Matematisk statistik
Stockholms universitet

Realränteobligationer som skydd mot Inflationsrisk för livräntor

Christian Karlsson

Examensarbete 2008:6

ISSN 0282-9169

Postadress:

Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm
Sverige

Internet:

http://www.matematik.su.se/matstat

Matematisk statistik
Stockholms universitet
Examensarbete **2008:6**,
http://www.matematik.su.se/matstat

Realränteobligationer som skydd mot Inflationsrisk för livräntor

Christian Karlsson*

Maj 2008

Sammanfattning

Syftet med detta arbete är att undersöka och få en förståelse för i vilken utsträckning realränteobligationer kan skydda mot inflationsrisken för Livräntor. Jag har uppskattat en betalström för befintliga livräntor på Trygg Hansa. Baserat på denna betalström har jag skapat två portföljer, en med nominella obligationer och en med realobligationer. Dessa portföljer har jag immuniserat med årliga ombalanseringar under tio år baserat på historiska data på inflation och ränta. Räntan under dessa tio år är hög samtidigt som inflationen först ökar kraftigt från en låg nivå för att sedan minska de sista åren. Det visar sig att det inflationsantagande som görs vid nuvärdesberäkning av betalströmmen har stor påverkan på resultatet. Genom ett för lågt inflationsantagande blir nuvärdet för lågt, vilket resulterar i att båda portföljerna minskar i värde gentemot nuvärdet av betalströmmen efter tio år. Portföljen med realobligationer har enligt mina beräkningar en bättre utveckling än nominella obligationer oberoende av vilket inflationsantagande jag använder. Jag undersöker rimligheten i resultatet av den nominella portföljen genom att simulera 500 scenarier utifrån månadsförändringen av inflation och ränta. Jag utför tio års immunisering av dessa 500 scenarier och jämför dessa resultat med den nominella portföljen. Det visar sig att endast drygt en promille av resultaten förväntas har en likvärdig eller sämre utveckling som den nominella portföljen med historiska data. Det finns osäkerhet i resultaten för de båda portföljerna, eftersom jag gör flera förenklingar och antaganden för att kunna genomföra immuniseringen.

*E-post: christian.karlsson@trygghansa.se. Handledare: Thomas Höglund.

Innehåll

1 Inledning

En person som skadas i trafiken och blir invalidiserad får ersättning för utebliven inkomst av försäkringsbolaget till den person som orsakade skadan. Ersättningen motsvarar den skadade personens förväntade inkomst minus ersättningen som personen får från försäkringskassan. Denna ersättning är en livränta som vanligtvis betalas ut under hela personens liv. Försäkringsbolaget måste avsätta kapital för att täcka dessa framtida utbetalningar. Detta kapital kallas för reserv.

Finansinspektionen ändrade från och med januari 2004 reglerna för uppräkningen av det belopp som den skadade får. Tidigare räknades beloppet upp enligt ett balanserat procenttal. Numera räknas detta belopp upp med förändringarna i konsumentprisindex (KPI). I de gamla reglerna togs en viss hänsyn till inflationen men endast när denna höll sig under 5 %. I det nya regelverket finns ingen övre gräns för hur mycket skadeståndsbeloppet kan räknas upp beroende på inflationen. Dessa ändringar gör det mer komplicerat att uppskatta hur stor reserven är eftersom framtida inflation påverkar reserven storlek. Realränteobligationer (realobligationer) är en obligation som skyddar mot inflationsrisken eftersom avkastningen räknas upp med inflationen.

Skulle inflationen om några år bli väldigt hög är det risk för att reserven inte växer i motsvarande takt. Detta innebär en inflationsrisk som är större för kapital som är bundet långvarigt i exempelvis obligationer med lång löptid.

2 Syfte

Syftet är att undersöka och få en förståelse för i vilken utsträckning realränteobligationer kan skydda mot inflationsrisken för Livräntor.

3 Metod

Utifrån de livräntor som finns på Trygg Hansa har jag beräknat de framtida livränteutbetalningarna. Jag har använt en skattning av överlevnadsfunktionen för varje person och år och beräknat en betalström (cash flow).

Jag genomför en immunisering på betalströmmen genom att matcha dess nuvärde, duration och konvexitet med ett antal obligationer. Jag använder historiska data på ränta och inflation för att beräkna dessa uppgifter.

Jag väljer två olika portföljer, en med enbart nominella obligationer och en med enbart realobligationer. De historiska data jag använder har valts för att de innehåller en kraftig inflationsökning, eftersom jag är intresserad av hur de två portföljerna utvecklas när inflationen varierar kraftigt. Varje portfölj balanseras och ombalanseras årligen med de historiska uppgifterna som underlag. Jag följer utvecklingen för de två portföljerna under tio år och får fram ett resultat för varje portfölj. Resultatet av dessa båda portföljen jämför jag för att få en uppfattning om hur utvecklingen för realobligationer och nominella obligationer skiljer sig.

Slutligen gör jag en simulering baserad på statistik över räntor och inflation. Jag genomför femhundra simuleringar av inflationen samt den 2-, 5- och 10- årliga räntan under tio års utveckling. Dessa simuleringar ligger till grund för femhundra olika scenarier på en portfölj som balanseras årligen med nominella obligationer. Resultatet av dessa scenarier jämför jag med motsvarande resultat baserat på historiska data för att få en uppfattning om hur sannolikt detta resultat är.

4 Avgränsningar och begränsningar

De livräntor och obligationer som jag använder i arbetet är befintliga livräntor som Trygg Hansa har i januari 2005 samt befintliga statsobligationer i januari 2005.

Jag antar att priset på obligationerna ges av statsobligationsräntan. Detta är en förenkling av verkligheten, eftersom priset beror på marknadsräntan (yielden) som beror räntan, men även på likviditetsrisk, inflation, inflationsriskpremie etc.

Arbetets utgångspunkt är att jag använder en strategi för nuvärdesberäkning där nominell ränta i januari varje år bestämmer diskonteringsräntan. Detta är en kraftig förenkling av verkligheten och innebär att nuvärdet på betalströmmen varierar kraftigt mellan åren eftersom räntan varierar kraftigt.

Den ränta och inflation som jag använder baseras på historiska data under åren 1987 – 1996. Jag gör dessutom ett inflationsantagande som nuvärdesberäkningen av reserven grundar sig på. Jag gör först ett inflationsantagande på 2 %, därefter gör jag om beräkningarna med ett inflationsantagande på 5 %. Samma inflationsantagande görs för alla år.

När priset, durationen och konvexiteten beräknas för obligationerna och reserven förenklar jag beräkningarna genom att anta att obligationernas kuponger och livräntebetalningarna betalas ut vid samma tidpunkt i slutet av varje år.

Vid immuniseringen av portföljerna gör jag en årlig ombalansering, Genom tätare ombalansering skulle jag troligen få mindre variation i resultaten mellan varje balansering.

Jag genomför Monte Carlo simulering av ränte- och inflationsförändringen och antar då att dessa är normalfördelade.

Jag är medveten om att dessa antaganden och förenklingar innebär begränsningar i modellen. Det är min bedömning att dessa antaganden är nödvändiga för att det ska var möjligt att genomföra arbetet.

5 Grundläggande begrepp

5.1 Inflation

Inflationen är den allämna stegringen av prisnivån som mäts med förändringen i konsumentprisindex (KPI).

5.2 Ränta

En värdeförändring på en tillgång kan mätas genom att värdet vid två tidpunkter jämförs. Detta är den nominella avkastningen som består av realränta och inflation. Realräntan ges då av

Realränta = Nominell ränta – inflation

Jag kommer använda både den nominella räntan och realräntan. Tabell 1 i kapitel 6.2.3 sammanställer de historiska värdena på inflation, nominell ränta samt realränta som jag använder mig av i detta arbete.

5.3 Obligationer

5.3.1 Nominella obligationer och realobligationer

En nominell statsobligation är ett värdepapper som ger fast avkastning i form av kupongränta. Dessa kuponger betalas normalt sett ut årligen. En obligation har ett förfallodatum (löptid) då obligationens nominella belopp betalas tillbaka. Priset på obligationen beror på marknadsräntan.

En realränteobligation ger en förutsägbar real avkastning, eftersom avkastningen räknas upp med KPI den dagen en kupong betalas eller då obligationen förfaller.

Realobligationens pris beräknas på samma sätt som priset för en nominell obligation förutom att realräntan används samt att priset räknas upp med inflationen.

Det är inte nödvändigt att behålla en statsobligation under hela löptiden, eftersom det förekommer handel med dessa obligationer. Priset bestäms av marknaden och beror då på aktuell ränta, men även på några andra faktorer som tas upp nedan.

Det förekommer obligationer som saknar kupongbetalning, och dessa obligationer kallas för nollkupongare.

5.3.2 Skillnader mellan realobligationer och nominella obligationer

Förutom sättet att beräkna obligationernas pris på finns även en del praktiska skillnader mellan realobligationer och nominella obligationer.

Det finns realobligationer med längre löptider än vanliga obligationer, per 1 januari 2005 var den längsta löptiden drygt 23 år för realobligationer mot knappt 16 år för nominella obligationer[1].

Marknaden för realobligationer är inte lika likvid som den är för nominella obligationer. Det finns inte lika många investerare och återförsäljare, vilket innebär att när en realobligation behöver säljas så finns risken att man inte kan sälja obligationen eller inte får ett rimligt pris för den. Den Svenska realobligationsmarknaden har på senare år vuxit i storlek och förtroendet från marknaden har ökat vilket innebär att likviditeten har ökat[2].

Inflationen är och har varit låg under en period, och därmed bedöms risken för hög inflation som relativt liten. I priset på en realobligation ingår även en riskpremie för just det inflationsskydd som den erbjuder. Denna riskpremie har under senare år varit låg, eftersom risken anses låg, vilket har inneburit att en deflationsriskpremie uppstått. Det har istället varit billigare med realobligationer än vanliga nominella obligationer. Detta kan förutom en förväntan på fortsatt låg inflation även bero på likviditetsrisken. En högre inflation än dagens relativt låga nivåer medför också en högre inflationsriskpremie[3]. Jag har i detta arbete antagit att inflationsriskpremien är noll.

5.4 Livräntor

En livränta är det åtagande som försäkringsbolaget har mot den person som har skadat sig och är berättigad till ersättning. Ersättningen avgörs av invaliditetsgrad, lön och vilken ersättning personen får från försäkringskassan. Ersättningen täcker upp skillnaden mellan lön och försäkringskassans ersättning. Åtagandet gäller i de flesta fall livet ut även om storleken på beloppet i vissa fall påverkas av att personen uppnår pensionsålder.

Nya regler från Finansinspektionen innebär att den årliga uppräkningen av livräntorna baseras helt på inflationen. Det åtagande livräntorna innebär för försäkringsbolagen utsätts därmed för

---

1 (Riksgäldskontoret., 2005)
2 (Magnusson, 2003)
3 (Grillberg)

en ökad inflationsrisk. En stigande inflation innebär ökade framtida livräntor. De reserver som sätts av för dessa framtida utbetalningar investeras till dagens förutsättningar. Nominella obligationen ger en avkastning som inte alls påverkas av de förändringar i inflationen som råder i framtiden, men realobligationer ger en avkastning som räknas upp med förändringen i inflationen. När framtida utbetalningar av livräntor behöver göras kommer detta att kompenseras av att realobligationerna räknas upp med samma index och risken är nästan helt eliminerad. Eftersom det index som används går tre månader tillbaka förekommer dock en viss inflationsrisk även för realobligationer.

6 Beskrivning av modellen

6.1 Överlevnadsfunktionen

Jag kommer med hjälp av alla de livränteutbetalningar som finns i dag göra en uppskattning av hur stora utbetalningar det kommer att bli varje år utifrån uppgifter per 1 januari 2005. Genom att uppskatta sannolikheten för att personen lever för varje år framåt kan jag få en sådan utbetalningsplan.

Varje livränteutbetalning som finns motsvarar en persons årliga utbetalning för en specifik skada. Jag beräknar de framtida utbetalningarna genom att summera varje årlig utbetalning multiplicerat med en skattning av Överlevnadsfunktionen. Överlevnadsfunktionen innebär sannolikhet att personen lever det aktuella året och definieras enligt (1).

$$l_x(t) = 1 - F_x(t) = P(T_x > t) = \frac{l(x+t)}{l(x)}, t \geq 0 \qquad (1)$$

Funktionen ger sannolikheten att en x-årig individ lever ytterligare minst t år[4]. När jag beräknar överlevnadsfunktionen för ett helt år innebär det att t=1.

Med hjälp av Makehams formel[5] är det möjligt att göra en praktisk kurvanpassning av överlevnadsfunktionen:

$$l(x) = e^{-\alpha \cdot x + (\frac{\beta}{\gamma} \cdot \log(10) * (1 - 10^{\gamma x}))} \qquad (2)$$

$\alpha = 0{,}000362$, $\beta = 0{,}00000818$ för kvinnor, $\beta = 0{,}00001377$ för män. $\gamma = 0{,}0472$. (3)

---

[4] (Andersson, 2005)
[5] (Andersson, 2005)

Jag tillämpar nu Makehems formel för att skatta en persons överlevnadsfunktion enligt (1), (2) och (3)[6]. Därefter räknas sannolikheten att personen lever det aktuella året som betalningen gäller,

$$l_x(t) = \frac{e^{-\square\cdot(x+t)+(\frac{\square}{\square}\cdot\log(10)*(1-10^{\square\cdot(x+t)}))}}{e^{-\square\cdot x+(\frac{\square}{\square}\cdot\log(10)*(1-10^{\square\cdot x}))}} \tag{4}$$

Där x+t är genomsnittlig ålder på personen det aktuella året utbetalningen avser, x är personens ålder idag. För att estimera funktionen för ett år använder jag t=0,5 eftersom det är ett medelvärde av året.

Varje utbetalning för en person med åldern x år 0, vid år k, då personens ålder är x+k år, ser ut på följande vis:

$$y_k = s \cdot l_{x+k}(0{,}5) \tag{5}$$

s är beloppet som ska betalas ut för personen. Genom att summera alla personers beräknade utbetalningar årsvis, med m stycken personer för år k får jag följande formel:

$$x_k = \sum_{i=1}^{m} y_k^i \tag{6}$$

Det motsvarar den totala årliga utbetalningen för år k. Betalströmen för hela perioden för år 1 till j utrycks då:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_j \end{pmatrix} \tag{7}$$

Betalströmmen kommer dessutom att behöva räknas upp med inflationen. Eftersom jag i nuläget inte vet hur stor inflationen är så måste jag uppskatta hur stor inflationen blir.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cdot(1+i_a) & x_2\cdot(1+i_a)^2 & \dots & x_j\cdot(1+i_a)^j \end{pmatrix} \tag{8}$$

där $(1+i_a)^j$ innebär detta inflations antagande upphöjt med j år.

---

[6] (Andersson, 2005)

6.2 Durationsanalys

Genom att beräkna nuvärdet av alla framtida utbetalningar (betalström) får jag det aktuella marknadsvärdet för en portfölj. Därefter räknas betalströmmens duration och konvexitet fram. Genom att matcha andelen obligationer så att de överrensstämmer med marknadsvärdet, durationen och konvexiteten har man skapat en immuniserad portfölj. För att göra dessa beräkningar behöver jag veta ränta och inflation.

6.2.1 Inflation

Inflationen påverkar både pris på en realobligation samt de framtida utbetalningarna. Den inflation som jag använder är den historiska inflationen mellan 1987 och 1996. Jag utrycker inflationen för varje år j som i_{h_j} där j=1 innebär år 1987. I Tabell 1 redovisar jag den inflation jag använder i arbetet.

Dessutom behöver jag göra ett inflationsantagande för att beräkna nuvärdet på livräntereserven. Detta inflations antagande utrycks i_a. Det kommer visa sig av stor betydelse för reserven hur stort inflationsantagande som görs.

6.2.2 Yield to maturity

Marknadsvärdet på en obligation beräknas utifrån marknadsräntan eller yielden to maturity (yield)[7].

6.2.3 Ränta

För att kunna utföra durationsanalys behöver jag beräkna nuvärden på framtida utbetalningar och beräkna priser på obligationer vars kuponger förfaller ett antal år framåt i tiden.

För att göra sådana beräkningar skulle man behöva veta hur stor yielden är. Jag utgår ifrån historiska data från 1987 och framåt, men känner jag inte till hur stor yielden var under denna period. Däremot känner jag till 2-, 5- och 10-årig statsobligationsräntan under denna period. Jag kommer i mitt arbete att använda mig av dessa räntor istället för yielden.

Genom linjär interpolation av den 2-, 5-, och 10-åriga räntan beräknar jag en räntekurva för varje år,

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_k \end{pmatrix} \qquad (9)$$

[7] (Luenberger, 1998)

Där k är den interpolerade k åriga räntan. Eftersom jag inte känner till den historiska räntan längre än 10-åriga räntan, men utbetalningar och kuponger som har längre tidshorisont än så, gör jag en extrapolation upp till 25 år, där varje år efter år tio har samma ränta som år tio.

När jag utför durationsanalys för realränteobligationer använder jag realränta för att uppskatta pris, duration och konvexitet. Realräntan beräknar jag genom att ta den nominella räntan minus inflationen. I Tabell 1 har jag sammanställt de nominella räntor och realräntor som jag använder mig av i arbetet.

Tabell 1

år	inflation	nominell ränta	real ränta
1987	3,1 %	11,5%	8,4 %
1988	5,0 %	10,9%	5,9 %
1989	6,7 %	10,6%	3,9 %
1990	8,4 %	13,8%	5,4 %
1991	10,6 %	13,0%	2,4 %
1992	5,4 %	10,8%	5,4 %
1993	4,8 %	9,4%	4,6 %
1994	1,8 %	6,5%	4,7 %
1995	2,9 %	10,1%	7,2 %
1996	1,9 %	7,8%	5,9 %

6.2.4 Obligationer

Jag har använt mig av de nominella obligationer respektive realränteobligationer som existerar i januari 2005. Tabell 2 redovisar dessa nominella obligationer [8]:

Tabell 2

Obligation	Kupong	Förfallodatum	Återstående löptid i år
RGKB 1044	3,5	2006-04-20	1
RGKB 1037	8	2007-08-15	3
RGKB 1040	6,5	2008-05-05	3
RGKB 1043	5	2009-01-28	4
RGKB 1048	4	2009-12-01	5
RGKB 1045	5,25	2011-03-15	6
RGKB 1046	5,5	2012-10-08	8
RGKB 1041	6,75	2014-05-05	9
RGKB 1049	4,5	2015-08-12	11
RGKB 1050	0	2016-07-12	12
RGKB 1047	5	2020-12-01	16

Tabell 3 redovisar de realobligationer som fanns i januari 2005[9]:

Tabell 3

Obligation	Kupong	Förfallodatum	Återstående löptid i år
RGKB 3101	4	2008-12-01	4
RGKB 3001	0	2014-04-01	9
RGKB 3105	3,5	2015-12-01	11
RGKB 3102	4	2020-12-01	16
RGKB 3103	3,5	2028-12-01	24
RGKB 3104	3,5	2028-12-01	24

[8] (Riksgäldskontoret., 2005)
[9] (Riksgäldskontoret, 2005)

6.2.5 Nuvärde

6.2.5.1 Definition av Betalströmmens nuvärde

Jag räknar ut nuvärdet på alla framtida utbetalningar, som görs med hjälp av räntan och varje års förväntade betalning. Nuvärdet beräknas genom att betalströmmen diskonteras med diskonteringsräntan[10]. Jag använder mig av räntekurvan som diskonteringsränta. När jag definierar funktioner för betalströmmen uttrycker dessa för k år. Motsvarande funktioner för obligationer använder jag mig av n år.

$$P = \frac{x_1}{(1+r_1)^1} + \frac{x_2}{(1+r_2)^2} + \ldots + \frac{x_k}{(1+r_k)^k} \qquad (10)$$

Där r_i är räntan för år i. x_i är förväntad betalningen år i enligt ovan. k är antal år i framtiden som betalning sker, i=1, 2, … k[11].

6.2.5.2 Definition av obligationens pris

Priset på en obligation motsvarar nuvärdet. En nominell obligations nuvärde med kupongutbetalningar en gång per år, beräknas enligt formel (11)[12].

$$pris = \left[\frac{N}{(1+Y)^n} + \sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1+Y)^t} \right] \qquad (11)$$

C är obligationens årliga kupongutbetalning, N är obligationens nominella värde, n är antal hela år kvar på obligationens löptid. Y är marknadsräntan, dvs. yield to maturity.

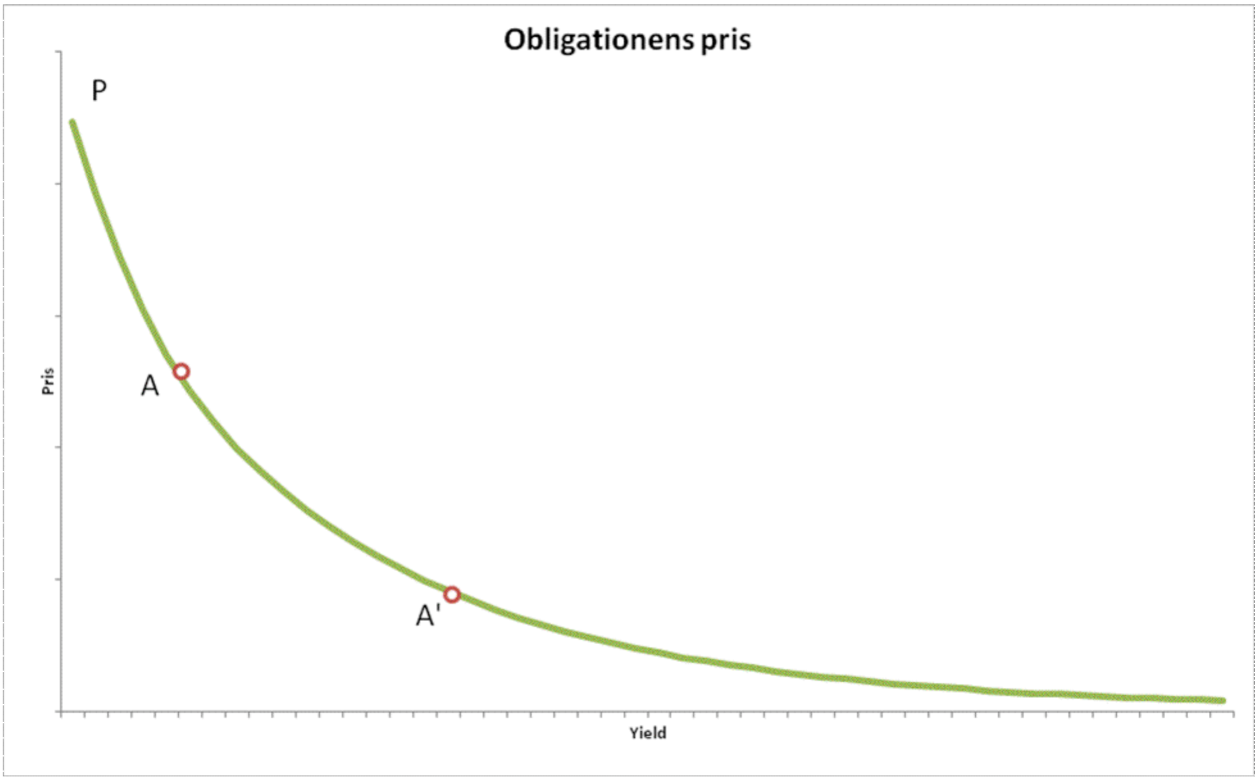
---

[10] (Höglund, 2005)
[11] (Fredrik, 2004)
[12] (Luenberger, 1998)

6.2.5.3 Egenskaper

Jag illustrerar hur obligationens pris uttrycks som en funktion av yielden i Figur 1, där P är priskurvan. Punkten A har en lägre yield och därmed ett högre pris än punkten A’

Figur 1



Eftersom jag inte känner till yielden kommer jag använda mig av räntekurvan. För varje år j använder jag r_j i stället för Y. (10) skrivs om till (11):

$$p(i) = \left[\frac{N_i}{(1+r_n)^n} + \sum_{t=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r_t)^t} \right] \qquad (12)$$

där p(i) är priset på obligationen i, i indikerar vilken obligation det är (när flera olika obligationers pris beräknas), C_i är obligationens årliga kupongutbetalning, r_j är marknadsräntan för år j, j=1, 2, … k. N_i är obligationens nominella värde, n är antal år kvar på obligationens löptid. Jag har här gjort antagandet att det är hela år kvar på löptid och varje kupongutbetalning. I fortsättningen använder jag mig av dessa definitioner av kupong, nominellt värde och ränta. När realobligationer används är det realräntan som används annars den nominella räntan.

Priset för obligationen i (12) överensstämmer med nuvärdesberäkning av betalströmmen där kupongerna och det nominella värdet ersätts med utbetalningarna.

Priset på en obligation ges alltså av kupongerna, det nominella värdet på obligationen och räntan. När räntan förändras påverkar detta obligationens pris. En ökad ränta ger ett lägre pris. Dessutom påverkas priset av att en kupong betalas ut. Priset på obligationen precis efter att kupongen betalas ut är lägre.

6.2.5.4 Definition av realobligationens pris

Priset för en realobligation definieras enligt (13)

$$p(i) = Index_{likviddag}\left[\frac{N_i}{(1+r_n)^n} + \sum_{t=1}^{n}\frac{C_i}{(1+r_t)^t}\right] \tag{13}$$

Index är inflationsförändringen fram till likviddagen (vilket är den dag för vilket priset beräknas), n är antal hela år kvar på obligationens löptid. [13] Jag har på samma sätt som ovan använt mig av räntekurvan fast med realräntan.

6.2.6 Duration

6.2.6.1 Definition

Duration för en obligation innebär obligationens räntekänslighet. En stor förändring av priset när yielden ändras motsvarar en hög duration och en liten förändring i priset när yielden ändras motsvarar en låg duration. Durationen motsvaras av tangenten i kurvan för obligationens pris, dvs. derivatan. Jag använder mig av Macaulay´s duration [14].

En nollkupongare har samma duration som den har kvarvarande löptid, medan en kupongobligation har kortare duration än löptid.

Durationen används jag för att immunisera (se 7.1), då man försöker matcha de tillgångar man har med utbetalningar. Genom att räkna ut durationen för en betalström och sedan balansera med obligationer som har samma duration som utbetalningarna kommer förändringar i räntan inte påverka resultat i samma utsträckning som annars.

[13] (Riksgäldskontoret)
[14] (Byström, Penningmarknaden, Del 2, 2004)

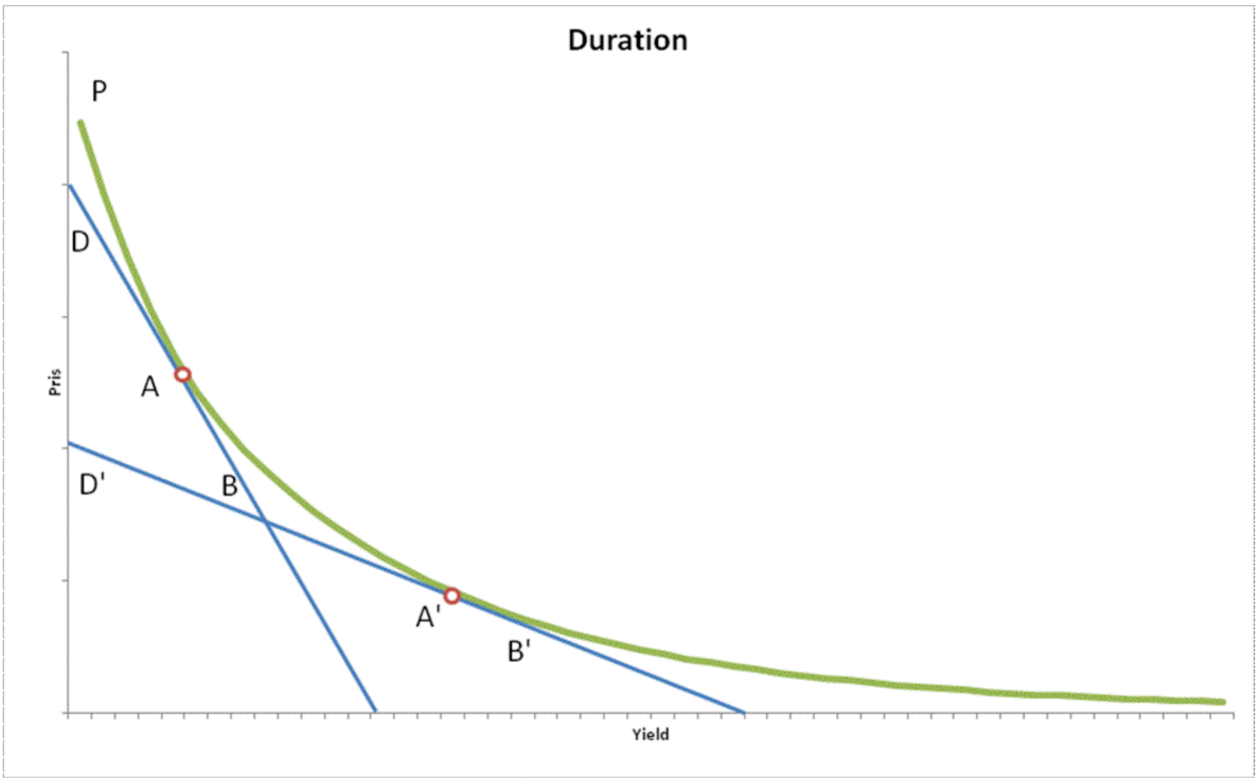
Durationen motsvarar derivatan av prisfunktionen med avseende på yielden, dvs. förändringshastigheten i priset när yielden ändras[15].

$$Duration = -\frac{\partial p(i)}{\partial (1+Y)}\frac{(1+Y)}{p(i)} = \frac{1}{P}\left[\frac{n \cdot N}{(1+Y)^n} + \sum_{t=1}^{n}\frac{t \cdot C}{(1+Y)^t}\right] \qquad (14)$$

6.2.6.2 Egenskaper

Durationen illustreras i Figur 2. Obligationens pris visas beroende på yielden (enligt Figur 1). Yielden i A är lägre än i A' och därför är priset högre. Linjerna D och D' illustrerar durationen i punkterna A och A', dvs. lutningen på priskurvan fast med positivt tecken (därav minustecknet i formeln). D har en högre duration än D' vilket innebär en brantare lutning på linjen.

Figur 2



- Längre löptid på obligationen ger högre duration.

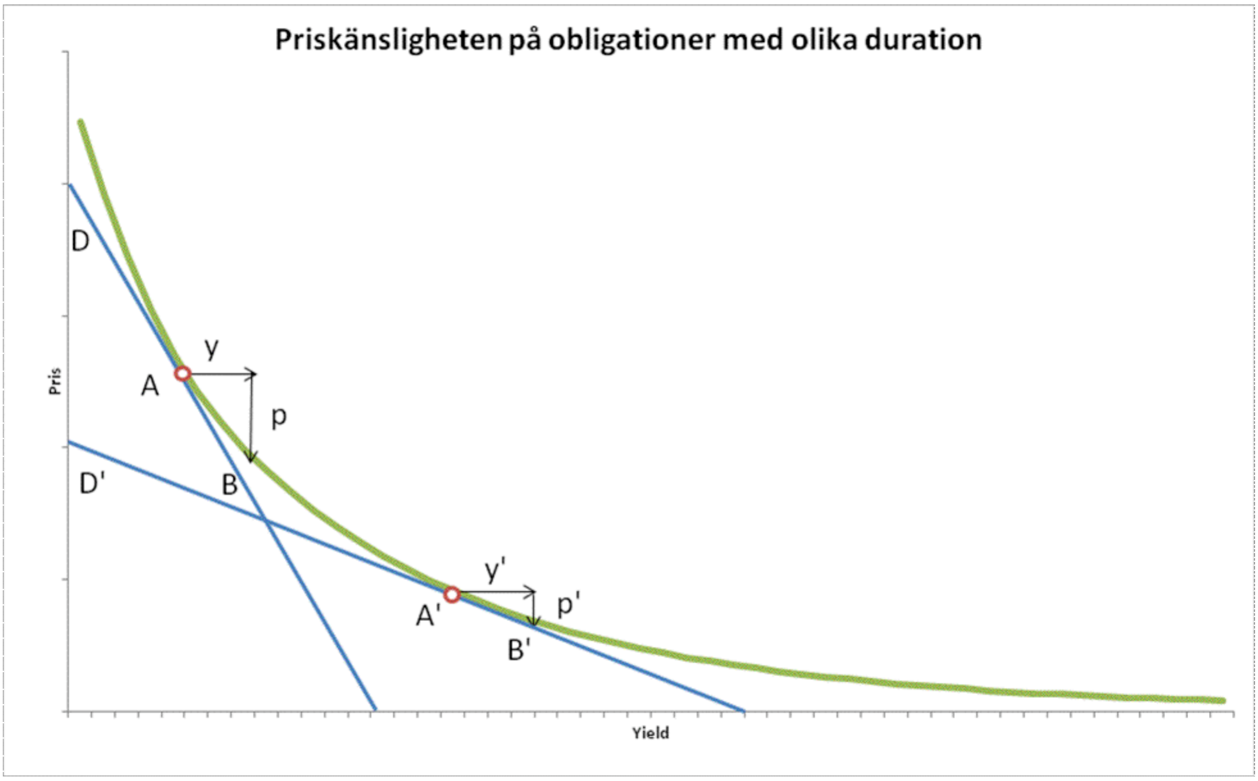
- Högre kupongränta ger lägre duration.

[15] (Byström, Penningmarknaden, Del 2, 2004)

- Högre yield ger lägre duration

I Figur 3 visas hur en lika stor ökning av yielden påverkar priset på obligationen. Pilen y uttrycker ökningen i yielden från punkten A. Denna ökning innebär att priset minskas enligt pilen p. På samma sätt ökas yielden i punkten A' med y', detta resulterar i minskning i priset med p'. Förändringen i yielden är lika stor i y och y', men prisförändringen p är större än p'. Detta förklaras med att durationen är högre i punkten A än i punkten A'

Figur 3



Eftersom jag inte har historiska data för yielden använder jag mig av räntekurvan för att beräkna durationen på obligationen och betalströmmen.

6.2.6.3 Betalströmmens duration

Durationen för betalströmmen X skiljer sig inte ifrån sättet att beräkna durationen för en obligation. Kupongerna och det nominella beloppet byts ut till årliga utbetalningar:

$$D = \left(\frac{1}{P}\right)\left(\frac{x_1}{(1+r_1)^1} + \frac{2 \cdot x_1}{(1+r_2)^2} + \ldots + \frac{k \cdot x_k}{(1+r_k)^k}\right) = \left(\frac{1}{P}\right)\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{j \cdot x_j}{(1+r_j)^j}\right) \qquad (15)$$

Enligt definitionerna ovan, k är antal år kvar på betalströmmen.

6.2.6.4 Obligationens duration

Durationen för varje obligation med index i blir:

$$d(i) = \frac{1}{p(i)}\left(\frac{C_i}{(1+r_1)^1} + \ldots + \frac{n \cdot C_i}{(1+r_n)^n} + \frac{n \cdot N_i}{(1+r_n)^n}\right) = \frac{1}{p(i)}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{j \cdot C_i}{(1+r_j)^j} + \frac{n \cdot N_i}{(1+r_n)^n}\right) \qquad (16)$$

Enligt definitionerna ovan och n är antal år till obligationens förfall.

6.2.7 Konvexitet

6.2.7.1 Definition

Konvexitet är ett noggrannare sätt att mäta prisförändringen än enbart duration. Konvexitet mäter hur durationen påverkas när räntan förändras. Konvexiteten motsvarar andraderivatan av prisfunktionen[16]. Eftersom durationen är linjär och överskattar prisförändringen används konvexiteten för att kunna mäta förändringen bättre. En prisfunktion kan vara olika mycket konvex. Högre konvexitet innebär att felet med att mäta en förändring genom durationen blir större.

Definitionen av konvexiteten för en obligation (med index i):

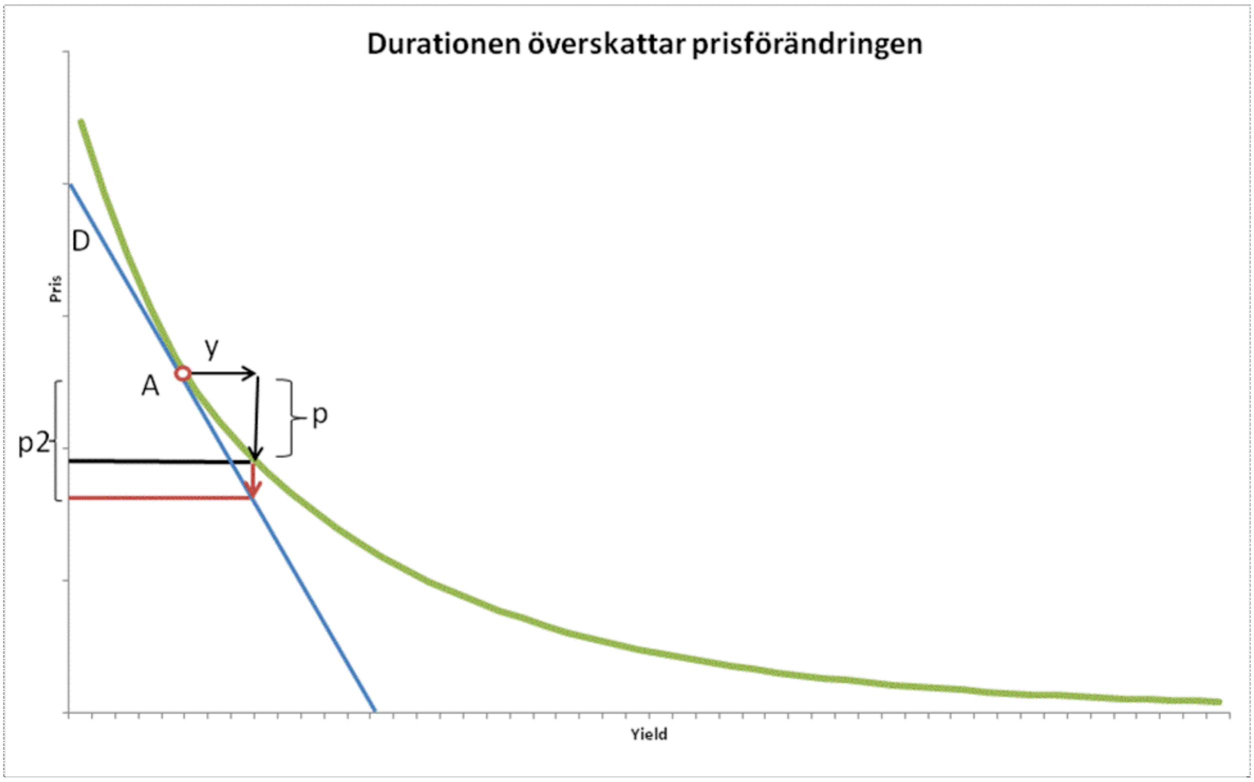
$$Konvexitet = \frac{\partial^2 P}{\partial (1+Y)^2}\frac{1}{P} = \frac{1}{(1+Y)^2}\frac{1}{P}\left(\frac{n(n+1)N_i}{(1+Y)^n} + \sum_{t=1}^{n} \frac{t(t+1)C_i}{(1+Y)^t}\right) \qquad (17)$$

[16] (Byström, Penningmarknaden, Del 2, 2004)

6.2.7.2 Egenskaper

Eftersom prisfunktion är buktig medan durationen är en linjär funktion innebär det att durationen överskattar prisförändringen när yielden ändras. I Figur 4 visas detta samband. En förändring i yielden med y innebär en förändring i priset med p. Den linjära approximationen av prisförändringen med durationen blir p2. Durationen överskattar alltså prisförändringen. Överskattningen blir större när förändringen i yielden är större. Större duration innebär att överskattningen blir större än en lägre duration. Genom att använda konvexiteten blir approximationen av prisförändringen mer exakt[17].

Figur 4



På samma sätt som för pris och duration använder jag mig av räntekurvan istället för yielden.

[17] (Byström, Penningmarknaden, Del 2, 2004)

6.2.7.3 Betalströmmens konvexitet

Konvexiteten för livränteutbetalningarna beräknas enligt (17) med betalningarna i stället för kuponger och nominellt belopp (på samma sätt som vid durationen):

$$K = \left(\frac{1}{P}\right)\left(\frac{2\cdot x_1}{(1+r_1)^3} + \frac{2\cdot 3\cdot x_2}{(1+r_2)^4} + \ldots + \frac{k(k+1)\cdot x_k}{(1+r_k)^{k+2}}\right) = \left(\frac{1}{P}\right)\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{j\cdot(j+1)\cdot x_j}{(1+r_j)^{j+2}}\right) \tag{18}$$

6.2.7.4 Obligationens konvexitet

Konvexiteten för varje obligation ges av (17) där yielden ersätts med räntan:

$$k(i) = \left(\frac{1}{p(i)}\right)\left(\frac{1\cdot 2\cdot C_i}{(1+r_1)^3} + \ldots + \frac{n(n+1)\cdot C_i}{(1+r_n)^{n+2}} + \frac{n(n+1)\cdot N_i}{(1+r_n)^{n+2}}\right) = \left(\frac{1}{p(i)}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{j\cdot(j+1)C_i}{(1+r_j)^{j+2}} + \frac{n(n+1)N}{(1+r_n)^{n+2}}\right) \tag{19}$$

Enligt definitionerna ovan, n är antal år till obligationens förfall.

7 Tillämpning av metod

Jag utför en immunisering av två olika portföljer med samma livränteutbetalningar. Den ena portföljen innehåller endast nominella obligationer och den andra endast realobligationer. Med ränta och inflation tagna ifrån åren 1987 till 1996 gör jag balansering och årliga ombalanseringar av de båda portföljerna. Efter tio år har jag ett resultat för varje portfölj.

För att få en förståelse för hur rimligt resultatet i de både portföljerna är gör jag Monte Carlo simuleringar av ränte- och inflationsförändring. Jag gör 500 simuleringar som jag använder till 500 scenarier. För varje scenario gör jag därefter en balansering och årlig ombalansering.

7.1 Immunisering

Immunisering innebär en matchning av tillgångar och framtida utgifter (enligt durationsanalys i 6.2). Eftersom livräntorna i de flesta fall betalas ut under personens hela livslängd är företaget bundet vid framtida utbetalningar under en lång period. Genom att försöka matcha varje utbetalning med en tillgång som ger kupongutbetalning samtidigt minskar räntekänsligheten. Förändringar i räntan påverkar då inte portföljen i samma utsträckning. Effekten en ränteförändring har på tillgångarna kompenseras med att utbetalningen vid samma tidpunkt får motsatt effekt. En stigande ränta innebär att en obligation minskar i värde. När räntan stiger så minskar alltså värdet på tillgångarna. Samtidigt innebär ränteuppgången också att nuvärdet på utbetalningarna sjunker.

7.1.1 Tre obligationer

Jag har beräknat livräntornas nuvärde, duration och konvexitet, liksom varje obligations pris, duration och konvexitet. Immunisering innebär att jag räknar ut varje obligations vikter som matchar livräntornas duration och konvexitet. Vikterna motsvarar hela innehavet (dvs. summan av vikterna är 1). Därmed erhåller jag följande ekvationssystem[18].

$$
\begin{aligned}
v_1 + v_2 + v_3 &= 1 \\
v_1 d_1 + v_2 d_2 + v_3 d_3 &= D \\
v_1 k_1 + v_2 k_2 + v_3 k_3 &= K
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Eftersom jag har tre ekvationen kan jag endast använda tre olika obligationer i portföljen samtidigt för att få en entydig lösning. Det innebär att jag behöver göra ett urval för varje balansering. Vikterna tillåts inte vara negativa, se 7.1.3.

Ekvationssystemet ovan kan uttryckas med matriser enligt:

$$
\begin{bmatrix} 1 \\ D \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}
\tag{21}
$$

och löses genom:

$$
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ D \\ K \end{bmatrix}
\tag{22}
$$

Vikterna $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ är alltså de tre obligationernas vikter till den immuniserade portföljen. Genom vikterna, det kapital som investeras i portföljen samt priset på obligationen beräknas antalet obligationer som ska köpas. Jag utgår här från att nuvärdet av portföljen (P) är den mängd kapital som investeras.

$$
Antal(i) = \frac{P \cdot v_i}{p(i)}
\tag{23}
$$

---

18 (Höglund, 2005)

För obligation i = 1, 2, 3.

Vid balanseringen tillåter jag inga negativa vikter för obligationerna, vilket innebär att man inte tillåts sälja en obligation som man inte äger, dvs. man kan inte vara kort i en obligation och i så fall tjäna på att obligationen går ner.

7.1.2 Två obligationer

Jag undersöker en kombination av tre obligationer och ser om dess vikter blir positiva annars undersöker jag en annan kombination av obligationer. Finns det inte någon kombination av tre obligationer som ger positiv vikt utesluter jag en obligation och använder endast två obligationer i ett liknande ekvationssystem som ovan fast med två vikter. Med endast två vikter används inte konvexiteten utan endast duration och att summan av vikterna är lika med 1. Motsvarande ekvation till (21) med endast två obligationer blir (24):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{24}$$

(22) utrycks för två obligationer som (25)

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ D \end{pmatrix} \tag{25}$$

7.1.3 Positiva vikter

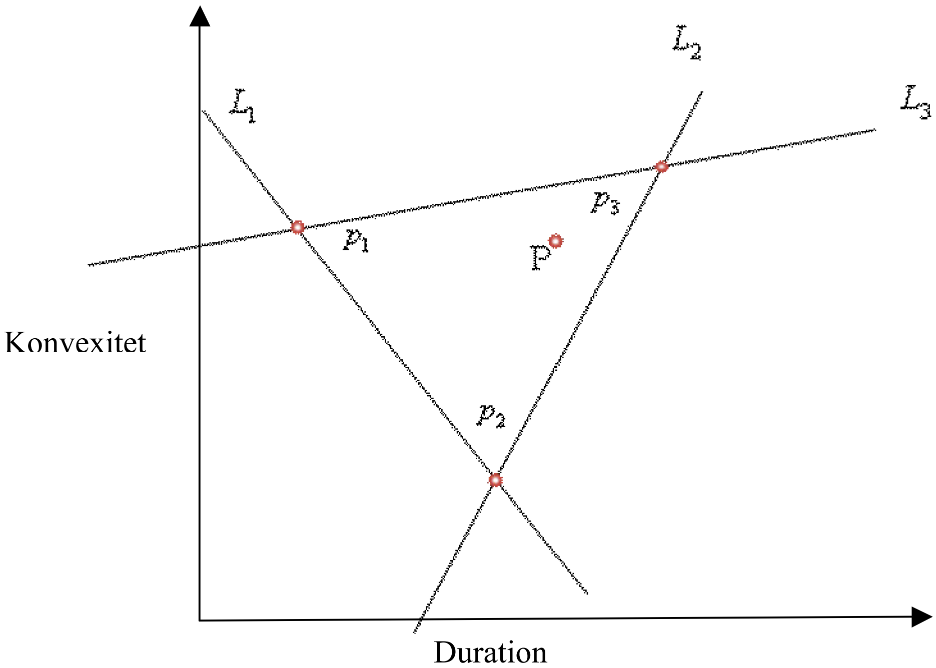
Först undersöker jag alltså om tre vikter för de olika obligationerna tillåts vara positiva. Detta kan illustreras genom ett koordinatsystem med duration som en axel och konvexitet som en axel. Varje obligations duration och konvexitet (d, k) bildar en punkt. De tre obligationer som används innebär tre punkter som bildar en triangel i koordinatsystemet. När punkten P, som motsvarar reservens duration och konvexitet, dvs. (D, K) ligger innanför denna triangel är alla tre vikterna positiva.

Jag benämner de tre punkterna som

$$p_1 = (d_1, k_1), p_2 = (d_2, k_2), p_3 = (d_3, k_3) \tag{26}$$

Ekvationen som uttrycker linjen mellan två punkter blir enligt följande: Linjen L_1 mellan p_1 och p_2, L_2 mellan p_2 och p_3 samt L_3 mellan p_3 och p_1 Ett exempel på hur dessa punkter och linjer kan se ut är illustrerade i Figur 5. Varje punkts duration utrycks i x-led och konvexitet uttrycks i y-led, enligt (26) samt (27) – (29).

Figur 5



Ekvationerna till dessa linjer definieras i (27) – (29):

$$L_1(x) = ax + (k_1 - a \cdot d_1) \tag{27}$$

Där $a = \dfrac{(k_2 - k_1)}{(d_2 - d_1)}$

$$L_2(x) = bx + (k_2 - b \cdot d_2) \tag{28}$$

$$b = \frac{(k_3 - k_2)}{(d_3 - d_2)}$$

$$L_3(x) = cx + (k_3 - c \cdot d_3) \tag{29}$$

$$c = \frac{(k_1 - k_3)}{(d_1 - d_3)}$$

För att undersöka om punkten P (D,K) ligger innanför triangeln undersöker jag hur punkten ligger i förhållande till varje linje och resterande punkter. Förutsättningen är att punkten P måste ligga på samma sida om varje linje som den resterande punkten. Punkten jämförs med linje L_1, och då måste P ligga på samma sida om L_1 som punkten p_3, antingen måste P och p_3 vara under linjen eller över linjen L_1. Detta innebär att antingen (30) eller (31) gäller:

$$\left(L_1(D) = aD + (k_1 - a \cdot d_1) > K \wedge L_1(d_3) = aD + (k_1 - a \cdot d_1) > k_3\right) \tag{30}$$

$$\left(L_1(D) = aD + (k_1 - a \cdot d_1) < K \wedge L_1(d_3) = aD + (k_1 - a \cdot d_1) < k_3\right) \tag{31}$$

På samma sätt måste punkten P jämföras med de övriga linjerna och punkterna. Genom att jämföra P med de tre linjerna får jag fram följande uttryck.

$$\begin{aligned} &\left(\left(L_1(D) > K \wedge L_1(d_3) > k_3\right) \vee \left(L_1(D) > K \wedge L_1(d_3) > k_3\right)\right) \\ &\wedge \left(\left(L_2(D) > K \wedge L_2(d_1) > k_1\right) \vee \left(L_2(D) > K \wedge L_2(d_1) > k_1\right)\right) \\ &\wedge \left(\left(L_3(D) > K \wedge L_2(d_2) > k_2\right) \vee \left(L_3(D) > K \wedge L_3(d_2) > k_2\right)\right) \end{aligned} \tag{32}$$

Se 9.4 för exempel beräkningar.

7.1.4 Ombalansering

En ombalansering innebär att efter en tid göra om immuniseringen ovan. Värde på pris, duration och konvexitet har förändrats i förhållande till den ränta som nu råder och den tid som passerat. Nya värden på dessa faktorer innebär ändrade förutsättningar för vikterna som också förändras. Det innebär att en viss andel av obligationerna före ombalansering säljs och nya obligationer enligt de nya vikterna köps. Eftersom jag endast kan immunisera tre obligationer åt gången men har fler obligationer att välja mellan innebär ombalansering att en eller fler obligationer kan bytas ut mot andra obligationer.

På samma sätt som ovan interpolerar jag räntan för varje år utifrån de historiska räntor jag har. Första gången jag gör ombalansering (dvs. inför andra året) blir räntekurvan (33), som första året utrycktes i (9)

$$R_2 = \begin{pmatrix} r_{2,1} & r_{2,2} & \dots & r_{2,k-1} \end{pmatrix} \tag{33}$$

där k är antalet kvarvarande år på betalströmmen vid år 1, betalströmmen är alltså nu ett år kortare. $r_{2,j}$ är den j åriga räntan under andra året. Jag använder i fortsättningen ett index för att markera vilket år det rör sig om.

Första året uttryckte jag den kvarvarande betalströmen i (10). Andra året har den första betalningen betalats ut, dvs. x_1. Kvar är alltså $(x_2 \quad x_3 \quad \ldots \quad x_k)$, där x_2 förväntas betalas ut under detta år. När dessa årliga betalningar togs fram år 1 räknades betalningarna upp med ett inflationsantagande (se 6.1). Efter ett år känner vi till hur stor inflationen har varit under det första året. Därför behöver varje betalning multipliceras med verklig inflation förra året delat med inflationsantagandet.

Jag uttrycker kvarvarande betalström år 2 som

$$X_2 = (x_{2,1} \quad x_{2,2} \quad \ldots \quad x_{2,k-1}). \tag{34}$$

2 i index indikerar att det är betalströmen för andra året. $x_{2,1}$ är den utbetalning som sker inom ett år under andra årets immunisering, det motsvara den betalning som föregående år benämndes x_2 i (8), (och som med indexering av år skulle uttryckas $x_{1,2}$) multiplicerat med kvoten av verklig inflation under året delat med inflationsantagandet. (34) kan utryckas som:

$$X_2 = (x_2 \quad x_3 \quad \ldots \quad x_k) \cdot \frac{i_{h_1}}{i_a} \tag{35}$$

Där i_{h1} är den verkliga (historiska) inflation år 1och ant är inflations antagande.

Andra året har även räntan ändrats, och nuvärdet på betalströmmen (som första året uttryckes i (10)) andra året är därmed:

$$P_2 = \frac{x_{2,1}}{(1 + r_{2,1})} + \frac{x_{2,2}}{(1 + r_{2,2})^2} + \ldots + \frac{x_{2,k-1}}{(1 + r_{2,k-1})^{k-1}} \tag{36}$$

Där $r_{2,1}$ är den ettåriga räntan under andra året och k-1 är antal kvarvarande betalningar.

Durationen och konvexiteten räknas ut på samma sätt som tidigare förutom att antalet kvarvarande år har minskat. (15) och (18) utrycks under andra året som:

$$D_2 = \left(\frac{1}{P_2}\right)\left(\frac{x_{2,1}}{\left(1+r_{2,1}\right)} + \frac{2\cdot x_{2,2}}{\left(1+r_{2,2}\right)^2} + \ldots + \frac{k\cdot x_{2,k-1}}{\left(1+r_{2,k-1}\right)^{k-1}}\right) = \left(\frac{1}{P_2}\right)\left(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{j\cdot x_{2,j}}{\left(1+r_{2,j}\right)^j}\right) \quad (37)$$

$$K_2 = \left(\frac{1}{P_2}\right)\left(\frac{2\cdot x_{2,1}}{\left(1+r_{2,1}\right)} + \frac{2\cdot 3\cdot x_{2,2}}{\left(1+r_{2,2}\right)^2} + \ldots + \frac{(k-1)\cdot k\cdot x_{2,k-1}}{\left(1+r_{2,k-1}\right)^{k-1}}\right) = \left(\frac{1}{P^2}\right)\left(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{j(j+1)x_{2,j}}{\left(1+r_{2,j}\right)^j}\right) \quad (38)$$

Priset duration och konvexitet på varje obligation i räknas nu fram med aktuella värden för räntan för det år som balanseringen görs. Inför andra året utvecklas prisfunktionen från första året (12) till

$$p_2(i) = \frac{C_i}{(1+r_{2,1})^1} + \frac{C_i}{(1+r_{2,2})^2} + \ldots + \frac{N_i + C_i}{(1+r_{2,n-1})^{n-1}} \quad (39)$$

För realobligationer beräknas funktioner på samma sätt som ovan:

$$p_2(i) = Index_{likviddag}\left(\frac{C_i}{(1+r_{2,1})^1} + \frac{C_i}{(1+r_{2,2})^2} + \ldots + \frac{N_i + C_i}{(1+r_{2,n-1})^{n-1}}\right) \quad (40)$$

$$d_2(i) = \frac{1}{p_2(i)}\left(\frac{C_i}{\left(1+r_{2,1}\right)} + \frac{2\cdot C_i}{\left(1+r_{2,2}\right)^2} + \ldots + \frac{\left(n-1\right)\cdot C_i}{\left(1+r_{2,n-1}\right)^{n-1}} + \frac{\left(n-1\right)\cdot N_i}{\left(1+r_{2,n-1}\right)^{n-1}}\right) \quad (41)$$

$$k_2(i) = \left(\frac{1}{p_2(i)}\right)\left(\frac{1\cdot 2\cdot C_i}{\left(1+r_{2,1}\right)^3} + \ldots + \frac{(n-1)\cdot n\cdot C_i}{\left(1+r_{2,n-1}\right)^{n+1}}\right) \quad (42)$$

där n är antalet år kvar tills obligationen förfaller vid år 1. $r_{2,j}$ är den i-åriga räntan för andra årets immunisering.

Eftersom ett år har gått innebär det att en kupong betalats ut, vilket minskar priset på obligationen. Eftersom det är ett år mindre kvar tid tills obligationen förfaller så kommer yielden att har mindre effekt och priset borde öka. Hur priset i praktiken påverkas av detta beror på kupongens och yieldens storlek. Har räntan ökat sedan förra året kommer yielden att minska, vilket minskar priset på obligationen.

Totalt värde på portföljen efter första året beräknas i (43)

$$totalvärde_2 = \sum_{i=1}^{3} antal_1(i) \cdot p^2(i) + \sum_{i=1}^{3} antal_1(i) \cdot C_i \times x_1 \cdot \frac{(1 + i_{h_1})}{(1 + i_a)} \tag{43}$$

där $antal_1(i)$ är det antal obligationen som köptes år 1 av obligation nr i. i_{h_1} är verklig inflation för år 1 och i_a är inflationsantagandet.

Detta värde är det kapital som finns i portföljen att investera under år 2. För år m utrycks totalvärdet:

$$totalvärde_m = \sum_{i=1}^{3} antal_{m-1}(i) \cdot p_m(i) + \sum_{i=1}^{3} antal_{m-1}(i) \cdot C_i \times x_{2,1} \cdot \frac{(1 + i_{h_{m-1}})}{(1 + i_a)} \tag{44}$$

Nästa steg är att göra om immuniseringen med hänsyn till nya priser, duration och konvexitet.

Eftersom jag nu har fått fram nya vektorer Y och X kan jag liksom ovan beräkna priset P, durationen D, konvexiteten K. Därmed får jag återigen ekvationen nedan med andra värden på D och K.

$$\begin{aligned} v_{2,1} + v_{2,2} + v_{2,3} &= 1 \\ v_{2,1}d_{2,1} + v_{2,2}d_{2,2} + v_{2,3}d_{2,3} &= D_2 \\ v_{2,1}k_{2,1} + v_{2,2}k_{2,2} + v_{2,3}k_{2,3} &= K_2 \end{aligned} \tag{45}$$

Vikterna $V_2 = (v_{2,1} \quad v_{2,2} \quad v_{2,3})$ är befintliga vikter år 2. Observera att $v_{2,1}$ inte behöver innebära samma obligation som första året. På samma sätt som tidigare skapar jag en portfölj med positiva vikter. Går det inte att skapa en sammansättning av tre obligationer som har positiva vikter använder jag två obligationer. Går det inte att göra en portfölj med två obligationer använder jag en obligation som är närmast portföljens duration.

Därefter görs ombalansering på samma sätt för de resterande åren.

7.1.5 Resultat immunisering

Jag har i Tabell 4 beräknat de två portföljernas årliga värde vid ombalansering. År 1 innebär nuvärdet i början av första året. Varje portföljs resultat har jämförts med det aktuella nuvärdet på kvarvarande betalningar för varje år. Eftersom detta nuvärde beror på räntan och inflationen som varierar kraftigt under dessa år innebär det stor variation i nuvärdet. Efter tio år har den nominella portföljen ett värde som är 48 % av nuvärdet på kvarvarande betalningar (som är samma för både portföljerna). För realobligationer är motsvarande siffra 75 %. Båda portföljerna tappar värde mot nuvärdet, men den nominella portföljen tappar mest. Jag har här gjort ett inflationsantagande på 2 % årlig inflation.

Tabell 4

mkr		Nominella obligationer		Realobligationer	
År	Nuvärde kvarvarande betalningar	Resultat	Resultat / Nuvärde år 10	Resultat	Resultat / Nuvärde år 10
1	1 061	1 061		1 061	
2	1 058	1 046	102 %	1 203	114 %
3	1 141	1 087	100 %	1 474	129 %
4	980	850	93 %	1 392	142 %
5	1 060	864	87 %	1 747	165 %
6	1 343	962	79 %	1 467	109 %
7	1 320	860	69 %	1 363	103 %
8	1 670	989	58 %	1 328	79 %
9	1 209	662	53 %	1 005	83 %
10	1 432	683	48 %	1 069	75 %

Den nominella portföljen har inte gått att balansera med tre vikter under något år. Under de sista åren har det heller inte varit möjligt att balansera portföljen med två obligationer utan en obligation har då använts (obligationen med längst duration). Anledningen till detta är att betalströmmen är för lång och de nominella obligationer som finns att tillgå inte klarar av att matcha utbetalningarna. För realportföljen har det varit möjligt att balansera med tre obligationer under de första åren, därefter två obligationer.

Portföljen med nominella obligationer utvecklas svagt under varje år. Realobligationsportföljen utvecklas starkt positivt de första fyra åren. Under denna period går inflationen upp kraftigt samtidigt som nominell ränta inte varierar speciellt mycket. Detta innebär att realräntan går ner under dessa år och därmed går priset på realobligationerna upp. Därefter utvecklas portföljen negativt under några år, speciellt mellan år fem och sex tappar portföljen mycket i värde. Just mellan dessa år minskar inflationen mycket kraftigt (från 11 till 5 %) samtidigt som nominell ränta går ner ca 2 procent (från 13 % till 11 %). Det innebär att realräntan ökar kraftigt vilket resulterar i att realobligationerna går ner i pris.

Det innebär att portföljen minskar kraftigt i värde eftersom priset på realobligationerna går ner till följd av lägre realränta, samtidigt som nuvärdet på reserven ökar kraftigt.

Jag ändrar nu inflationsantagandet till 5 % årlig inflation i stället för 2 %. Resultatet visas i Tabell 5.

Tabell 5

mkr		Nominella obligationer		Realobligationer	
År	Nuvärde kvarvarande betalningar	Resultat	Resultat / Nuvärde år 10	Resultat	Resultat / Nuvärde år 10
1	1 349	1 349		1 349	
2	1 344	1 374	105 %	1 626	121 %
3	1 472	1 507	107 %	2 150	146 %
4	1 225	1 240	108 %	2 083	170 %
5	1 300	1 334	106 %	2 834	218 %
6	1 747	1 579	100 %	2 397	137 %
7	1 688	1 523	95 %	2 264	134 %
8	2 235	1 887	83 %	2 327	104 %
9	1 524	1 416	90 %	1 785	117 %
10	1 868	1 653	88 %	2 080	111 %

Det visar sig att resultatet i förhållande till nuvärdet blir klart högre, 111 % för realobligationer och 88 % för nominella obligationer.

Anledningen till den stora skillnaden är främst att ett högre inflationsantagande höjer nuvärdet på reserven. Eftersom jag investerar den mängd kapital som motsvarar nuvärdet i början av år 1 påverkar detta hela portföljen under de tio åren. Nuvärdet på portföljen med 5 % inflationsantagande är ca 290 Mkr högre än med 2 % antagande.

Genom att investera 290 Mkr mer kapital kommer kupongvädet att vara ungefär 40 % högre för realportföljen. Dessutom påverkar inflationen även det totala värdet på portföljen varje år. Samtidigt är utbetalningarna oförändrade, eftersom inflationsantagandet endast påverkar nuvärdesberäkningen. Det leder till att portföljen efter tio år är värd över 1000 Mkr mer än med det lägre inflationsantagandet.

Genom ett för lågt inflationsantagande underskattas livräntereserven kraftigt och detta får så pass stora konsekvenser för portföljen att det inte spelar så stor roll hur bra immuniseringen utförs. Det är ändå tydligt att portföljen med realobligationer utvecklas bättre under de aktuella förutsättningarna.

Genom att jämföra resultatet med nuvärdet år 1 erhålls varje portföljs utveckling i förhållande till det kapital som investerades år 1 (se Tabell 6)

Tabell 6

mkr		Nominella obligationer		Realobligationer	
År	Nuvärde kvarvarande betalningar	Resultat	Resultat / Nuvärde år 1	Resultat	Resultat / Nuvärde år 1
1	1 061	1 061		1 061	
2	1 058	1 046	99 %	1 203	113 %
3	1 141	1 087	102 %	1 474	139 %
4	980	850	80 %	1 392	131 %
5	1 060	864	81 %	1 747	165 %
6	1 343	962	91 %	1 467	138 %
7	1 320	860	81 %	1 363	128 %
8	1 670	989	93 %	1 328	125 %
9	1 209	662	62 %	1 005	95 %
10	1 432	683	64 %	1 069	101 %

Resultatet är att portföljen med nominella obligationer förlorar 24 % i värde mot det investerade kapitalet medan portföljen med realobligationer ökar i värde med 9 %.

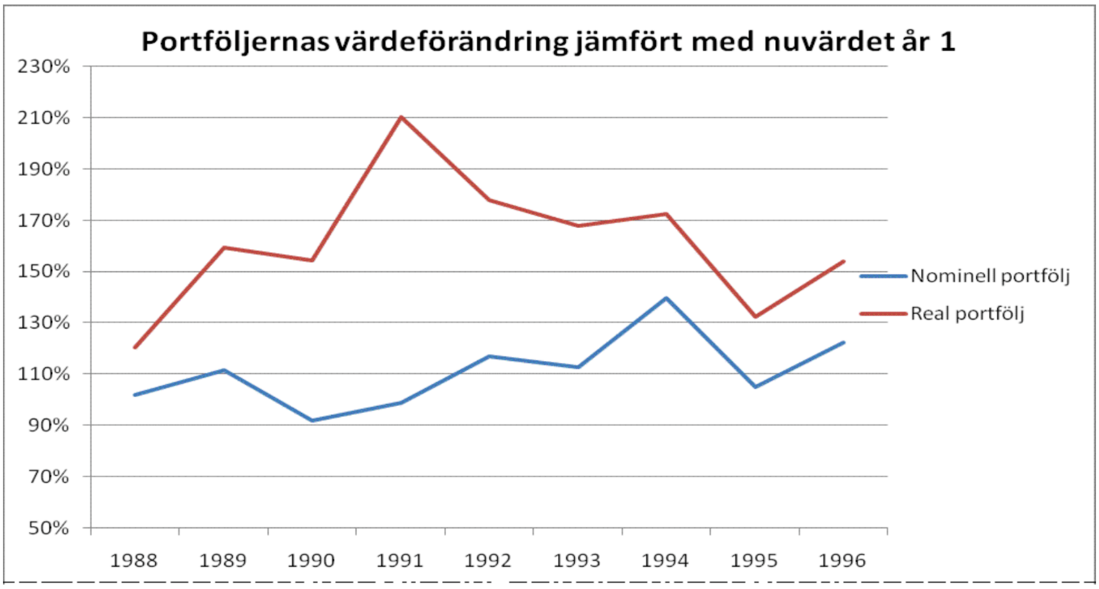
Med det högre inflationsantagandet på 5 % ser resultatet ut som i Tabell 7:

Tabell 7

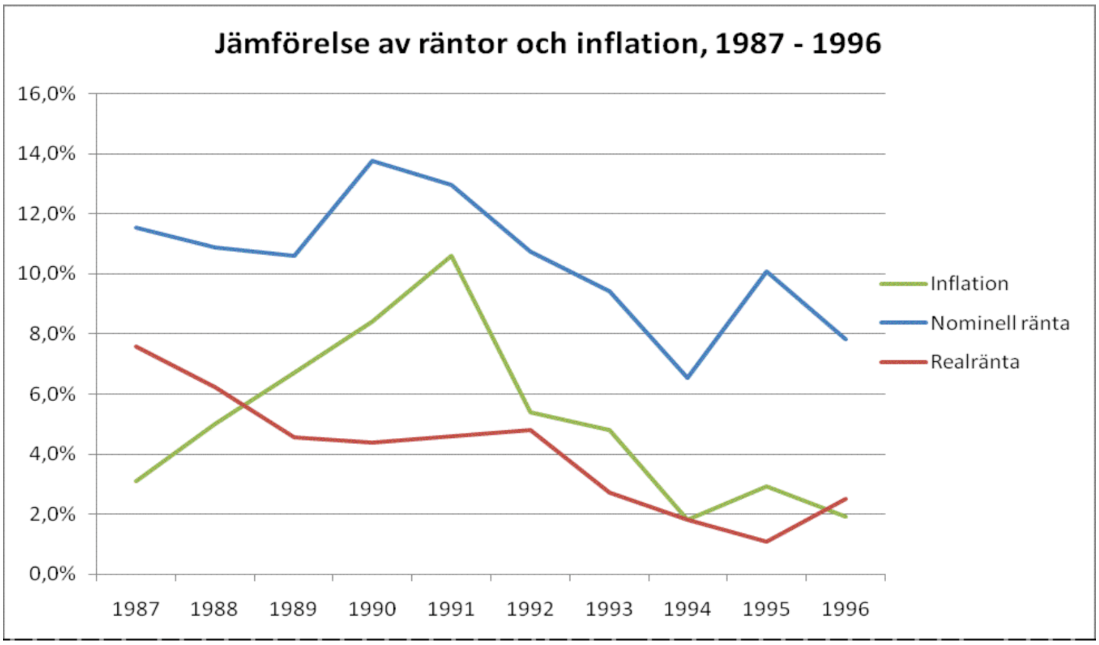
mkr		Nominella obligationer		Realobligationer	
År	Nuvärde kvarvarande betalningar	Resultat	Resultat / Nuvärde år 1	Resultat	Resultat / Nuvärde år 1
1	1 349	1 349		1 349	
2	1 344	1 374	102 %	1 626	120 %
3	1 472	1 507	112 %	2 150	159 %
4	1 225	1 240	92 %	2 083	154 %
5	1 300	1 334	99 %	2 834	210 %
6	1 747	1 579	117 %	2 397	178 %
7	1 688	1 523	113 %	2 264	168 %
8	2 235	1 887	140 %	2 327	172 %
9	1 524	1 416	105 %	1 785	132 %
10	1 868	1 653	122 %	2 080	154 %

Jag jämför resultaten mellan real- och nominellportfölj med 5 % inflations antagande i Tabell 7. Under de första fyra åren utvecklas realportföljen väldigt starkt (Det sker dock en liten nedgång i realportföljen mellan 1989 och 1990.) samtidigt som den nominella portföljen utvecklas svagt nedåt. Under dessa år minskar realräntan (med undantag för 1989-1990) samtidigt som den nominella räntan totalt ökar något (se Tabell 8). Under de följande tre åren utvecklas realportföljen svagt samtidigt som nominella portföljen går upp. Under denna period utvecklas räntorna åt andra hållet, dvs. realräntan ökar och nominell ränta minskar kraftigt. Näst sista året 1995 går nominell och realräntan upp och 1996 går de båda räntorna ner. Detta resulterar i att portföljerna går ner 1995 och upp 1996.

Figur 6



Figur 7



Med ett inflationsantagande på 2 % behövs 1320 Mkr år 1 för att värdet efter tio år skall motsvara nuvärdet på kvarvarande betalningar för den nominella portföljen. Samma kapital innebär att realportföljen stiger med 19 %.

När inflationsantagandet är 5 % behövs 1430Mkr för att den nominella portföljen ska motsvara 100 % av nuvärdet år tio. Realportföljen ökar med detta kapital med 16 %.

De stora variationerna mellan åren kan förklaras med de omfattande skillnaderna mellan räntan och inflationen som råder mellan varje år. Nuvärdet på reserven ökar kraftigt under de tio åren trots att det sker årliga utbetalningar. Orsaken till detta är att räntan minskar kraftigt under några år samt att inflationen ökar varje betalning även för de framtida åren.

7.1.6 Immunisering av delklasser

Livräntorna kan delas upp i olika klasser beroende på vilken typ av försäkring som föranledde livräntan. Dessa försäkringsklasser hos Trygg Hansa är Privat Trafik, Företag, Företag Motor, Företag Trafik, Hem, Sjuk och olycksfall samt Övriga. Av dessa klasser är Privat Trafik den absolut största klassen. Resultaten ovan utgår ifrån alla livräntor för alla klasser.

Jag genomför en immunisering på samma sätt som i 7.1.2 för klasserna Företag, Privat Trafik, Företag Trafik och Hem (se Tabell 8). Klasserna är olika långa, dvs. utbetalningen sker under olika lång tid i framtiden. Det innebär att nuvärde och duration för dessa portföljer skiljer sig åt vilket ger olika vikter och obligationer i den immuniserade portföljen. Jag använder ett inflationsantagande på 2 %.

Resultaten av de fem klasserna jämfört med nuvärdet år 1 redovisas i Tabell 8

Tabell 8

Resultat år 10 / Nuvärde år 1

Klass	Nom. Portfölj	Real portfölj
Företag	49 %	85 %
Privat Trafik	66 %	103 %
Företag Trafik	62 %	98 %
Hem	37 %	72 %

Det är ganska stora skillnader mellan de olika klasserna. Privat Trafik är den största klassen och står för ca 80 % av alla livräntor. Resultatet för denna klass ganska likvärdigt med resultatet för alla livräntor för både den nominella och reella trafikportföljen. Företag Trafik har något sämre utveckling medan Företag och Hem har en klart sämre utveckling för både realobligationer och nominella obligationer. Dessa två klasser är kortare och mycket mindre än de övriga klasserna. En kortare klass innebär att en större andel av betalningarna betalas ut varje år och eftersom dessa betalningar indexeras med inflationen som är förhållandevis hög i dessa fall påverkar detta portföljen negativt. Detta påverkar även portföljen med realobligationer trots att portföljen räknas upp med inflationen, eftersom det belopp som betalas ut är större i förhållande till portföljens totala värde.

Genom att jämföra portföljens resultat med nuvärdet år tio (se Tabell 9) visar det sig att nominella obligationer har sämre utveckling för de två korta klasserna (Hem och Företag) även om det inte skiljer så mycket. Realobligationer har en utveckling som inte skiljer sig så mycket mellan klasserna.

Tabell 9

Resultat år 10 / Nuvärde år 10

Klass	Nominell portfölj	Real portfölj
Företag	43 %	73 %
Privat Trafik	48 %	75 %
Företag Trafik	47 %	74 %
Hem	37 %	73 %

7.2 Monte Carlo simulering

7.2.1 Beskrivning simulering

De tio senaste årens statistik på räntor och obligationer använder jag som grund för en simulering av räntor och inflation. Genom att ta månadsförändringarna under dessa fem år får jag en lista för den 2-åriga, 5-åriga 10-åriga och inflationen. Dessa månadsförändringar är sammanställda för åren 1995 till 2004, Figur 9 - Figur 12 i Kapitel 11.

Månadsförändringarna har ett utseende som i mina ögon påminner om en normalfördelning för både 2-, 5-, 10-åriga räntan samt inflationen. Den simulering som jag gjort har jag gjort utifrån antagandet att förändringarna är normalfördelade med väntevärde enligt Tabell 10 och kovarians enligt Tabell 11

Tabell 10

Medelvärde	2-årig	5-årig	10-årig	inflation
	– 0,062	– 0,059	– 0,058	– 0,018

Tabell 11

Kovarians	2-årig	5-årig	10-årig	inflation
2-årig	0,053	0,051	0,042	0,007
5-årig	0,051	0,060	0,052	0,020
10-årig	0,042	0,052	0,052	0,009
inflation	0,007	0,020	0,009	0,112

Jag genomför 500 simuleringar under tio år med medelvärden och kovarians enligt Tabell 10-11. Varje års förändring beräknas genom att addera tolv månadssimuleringar. Detta görs sedan tio gånger vilket ger tio matriser med 500 rader simuleringar och fyra kolumner för de tre räntorna och inflationen. Jag mappar första raden i varje matris med första raden i de andra nio matriserna. På så sätt skapar jag tio års simuleringar för varje rad, där varje rad motsvarar ett scenario.

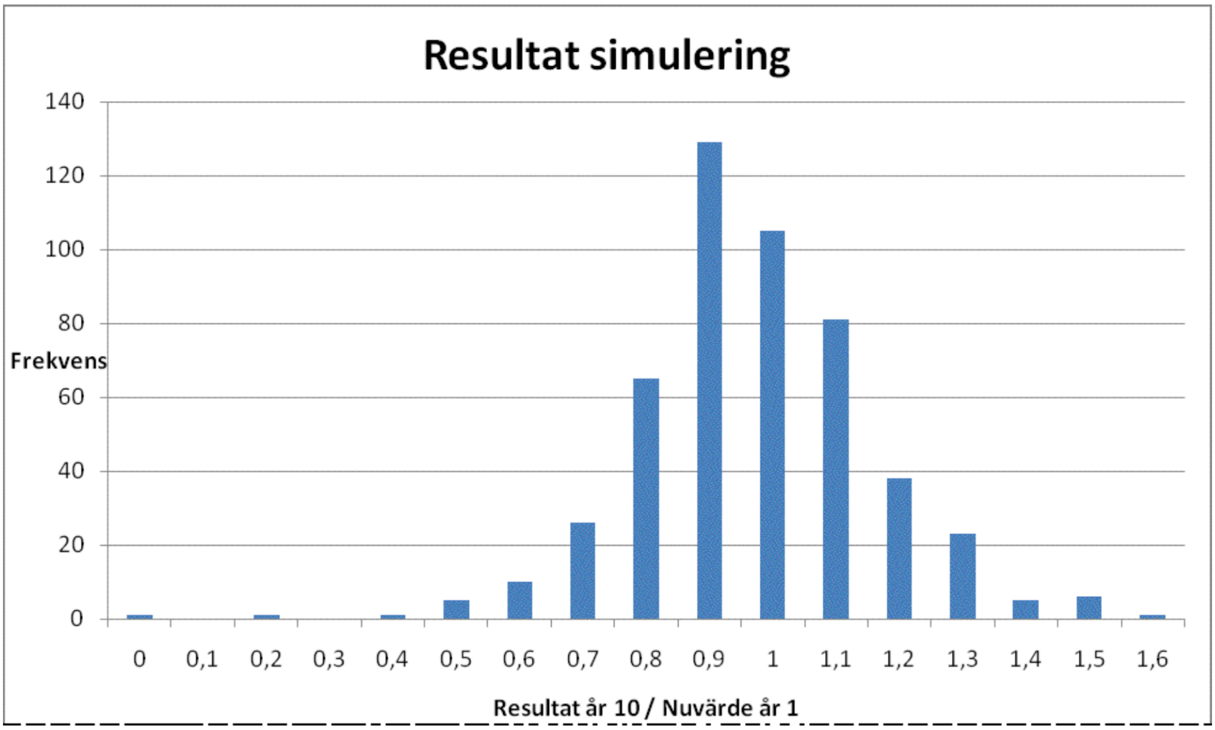
För varje scenario beräknar jag nuvärde och duration för betalströmmen samt pris och duration för varje obligation. Jag använder samma nominella obligationer som beskrivs i 6.2.4 för den nominella portföljen. Jag har använt betalströmmen för klassen Hemförsäkring eftersom den är kortare än Trafik och Motor klasserna. Detta val har jag gjort eftersom beräkningarna med så stor mängd scenarier blir mindre krävande.

Första året använder jag den mängd kapital som motsvarar nuvärdet av betalströmmen beräknat med 2 % inflationsantagande. Jag balanserar portföljen med två vikter (eftersom det inte är möjligt att balansera med tre positiva vikter) och utför årliga ombalanseringar under de tio år som jag har simulerat ränta och inflation för enligt modellen ovan. Efter tio år har jag ett värde för varje simulerad portfölj. Detta värde jämför jag sedan med nuvärdet år ett. Eftersom det är förändringar i ränta och inflation jag simulerar behöver ett startvärde antas. Jag har antagit ett startvärde på 10 %, 10,2 % och 11 % för de tre räntorna och 2,5 % för inflationen. Detta är den nivån som räntan och inflationen hade i början av det tioåriga intervall som jag använder för att simulerar månadsförändringarna.

7.2.2 Resultat simulering

Resultatet av den nominella portföljen ovan är 37 % av nuvärdet år 1. Resultatet av simuleringarna är en vektor innehållande resultatet från varje simulering, se Figur 8. Medelvärdet av resultatet av simuleringarna är ca 92 % av nuvärdet år 1. Standardavvikelsen är ca 0,18 vilket ger en sannolikhet på under ca 1,3 promille att resultatet blir 37 % av nuvärdet eller sämre.

Figur 8



8 Diskussion och Slutsatser

8.1 Diskussion

Den modell jag använder för immunisering innehåller ett antal förenklingar och begränsningar mot verkligheten. Det är min bedömning att diskonteringsräntan och inflationsantagandet är de förenklingar som innebär störst påverkan på resultatet. Jag anser att orsaken till detta är att dessa parametrar har stark påverkan på nuvärdet av betalströmen och även en liten variation innebär en ganska stor skillnad i storleken på nuvärdet av betalströmmen. Jag har inte undersökt effekten av förändringar i diskokonteringsräntan.

8.2 Slutsatser

Det som har störst påverkan på resultatet i mitt arbete är nivån på nuvärdet av reserven. Det visar sig att inflationsantagandet får en stor påverkan på nuvärdet av betalströmmen. Ett för lågt antagande medför att det kapital som investeras baserat på nuvärdet blir för lågt. Det är väldigt svårt att få en portfölj med för lågt nuvärde att följa med inflationen, eftersom portföljens värde ”äts” upp av de årliga utbetalningarna.

Det visar sig att realobligationer har en klart bättre utveckling än nominella obligationer när inflationen är så hög som den var historiskt under åren 1987 och framåt.

De resultat jag får utifrån simuleringarna ger en risk på drygt en promille att portföljen utvecklas likvärdigt eller sämre som för delklassen Hemförsäkring i den nominella portföljen. Sannolikheten för att scenariot ska inträffa får bedömas som relativt lågt. Osäkerheten är dock i mina ögon stor eftersom jag antar att förändringar i inflation och ränta är normalfördelade. En orsak till en så låg sannolikhet kan vara politisk. Inflationsmålet på 2 % har sedan mitten av nittiotalet varit högprioriterat och under denna period har inflationen varit mer stabil än tidigare år historiskt.

Den utveckling av räntan och inflationen som ägde rum mellan 1987 och 1996 anser jag är ett ”worst case” scenario som utifrån dagens stabila inflation får anses mindre sannolikt. En sådan utveckling skulle å andra sidan få mycket stora negativa konsekvenser för företaget.

Realränteobligationer ger ett effektivt skydd mot inflationsrisken, men på grund av begränsad likviditet, etc. är det orimligt att ha en portfölj som består till stor del av realobligationer. Däremot kan realobligationer vara ett komplement i en portfölj i kombination med andra värdepapper såsom nominella obligationer, aktier och fastigheter.

8.3 Förslag till utveckling

En begräsning jag har i modellen är att jag endast gör årliga ombalanseringar. Genom tätare ombalanseringar (exempelvis kvartalsvis eller månadsvis) skulle jag få ett resultat som förmodligen utvecklas jämnare. Genom att i en sådan portfölj göra samma val av obligationer, men låta vikterna variera enligt balanseringen, skulle det vara möjligt att jämföra resultatet och kunna uttala sig om hur detta påverkar resultatet av portföljerna.

När jag gör Monte Carlo simuleringen utgår jag ifrån att månadsförändringarna för räntor och inflation är normalfördelade. Genom en noggrannare analys av månadsförändringar skulle jag kunna uttala mig om hur troligt detta är och eventuellt göra simuleringen med en annan fördelning som är bättre lämpad.

9 Appendix

9.1 Realränteobligationer

Realränteobligationer introducerades i Sverige av Riksgäldskontoret 1994. Efterfrågan sjönk efter hand, något som delvis kan förklaras med att inflationen sjönk. Första åren såldes realobligationer via auktion men 1996 slutade Riksgäldskontoret med detta och införde så kallad on-tap försäljning, vilket innebär försäljning efter hand som efterfrågan uppstår. Flera obligationer introducerades under denna tid och efterfrågan steg, trots fortsatt låg inflation.

Nominella obligationer har ett emissionssystem där obligationer emitteras regelbundet (månadsvis), 1999 återinförde Riskgälden ett liknande emissionssystem, kvartalsvis och senare även månadsvis. I januari 2005 fanns sex realränteobligationer, alla har kuponger och kvarvarande löptider mellan 4 och 24 år[19]. Att staten ger ut realobligationer skapar en trovärdighet kring riksbankens inflationsmål, vilket kan leda till lägre räntor[20]

Varje gång en kupong betalas ut eller obligationen förfaller används indexfaktorn som är ett mått på hur KPI har utvecklats sedan obligationen introducerades. Indexfaktorn är kvoten mellan referensindex för likviddagen och så kallat basindex. Basindex är motsvarande index för introduktionsdagen. Eftersom index skapas månadsvis motsvarande referensindex för 1:a aug. och 1:a sep, skattas ett genomsnittligt index mellan dessa referensindex baserat på antal dagar mellan likvidindex och referensindex.[21]

Likviddag 10:e augusti används nedan. Referensindex för 1:a augusti används och för de dagar mellan 1:a och 10:e augusti adderas den månatliga indexförändringen (index för 1:a sep - index för 1:a aug.) multiplicerat med hur stor del av månaden som passerat. I detta fall innebär det 9/30 del av månaden mellan 1:a augusti och 1:a september.

$$Indexfaktor_{10\,Aug} = \frac{referens\,index_{10\,Aug}}{Bas\,index} = \frac{referens\,index_{1\,Aug} + \frac{10-1}{30} \cdot \left(referens\,index_{1\,Sep} - referens\,index_{1\,Aug}\right)}{Bas\,index}$$

Kupongerna räknas ut med denna indexfaktor.

$$Nom\,kupong_{kupondag} = \mathrm{Re}al\,kupong \cdot Indexfaktor_{kupongdag}$$

$$Kupongbelopp_{kupongdag} = Nom\,kupong_{kupongdag} \cdot Lånebelopp$$

---

19 (Anders Pelli)
20 (Anders Pelli)
21 (Riksgäldskontoret., 2005)

Numera har realränteobligationer ett deflationsskydd, utbetalningen av kuponger kan aldrig bli lägre än kupongen även om index sjunkit under perioden. Det belopp som återbetalas efter att obligationen förfallit är lägst lånebeloppet.

$$Återbetaltbelopp = Lånebelopp \cdot \max \left\lfloor indexfaktor_{likviddag};1 \right\rfloor$$

Obligationens pris baseras även det på indexfaktorn.

$$P = Indexfaktor_{likviddag} \left(\frac{kupong}{(1+r)^{d/360}} + \frac{kupong}{(1+r)^{d/360+1}} + \ldots + \frac{Nom.belopp + kupong}{(1+r)^{d/360+k}} \right)$$

där k är antal år till förfall och d är antal dagar till nästa kupong. Kupongerna antas då betalas ut vid samma datum varje år.

$$Upplupenränta = Indexfaktor_{likviddag} \cdot \frac{360 - d}{360} \cdot kupong$$

$$Kurs = P - Upplupenränta$$

$$Avräkningsbelopp = (Kurs + Upplupenränta) \cdot \frac{Lånebelopp}{100}$$

Avräkningsbeloppet

$$Avräkningsbelopp = Indexfaktor_{likviddag} \cdot \frac{Lånebelopp}{(1+r)^{d/360}}$$

9.2 Obligationspriset

9.2.1 Exempel

En obligation med en årlig kupong på 5 % och nominell värde 100 kr och återstående löptid 4 år kommer ha ett pris som står i direkt relation till återstående löptid och kupongräntan på 5 %. Om aktuell ränta motsvara kupongens ränta, dvs. 5 % kommer priset att vara 100 (oavsett löptid) Eftersom kupongen ger samma avkastning som aktuell ränta. Skulle räntan gå upp till 6 % minskar detta priset på obligationen, med fyra års löptid blir priset då:

$$P = \frac{5}{(1+0,06)^1} + \frac{5}{(1+0,06)^2} + \frac{5}{(1+0,06)^3} + \frac{5}{(1+0,06)^4} + \frac{100}{(1+0,06)^4} = 96,53 \qquad (46)$$

Eftersom jag får en lägre avkastning på kupongerna än vad aktuell ränta är sjunker priset på obligationen. Priset vid en ränta på 4 % blir 103,63.

9.3 Duration

9.3.1 Exempel

Lutningen på linjen som uttrycker priset motsvarar förändringshastigheten när räntan ändras. Exempelvis om räntan i exemplet stiger från 5 % till 6 % så sjunker priset på obligationen från 100 till 96,53, en förändring på 3,47 kr. Genom att använda durationen i punkten vid 5 % ränta får jag följande resultat

$$D = \frac{1}{100}\left[\frac{5}{(1+0,05)^1} + \frac{2 \cdot 5}{(1+0,05)^2} + \frac{3 \cdot 5}{(1+0,05)^3} \frac{4 \cdot 5}{(1+0,05)^4} + \frac{4 \cdot 100}{(1+0,05)^4}\right] = 3,72kr$$

Durationen utgör en linjär approximation av prisförändringen, den verkliga prisförändringen är konvex vilket förklarar att den verkliga förändringen är mindre än den förändringen som beräknats med durationen.

9.4 Positiva vikter

9.4.1 Exempel

Jag undersöker om punkten (3,2) som motsvarar P (D,K) i 7.1.3 ligger innanför den triangel som bildas av punkterna (1,1), (4,6) och (6,3) enligt (26) . Det spelar ingen roll vilken punkt som benämns p_1 eftersom alla punkter undersöks.

Linjens ekvation enligt (27) - (29) för de tre punkterna blir:

$$d_1 = 4, k_1 = 6$$
$$d_2 = 6, k_2 = 3$$
$$d_3 = 1, k_3 = 1$$

$$a = \frac{(3-6)}{(6-4)} = -\frac{3}{2}$$
$$L_1(x) = -\frac{3}{2}x + (6 + \frac{3}{2} \cdot 4) = -\frac{3x}{2} + 12$$

$$b = \frac{(1-3)}{(1-6)} = \frac{2}{5}$$

$$L_2(x) = \frac{2}{5}x + (3 - \frac{2}{5} \cdot 6) = \frac{2x}{5} + \frac{3}{5}$$

$$c = \frac{(6-1)}{(4-1)} = \frac{5}{3}$$

$$L_3(x) = \frac{5}{3}x + (1 - \frac{5}{3} \cdot 1) = \frac{5x}{3} - \frac{2}{3}$$

Nu undersöker jag om punkten (3,2) ligger på samma sida av linjen L_1 som punkten p_3 vilket motsvarar koordinaterna (1,1).

$L_1(3) = -\frac{3 \cdot 3}{2} + 12 = 7{,}5.$ $L_1(3) > 2$. Detta innebär alltså att punkten (3,2) ligger under linjen L_1. Punkten p_3 (1,1) undersöks nu: $L_1(1) = -\frac{3 \cdot 1}{2} + 12 = 10{,}5.$ $L_1(1) > 1$. Därmed ligger båda punkterna på samma sida av linjen. Nu testar jag på samma sätt de övriga linjerna:

$$L_2(3) = \frac{2 \cdot 3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{9}{5}, \quad L_2(3) < 2 \ \ (K)$$

$$L_2(4) = \frac{2 \cdot 4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{11}{5} \quad L_2(4) < 6 \ \ (k_1)$$

$$L_3(3) = \frac{5 \cdot 3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{13}{3}, \quad L_3(3) > 2 \ \ (K)$$

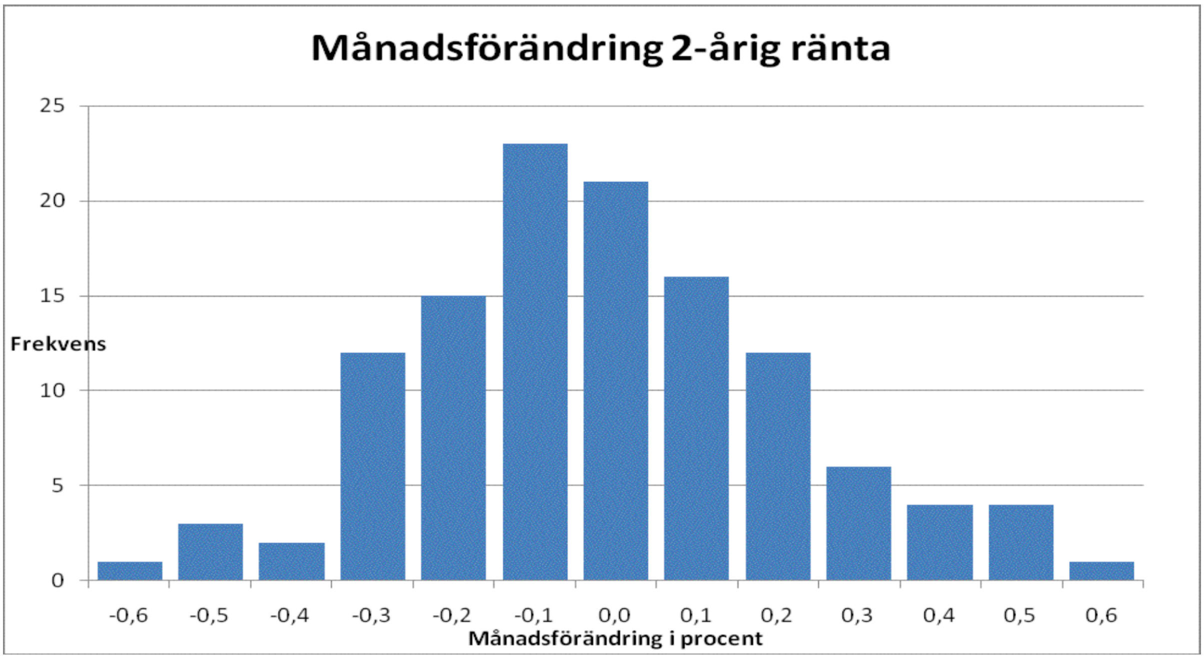
$$L_3(6) = \frac{5 \cdot 6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{28}{3}, \quad L_3(6) > 3 \ \ (k_2)$$

Båda punkterna ligger ovanför linjen L_2 och under L_3, därmed uppfylls villkoren för att punkten P (D,K) ligger innanför triangeln enligt (32).

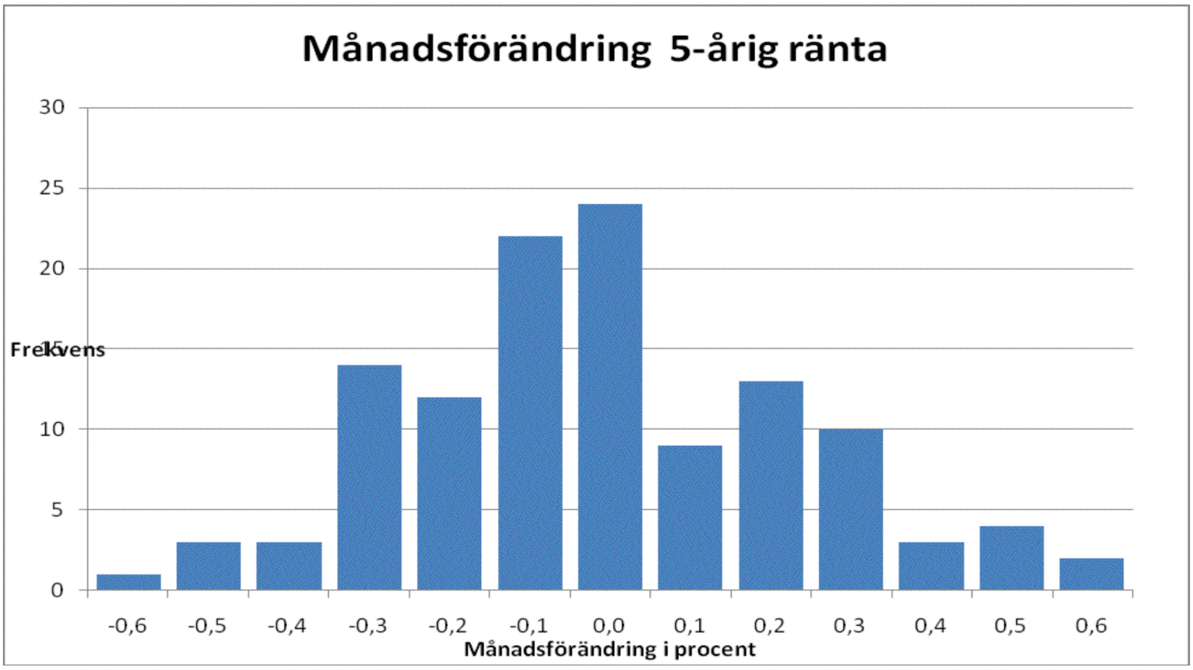
10 Bilagor

Månadsförändringen på räntor och inflation visas i Tabell 1-4.

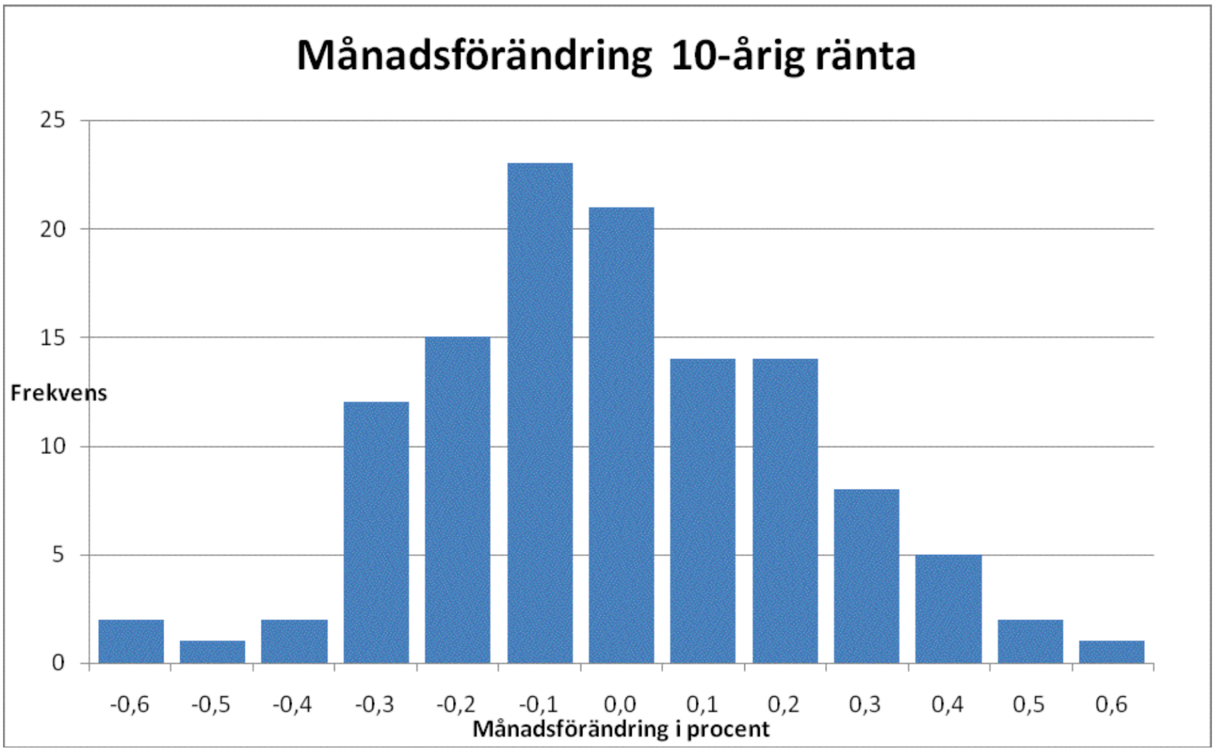
Figur 9



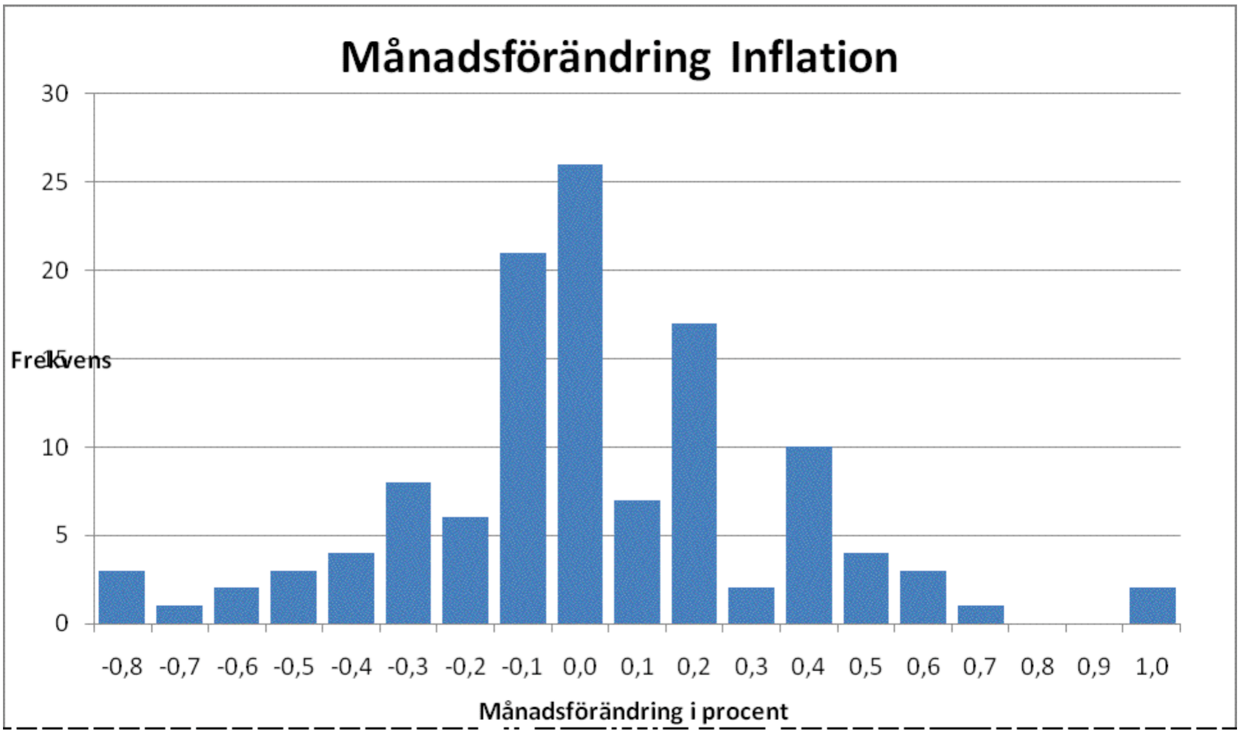
Figur 10



Figur 11



Figur 12



11 Litteraturförteckning

Anders Pelli, T. B. *Svenska statens realobligationer,.*

Andersson, G. (2005). *Livförsäkringsmatematik.* Stockholm: Svenska Försäkringsföreningen.

Byström, H. (2004). Penningmarknaden, Del 2.

Fredrik, A. (2004). *Aspects of Cash Flow Valuation.* Stockholm: KTH.

Grillberg, U. *Inflationsriskpremien på Svenska obligationer.* HHS.

Höglund, T. (2005). *Finnansmatematik II.*

Luenberger, D. G. (1998). *Investment Science.* New York: Oxford University Press.

Magnusson, S. (2003). *Företags motiv til finansiering med realränteobligationer.* Lindköping: Lindköpings Universitet.

Riksgäldskontoret. *Exempel på beräkningar realobligationer.*

Riksgäldskontoret. (2005). *Den Svenska Statsskulden, nr 769.* Riksgäldskontoret.