008.

Ett stort tack riktas till min handledare, Thomas Höglund vid Stockholms Universitet, för ovärderlig rådgivning och vägledning.

Innehåll

| | | |
|----------|-----------------------------------------------|-----------|
| 1 | Inledning | 5 |
| 1.1 | Bakgrund | 5 |
| 1.2 | Syfte och metod | 5 |
| 2 | Modellbeskrivning | 6 |
| 3 | Data | 8 |
| 4 | Allmänna begrepp | 9 |
| 4.1 | Scorefunktionen | 9 |
| 4.2 | t -kvantilsplot | 9 |
| 5 | Modellanpassning | 10 |
| 5.1 | Inledande databehandling | 10 |
| 5.2 | Skattning av ν för $\Delta = 1$ | 12 |
| 5.3 | Skattning av ν för $\Delta > 1$ | 15 |
| 5.4 | Regressionsmodellen | 17 |
| 6 | Slutsatser | 20 |
| 7 | Appendix | 21 |
| 7.1 | Skattningar av ν | 21 |
| 7.2 | Anpassade täthetsfunktioner | 25 |
| 7.3 | t -kvantilsplottar | 27 |
| 8 | Referenser | 29 |

1 Inledning

1.1 Bakgrund

Mycket av den grundläggande teorin inom finansmatematiken, exempelvis Black-Scholes formel, bygger på ett antagande om log-normalfördelade prisprocesser. Gång på gång har dock detta visat sig stämma illa med verkligheten, där man istället observerar en fördelning med så kallade "tjocka svansar." Den i skrivande stund (hösten 2008) pågående finanskrisen har än en gång aktualiserat problemet.

Åtskilliga olika alternativa fördelningar har föreslagits genom årens gång, med varierande framgång. Praetz (1972), samt Blattberg och Gonedes (1974) var tidigt ute med att föreslå t -fördelningen som alternativ till normalfördelningen för att modellera den logaritmiska avkastningen. Man undersökte dess anpassning till olika aktieindex på Sydneybörsen respektive de enskilda aktierna i indexet Dow-Jones Industrial Average. Praetz fann att t -fördelning med 3-7 frihetsgrader oftast gav en mycket god anpassning då man betraktade den dagliga avkastningen; Blattberg och Gonedes fick också en god anpassning och fann att deras skattningar av antalet frihetsgrader för de olika aktierna hade medelvärdet 4.79. Åtskilliga efterföljare har undersökt andra instrument på motsvarande sätt och kommit fram till liknande resultat.

1.2 Syfte och metod

I den här uppsatsen undersöks hur väl en t -fördelning kan anpassas till log-avkastningen från 24 vanliga aktier på Stockholmsbörsen. Detta görs empiriskt, genom att studera den historiska kursutvecklingen för aktierna ifråga. Vidare undersöks även om antalet frihetsgrader kan relateras till vilket tidsperspektiv man antar - om det är daglig, veckovis eller månadsvis avkastning man studerar. Frihetsgradernas antal skattas med hjälp av Maximum Likelihood-metoden. Modellens anpassning testas grafiskt mot den klassiska modellen där aktiepriser modelleras med geometrisk brownisk rörelse (se t.ex. Capinski och Zastawniak (2003, s. 67)). Det som undersöks är hur väl t -fördelningens och normalfördelningens täthetsfunktioner matchar normaliserade histogram över den observerade log-avkastningen, samt t -kvantilsplottar.

Alla beräkningar utförs i MatLab. Regression mellan antalet frihetsgrader och avkastningsperioden görs i SAS.

2 Modellbeskrivning

Vi betecknar den *effektiva avkastningen* (eng. total return to shareholders) under dag n med S_n , $n = 0, \dots, N$. Låt nu

$$X_k^{(\Delta)} = \ln \left(\frac{S_{k\Delta}}{S_{(k-1)\Delta}} \right) \quad (1)$$

där vi med beteckningen $M = \lfloor N/\Delta \rfloor$ har att

$$\begin{aligned} \Delta &= 1, \dots, 25 && \text{(avkastningsperiod i dagar)} \\ k &= 1, \dots, M && \text{(index)}. \end{aligned}$$

$X_k^{(\Delta)}$ beskriver här den logaritmerade avkastningen över en tidsperiod Δ ; i den här studien tittar vi på aktiernas avkastning över tidsperioder från 1 till 25 dagar - den förra siffran motsvarar daglig avkastning och den senare motsvarar (drygt) månatlig dito. k är helt enkelt ett index för numrering. I det följande kommer Δ -indexet att utelämnas i de fall där alla Δ är lika.

På grund av egenskaper för logaritmer får vi därmed sambandet

$$X_k^{(\Delta)} = \sum_{i=0}^{\Delta-1} X_{\Delta k-i}^{(1)} \quad (2)$$

Det är värt att poängtera att alla X_k är okorrelerade, men inte nödvändigtvis oberoende. Oberoende fås endast vid normalfördelade X_k .

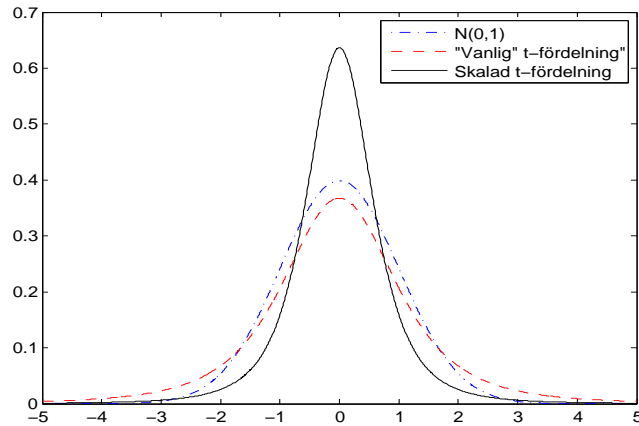
I den klassiska modellen antas $\{X_k\}$ vara en Brownsk rörelse och X_k således normalfördelad. Vårt modellantagande säger istället att X_k följer en skalad t -fördelning med väntevärde $-\infty < \mu < \infty$ och varians $\sigma^2 > 0$, det vill säga

$$X_k \sim t(\nu, \mu, \sigma^2), \quad \nu > 2$$

där ν är antalet frihetsgrader. Täthetsfunktionen för denna fördelning ges av

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi(\nu-2)}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2(\nu-2)} \right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad \nu > 2 \quad (3)$$

Observera att denna täthetsfunktion är väldefinierad även om ν inte är ett heltal. Denna variant av t -fördelningen används även av Praetz (1972), Blatberg och Gonedes (1974), Gray och French (1990), m.fl. Den är jämförbar med den "vanliga" formen av Students t -fördelning (se t.ex. Gut (1995)), men har generaliserats till att gälla för allmänna μ och σ^2 . I Gut (1995) har man satt $\mu = 0$ och $\sigma^2 = \frac{\nu}{\nu-2}$, vilket ger oss en fördelning med endast en



Figur 1: Jämförelse av täthetsfunktionerna för en $N(0,1)$, "vanlig" $t(3)$ - samt en skalad $t(3,0,1)$ -fördelning.

okänd parameter ν . Vår parametrisering har dock fördelen att den inte bara har tjockare svansar, utan även mer sannolikhetsmassa koncentrerad kring väntevärdet än en standardiserad normalfördelning. Det senare gäller inte för den "vanliga" t -fördelningen, se Figur 1. För båda typerna av t -fördelning gäller dock att de närmar sig normalfördelningen då ν ökar.

I den här uppsatsen studeras endast den kvalitativa anpassningen till t -fördelningen och vi är inte intresserade av att prediktera kommande aktiepriser. Vi kan därför sätta $\mu = 0$ och $\sigma^2 = 1$ i täthetsfunktionen (3). Detta ger oss tätheten

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\nu - 2)}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu - 2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad \nu > 2 \quad (4)$$

Den här modellen förutsätter att datamaterialet först har normaliserats, genom att subtrahera stickprovsmedelvärdet och dividera med stickprovsstandardavvikelsen. En nackdel med att minska antalet parametrar är att anpassningen till datamaterialet per automatik blir sämre. Fördelen är dock att vi lättare kan jämföra de olika aktierna med varandra och att vi bara behöver skatta en okänd parameter. Vi är även intresserade av att studera ett eventuellt samband mellan ν och Δ , och detta görs lämpligen *ceteris paribus*.

| <i>Aktie</i> | <i>Startdatum</i> | <i>Antal obs.</i> | <i>Aktie</i> | <i>Startdatum</i> | <i>Antal obs.</i> |
|---------------|-------------------|-------------------|---------------|-------------------|-------------------|
| ABB | 1999-06-22 | 2333 | SCA B | 1988-10-03 | 5021 |
| Alfa Laval | 2002-05-17 | 1603 | SEB A | 1988-10-03 | 5020 |
| AstraZeneca | 1999-04-06 | 2386 | Securitas B | 1991-07-09 | 4327 |
| Atlas Copco A | 1988-10-03 | 5020 | SHB A | 1988-10-03 | 5020 |
| Atlas Copco B | 1989-08-25 | 4792 | Skanska B | 1988-10-03 | 5020 |
| Autoliv SDB | 1997-05-02 | 2866 | SKF B | 1988-10-03 | 5021 |
| Electrolux B | 1988-10-03 | 5021 | Stora Enso R | 1998-12-29 | 2451 |
| Eniro | 2000-10-10 | 2003 | Swedbank A | 1995-06-09 | 3341 |
| Ericsson B | 1988-10-03 | 5021 | Swedish Match | 1996-05-15 | 3106 |
| H&M B | 1988-10-03 | 5014 | Tele2 B | 1996-05-14 | 3107 |
| Holmen B | 1988-10-03 | 5014 | TeliaSonera | 2000-06-13 | 2087 |
| Sandvik | 1988-10-03 | 5020 | Volvo B | 1988-10-03 | 5018 |

Tabell 1: Undersökta aktier

3 Data

Datamaterialet består av tidsserier över 24 aktiers *effektiva avkastning* under perioden 1988-10-01 till och med 2008-09-30 (eller från och med deras introduktionsdatum på börsen, ifall detta inträffade senare än 1988-10-01.) Den effektiva avkastningen definieras som den avkastning som en ägare av ett värdepapper får på sin placering i form av direktavkastning och kursförändring¹. Den är således ekvivalent med aktiekursen justerad för utdelningar, splitar/fusioner och dylikt. I de fall där prisuppgifter saknas för någon handelsdag har denna helt enkelt uteslutits, och avkastningen beräknats utifrån nästföljande dags prisuppgift. Alla uppgifter är hämtade från databasen SIX Trust².

De turbulenta månaderna under 2008 har medvetet tagits med i undersökningen, eftersom det är just upprepade stora avvikelser från väntevärdet som medför de "tjocka svansarna". De tjocka svansarna var själva motiveringen till att vi söker oss bortom den traditionella modellen med prisprocesser i form av geometrisk brownsk rörelse; om t -fördelningen ska vara ett vettigt alternativ bör den kunna förklara dessa svansar.

De undersökta aktierna redovisas i Tabell 1. Samtliga finns noterade på Stockholmsbörsen. Aktierna är utvalda utan någon annan baktanke än att de är välkända och omsätts i stora volymer.

¹<http://www.avanza.se/aza/kunskapscenter/ordlista.jsp?action=disp&id=92>

²<http://services.six.se/trustclient/>

4 Allmänna begrepp

4.1 Scorefunktionen

Likelihoodfunktionen definieras enligt

$$L(\nu | x_1 \dots x_M) = \prod_{i=1}^M f(x_i | \nu)$$

Log-likelihoodfunktionen l fås via logaritmering av L . Insättning av vår täthetsfunktion (4) ger därför

$$\begin{aligned} l(\nu | x_1 \dots x_M) &= \sum_{i=1}^M \ln [f_X(x_i | \nu)] \\ &= -\frac{M}{2} \ln(\pi(\nu - 2)) + M (\ln [\Gamma(\frac{\nu+1}{2})] - \ln [\Gamma(\frac{\nu}{2})]) \\ &\quad - \frac{\nu + 1}{2} \sum_{i=1}^M \left(1 + \frac{x_i^2}{\nu - 2}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

Derivering av $l(\nu)$ med avseende på ν ger Scorefunktionen V

$$\begin{aligned} V(\nu | x_1 \dots x_M) &= \frac{\partial}{\partial \nu} l(\nu | x_1 \dots x_M) \\ &= -\frac{M}{2} \frac{1}{\nu - 2} + \frac{M}{2} \frac{\Gamma'(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})} - \frac{M}{2} \frac{\Gamma'(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \ln \left(1 + \frac{x_i^2}{\nu - 2}\right) + \frac{\nu + 1}{2} \sum_{i=1}^M \frac{x_i^2 / (\nu - 2)^2}{1 + x_i^2 / (\nu - 2)} \\ &= \frac{M}{2} \left[\psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{1}{\nu - 2} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \ln \left(1 + \frac{x_i^2}{\nu - 2}\right) + \frac{\nu + 1}{2} \sum_{i=1}^M \frac{x_i^2 / (\nu - 2)}{\nu - 2 + x_i^2} \end{aligned} \quad (6)$$

där

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

är digammafunktionen.

4.2 t -kvantilsplot

Med t -kvantilsplot menar vi en t -fördelningens motsvarighet till den mer vanliga normalkvantilsplotten. Denna fås genom att plotta (x_i, y_i) , $i =$

$1, \dots, M$, där $x_1 < x_2 < \dots < x_M$ är observationerna ordnade i växande storleksordning och y_i är lösningen till

$$\frac{i}{M+1} = F(y_i).$$

$F(\cdot)$ anger här den aktuella fördelningsfunktionen, vilket i vårt fall är t -fördelningens. Om observationerna har den givna fördelningen kan man förvänta sig att de plottade punkterna bildar en någotsånär rät linje.

5 Modellanpassning

5.1 Inledande databehandling

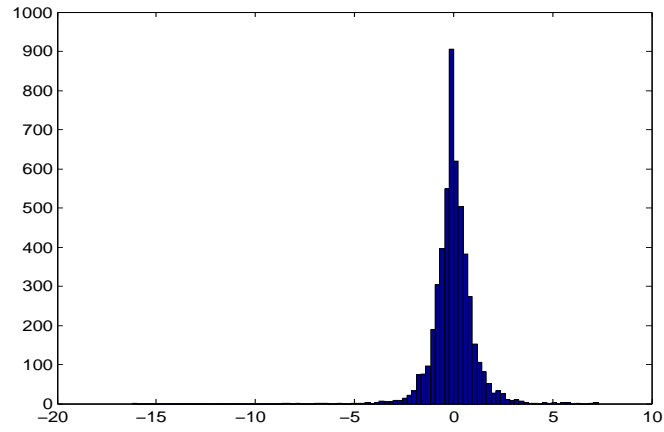
Vi börjar med att normalisera våra observerade $\{x_k\}$, genom att subtrahera stickprovsmedelvärdet och dividera med stickprovsstandardavvikelsen, detta för att man ska kunna jämföra skattningarna av ν mellan olika aktier och avkastningsperioder. Vi är intresserade av att göra någon form av inferens mellan Δ och $\hat{\nu}$. Om man normaliserat våra data kan vi betrakta skattningarna av ν från de olika aktierna som upprepade observationer för ett givet värde på Δ . Därmed får vi 24 observationer av $\hat{\nu}$ för varje värde på Δ , vilket bör vara tillräckligt för att säga något om sambandet dem emellan.

Vi fortsätter med att studera den observerade fördelningen av X_k för de olika aktierna genom att ta fram histogram. I histogrammet i Figur 2 redovisas hur våra observerade x_k fördelade sig för aktien H&M B. Som synes är sannolikhetsmassan påfallande koncentrerad kring medelvärdet 0. Huruvida svansarna är att betrakta som tjocka är svårt att avgöra grafiskt, men bland de fördelningar som plottats i Figur 1 är det vår skalade t -fördelning som ligger närmast rent utseendemässigt. En normalfördelningsplot kan också vara av intresse. I Figur 3 ser vi tydligt att våra observationer avviker betydligt från den rätta linjen, varför vi kan dra slutsatsen att X_k inte är normalfördelade. Övriga aktier uppvisade liknande observerade fördelningar och redovisas därför inte närmare.

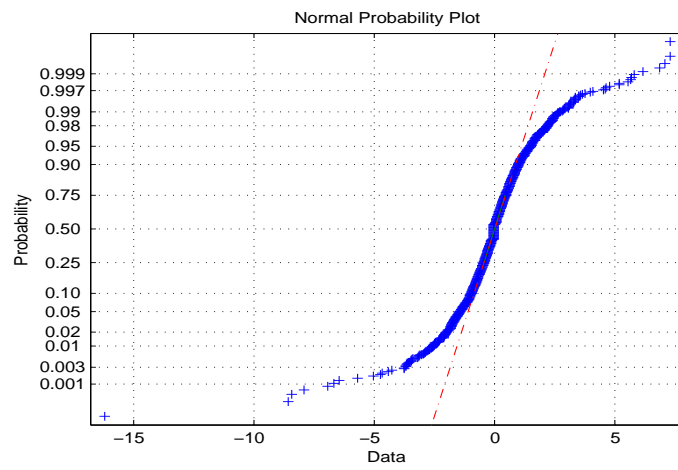
En förutsättning för att en t -fördelning ska ge en någorlunda god anpassning är att datamaterialet har ändlig varians. Så är fallet om dess empiriska absolut- och andramoment existerar. Vi undersöker om detta gäller för våra datamaterial, genom att plotta

$$\frac{\sum_{k=1}^n |x_k|}{n} \quad \text{och} \quad \frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{n} \quad \text{för } n = 1, \dots, M$$

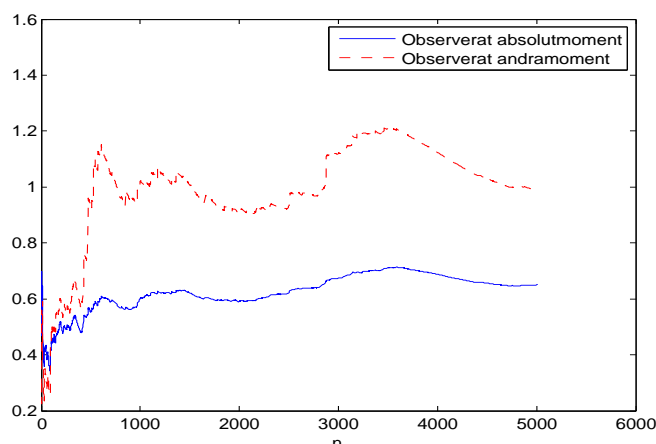
I Figur 4 redovisas dessa båda plottar för aktien H&M B. Datamaterialet är inte tillräckligt för att avgöra om de konvergerar mot något visst värde,



Figur 2: Histogram över observerade X_k för H&M B.



Figur 3: Normalfördelningsplot för H&M B.



Figur 4: Observerade absolutmoment (heldragna) och andramoment (streckade) för H&M B.

men vi kan i varje fall konstatera att dessa båda storheter är ändliga. Vid oändlig varians hade man kunnat förvänta sig att de skulle ha fluktuerat betydligt mer, även för stora n . Övriga aktier gav även här liknande resultat och redovisas därför inte närmare.

Vi kan således gå vidare och anpassa datamaterialet till t -fördelningen.

5.2 Skattning av ν för $\Delta = 1$

Vi skattar parametervärdet ν för varje aktie då $\Delta = 1$, samt testar om denna modell ger signifikant bättre anpassning än den klassiska med geometrisk brownisk rörelse. Vi ML-skattar ν genom att finna det ν som maximerar $l(\nu | x_1 \dots x_M)$ för varje aktie. Detta är ekvivalent med att hitta nollstället till scorefunktionen (6). I Tabell 2 redovisas skattningarna av ν .

Ur tabellen framgår att för $\Delta = 1$ (daglig avkastning) får skattningarna medelvärdet 3.75. Detta är något lägre än resultaten för Blattberg & Gonedes (1974), som observerade medelvärdet 4.79 för sina skattningar, eller Praetz (1972), vars (heltalsvärda) skattningar hade medelvärdet 4.24. Dessa bygger dock på helt andra aktier, observerade under en helt annan tidsperiod (50-60-talet). En mer relevant jämförelse fås om man studerar Aparicio & Estrada (1997), som anpassade t -fördelningen till *Financial Times Actuaries Indices* för de skandinaviska marknaderna under perioden 1990-01-01 till och med 1994-12-31. För det svenska indexet erhöles skattningen 3.6976, vilket är nära nog identiskt med medelvärdet av våra skattningar. Det bör dock påpekas att ovan citerade artiklar utgår från den generaliserade t -fördelningen (3) och, till

| <i>Aktie</i> | $\hat{\nu}$ | <i>Aktie</i> | $\hat{\nu}$ |
|---------------|-------------|---------------|-------------|
| ABB | 2.5261 | SCA B | 4.2803 |
| Alfa Laval | 3.1544 | SEB A | 2.9061 |
| AstraZeneca | 4.4667 | Securitas B | 3.3829 |
| Atlas Copco A | 4.6299 | SHB A | 3.1383 |
| Atlas Copco B | 4.2788 | Skanska B | 3.6451 |
| Autoliv SDB | 3.9466 | SKF B | 4.5577 |
| Electrolux B | 3.7274 | Stora Enso R | 4.2832 |
| Eniro | 3.2008 | Swedbank A | 3.8828 |
| Ericsson B | 3.3171 | Swedish Match | 4.6906 |
| H&M B | 3.0979 | Tele2 B | 3.8570 |
| Holmen B | 2.9354 | TeliaSonera | 3.3221 |
| Sandvik | 4.3257 | Volvo B | 4.5270 |
| | | Medel | 3.7533 |

Tabell 2: Skattningar av ν för $\Delta = 1$

skillnad från oss, även ML-skattar fram värden på $\hat{\mu}$ och $\hat{\sigma}^2$. Då vi normaliserade observationerna $\{x_k\}$ skattade vi μ och σ^2 med stickprovsmedelvärdet och stickprovsvariansen, vilka inte är ekvivalenta med ML-skattningarna. En direkt jämförelse av skattningarna av ν är därför inte möjlig.

Det låga antalet frihetsgrader säger också en del om normalfördelningens olämplighet som förklaringsmodell. Vi vet att t -fördelningen konvergerar mot en $N(0, 1)$ -fördelning för stora ν , men här ges alltså den största likelihooden (bästa anpassningen) för små ν . Således är vi långt ifrån en normalfördelning.

När det gäller modellanpassningen finns det inget självklart sätt att testa den. Praetz (1972) grupperar sina data i 26 intervall, beräknar Pearsons χ^2 -statistika för de olika föreslagna modellerna och rekommenderar den modell som ger lägst χ^2 . Aparicio & Estrada (1997) gör på samma sätt, men bedömer istället de olika modellerna utifrån deras respektive p -värden. p -värdet anger här sannolikheten att få ett lika, eller mer, extremt värde på test-statistikan under den testade modellen. Således innebär ett högt p -värde en god modellanpassning, medan ett lågt dito indikerar en mindre bra modellanpassning.

Blattberg & Gonedes (1974) beräknar istället log-likelihoodkvoterna mellan deras två föreslagna modeller och undersöker om dessa är större än 0. Det är dock inte möjligt att göra något regelrätt likelihoodkvottest, eftersom modellerna inte är nästlade och den välkända statistikan $-2 \log(\Lambda)$ därför inte är χ^2 -fördelad. Man ser även efter om den empiriska fördelningen är stabil eller inte. Detta eftersom t -fördelningen ej är stabil (stängd under addition), medan deras föreslagna alternativa fördelning, den så kallade stabila symmetriska fördelningen, förvisso är det.

Gray och French (1990) har istället använt sig av tre olika test, Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises och Anderson-Darling, samt diverse grafiska och numeriska metoder.

I den här uppsatsen bedöms modellanpassningen enbart grafiskt, genom att plotta de anpassade täthetsfunktionerna tillsammans med normaliserade histogram över de observerade x_k , samt genom att ta fram t -kvantilsplottar. Anledningen är att vi endast studerar t -fördelningen, till skillnad från de citerade artiklarna, där man undersöker flertalet tänkbara alternativ till normalfördelningen. Vi nöjer oss därmed med att undersöka om anpassningen är god eller ej, och behöver inte bemöda oss med att försöka ta fram ett kvantitativt mått som tillåter en direkt jämförelse av modellerna.

I Figurerna 8 och 9 i Appendix har normaliserade histogram för våra observerade x_k plottats tillsammans med $N(0, 1)$ -täthetsfunktionen, samt täthetsfunktionen med skattat antal frihetsgrader $\hat{\nu}$, för de 24 olika aktierna. Normalisering av histogrammen innebär här att de har skalats ned så att staplarnas area är lika med 1, samma som för täthetsfunktionerna. Vi ser att överlag ger t -fördelningen en mycket god anpassning till observationerna, i samtliga fall klart bättre än normalfördelningen. Flera av histogrammen uppvisar en viss synlig skevhet (skewness) kring 0:an, vilken inte kan modelleras med någon av fördelningarna. Eftersom denna är ömsom positiv och ömsom negativ för de olika aktierna verkar det inte finnas någon systematik bakom, och vi betraktar därför skevheten som en följd av slumpen. Det bör dock påpekas att Fergusson & Platen (2006), genom att citera tidigare forskningsresultat, kunnat konstatera att aktiers log-avkastning för det mesta uppvisar en svagt negativ skevhet. Denna är dock inte större än att man tycker sig kunna bortse ifrån den, vilket är precis vad vi gör. För övrigt "försvinner" den synliga skevheten med en grövre stapelindelning i histogrammen.

I Figur 8 och Figur 9 kunde vi se att t -fördelningen ger en klart bättre anpassning än $N(0, 1)$ -fördelningen, åtminstone inom ca två standardavvikelser från 0. Hur det ser ut i svansarna framgår inte av dessa figurer. Att normalfördelningen var olämplig i svansarna framgick för aktien H&M B i Figur 3 - övriga aktier ger liknande resultat. I Figurerna 10 och 11 i Appendix återfinns t -kvantilplottar för samtliga undersökta aktier. Här ser vi att anpassningen varierar från "bra" till "förträfflig", men med vissa frågetecken. Vi vill nämligen att punkterna i figurerna ska bilda en rät linje; om punkterna längst till vänster hamnar *under* regressionslinjen är det ett tecken på att t -fördelningens vänstra svans inte är tillräckligt tjock, medan detsamma kan sägas om den högra svansen om de högra punkterna hamnar *ovanför* regressionslinjen. I figurerna ser vi dock att påfallande många av aktierna har åtminstone någon punkt som hamnar en bra bit ifrån regressionslinjen. Ett bra exempel är ABB, där en av punkterna hamnar långt under regres-

sionslinjen. Studerar man datamaterialet ser man att denna punkt härrör från 2002-10-22, då ABB:s aktie föll med hela 60% jämfört med föregående dag, efter en oväntad vinstvarning och besked om ytterligare problem för det skadeståndsskyldiga dotterbolaget Combustion Engineering³.

Man skulle kunna göra det enkelt för sig och hävda att det rör sig om en "outlier", i detta fall en extremt sällsynt händelse som råkat inträffa just under vår observationsperiod. Samma fenomen återkommer dock för fler av aktierna, nämligen Alfa Laval, Autoliv, Eniro och H&M B, vilket föranleder oss att tro att kraftiga kursfall inträffar oftare än vår modell förutspår.

För mindre avvikelser från regressionslinjen verkar det inte finnas något egentligt återkommande drag; för en del aktier är modellen något mer långsvansad än datamaterialet (t.ex. Securitas B), medan för andra är situationen den motsatta (t.ex. SEB A).

Vidare gäller för flera aktier att den ena observerade svansen är tyngre än modellens, medan den andra inte är det. Särskilt vanligt tycks det vara att observationernas vänstra svans (negativa X_k) är tjockare än modellens, medan dess högra svans är tunnare än modellens. Exempel på detta syns i t -kvantilsplottarna för ABB, Alfa Laval, Autoliv, Eniro, Ericsson B och H&M B. Detta bekräftar vad som tidigare sagts om att aktiers log-avkastning ofta uppvisar en viss negativ skevhet. Samtidigt är skevheten så pass liten att vårt modellantagande om symmetri inte känns omotiverat.

Avslutningsvis bör det nämnas att det endast är ett fåtal punkter i varje plot som avviker från den räta regressionslinjen. Dessa återfinns dock i svansarna, vars bristfälliga anpassning var skälet till att vi förkastade normalfördelningen som förklaringsmodell. Vi fäster därför extra stor vikt vid just svansanpassningen. Från Figurerna 8 till och med 11 har vi kunnat konstatera att t -fördelningen tycks ge en god anpassning i alla "vanliga" fall, men man får ha i åtanke att modellen inte duger till att förutspå extrema händelser, såsom ABB-aktiens kursfall ovan.

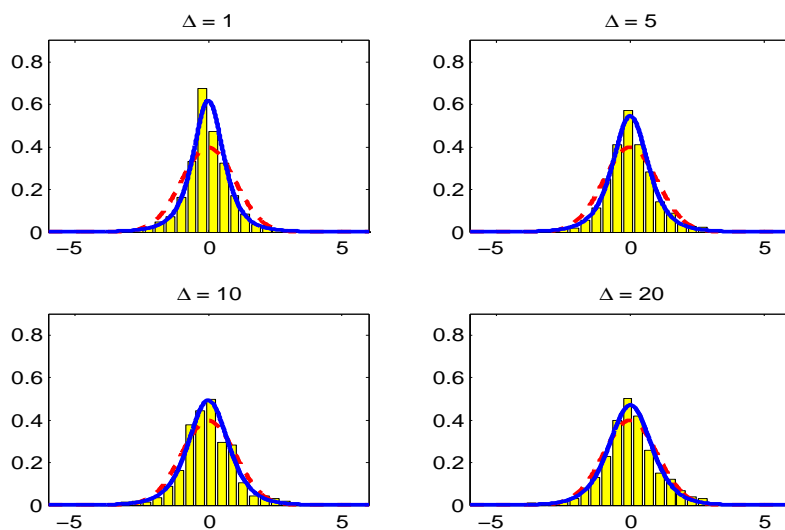
5.3 Skattning av ν för $\Delta > 1$

För $\Delta > 1$ har vi redan kunnat konstatera sambandet

$$X_k^{(\Delta)} = \sum_{i=0}^{\Delta-1} X_{\Delta k-i}^{(1)}$$

Om alla $X_k^{(1)}$ varit oberoende hade vi kunnat anta att $X_k^{(\Delta)}$ varit asymptotiskt normalfördelad för stora Δ , med stöd av centrala gränsvärdessatsen. Nu vet

³<http://di.se/Nyheter/?page=/Avdelningar/Vin.aspx%3FArticleID%3D2002%255C10%255C21%255C61955%26words%3D%26SectionID%3DVin%26menusection%3DVin>

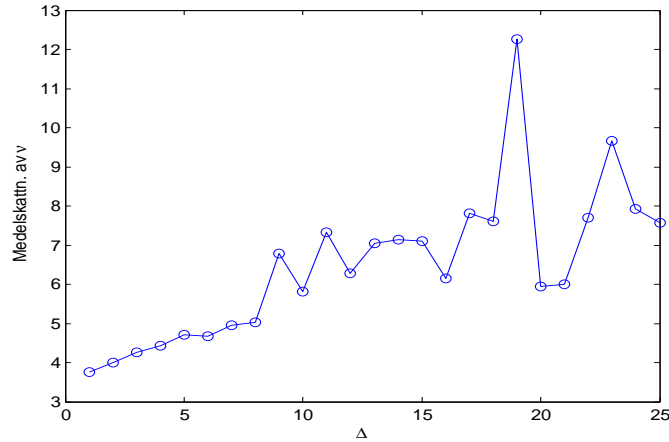


Figur 5: Empirisk och anpassad täthet för H&M B då $\Delta = 1, 5, 10$ och 20 . Heldragen linje är $t(\hat{\nu})$ -tätheten och streckad är $N(0, 1)$ -tätheten.

dock endast att de är okorrelerade, men det kan ändå vara intressant att se vad som händer med fördelningen för $X_k^{(\Delta)}$ då Δ ökar. Om den konvergerar mot normalfördelningen torde detta visa sig genom att skattningen $\hat{\nu}$ går mot oändligheten för stora Δ .

I Figur 5 ser vi hur den empiriska fördelningen för H&M B:s log-avkastning ändras då Δ antar värdena 1, 5, 10 och 20. Det är uppenbart att både den empiriska och den anpassade fördelningen närmar sig $N(0,1)$ -fördelningen då Δ ökar. För skattningarna $\hat{\nu}$ får vi värdena 3.0979, 3.7532, 4.8780 och 5.8741 - en ökning, men inte särskilt stor.

En fullständig förteckning över $\hat{\nu}$ för samtliga kombinationer av aktier och $\Delta = 1, \dots, 25$ ges i Tabell 3 - 6 i Appendix. Här ser vi dock att det tydliga sambandet som antytts i H&M-exemplet ovan, där $\hat{\nu}$ ser ut att vara en växande funktion av Δ , inte gäller allmänt. Vidare tycks spridningen i skattningarna öka för stora Δ , vilket åtminstone delvis kan ses som en konsekvens av att antalet observationer för den aktuella tidsrymden blir färre om man betraktar avkastningen över längre intervall. Färre observationer innebär osäkrare skattningar.



Figur 6: Medelvärdet av skattningarna $\hat{\nu}$ över de olika aktierna, plottade som funktion av Δ .

5.4 Regressionsmodellen

Vi är nu intresserade av att införa en enkel linjär regressionsmodell mellan $\hat{\nu}$ och Δ . I Figur 6 har vi plottat medelvärdet av $\hat{\nu}$ för olika värden på Δ , och ett linjärt samband framstår som fullt tänkbart, i synnerhet för $\Delta \leq 8$. Dock ser vi att variansen tycks öka då Δ ökar - detsamma framgår ur Tabell 3 - 6, där vi även ser att olika aktier tycks ge olika stor varians. För att en enkel linjär regressionsmodell ska vara tillämplig krävs homogen varians, och detta är alltså inte uppfyllt. Ett annat problem är att vi har någon form av beroende mellan de olika skattningarna $\hat{\nu}$ inom varje enskild aktie.

En lösning är att införa en regressionsmodell med stokastiska koefficienter, där feltermen ϵ har olika varians för olika aktier. Om vi låter Y_{ij} beteckna skattningen $\hat{\nu}$ för aktie $i = 1, \dots, 24$, ordnade i bokstavsordning, vid tidsperiod $j = 1, \dots, 25$, och $z_{ij} = j$ beteckna de olika värdena på Δ för aktie i , kan en sådan modell uttryckas

$$Y_{ij} = a_i + b_i z_{ij} + \epsilon_{ij} \quad (7)$$

där

$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \mathbf{G} \right) \quad \text{i.i.d.} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ab} \\ \sigma_{ab} & \sigma_b^2 \end{bmatrix}.$$

Eftersom variansen tydligt ökar med z_{ij} finns det skäl att tillämpa vägd regression. Vi inför därför vikter w_{ij} , sådana att observationer för (A) små z_{ij} , eller (B) med liten variation mellan aktierna för givet j , får större inflytande.

Dessa kan skrivas

$$w_{ij}^A \propto \frac{1}{z_{ij}^2}, \quad w_{ij}^B \propto \frac{1}{s_j^2}, \quad \text{där } s_j^2 = \sum_{i=1}^{24} (y_{ij} - \bar{y}_{.j})/23.$$

och med dessa vikter har vi att $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_i^2/w_{ij})$. Det bör nämnas att normalfördelningsantagandet inte är helt rimligt, eftersom vi har att $\nu > 2$. Fördelen är dock att det ger oss enklare beräkningar. Vi antar även att (a_i, b_i) är oberoende av ϵ_{ij} . Därmed får vi att

$$\text{Var}(Y_{ij}) = \sigma_a^2 + z_{ij}^2 \sigma_b^2 + 2z_{ij} \sigma_{ab} + \sigma_i^2/w_{ij}. \quad (8)$$

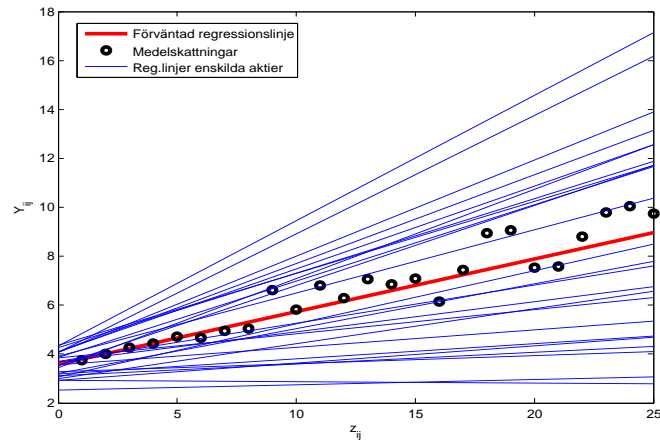
Att aktien tas med som en rent slumpmässig faktor (jfr traditionell variansanalys), i form av ett stokastiskt intercept a_i och stokastisk lutningskoefficient b_i , kan motiveras med att vi är intresserade av olika aktier i största allmänhet, och inte enbart detta slumpmässiga urval om 24 st. Det kan diskuteras huruvida datamaterialet, med upp till 25 observationer per aktie, är tillräckligt för att skatta enskilda σ_i^2 med god precision. Eftersom skillnaden i varians för de olika aktierna var så pass stor (se Tabell 6) har vi dock inget val - ett modellantagande om lika varians vore orimligt.

I tabellerna 3 - 6 ser vi att vissa av skattningarna $\hat{\nu}$ är synnerligen stora. Vi vet dock att $t(\nu) \approx N(0, 1)$ för $\nu \gtrsim 25$; större värden på ν än så medför ingen väsentlig skillnad i fråga om fördelningens utseende och anpassning till datamaterialet. Om vi därför sätter alla $Y_{ij} > 25$ till 25 kan vi avlägsna de mest extrema av outliers, och därmed minska variansen i datamaterialet, utan att försämra t -fördelningarnas anpassning nämnvärt.

Vi anpassar båda varianterna av viktade regressionsmodeller med SAS och proceduren `mixed`, enligt en modifierad variant av metoden i Littell et al. (2006, Kap. 8.2). Det visar sig att vikterna w_{ij}^A ger en något bättre anpassning, med skattningarna

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5900 \\ 0.2154 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 0.2913 & 0.05808 \\ 0.05808 & 0.02470 \end{bmatrix} \quad (9)$$

| | | | | | | | | |
|--------------|----------|---------|---------|--------|----------|---------|--------|---------|
| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| σ_i^2 | 0.005058 | 1.2993 | 3.0302 | 0.3317 | 0.6772 | 0.07686 | 0.9382 | 0.02659 |
| i | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| σ_i^2 | 0.004936 | 0.4128 | 0.02248 | 0.5270 | 0.002623 | 0.02376 | 0.5906 | 0.9089 |
| i | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| σ_i^2 | 0.1360 | 0.05214 | 1.1951 | 4.0267 | 0.1544 | 0.1237 | 2.8292 | 0.4038 |



Figur 7: Förväntad regressionslinje ($\hat{\alpha} + \hat{\beta}z_{ij}$), predikterade regressionslinjer för enskilda aktier, samt marginalmedelvärden $\bar{Y}_{.j}$.

Samtliga skattade parametrar är signifikant 0-skilda på 5%-nivån. Med hjälp av dessa kan vi sedan skatta fram intercept och lutningskoefficienter för de enskilda aktierna, genom att beräkna de bästa lineära väntevärdesriktiga prediktorerna, enligt metoden i Littell et al. (2006, Kap. 8.2). I Figur 7 visas de predikterade regressionslinjerna för samtliga aktier, tillsammans med den förväntade regressionslinjen och de observerade medelvärdena $\bar{Y}_{.j}$. Observera att dessa medelvärden har beräknats sedan alla $Y_{ij} > 25$ satts lika med 25 och därför inte är desamma som i Figur 6.

Man ser att den förväntade regressionslinjen stämmer väl överrens med våra observerade medelskattningar $\bar{Y}_{.j}$, i varje fall för $z_{ij} \leq 8$.

6 Slutsatser

Att t -fördelningen gav en god anpassning till log-avkastningen kom inte som någon överraskning - det har visats åtskilliga gånger förut. De få punkter som avviker betydligt från t -kvantilslinjen i Figur 10 - 11 kan många gånger härledas till extrema händelser, som är för sällsynta för att låta sig modelleras statistiskt med någorlunda god precision (se t.ex. ABB-aktiens 60%-iga kursfall).

Regressionsmodellen är i så fall mer intressant. Den skulle kunna användas till att prediktera parametern ν i de fall där historiska data inte finns tillgängliga för en viss aktie, eller då de av någon anledning inte anses vara tillförlitliga. Den förväntade regressionslinjen (den tjocka linjen i Figur 7) kan sägas representera aktiemarknaden i stort, och av den anledningen kan den ge oss en första, grov skattning av ν . Från (8) vet vi dock att modellens varians ökar proportionellt mot Δ^2 , så den bör inte tillämpas vid stora avkastningsperioder Δ . I Figur 7 syns den ökande variansen i form av en ökande spridning mellan aktiernas predikterade regressionslinjer (de tunna linjerna), samt medelskattningarnas (de svarta cirklarnas) växande avvikelse från den förväntade regressionslinjen.

Vidare är det intressant att studera skattningarna $\hat{\sigma}_i^2$. Dessa är ett mått på hur mycket $\hat{\nu}$ -skattningarna för en given aktie avviker från den egna, predikterade regressionslinjen. Som synes skiljer sig aktierna åt rejält på den punkten: ABB, Ericsson B och SEB A har liten varians σ_i^2 och följer därför tämligen räta linjer, medan AstraZeneca, Swedish Match och TeliaSonera har större varians σ_i^2 , och därför avviker mer från sina respektive regressionslinjer. I tabellerna 3 - 6 ser vi mycket riktigt att de tre senare aktierna har särskilt många skattningar $\hat{\nu}$ som medför maxvärdet $Y_{ij} = 25$. Slutsatsen blir här att regressionsmodellens användbarhet varierar från aktie till aktie.

Avslutningsvis bör det också nämnas att min tidigare erfarenhet av blandade modeller av detta slag är i stort sett obefintlig; med bättre kunskaper inom området kan man säkerligen göra en bättre analys!

7 Appendix

7.1 Skattningar av ν

I de fall där Scorefunktionen saknade nollställen i intervallet [2.0001, 500] har antalet frihetsgrader i nedanstående tabeller satts till ∞ , vilket motsvarar en $N(0, 1)$ -fördelning. Dessa värden har uteslutits vid beräkningen av medelvärdet och stickprovsvariansen.

| <i>Aktie</i> | $\hat{\nu}$ | | | | | | |
|----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| | $\Delta = 1$ | $\Delta = 2$ | $\Delta = 3$ | $\Delta = 4$ | $\Delta = 5$ | $\Delta = 6$ | $\Delta = 7$ |
| ABB | 2.5261 | 2.5670 | 2.6977 | 2.6049 | 2.6886 | 2.7829 | 2.9216 |
| Alfa Laval | 3.1544 | 3.1977 | 3.6187 | 3.5851 | 3.9605 | 3.5006 | 3.3866 |
| AstraZeneca | 4.4667 | 4.4265 | 5.3221 | 5.0285 | 6.2220 | 6.1252 | 7.9732 |
| Atlas Copco A | 4.6299 | 5.3145 | 4.8898 | 6.5717 | 6.0272 | 5.4145 | 5.7575 |
| Atlas Copco B | 4.2788 | 5.2991 | 5.4480 | 6.4546 | 5.9051 | 5.2349 | 7.5692 |
| Autoliv SDB | 3.9466 | 4.1850 | 4.3169 | 4.1615 | 4.2745 | 4.0627 | 4.6306 |
| Electrolux B | 3.7274 | 4.1168 | 4.7455 | 4.6440 | 5.1971 | 5.0228 | 4.3492 |
| Eniro | 3.2008 | 3.4477 | 3.2452 | 3.8360 | 3.9108 | 3.7735 | 3.7145 |
| Ericsson B | 3.3171 | 3.3402 | 3.3779 | 3.5175 | 3.4269 | 3.5015 | 3.4769 |
| H&M B | 3.0979 | 3.3659 | 3.2795 | 3.4368 | 3.7532 | 3.3842 | 3.7150 |
| Holmen B | 2.9354 | 3.2216 | 3.1636 | 3.4160 | 3.2543 | 3.2998 | 3.1714 |
| Sandvik | 4.3257 | 4.9594 | 5.6954 | 6.1754 | 6.9705 | 5.8163 | 5.7626 |
| SCA B | 4.2803 | 4.3025 | 4.7490 | 4.7165 | 5.9910 | 5.2501 | 4.6676 |
| SEB A | 2.9061 | 2.9398 | 2.9470 | 2.9202 | 2.7831 | 3.0316 | 2.8305 |
| Securitas B | 3.3829 | 3.5777 | 3.8175 | 3.9916 | 4.3553 | 4.2577 | 4.3492 |
| SHB A | 3.1383 | 3.1209 | 3.2923 | 3.6761 | 3.3958 | 3.4188 | 3.4209 |
| Skanska B | 3.6451 | 3.8776 | 3.4196 | 3.8674 | 3.9743 | 3.8912 | 3.8821 |
| SKF B | 4.5577 | 4.5227 | 5.6213 | 5.1578 | 4.8215 | 5.4184 | 5.4702 |
| Stora Enso R | 4.2832 | 4.5117 | 4.4667 | 5.3512 | 5.6449 | 5.8383 | 4.3192 |
| Swedbank A | 3.8828 | 4.1477 | 4.1127 | 4.0190 | 4.1668 | 5.1202 | 4.0469 |
| Swedish Match | 4.6906 | 5.2444 | 6.1001 | 4.7773 | 8.6643 | 7.9667 | 11.1883 |
| Tele2 B | 3.8570 | 3.9992 | 3.8544 | 4.0349 | 3.5278 | 4.0825 | 4.9473 |
| TeliaSonera | 3.3221 | 3.5156 | 4.4145 | 4.4419 | 3.7803 | 5.1661 | 4.3669 |
| Volvo B | 4.5270 | 4.9016 | 5.7160 | 5.7792 | 6.2531 | 6.7695 | 8.9314 |
| <i>Medel</i> | 3.7533 | 4.0043 | 4.2630 | 4.4235 | 4.7062 | 4.6721 | 4.9520 |
| <i>Varians</i> | 0.4139 | 0.6237 | 1.0205 | 1.1537 | 2.1810 | 1.6863 | 4.2488 |

Tabell 3: ML-skattningar av ν för $\Delta = 1, \dots, 7$.

| <i>Aktie</i> | $\hat{\nu}$ | | | | | | |
|----------------|--------------|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | $\Delta = 8$ | $\Delta = 9$ | $\Delta = 10$ | $\Delta = 11$ | $\Delta = 12$ | $\Delta = 13$ | $\Delta = 14$ |
| ABB | 2.7367 | 2.5888 | 3.1084 | 2.7211 | 2.8816 | 2.7998 | 2.7308 |
| Alfa Laval | 4.3324 | 4.4940 | 5.2115 | 4.7619 | 3.0535 | 7.3319 | 4.9852 |
| AstraZeneca | 5.6239 | 6.3714 | 10.3281 | 37.6171 | 11.9195 | 5.9108 | 13.0437 |
| Atlas Copco A | 8.1711 | 7.6558 | 6.5870 | 7.1838 | 11.7196 | 9.5083 | 6.8760 |
| Atlas Copco B | 6.5586 | 8.3074 | 9.2668 | 8.6282 | 10.5469 | 7.6006 | 7.3204 |
| Autoliv SDB | 4.3654 | 5.2752 | 4.3001 | 5.0057 | 4.7533 | 4.0680 | 4.8131 |
| Electrolux B | 6.1181 | 6.3547 | 10.2626 | 9.5906 | 6.1866 | 10.6273 | 5.5514 |
| Eniro | 3.6333 | 3.5859 | 3.8778 | 3.5591 | 4.3752 | 3.5646 | 3.7535 |
| Ericsson B | 3.9698 | 3.4688 | 3.6216 | 3.6416 | 3.5170 | 3.8859 | 4.0574 |
| H&M B | 3.6911 | 4.0452 | 4.8780 | 4.1165 | 4.2943 | 4.0758 | 4.5936 |
| Holmen B | 4.0186 | 3.3808 | 3.3458 | 4.2907 | 3.4954 | 4.3320 | 3.5956 |
| Sandvik | 6.9979 | 13.7248 | 7.3442 | 6.4180 | 10.6922 | 17.1145 | 6.4958 |
| SCA B | 6.0331 | 8.5846 | 5.4641 | 7.1993 | 8.0849 | 5.8480 | 5.8504 |
| SEB A | 2.9309 | 2.8237 | 2.6523 | 2.7361 | 2.7113 | 2.9517 | 3.2393 |
| Securitas B | 5.0829 | 4.6583 | 4.4735 | 4.8547 | 5.1237 | 5.0380 | 4.5705 |
| SHB A | 4.1013 | 3.4215 | 4.1245 | 3.8747 | 3.5706 | 4.6728 | 3.7355 |
| Skanska B | 4.1563 | 3.6406 | 4.2678 | 5.4912 | 3.9444 | 5.3743 | 5.4252 |
| SKF B | 5.8605 | 8.4350 | 9.5862 | 13.6899 | 7.4665 | 9.4431 | 8.1549 |
| Stora Enso R | 6.0606 | 7.4571 | 5.8086 | 7.7227 | 5.4067 | 4.3069 | 4.4827 |
| Swedbank A | 4.6558 | 5.2324 | 4.2094 | 5.2527 | 6.8686 | 7.1045 | 5.8752 |
| Swedish Match | 5.9165 | 29.2970 | 10.5205 | 7.3044 | 7.6994 | 16.6381 | 12.3231 |
| Tele2 B | 3.9153 | 6.3724 | 5.2471 | 4.5916 | 4.6987 | 6.4702 | 5.6517 |
| TeliaSonera | 5.8162 | 5.8647 | 5.5352 | 7.6585 | 11.2911 | 11.2329 | 31.7891 |
| Volvo B | 6.0647 | 7.9787 | 5.7135 | 8.0634 | 6.3324 | 9.3866 | 12.4617 |
| <i>Medel</i> | 5.0338 | 6.7925 | 5.8223 | 7.3322 | 6.2764 | 7.0536 | 7.1406 |
| <i>Varians</i> | 1.8409 | 29.4142 | 5.9587 | 47.8789 | 9.0695 | 15.0604 | 35.6563 |

Tabell 4: ML-skattningar av ν för $\Delta = 8, \dots, 14$.

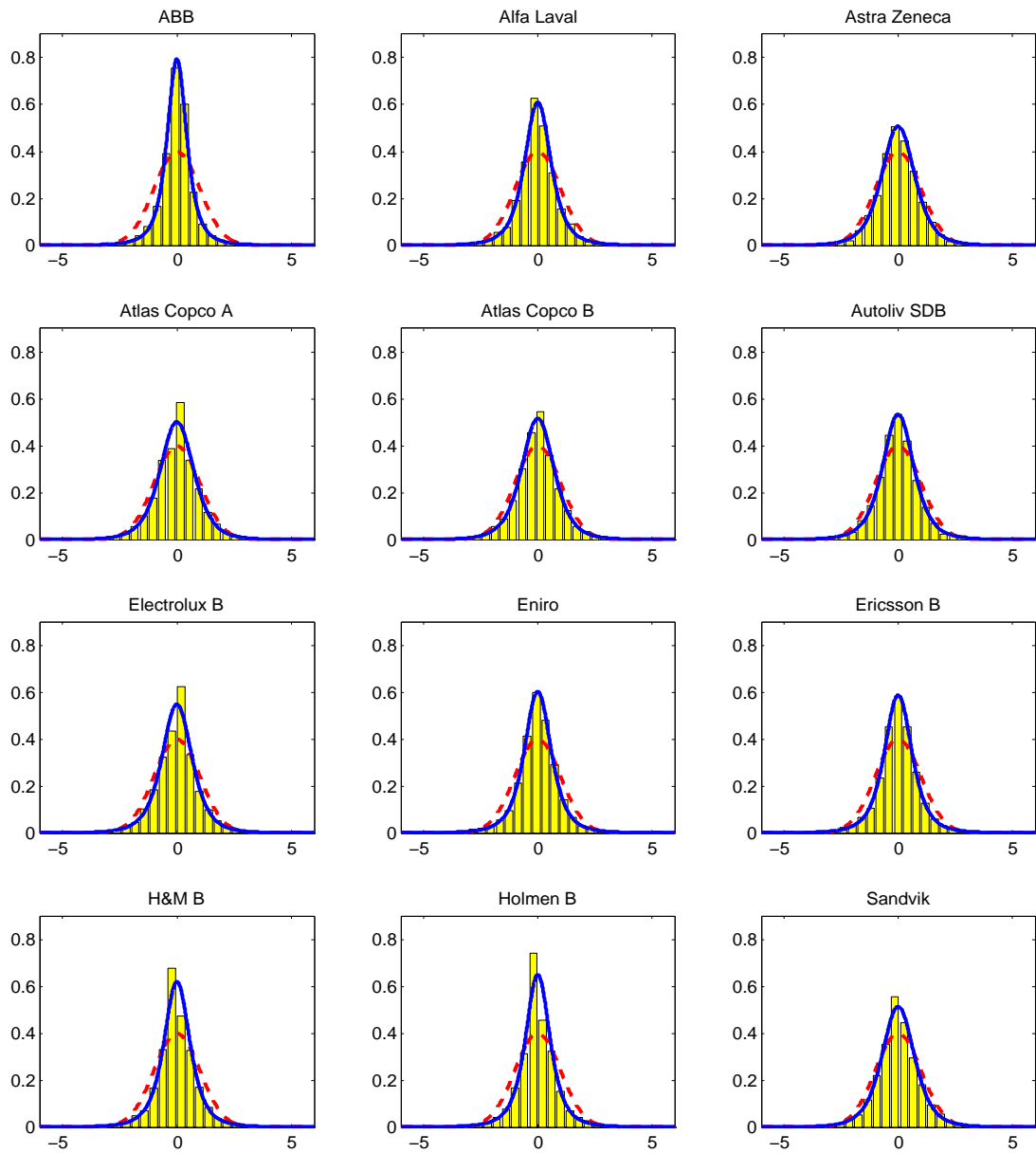
| <i>Aktie</i> | $\hat{\nu}$ | | | | | | |
|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | $\Delta = 15$ | $\Delta = 16$ | $\Delta = 17$ | $\Delta = 18$ | $\Delta = 19$ | $\Delta = 20$ | $\Delta = 21$ |
| ABB | 2.8527 | 2.4085 | 2.9478 | 2.5298 | 2.8463 | 2.6306 | 2.7148 |
| Alfa Laval | 4.6509 | 5.0350 | 3.7072 | 4.5335 | 13.3122 | 5.6622 | 5.0732 |
| AstraZeneca | 10.0636 | 10.9895 | 33.7443 | 27.9323 | 6.1283 | ∞ | ∞ |
| Atlas Copco A | 7.7088 | 9.7216 | 10.1019 | 9.5316 | 11.5573 | 7.1830 | 5.1606 |
| Atlas Copco B | 6.3756 | 7.8229 | 6.4141 | 8.5581 | 13.0450 | 9.4285 | 5.4300 |
| Autoliv SDB | 5.0454 | 5.1907 | 4.8491 | 4.3263 | 4.3841 | 4.9214 | 10.3861 |
| Electrolux B | 7.0170 | 7.8187 | 9.0695 | 8.4196 | 102.0711 | 6.1658 | 9.2160 |
| Eniro | 4.5236 | 3.4559 | 3.5189 | 4.2719 | 3.8388 | 4.0390 | 4.1563 |
| Ericsson B | 3.7333 | 3.9231 | 4.0045 | 4.0155 | 3.9093 | 3.7857 | 3.7882 |
| H&M B | 4.1672 | 4.2759 | 4.4674 | 4.4080 | 5.5573 | 5.8741 | 4.2794 |
| Holmen B | 4.0700 | 4.2165 | 4.4165 | 3.7053 | 3.1852 | 4.2538 | 3.9165 |
| Sandvik | 13.2218 | 11.7873 | 9.4616 | 8.8299 | 14.6387 | 10.9235 | 9.5446 |
| SCA B | 10.3120 | 6.9547 | 15.0845 | 10.2924 | 7.1817 | 9.5516 | 7.5897 |
| SEB A | 2.8136 | 2.9043 | 2.9803 | 2.9222 | 2.7148 | 2.4764 | 2.8560 |
| Securitas B | 4.3835 | 6.3593 | 5.2626 | 6.1354 | 8.2388 | 6.7467 | 5.3774 |
| SHB A | 3.3111 | 3.3839 | 3.0795 | 4.0797 | 4.2790 | 3.5482 | 3.4791 |
| Skanska B | 4.3603 | 4.6885 | 5.2373 | 6.9726 | 4.2807 | 3.6472 | 4.8601 |
| SKF B | 14.6212 | 12.0347 | 8.8525 | 17.0473 | 9.1028 | 10.6464 | 6.3992 |
| Stora Enso R | 5.0734 | 4.1127 | 5.9409 | ∞ | 6.0099 | 3.8522 | 5.2656 |
| Swedbank A | 7.0130 | 7.2940 | 6.6334 | 6.5236 | 4.3698 | 4.5473 | 5.1158 |
| Swedish Match | 25.6130 | 6.7869 | 15.2363 | 10.5554 | 24.0998 | 9.6338 | ∞ |
| Tele2 B | 3.8248 | 5.5774 | 5.8246 | 7.0267 | 10.1640 | 4.6186 | 7.9341 |
| TeliaSonera | 8.2187 | 5.4529 | 9.1225 | ∞ | 20.7438 | ∞ | 8.7790 |
| Volvo B | 7.6192 | 5.5679 | 7.4194 | 4.9034 | 8.8410 | 6.7605 | 10.6450 |
| <i>Medel</i> | 7.1081 | 6.1568 | 7.8074 | 7.6146 | 12.2708 | 5.9498 | 5.9985 |
| <i>Varians</i> | 25.4246 | 7.4708 | 42.0692 | 31.7212 | 396.9580 | 6.8071 | 5.9711 |

Tabell 5: ML-skattningar av ν för $\Delta = 15, \dots, 21$.

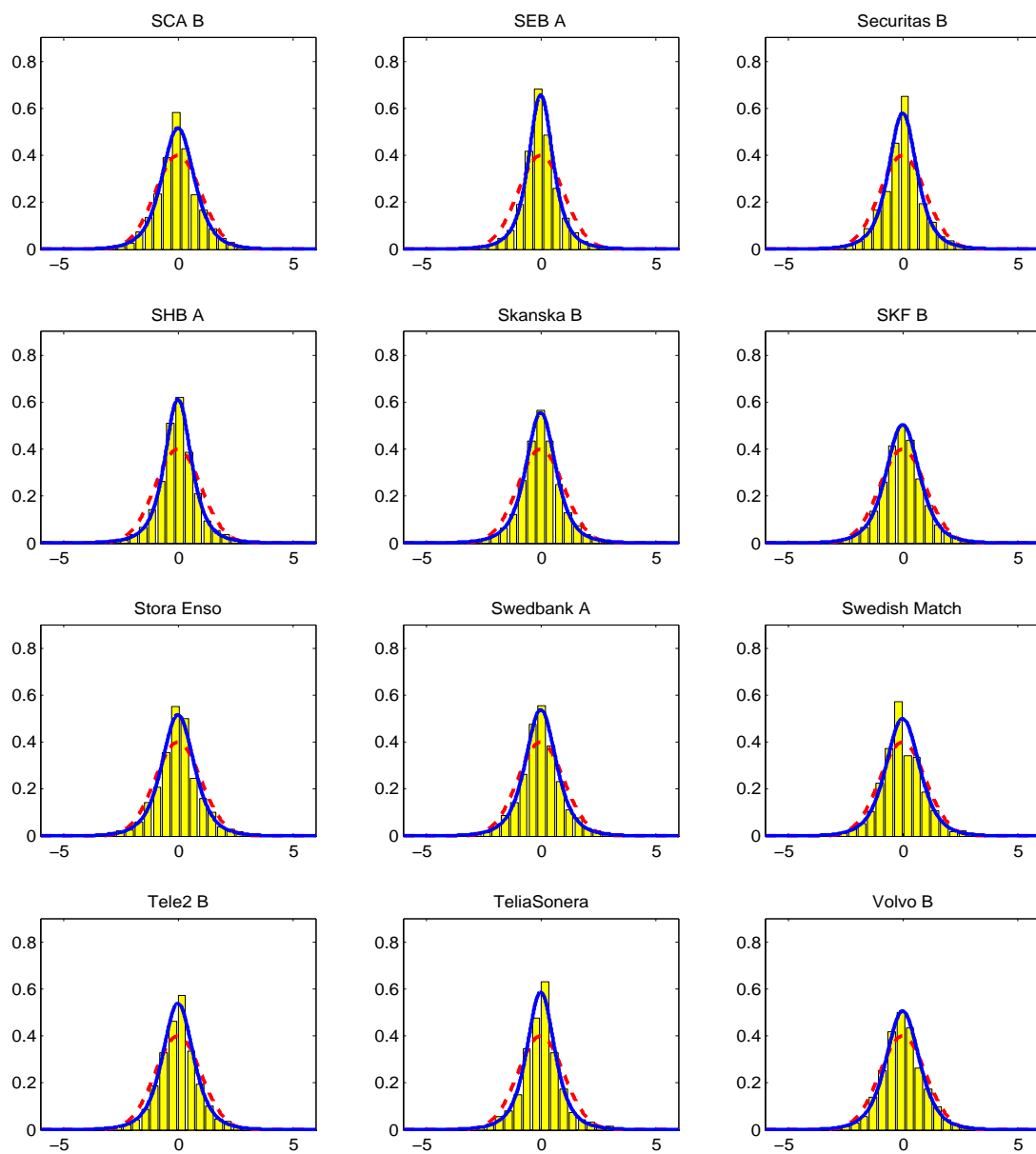
| <i>Aktie</i> | $\hat{\nu}$ | | | |
|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | $\Delta = 22$ | $\Delta = 23$ | $\Delta = 24$ | $\Delta = 25$ |
| ABB | 3.0518 | 3.1146 | 2.5364 | 2.9450 |
| Alfa Laval | ∞ | 24.9536 | 9.3282 | ∞ |
| AstraZeneca | 12.0829 | 9.4644 | ∞ | ∞ |
| Atlas Copco A | 7.7448 | 5.6195 | 10.2700 | 12.7603 |
| Atlas Copco B | 33.3454 | 6.2341 | 7.8790 | 8.1623 |
| Autoliv SDB | 7.2950 | 6.0671 | 4.4841 | 9.6016 |
| Electrolux B | 4.5140 | 18.1196 | 20.7038 | 6.2532 |
| Eniro | 3.9590 | 5.3805 | 4.2841 | 4.6915 |
| Ericsson B | 3.3828 | 3.2069 | 4.0906 | 3.6559 |
| H&M B | 4.2948 | 7.5483 | 9.1681 | ∞ |
| Holmen B | 4.5796 | 4.8668 | 3.2530 | 5.0151 |
| Sandvik | 6.7538 | 9.3152 | 7.5905 | 11.2671 |
| SCA B | 11.7407 | 37.1047 | 12.4119 | 8.5889 |
| SEB A | 2.6380 | 2.9110 | 2.8982 | 2.6911 |
| Securitas B | 5.8863 | 15.9509 | 10.1784 | 7.6847 |
| SHB A | 3.6498 | 3.4448 | 3.9708 | 3.4851 |
| Skanska B | 5.6463 | 4.7814 | 4.4393 | 3.2562 |
| SKF B | 11.0487 | 11.4630 | 12.2340 | 8.2721 |
| Stora Enso R | 13.9260 | 4.6234 | ∞ | 6.0738 |
| Swedbank A | 6.1106 | 4.5683 | 15.0272 | 7.5727 |
| Swedish Match | 6.5221 | ∞ | 5.8000 | 22.0248 |
| Tele2 B | 5.2058 | 6.5686 | 4.8017 | 4.8131 |
| TeliaSonera | ∞ | 11.4843 | ∞ | 8.7311 |
| Volvo B | 5.9285 | 15.2563 | 11.0159 | 11.5102 |
| <i>Medel</i> | 7.6958 | 9.6542 | 7.9221 | 7.5741 |
| <i>Varians</i> | 42.5139 | 67.1062 | 21.7093 | 19.7321 |

Tabell 6: ML-skattningar av ν för $\Delta = 22, \dots, 25$.

7.2 Anpassade täthetsfunktioner

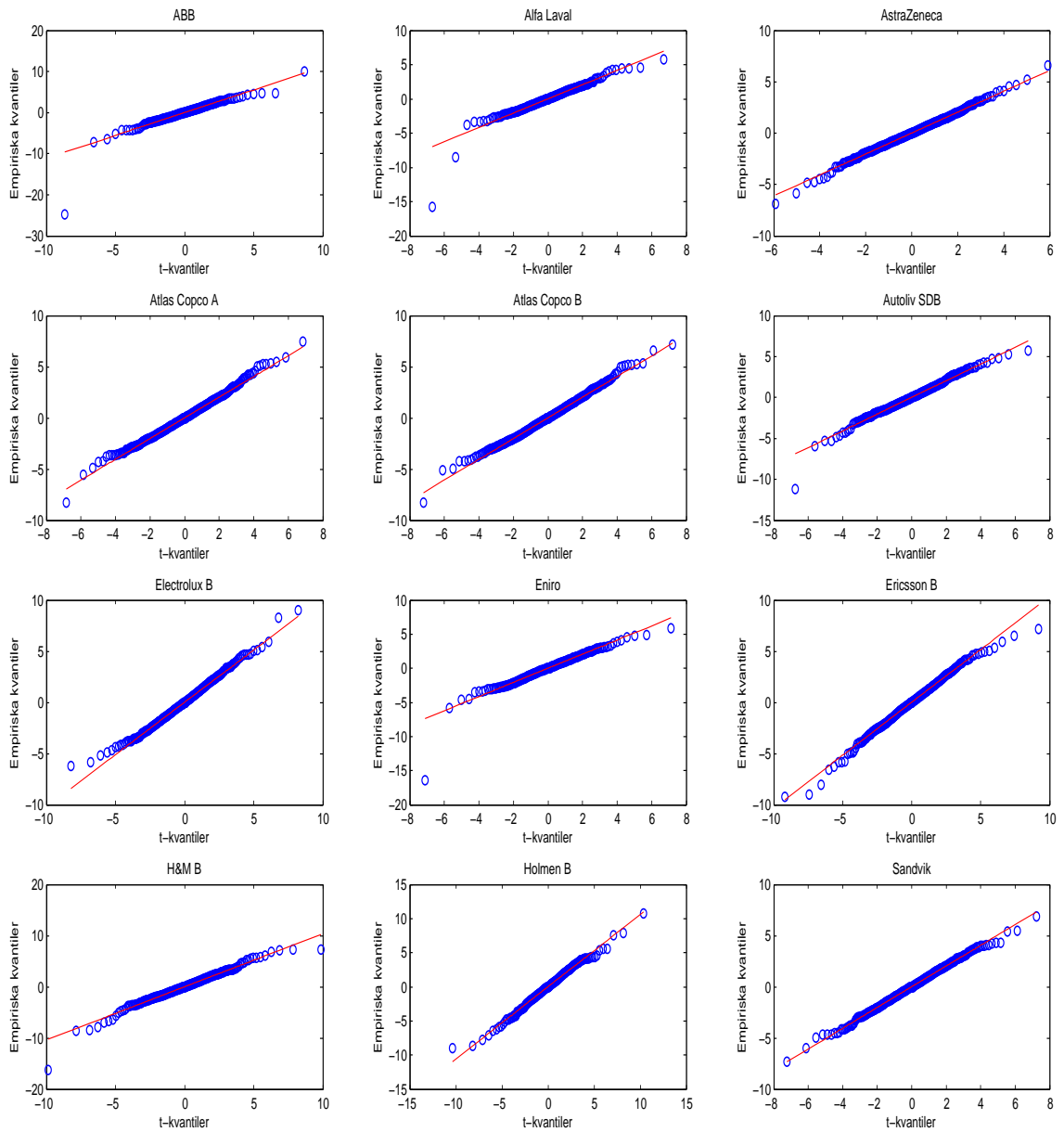


Figur 8: Normaliserade histogram med anpassad $t(\hat{\nu})$ -täthet (heldragen linje) samt $N(0, 1)$ -täthet (streckad linje).

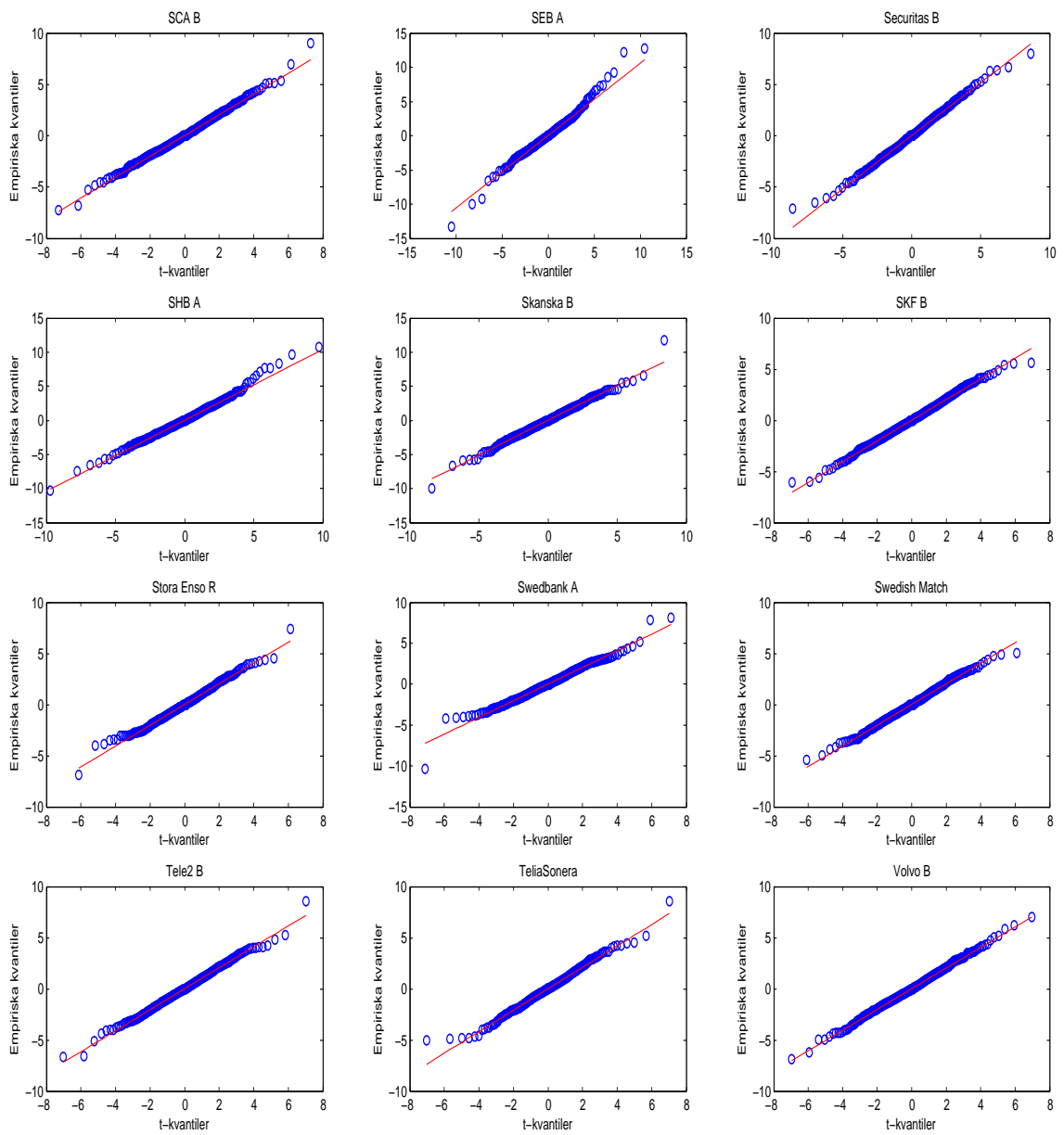


Figur 9: Normaliserade histogram med anpassad $t(\hat{\nu})$ -täthet (heldragen linje) samt $N(0, 1)$ -täthet (streckad linje).

7.3 t -kvantilsplottar



Figur 10: t -kvantilsplottar för de anpassade modellerna. ABB t.o.m. Sandvik.



Figur 11: t -kvantilsplottar för de anpassade modellerna. SCA B t.o.m. Volvo B.

8 Referenser

Aparicio, F. & Estrada, J. (1997). *Empirical distributions of stock returns: Scandinavian securities markets, 1990-95*. Opublicerad, Carlos III University, Madrid. <http://web.iese.edu/jestrada/PDF/Research/Others/DSRSSM.pdf>

Blattberg, R. & Gonedes, N. (1974). A comparison of the stable and student distributions as statistical models for stock prices. *Journal of Business*, **47**, s. 244-280.

Capinski, M. & Zastawniak, T. (2003). *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering*. Springer-Verlag, London.

Fergusson, K. & Platen, E. (2006). On the Distributional Characterization of Daily Log-Returns of a World Stock Index. *Applied Mathematical Finance*, **13**, s. 19-38.

Gray, B. & French D. (1990). Empirical comparisons of distributional models for stock index returns. *Journal of Business*, **38**, 34-105.

Gut, Allan (1995). *An Intermediate Course in Probability*. Springer-Verlag, New York.

Littell, R.C., Milliken, G.A., Stroup, W.W., Wolfinger, R.D. & Schabenberger, O. (2006). *SAS for Mixed Models*, 2nd ed. SAS Institute Inc, Cary, NC.

Praetz, P. D. (1972). The distribution of share price changes. *Journal of Business*, **45**, s. 49-55.

Kandidatuppsats 2009:1
Matematisk statistik
Februari 2009

www.math.su.se/matstat

Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm