



Matematisk statistik
Stockholms universitet

En dödlighetsundersökning på Skandia Links bestånd

Daniel Larsson

Examensarbete 2008:2

Postadress:

Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm
Sverige

Internet:

<http://www.math.su.se/matstat>



Matematisk statistik
Stockholms universitet
Examensarbete 2008:2,
<http://www.math.su.se/matstat>

En dödlighetsundersökning på Skandia Links bestånd

Daniel Larsson*

april 2008

Sammanfattning

Föreliggande rapport ger en dödlighetsundersökning på Skandia Links bestånd. I denna undersökning ingår att ta fram den aktuella dödligheten för olika delbestånd. Denna aktuella försäkringsdödlighet jämförs mot de nuvarande dödlighetsantagandena som bolaget använder, samt befolkningsdödligheten.

För att sedan få en uppfattning om vilken modell som bör användas av Skandia Link för att få tillförlitliga antaganden om dödlighet testas och diskuteras de modeller som presenteras i den branschgemensamma utredningen *Försäkrade i Sverige — dödlighet och livslängder, Prognoser 2007–2050* av Försäkringstekniska Forskningsnämnden. Dessa modeller bygger på den så kallade Lee-Cartermodellen som tar hänsyn till trenden i dödligheten och kan användas för att prediktera dödligheten i framtiden.

Det visar sig att de försäkrades aktuella dödlighet ligger under befolkningens och att det inte är någon signifikant skillnad i dödlighet beroende på vilken risk försäkringen har. Att få fram en tillförlitlig trend i dödligheten som man kan tro håller i sig även i framtiden visar sig svårt. Val av dödlighetsmodell är inte självklar och denna rapport kommer inte att generera ett slutgiltigt resultat, utan istället en diskussion av fördelar och nackdelar med de modeller som testas.

*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms universitet, 106 91 Stockholm. E-post: daniel.larsson2@skandia.se Handledare: Anders Martin-Löf.

Abstract

Existing survey gives a mortality investigation of the population of Skandia Link. In this survey, part's is included to take forward the current mortality for different part numbers. This current insurance mortality is compared against the current mortality assumptions that the company use, and the population mortality.

In order to get a hint of witch mortality model that should be used of Skandia Link in order to get a reliable assumptions on mortality, the models presented in the sector-common investigation *Försäkrade i Sverige – dödlighet och livslängder, Prognoser 2007-2050* of Försäkringstekniska Forskningsnämnden is tested and discussed. These models build on the so called the Lee-Carter model that takes considerations to the trend in the mortality and can to be used in order to predict the mortality in to the future.

It shows that the ensured current mortality lies beneath the population's and that it is not any significant difference in mortality depending on which risk the insurance has. To get forward a reliable trend in the mortality that one can believe in also in the future shows difficult. Choices of mortality model are not self-evident and this report will not generate a final result, but instead a discussion of advantages and disadvantages with the models that have been tested.

Förord

Detta examensarbete motsvarar 30 högskolepoäng och leder till en magisterexamen i matematisk statistik vid Matematiska institutionen på Stockholms Universitet.

Examensarbetet är på uppdrag av Skandia Link och har utförts på avdelningen Business Control & Support, Skandia. Jag vill passa på att ge ett stort tack till mina handledare på Skandia, chefaktuarie Åsa Larson och aktuarie Katarina Östberg, för att ni svarat på mina frågor, gett med råd på vägen och för chansen att göra detta examensarbete hos er.

Dessutom vill jag rikta ett tack till hela Business Control & Support för ett riktigt trevligt bemötande och för att ni tagit er tid att besvara mina frågor!

Jag vill också tacka min handledare på Stockholms Universitet, professor Anders Martin-Löf.

Slutligen vill jag tacka min fru Sofi, för hennes stora stöd under min studietid.

Innehållsförteckning

1	Inledning	7
1.1	Introduktion.....	7
1.2	Mål.....	8
1.3	Kort om Skandia Link.....	8
1.3.1	Allmänt om försäkringsprodukterna.....	8
2	Notation, antaganden och data	10
2.1	Notation.....	10
2.2	Antaganden.....	10
2.3	Data.....	10
2.3.1	Allmänt om försäkringsbeståndet.....	11
2.3.2	Allmänt om delbestånden.....	12
2.3.3	Befolkningsdata.....	20
3	Modellering, skattning och prediktion	22
3.1	Dödlighetsmodeller.....	22
3.1.1	Makeham- och Lee-Cartermodellen.....	22
3.1.2	Lee-Cartermodellen för befolkningen för åren 1985-2005.....	23
3.1.3	Modell för skattning av framtida försäkringsdödlighet.....	26
3.2	Skattning av den aktuella försäkringsdödligheten.....	28
3.3	Prediktion av framtida TPS-dödligheten med hjälp av Lee-Cartermodellen.....	32
4	Diskussion	37
5	Teori	38
5.1	Grundläggande livförsäkringsmatematik.....	38
5.1.1	Skattningar.....	39
6	Källförteckning	40

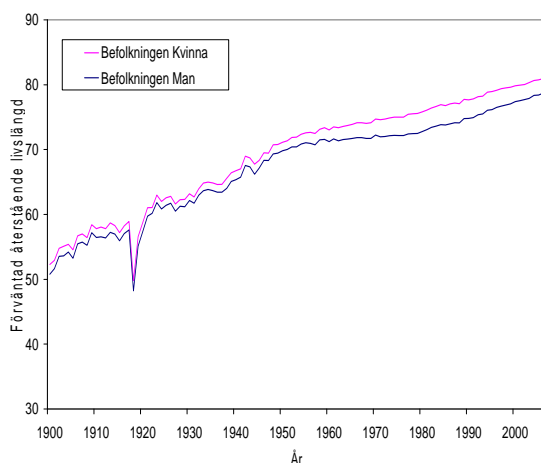
1 Inledning

1.1 Introduktion

Användningen av dödlighetsantaganden har spelat en central roll inom livförsäkring genom historien och kan spåras tillbaka till andra halvan av 1600-talet. De används bland annat för beräkningar av premier och så att tillräckliga avsättningar för framtida utbetalningar görs.

Ett intressant begrepp vid studier av dödlighet är den förväntade återstående livslängden för en individ. I figur 1.1-1 ser vi förväntad återstående livslängd för en nyfödd individ i Sverige och hur denna varierat mellan år 1900-2006 (data hämtad från [6]).

Figur 1.1-1, Förväntad återstående livslängd vid födseln för svenska befolkningen, år 1900-2006



Vi ser i figuren att den förväntade återstående livslängden ökat med nästan 30 år från år 1900 till år 2006. Den stora minskning av återstående livslängd för åren 1918-1919 är på grund utav spanska sjukan som tog död på cirka 38 000 svenskar.

Eftersom de försäkrades dödlighet skiljer sig från befolkningens är det dock av stort intresse för bolagen att använda data från försäkringstagare i modellerna istället för befolkningsdata, se [5]. Dessa skillnader uppkommer bland annat på grund av skillnader i socioekonomiska förutsättningar.

Redan år 1915 kom en undersökning av försäkringsdödligheten i Sverige gjord av Stoltz. Han använde data från 17 svenska livförsäkringsbolag för sin undersökning. Denna har följts av några av branschen gemensamma undersökningar av den så kallade Grundkommittén. Deras sista undersökning startade 1985 och resulterade i M90, som är en Makehammodell. För vidare läsning om försäkringsdödligheten i Sverige hänvisas till [5].

Under året 2007 kom Försäkringstekniska Forskningsnämnden (FTN) med dödlighetsundersökningen: *Försäkrade i Sverige - dödlighet och livslängder, Prognoser 2007-2050*. I denna undersökning används en för den svenska försäkringsbranschen ny modell, den så kallade Lee-Cartermodellen, och försäkringsdata från 12 försäkringsbolag, samt även befolkningsdata.

I denna undersökning avser vi att ta fram den aktuella dödligheten för olika delbestånd hos Skandia Link, och för något av dessa delbestånd applicera modellerna som nämns i [5] för att komma fram till lämpliga dödlighetsantaganden för detta delbestånd.

1.2 Mål

Vi har som mål för denna undersökning att skatta och prediktera dödligheten för olika delbestånd hos Skandia Link. De dödlighetsantaganden som Skandia Link nu använder följer en Makehammodell med åldersförskjutning mellan könen. I denna undersökning ingår utredning om huruvida vi istället bör använda någon av de i [5] föreslagna modellerna som tar hänsyn till trenden i dödligheten. Vi har även för avsikt att undersöka om det finns belägg för att ha olika dödlighetsantaganden för olika delbestånd, ta fram vilken skillnad i dödlighet mellan man och kvinna som finns i kollektivet, samt huruvida försäkringsdödligheten skiljer sig från befolkningsdödligheten. Vi ska sätta våra dödlighetsantaganden enligt aktsamhetsprincipen och IFRS (internationellt regelverk för redovisning). Det skall därmed vara realistiska väntevärdesriktiga antaganden. Begreppet *best estimate* skall vara uppfyllt.

1.3 Kort om Skandia Link

Skandia Link (tidigare Skandia Fondförsäkring) är en del av Skandia som sedan 2006 ingår i den Londonbaserade finanskoncernen Old Mutual. Skandia erbjuder produkter och tjänster som tillgodoser kundernas behov av spar- och trygghetslösningar. Skandia grundades redan år 1855 och finns idag i ett 20-tal länder på fyra kontinenter.

Skandia Link startade 1990 som Sveriges första fondförsäkringsbolag. De har idag runt 25 anställda, och köper tjänster av övriga Skandiakoncernen. Skandia Link är ett av Sveriges ledande fondförsäkringsbolag och har idag fler än 600 000 kunder. De tillhandahåller fondförsäkringssparande i form av tjänstepension, privat pensionssparande och kapitalförsäkringar. När du väljer fondförsäkring placeras pengarna i en eller flera fonder. Genom att välja mellan olika fonder har du som försäkringstagare själv möjligheten att påverka försäkringskapitalets utveckling. Du garanteras dock ingen ränta utan försäkringskapitalet kan minska eller öka beroende på fondernas utveckling. Fondförsäkring innebär därmed högre risk för den försäkrade än traditionell livförsäkring.

1.3.1 Allmänt om försäkringsprodukterna

Skandia Links försäkringsutbud består alltså av olika varianter av kapital- och pensionsförsäkringar. Dessa försäkringar kan indelas efter "under uppskovstid" och "under utbetalning (inkluderar även engångsutbetalning)". Uppskovstiden är den tid som förflyter från det att en försäkring tecknas till dess att den periodiska utbetalningen från försäkringen börjar.

Under uppskovstid består kapitalförsäkringarna av olika kapitalsparanden. Det kan till exempel handla om ett kapitalsparande med återbetalningsskydd, som går ut på att man som x -åring börjar ett sparande och sen när man uppnått åldern $x+m$ får fondvärdet utbetalat som ett engångsbelopp alternativt att utbetalningen sker efter en utbetalningsplan. Ett återbetalningsskydd är ett tillägg till försäkringen som skyddar en del av fondvärdet utifall den försäkrade avlider innan åldern $x+m$. För ett kapitalsparande är detta skydd ofta en engångsutbetalning på 100 % eller 101% av fondvärdet. Om försäkringstagaren inte haft något återbetalningsskydd så hade sparandet gått förlorat för de efterlevande.

De kapitalförsäkringar under utbetalning som finns här är kapitallivräntor med olika villkor. Till exempel kan det vara så att man under uppskovstiden har ett kapitalsparande som sedan vid utbetalning blir en kapitallivränta. Det kan då handla om en kapitallivränta med återbetalningsskydd som betyder att den försäkrade får utbetalningar under en vald utbetalningstid. Om den försäkrade dör innan utbetalningstidens slut så fortsätter utbetalningen av fondvärdet till en förmånstagare. I fall försäkringen inte hade haft något återbetalningsskydd så hade fondvärdet gått förlorat för förmånstagaren.

Pensionsförsäkringsutbudet består av olika former av ålderspension. En ålderspension kan till exempel vara en ren livsvarig ålderspension, då betalar den försäkringstagaren in pengar och vid uppnådd pensionsålder

börjar utbetalningarna av fondvärdet som sedan upphör vid dödsfall eller då överenskommen utbetalningstid tagit slut. Om pensionsförsäkringen har ett återbetalningsskydd och den försäkrade avlider innan pensionsåldern så sker oftast utbetalningen av fondvärdet via en familjepension.

Även försäkringsprodukter som utgått ifrån utbudet, men som fortfarande är gällande kommer att beaktas i denna undersökning. Bland dessa finns varianter av kapitalpension, som räknas som kapitalförsäkring.

Det som skiljer produkterna åt sinsemellan inom indelningarna är bland annat inträdes- och slutålder, utbetalningstid, återbetalningsskydd, dödsfallsskydd och förmånstagare

2 Notation, antaganden och data

2.1 Notation

Denna notation gäller då vi skiljer på olika kalenderår och bygger på den i [2].

- $T_x(t)$ = återstående livslängd för en x -årig individ kalenderåret t , denna individ kommer alltså att avlida vid åldern $x + T_x(t)$ under kalenderåret $t + T_x(t)$.
- $e_x(t) = E[T_x(t)]$ = förväntad återstående livslängd för en x -årig individ kalenderåret t .
- $q_x(t) = P(T_x(t) \leq 1)$ = ettåriga dödsrisken för x -årig individ kalenderåret t .
- $\mu_x(t)$ = dödlighetsintensiteten för en x -årig individ kalenderåret t .
- $N_x(t)$ = antal individer som lever vid utgången av kalenderåret t och föddes år $t-x$.
- $ETR_x(t)$ = totala risktiden ("exposure-to-risk") kalenderåret t för de individer som föddes år $t-x$.
- $D_x(t)$ = antal individer som avled under kalenderåret t och föddes under år $t-x$.

2.2 Antaganden

Först gör vi ett antagande om att personer föds likformigt under året, så att populationen i $N_x(t)$ är i genomsnitt $x + \frac{1}{2}$ år.

Försäkringsdata som vi framförallt använder avser antalet försäkringskontrakt år för år mellan åren 2000-2006 och antalet avlidna bland dessa år för år mellan åren 2001-2006. En individ kan därför förekomma flera gånger varje år beroende på hur många försäkringar hon har. I genomsnitt har den försäkrade 1,35 kontrakt hos Skandia Link, och det finns de som har så många som 25. De i beståndet som avlider har i genomsnitt 1,40 kontrakt och det finns de försäkringstagare som avlider 10 gånger i det avseendet att deras namn står på så många kontrakt när de avlider.

I likhet med [5] kommer vi dock att anta att en försäkring är en individ. Detta gör vi för att kunna anta att livslängderna är oberoende och likafördelade, något som vi behöver för kommande modeller. Uppdelningen att ett kontrakt är en individ medför även ett enklare sätt att dela in försäkringsbeståndet i mindre delbestånd. Om vi inte delar in efter kontrakt måste vi försöka väga ihop en försäkringstagares olika kontrakt till ett inom alla delbestånd.

Vi gör även ett antagande om att dödlighetsintensiteten är styckvis konstant med avseende på ålder och kalenderår, men kan variera från ett stycke till ett annat. Det vill säga att:

$$\mu_{x+h}(t + \tau) = \mu_x(t) \text{ då } 0 \leq h, \tau < 1. \quad (2.2-1)$$

2.3 Data

Vi har hämtat försäkringsdata från Skandias databas med hjälp av programmet *SQL Navigator* ©. För att detta skall vara möjligt på ett önskvärt sätt har vi skrivit speciella program i programspråket *SQL*. Utsökning av data och kontroll av denna har varit en stor del av denna undersökning. För behandling av data och beräkning har vi sedan använt programmet *Microsoft Excel* ©.

Dessa data består av antalet försäkringskontrakt år 2000-2006 och antalet avlidna år 2001-2006 hos Skandia Link. Vi har bortsett från försäkringar med förhöjd dödsfallsrisk (så kallade C-risk och temporär

förhöjd dödsfallsrisk), då dessa individers dödlighet ej kan antas följa beståndets. Dessa försäkringar uppgår till drygt 700 per år.

För delbeståndet TPS används däremot samma data som tidigare skickades till [5], vilket då även innefattar data från det ömsesidigt drivna Skandia Liv som ägs av Skandia AB. Dessa data är därmed (i likhet med [5]) uppdelade på åren 2001-2005 istället för åren 2001-2006.

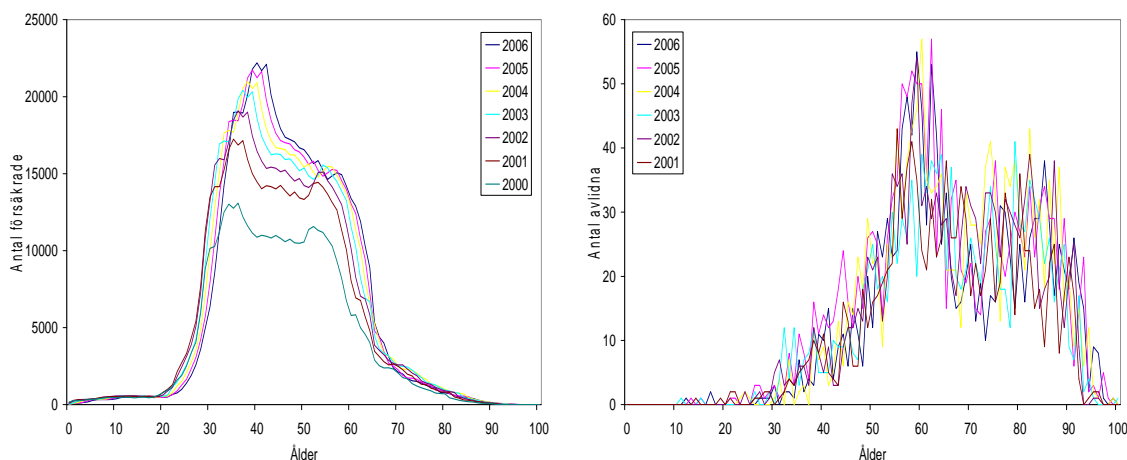
Befolkningsdata avser antalet levande individer i Sverige som är födda i Norden och antalet av dem avlidna för åren 1985-2005, och är hämtat från Statistiska Centralbyrån (SCB).

2.3.1 Allmänt om försäkringsbeståndet

Under år 2000 består det totala beståndet för Skandia Link av drygt 420 000 försäkrade för att sedan öka till över 620 000 försäkrade år 2006. Det genomsnittliga antalet försäkringstagare under perioden 2000-2006 är 570 000. Av dessa är andelen kvinnor 39 % och alltså 61 % är män. Antalet avlidna per år växer inte med tiden utan skiljer sig från år till år. År 2001 är detta värde som minst, då avled ungefär 1 200 försäkringstagare, medan det högsta värdet var år 2005 då över 1 500 avled. I genomsnitt avlider en bit över 1 300 försäkringstagare per år. Andelen kvinnor bland de avlidna mellan åren 2001-2006 är 34 %, det vill säga andelen män är 66 %.

I figur 2.3-1 har vi hela försäkringsbeståndet och i figur 2.3-2 antal avlidna, år för år under observationsperioden. Det vi nämnde tidigare om att beståndet ökade från år till år ser vi tydligt i figur 2.3-1. Beståndet är relativt litet i åldrarna under 20 år, då det främst består av efterlevandeskydd under utbetalning. Runt åldern 25 år ökar beståndet kraftigt för att nå en topp runt 40 år. Ökningen vid 25 år beror bland annat på att folk börjat arbeta då och deras arbetsgivare tecknar tjänstepension och/eller avtalspension åt dem. Beståndet är ungt och en mycket stor andel är under 65 år. Vid denna ålder sjunker antalet kraftigt och vid 70 år är inte många kvar. Detta

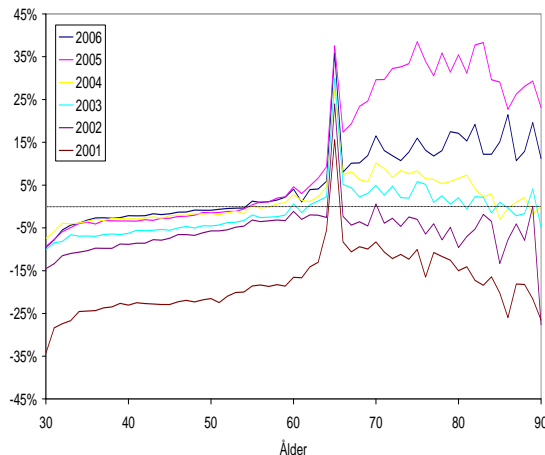
Figur 2.3-1 och 2.3-2, Hela beståndet



beror bland annat att många väljer en 5-årig utbetalningsplan från 55-65 års ålder. Andra orsaker till det unga beståndet är att försäkringar tidigare (innan april 2004) aktualiserades i Skandia Liv och alltså inte inkluderas i denna rapport, och även att möjligheterna till nyteckning av vissa produkter inte är möjliga vid alltför hög ålder. I figur 2.3-2 ser vi att flest försäkringstagare dör runt åldern 60 år. Detta kan verka som en låg ålder att avlida i, men som vi ser i figur 2.3-1 så är beståndet fortfarande stort i denna ålder. Det är även en puckel vid 80 år, och den beror nog på att individerna uppnått en hög ålder.

Försäkringsbeståndet förändras dels eftersom individer avlider men också på grund av nyteckning och att försäkringar upphör. Med hjälp av kvoten (5.1-14) kan vi få ungefärlig bild av hur beståndet förändras av andra orsaker än dödsfall. När kvoten är ett beror förändringarna av dödsfall eller att upphörda försäkringar balanseras av nytecknade. Då kvoten däremot är under ett har antalet nytecknade försäkringar varit större än antalet upphörda och tvärtom då den överstiger ett.

Figur 2.3-3, Förändring av beståndet av andra anledningar än dödsfall



I figuren står den streckade linjen för att kvoten är 1. Vi ser att nytecknande dominerar fram till 55 års ålder. Många väljer att få sina utbetalningar under en utbetalningstid på 5-20 år från 55-65 år vilket syns på topparna för de senare kalenderåren på 60-, 65-, 70- och 75-åringarna. År 2001 är lite speciellt, nytecknande dominerar där för nästan alla åldrar, detta beror nog främst på en väldig ökning (+30 %) på beståndet från år 2000. Detta fenomen ser vi även för år 2002.

2.3.2 Allmänt om delbestånden

De delbestånd som vi anser är intressanta för denna undersökning är de försäkringar med dödsfalls-, livsfallsdödlighet och de utan risk, på hela beståndet, inom avtalspension, inom TPS (Tjänstepensionsprogrammet i Skandia) samt även för ett bestånd med förhöjt dödlighetsantagande. Inom dessa bestånd har vi även en indelning mellan man och kvinna.

För att vi ska kunna klassa en försäkring som dödsfalls- respektive livsfallsförsäkring gör vi följande definitioner som återfinns i [1]:

Vi betraktar ett godtyckligt försäkringsavtal som tecknats på en individs liv vid tidpunkten 0. Till försäkringen definierar vi för tidpunkten t :

- $A(t)$ = kapitalvärdet av försäkringsgivarens framtida förpliktelser enligt försäkringsavtalet.
- $B(t)$ = kapitalvärdet av försäkringstagarens framtida förpliktelser enligt försäkringsavtalet.
- Värdefunktionen enligt $V(t) = A(t) - B(t)$.

Vi betraktar nu en godtycklig försäkring. Med en försäkringsrisksumma vid tidpunkten t , $R(t)$, menar vi värdefunktionens diskontinuerliga förändring om den försäkrade dör vid tidpunkten t . Då $R(t) > 0$ definierar vi försäkringen som en dödsfallsförsäkring, och då $R(t) < 0$ definierar vi den som en livsfallsförsäkring.

I denna undersökning kommer vi även att beakta försäkringar där $R(t) = 0$. Det är försäkringar med 100 % återbetalningsskydd, och vi kallar dem försäkringar utan risk. Namnet avser inte att fondförsäkring är utan risk, det handlar istället om försäkring där hela fondvärdet vid dödsfall går tillbaka till den avlidnas efterlevande.

Som exempel på en vanlig livsfallsförsäkring har vi en ren ålderspension som inte har något dödsfallsskydd, vid dödsfall avslutas då utbetalningarna och inget av fondvärdet betalas ut till någon efterlevande. Om vi istället har en ålderspension med återbetalningsskydd så ingår ett dödsfallsskydd som är större än eller lika med fondvärdet. Då det är större än fondvärdet har vi en dödsfallsförsäkring och när det är lika har vi en försäkring med risksumman lika med noll, det vill säga en försäkring utan risk.

Vi kan anta att dödligheten för de individer som tecknar en livsfallsförsäkring och de som tecknar dödsfallsförsäkring skiljer sig åt. Detta antagande baserar vi på att personer som tror sig leva länge borde teckna en livsfallsförsäkring, och de som tror att de kommer att gå bort tidigt i högre grad borde teckna en dödsfallsförsäkring.

Vi räknar även på olika risker med livsfallsförsäkring och dödsfallsförsäkring. Till exempel betalas riskintäkt ut till dem med livsfallsförsäkring och riskkostnad tas ifrån dem med dödsfallsförsäkring. Riskintäkten är den intäkt som årligen läggs på fondvärdet i en livsfallsförsäkring som kompensation för risken att försäkringsvärdet helt eller delvis bortfaller vid den försäkrades död. Den beräknar vi genom att ta risksumman multiplicerat med dödligheten, och sedan multiplicera detta med -1. Riskkostnaden är det uttag som årligen görs från försäkringens fondvärde för att upprätthålla risksumman. Detta uttag beräknar vi genom risksumman multiplicerat med dödligheten.

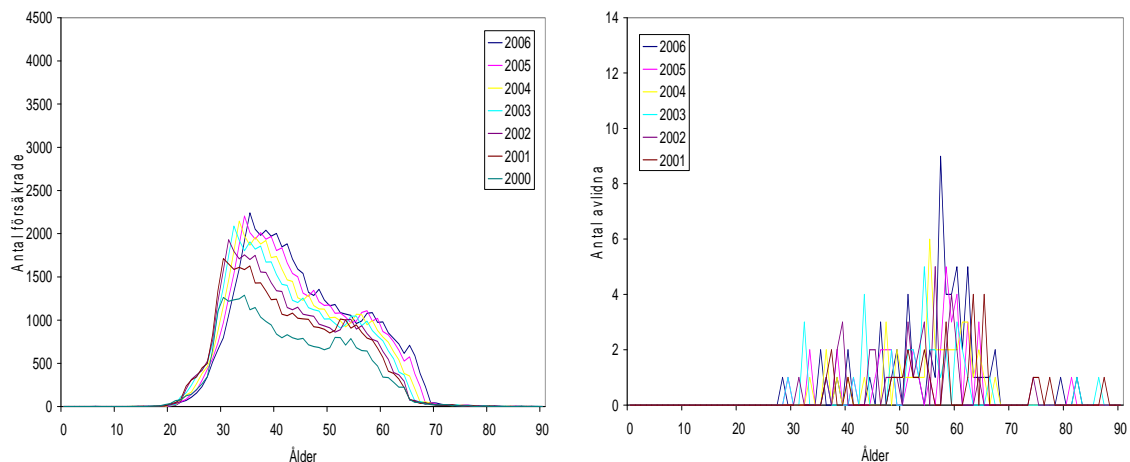
Det är därmed av stor vikt att vi särskiljer dessa delbestånd när vi ska utföra vår dödlighetsundersökning.

Om vi nu tittar på data så är det genomsnittliga antalet kvinnliga försäkringstagare 220 000 och av dessa avlider runt 460 per år. Det kvinnliga beståndet består i genomsnitt av 20 % livsfallsförsäkringar och av 40 % vardera på dödsfallsförsäkringar respektive försäkringar utan risk. Bland de avlidna kvinnorna är denna andel 9 % inom livsfallsförsäkringar, 59 % inom dödsfallsförsäkringar och 32 % inom dem utan risk.

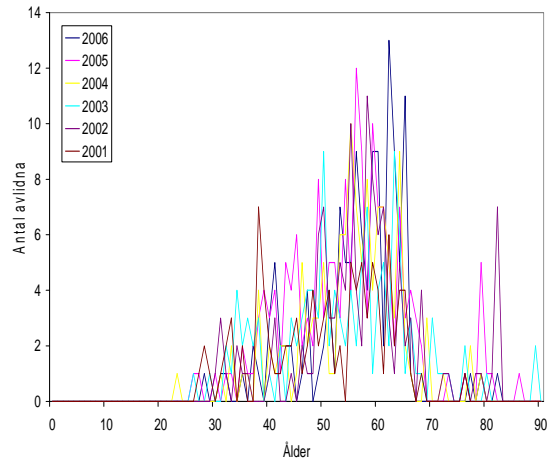
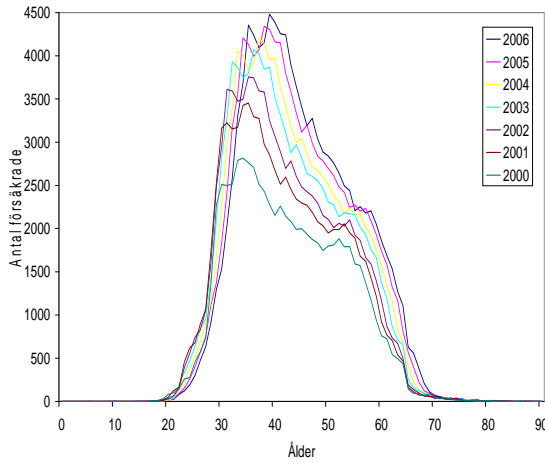
Bland männen är det genomsnittliga beståndet 350 000 försäkringstagare varav cirka 900 avlider per år. Av beståndet är i genomsnitt 27 % livsfallsförsäkringar, 38 % dödsfallsförsäkringar och 35 % försäkringar utan risk, medan bland de avlidna männen förekommer 14 % inom livsfallsförsäkringar, 60 % inom dödsfallsförsäkringar och 26 % inom dem utan risk.

Här kommer figurer på dessa delbestånd och antal avlidna med uppdelning mellan man och kvinna, år för år under den studerade perioden.

Figur 2.3-4 och 2.3-5, Kvinnor, livsfallsdödlighet

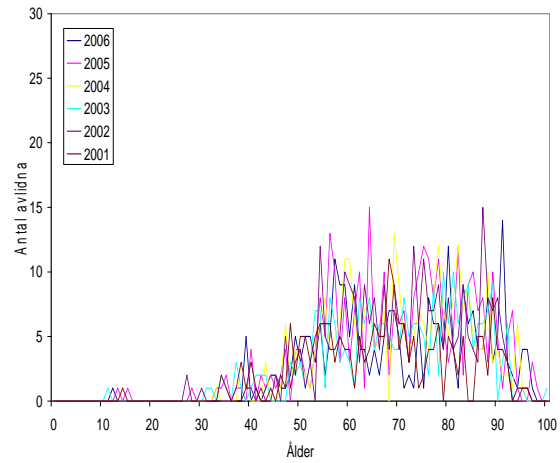
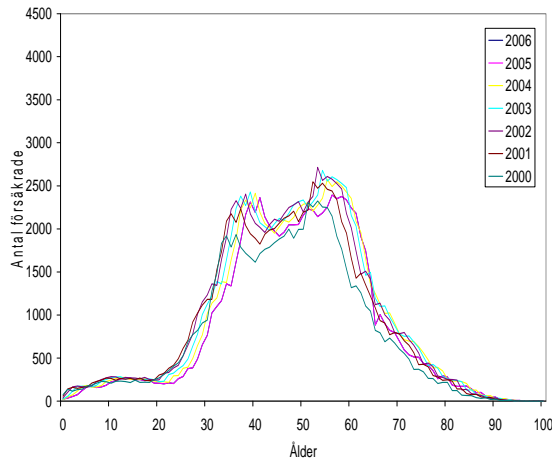


Figur 2.3-6 och 2.3-7, Män, livsfallsdödlighet

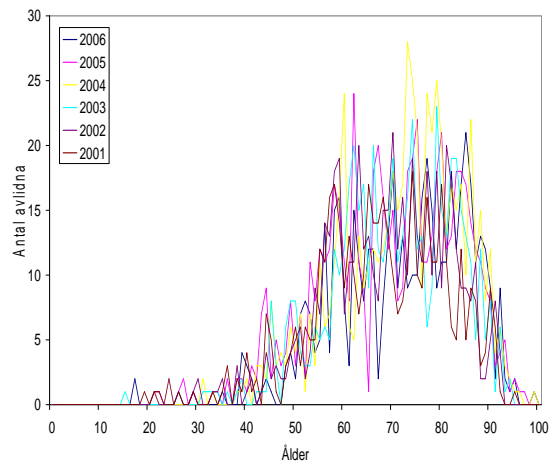
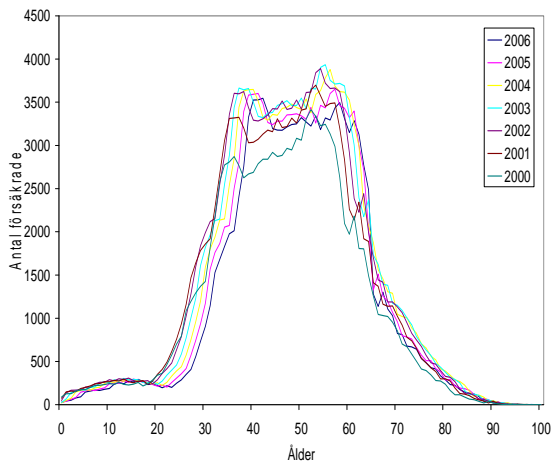


I figur 2.3-4 och 2.3-6 ser vi att bestånden med livsfallsdödlighet främst ligger inom åldrarna 20-70 år. Det är ett ungt bestånd, som störst runt 30-40 år, och det är ökande. I figur 2.3-5 och 2.3-7 ser vi att flest avlider runt 60-års ålder.

Figur 2.3-8 och 2.3-9, Kvinnor, dödsfallsdödlighet

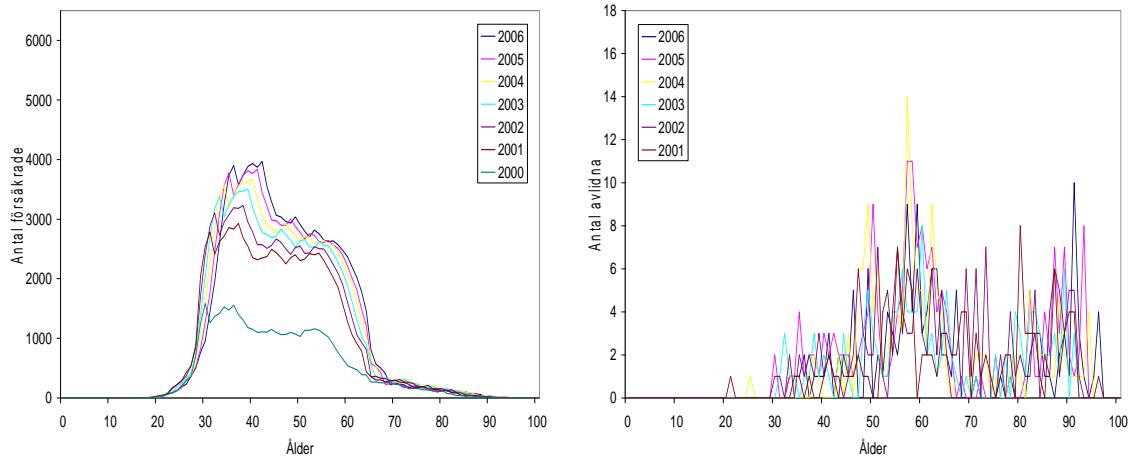


Figur 2.3-10 och 2.3-11, Män, dödsfallsdödlighet

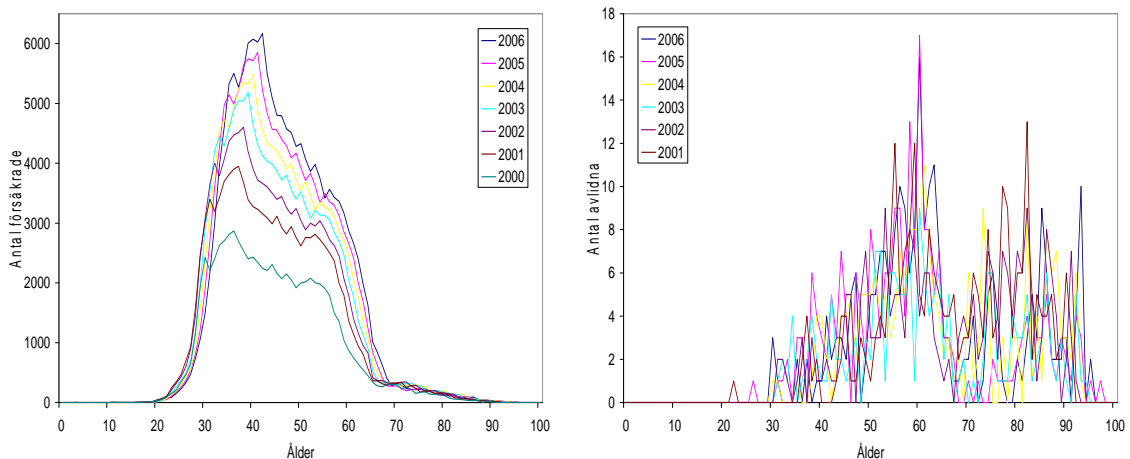


Bestånden för dödsfallsdödlighet inom kvinnor och män återfinns i figur 2.3-8 och 2.3-10. Dessa bestånd har en annan åldersfördelning med en större andel under 20 år och över 70 år.

Figur 2.3-12 och 2.3-13, Kvinnor, utan risk



Figur 2.3-14 och 2.3-15, Män, utan risk



I figur 2.3-12 och 2.3-14 har vi bestånden av försäkringar utan risk. Dessa bestånd är ökande och åldrarna är fördelade från ungefär 20 år till närmare 100 år. Dock är beståndet som störst runt 40 års ålder. Bland de avlidna (figur 2.3-13 och 2.3-15) ser vi att flest avlider runt 60 år och vid 85 år för männen och 90 år för kvinnorna. Anledningarna till dessa toppar är nog främst att beståndet fortfarande är relativt stort vid 60 år och att 85 år för män respektive 90 år för kvinnor är rätt höga åldrar.

För avtalspension (även kallad kryssval) måste vi skatta en speciell dödlighet. Vi måste nämligen ha samma dödlighetsantaganden för både kvinnor och män inom ramen för avtalspension. Detta på grund av lagstiftning om jämställdhet, så vi gör därmed ingen indelning mellan könen här. Dock delar vi även här in beståndet efter livsfallsdödlighet, dödsfallsdödlighet och dem utan risk. Dessa individer finns alltså med i de bestånd som vi diskuterade ovan. Avtalspension är en del av (eller hela) den tjänstepension som de flesta anställda har. Det är arbetsgivaren som betalar premien, men det är den anställde som är försäkrad och som själv gör valet av förvaltare genom att sätta ett kryss på en blankett (därmed kryssval), samt i övrigt disponerar försäkringen. Detta är alltså en variant av obligatorisk tecknad försäkring då den anställde själv inte gjort valet att införskaffa försäkringen. Beståndet av arbetande individer kan vi anse friskare än befolkningen totalt.

Skandia Link är valbart inom avtalspension för kollektivavtalen ITPK (fram till årsslutet 2007), SAF-LO, KAP-KL och PA03. År 2000 bestod avtalspensionsbeståndet i Skandia Link av ungefär 65 000 individer och av dem avled 55. Då bestod avtalen bara av ITPK och SAF-LO. Beståndet har sedan dess ökat kraftigt och år 2006 bestod det av över 150 000 individer varav runt 180 av dem avled under året. Beståndet är jämnt fördelat mellan könen, dock dör lite fler män än kvinnor. Runt 25 % av försäkringarna är livsfallsförsäkringar, 18 % är dödsfallsförsäkringar och 57 % är försäkringar utan risk. De avlidna har fördelningen 22 % inom livsfallsförsäkring, 24 % inom dödsfallsförsäkring och 54 % inom försäkringar utan risk.

ITPK innefattar de privatanställda tjänstemän som har ITP-planen eller liknande kollektivavtal och har fyllt 28 år (25 år för vissa avtal). Det är en kompletterande egenpension som är en ålderspension med eller utan återbetalningsskydd och som betalas ut i 5 år tidigast från 55 års ålder. Ett familjeskydd kan tecknas som betalas ut i 5 år.

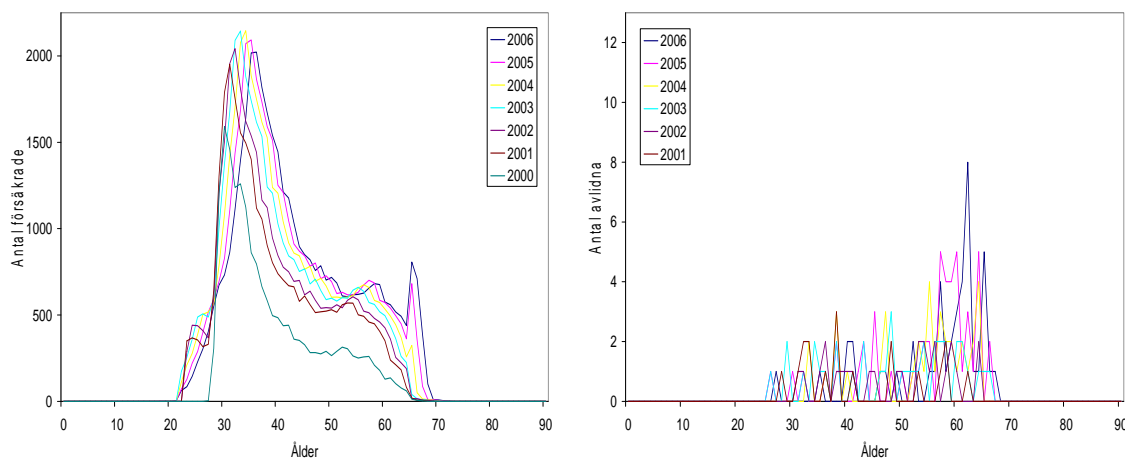
SAF-LO innehåller privatanställda arbetare som har detta avtal som ålderspension. De ska ha fyllt 21 år och försäkringsprodukten är en livsvarig ålderspension med eller utan återbetalningsskydd som kan tas ut från tidigast 55 års ålder. Även här kan familjeskydd tecknas som betalas ut i 5 år.

KAP-KL (tidigare PFA, startade år 2000, men premierna började betalas in till Skandia 2001) avser anställda inom kommuner, landsting och församlingar med denna som avgiftsbestämd ålderspension. Avtalet gäller från och med 21 år fyllda och försäkringsprodukten avser en ålderspension med eller utan återbetalningsskydd som tecknas med 5 års utbetalning och kan tas ut från tidigast 55 års ålder.

PA03 (startade år 2003) är individuell pensionsavtal för anställda inom statliga myndigheter och statliga verksamheter som fyllt 23 år. Försäkringsprodukten är en ålderspension med eller utan återbetalningsskydd och utbetalningstiden är i regel livsvarig och börjar då den försäkrade uppnår 65 års ålder.

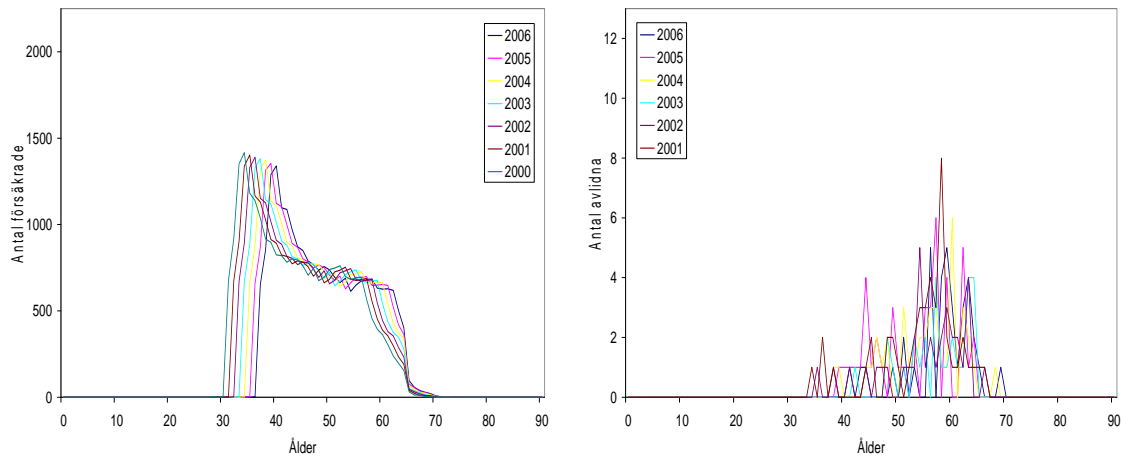
I figur 2.3-16 - 2.3-21 ser vi delbestånden och antal avlidna i dessa inom avtalspension, år för år. Bestånden saknar individer i åldrarna under 21 år vilket är en följd av villkoren ovan. Bestånden saknar även äldre individer. Detta eftersom de flesta får sin avtalspension under 5 år från 65 års ålder och lämnar sedan beståndet. Det är endast SAF-LO och PA03 som har livsvariga produkter, men de har i sin tur bara funnits sedan 1998 respektive 2003, och som vi nämnt tidigare så gick försäkringar under utbetalning över till Skandia Liv innan april 2004. Att beståndet är begränsat till åldrarna 20-70 år ställer till vissa problem när vill skatta dödligheten...

Figur 2.3-16 och 2.3-17, avtalspension, livsfallsdödlighet



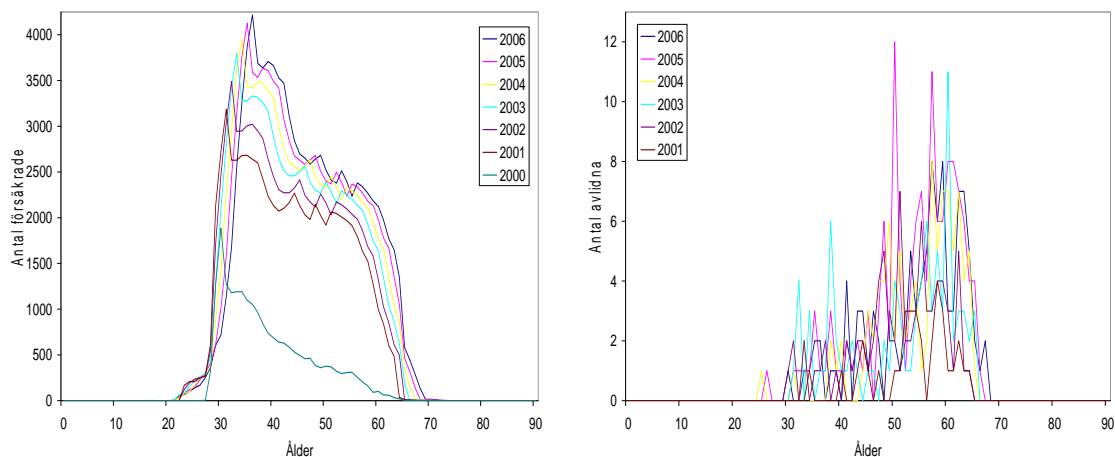
Vi ser i figur 2.3-16 att beståndet inom livsfallsdödlighet är ett ökande bestånd. Det har sin topp runt 35-40 år. Puckeln vid 65 års ålder beror på att vissa produkter har risksumman noll, men då pensionsutbetalningarna så får de negativ risksumma, och de hamnar då under livsfallsdödlighet.

Figur 2.3-18 och 2.3-19, avtalspension, dödsfallsdödlighet



Här i figur 2.3-18 ser vi beståndet med dödsfallsdödlighet inom avtalspension. Det är ett bestånd av ITPK-försäkringar med ålderspension som har dödsfallsskydd som är större än fondvärdet. Inom detta bestånd sker ingen nyteckning för att villkoren inom ITPK har ändrats och nyteckning hamnar inom de andra två bestånden. Vi ser i figuren att beståndet är åldrande och att det minskar med åren som det sig bör.

Figur 2.3-20 och 2.3-21, avtalspension, utan risk



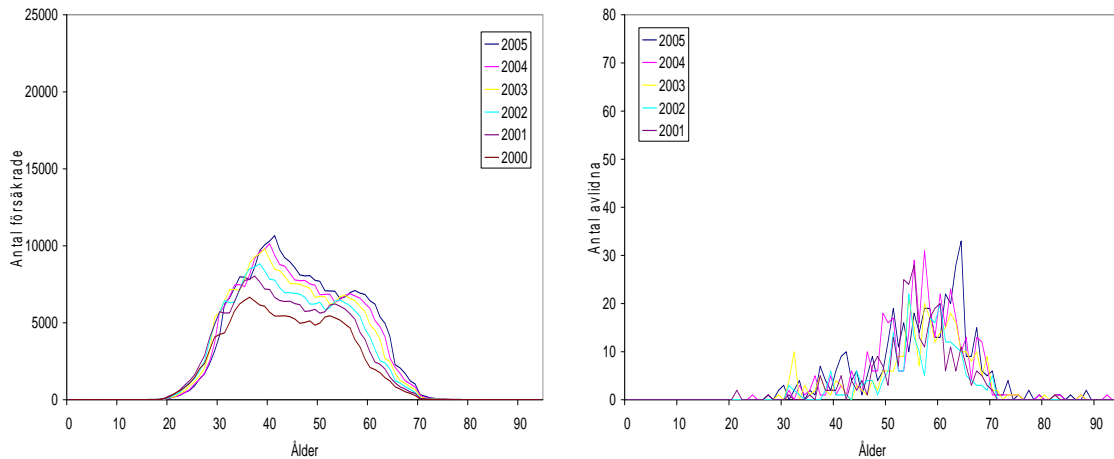
Det avtalspensionsbeståndet som ökar mest under perioden är det som består av försäkringar utan risk. Vi ser i figur 2.3-20 att beståndet ökar kraftigt mellan år 2000 och 2001, detta beror främst på att KAP-KL träder in då.

Vi ska även försöka ta fram en dödlighet för beståndet TPS. TPS står för tjänstepensionsprogrammet i Skandia och är framförallt inriktat på tjänstepensioner. Även privata pensioner för näringsidkare kan tecknas inom ramen för TPS samt även vissa privata kapitalförsäkringar. I mångt och mycket är TPS ett administrativt koncept som erbjuder ett komplett sortiment av produkter inom samma administration. TPS-beståndet skiljer sig från de övriga delbestånden då det även innehåller data från försäkringar i det ömsesidigt drivna Skandia Liv. Detta på grund av att inom TPS kan försäkringstagarna "hoppa" mellan traditionell livförsäkring (Skandia Liv) och fondförsäkring (Skandia Link), så de bör rimligtvis ha liknande dödlighet. Beståndet skiljer sig även från de andra i denna rapport på grund av att det avser åren 2000-2005 för antalet försäkringar och åren 2001-2005 för antal avlidna (se avsnitt 2.3). Även de försäkringar som ligger under utbetalning är med för alla åren.

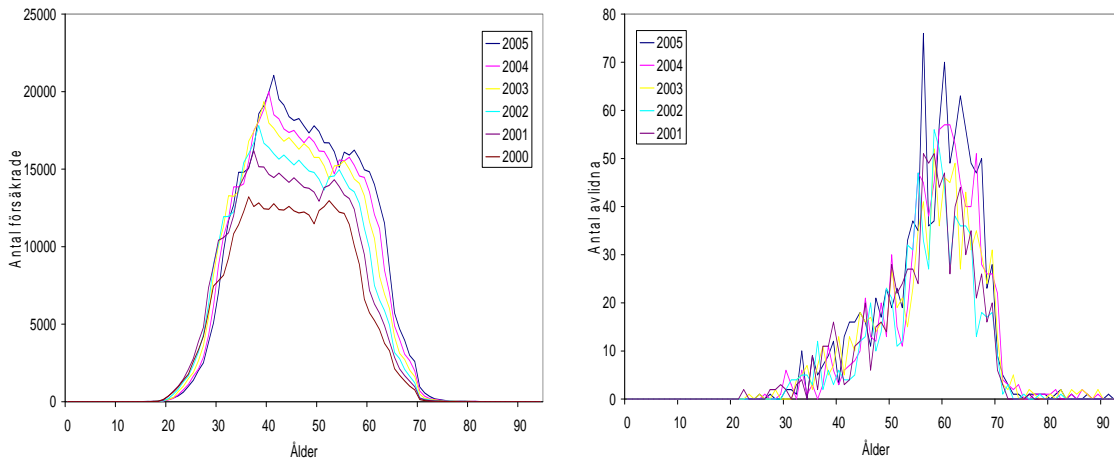
I genomsnitt under perioden omfattar TPS-beståndet drygt 244 000 kvinnliga och 517 000 manliga försäkringstagare. Av kvinnorna är i genomsnitt 21 % inom fondförsäkring och för männen är denna andel 27 %. Det avlider i snitt 330 kvinnor samt 913 män per år varav 11 % respektive 15 % återfinns inom fondförsäkring.

I figurerna nedan ser antalet individer och antalet avlidna årsvis inom ramen för TPS. Vi ser i dessa figurer att åldersintervallet för beståndet främst ligger från drygt 20 år till och med 70 år, med en stor topp vid 40 år och en mindre runt 55 år. De avlidna är flest runt 60 år, då beståndet fortfarande är relativt stort.

Figur 2.3-22 och 2.3-23, kvinnor, TPS



Figur 2.3-24 och 2.3-25, män, TPS



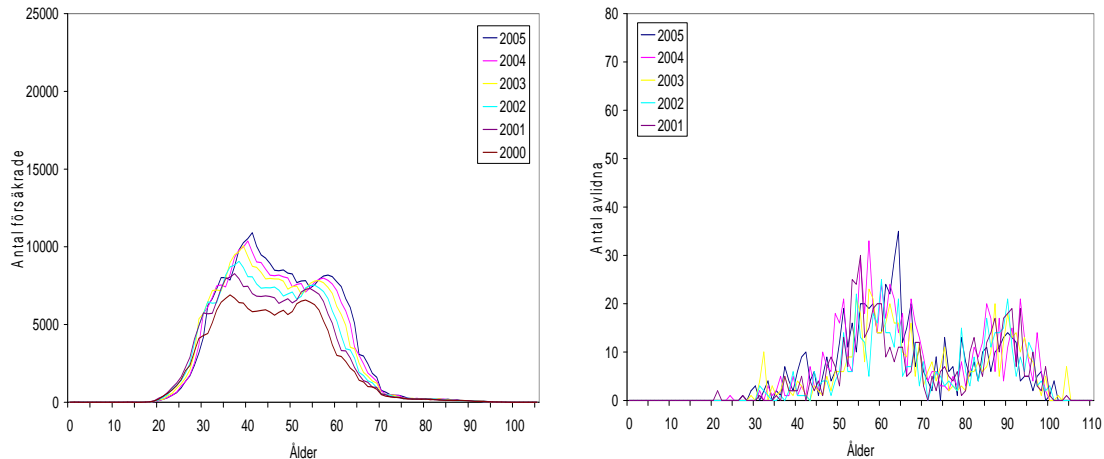
Vi ser i figurerna ovan att beståndet är ökande och att beståndets utseende bevaras från år till år. Det syns tydligt att en stor andel försäkringar har kort utbetalningstid (5 år) från 65 års ålder.

Om vi delar in TPS-beståndet efter risksumma får vi dock inte lika eleganta figurer som ovan och det blir stora skillnader mellan åren. Vi anser att datakvaliteten inte är tillräcklig för att göra en tillförlitlig indelning efter risksumma för detta bestånd.

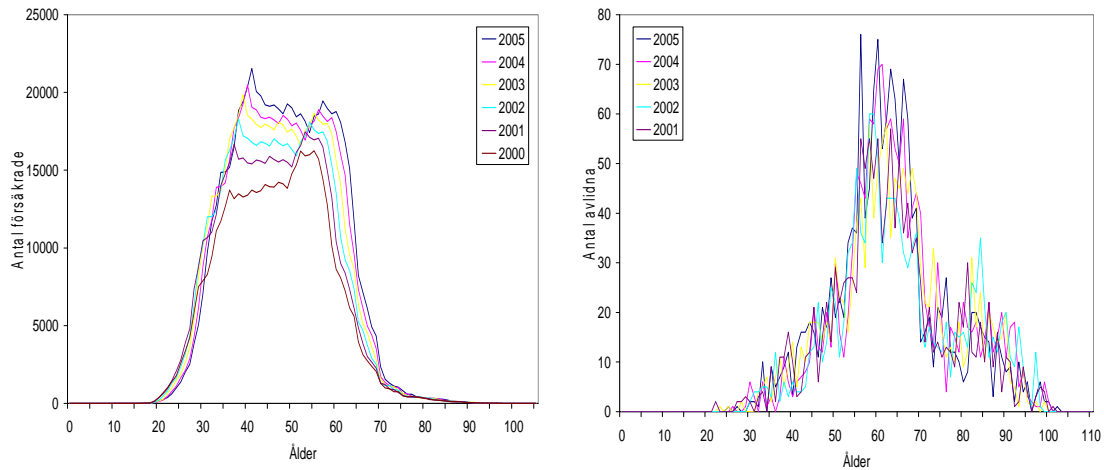
För att få ett större bestånd med fler i höga åldrar så kommer vi ta mer Skandia Liv-data till hjälp. Vi kommer då att till vårt TPS-bestånd även inkludera övriga tjänstepensioner.

Åldersintervallet för detta "skarvade" TPS-bestånd ligger mellan 1-104 år, men främst mellan 20-90 år. År 2000 består beståndet av 702 000 försäkrade för att öka år för år fram till 974 000 försäkrade år 2005. Av dessa avlider mellan ungefär 1800 (år 2002) till nästan 2200 (år 2005) per år. Andelen kvinnor i beståndet är i genomsnitt 32 % och således 68 % män. Bland de avlidna är dessa siffror 30 % kvinnor respektive 70 % är män.

Figur 2.3-26 och 2.3-27, kvinnor, "skarvad" TPS



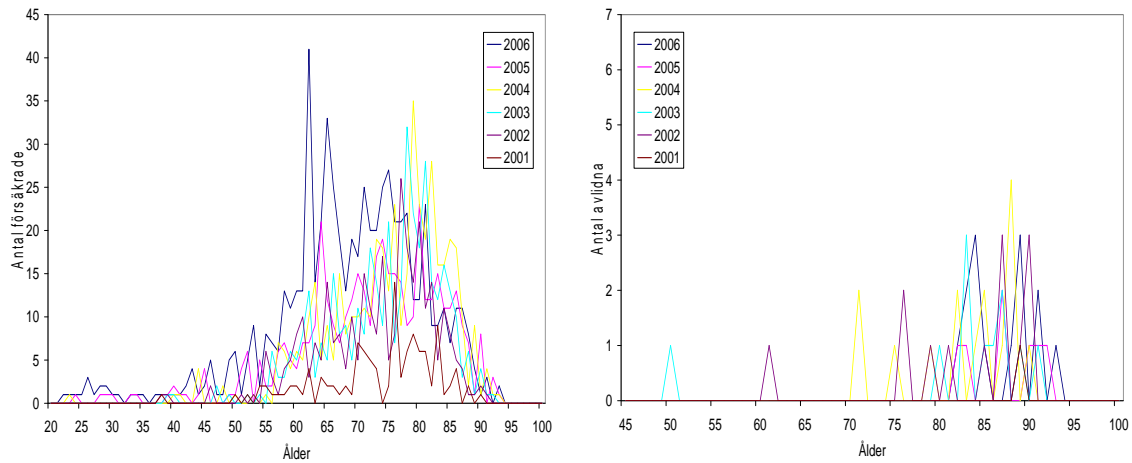
Figur 2.3-28 och 2.3-29, män, "skarvad" TPS



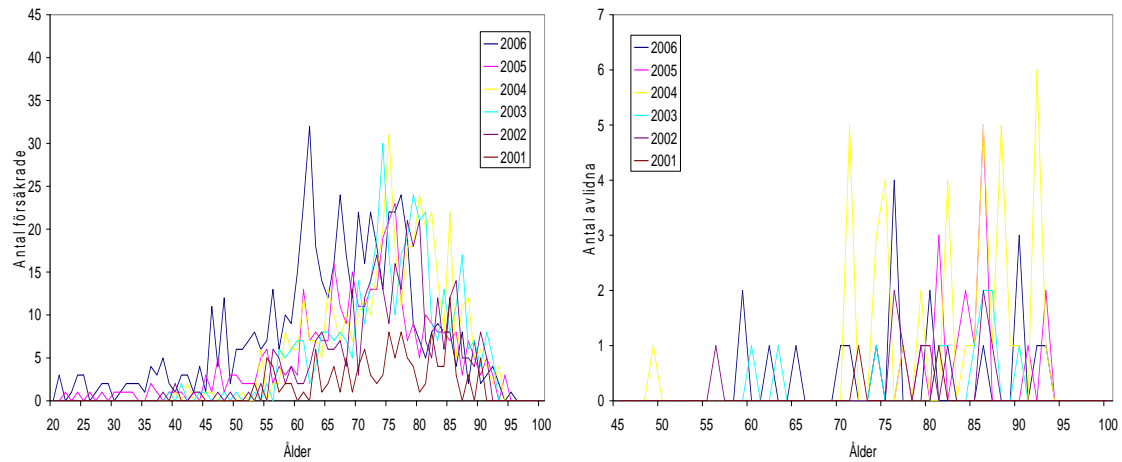
Det sista delbeståndet består av försäkringsprodukterna kapitalivränta med återbetalningsskydd samt kapitalpension i kombination med dödsfallsskydd. Dessa försäkringar är riktade till äldre personer och har en förhöjd dödlighet sedan 2001-05-14. Vi kommer därför att referera till detta bestånd genom försäkringar med förhöjd dödlighet. Beståndet är litet, i genomsnitt drygt 800 försäkrade och 30 avlidna per år. Av försäkringstagarna är i genomsnitt 51 % kvinnor och 49 % män och bland de avlidna har vi fördelningen 38 % kvinnor och därmed 62 % män.

Här kommer figurer över detta bestånd och antalet avlidna uppdelat efter kvinna och man år för år, observera att data från år 2001 endast består av observationer efter 2001-05-14:

Figur 2.3-30 och 2.3-31, kvinnor, förhöjd dödlighet



Figur 2.3-32 och 2.3-33, män, förhöjd dödlighet

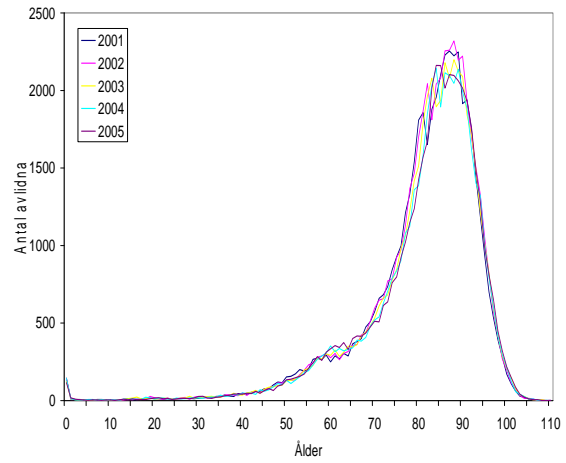
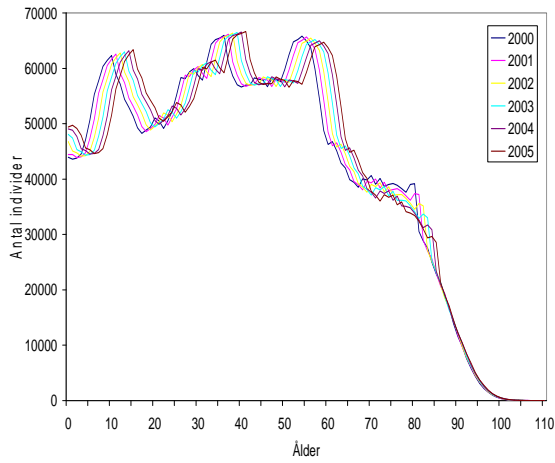


I figur 2.3-30 och 2.3-32 syns det vi nämnde tidigare om att det är ett bestånd med hög ålder. Dock är detta ett mycket litet bestånd då det handlar om att skatta dödlighet, och vi kommer inte att behandla det vidare i denna undersökning.

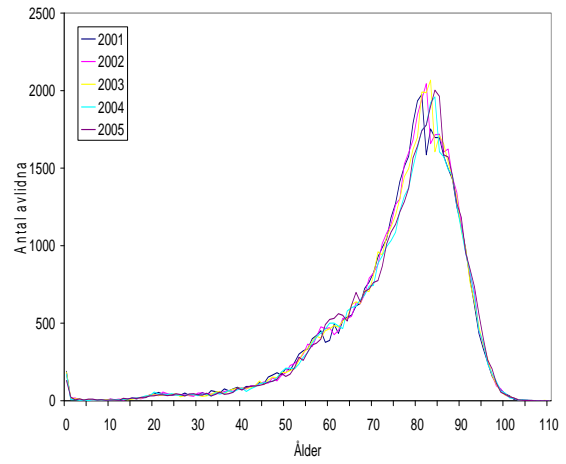
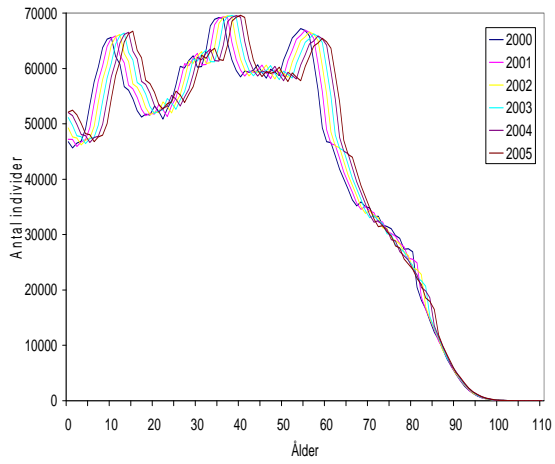
2.3.3 Befolkningsdata

Här kommer som en jämförelse motsvarande figurer med Sveriges befolkning. Data är hämtad från [6] och alltså inte ifrån SCB som de data som används senare i rapporten och i [5] och som bara avser de individer som är födda i Norden.

Figur 2.3-26 och 2.3-27, kvinnor, befolkningen



Figur 2.3-28 och 2.3-29, män, befolkningen



3 Modellering, skattning och prediktion

3.1 Dödlighetsmodeller

De flesta svenska försäkringsbolag har under lång tid använt sig av Makehammodellen för att skatta dödligheten i sina bestånd. Försäkringstekniska Forskningsnämnden (FTN) föreslår i sin rapport [5] den så kallade Lee-Cartermodellen för detta ändamål. Styrkan med denna modell är att den tar hänsyn till trenden i dödligheten, vilket är mycket viktigt då försäkringsbolag ofta handskas med kontrakt som sträcker sig långt fram i tiden. Här kommer först en genomgång av dessa modeller följt av skattningar och prediktioner. För grundläggande livförsäkringsmatematik och vissa skattningar hänvisar vi till kapitel 5. För en vidare genomgång av vilka dödlighetsmodeller som använts genom åren hänvisar vi till [12].

När vi har studerat försäkringsdata här nedan har vi av konkurrensskäl uteslutit skalan på y-axeln. Dock är det samma gradering på skalan inom de olika områdena, samt för man och kvinna. Inte heller förväntad återstående livslängd finns uttryckt explicit uttryckt i åldrar, eller några Makehamparametrar.

3.1.1 Makeham- och Lee-Cartermodellen

Redan år 1825 kom Gompertz med en parametrisk dödlighetsmodell som bygger på att dödlighetsintensiteten visar exponentiellt utseende för de flesta åldrar, se [11]. Makeham vidareutvecklade denna modell och 1860 kom hans modell som är en Gompertzmodell adderad med en konstantterm.

Makehammodellen:

$$\mu_x = a + b \cdot \exp(c \cdot x), \quad (3.1-1)$$

där $a + b > 0$, $b > 0$ och $c \geq 0$.

Skattningen av parametrarna i denna modell beskrivs under avsnitt 3.2.

Ofta används en förbättring av modellen som beskrivs i [9] där dödlighetsintensiteten även justeras med en linjär ökning för riktigt höga åldrar.

Makehammodellen med linjär justering för höga åldrar:

$$\mu_x = \begin{cases} a + b \cdot \exp(c \cdot x), & x \leq \omega \\ \mu_{\omega} + k \cdot (x - \omega), & x > \omega \end{cases} \quad (3.1-2)$$

där $a + b > 0$, $b > 0$ och $c \geq 0$.

Makehamanpassningen är lätt att utföra och ger en enkel parametrisk modell. Den är statisk, det är en funktion av enbart åldern och kalenderåret saknar inverkan. En av styrkorna med modellen är att den ger ökad dödlighet med ökad ålder vilket ofta ses som en grundpelare inom dödlighetsanalys. Den går att anpassa med en förskjutning mellan könen vilket gör att vi då kan ha samma parametrar för både kvinnor och män. Anpassningen enligt 3.1-1 ger dåliga resultat för låga och höga åldrar, där bestånden är små, eftersom anpassningen går ut på att efterlikna den empiriska dödligheten som bäst där beståndet är stort. Dödligheten visar inte heller samma exponentiella utseende för dessa åldrar. Den linjära justeringen ovan kan bättra på anpassningen för riktigt höga åldrar. Makehamanpassningen är alltså deterministisk och saknar förmågan att skatta trenden i dödligheten. De stora bristerna i modellen följer alltså av dess förutbestämthet och att den inte "ändras" över tid, samt då vi vill prediktera dödligheten i framtiden.

Över 130 år efter att Makeham presenterade sin dödlighetsmodell kom Lee och Carter med sin modell som går under namnet Lee-Cartermodellen. Den presenterades först i Lee och Carter (1992), *Modeling and forecasting U.S. mortality*. Denna modell har med framgång används för modellera och prediktera dödligheten för befolkningen i en rad länder. Metodiken går ut på att vi känner till antalet individer och antalet avlidna för ett antal år tillbaka i tiden. Genom att anpassa dödlighetsintensiteten till dessa data med en modell som innehåller en trendparameter och sedan extrapolera trendparametern på framtiden får vi en prediktion av dödlighetsintensiteten. Modellen är dynamisk, den är en funktion av både ålder och kalenderår. Till skillnad från den parametriska Makehammodellen är detta en stokastisk modell. Lee-Cartermodellen har sedan den först publicerades genomgått en rad förbättringar och den variant som används i denna undersökning, i likhet med den i [5], är den Poisson-log-bilinjäramodellen ("Poisson log-bilinear model"), se bland annat [2]. Denna modell går ut på att under antaganden i avsnitt 2.2 gäller att:

$$D_x(t) \sim \text{Bin}(N_{x-1}(t-1), q_x(t)) \quad (3.1-3)$$

Det har visat sig att detta med fördel kan approximeras enligt:

$$D_x(t) \sim \text{approxPo}(ETR_x(t) \cdot \mu_x(t)) \quad (3.1-4)$$

där vi har μ_x enligt:

$$\mu_x(t) = \exp(\alpha_x + \kappa(t) \cdot \beta_x). \quad (3.1-5)$$

För att få entydighet låter vi $\sum_t \kappa(t) = 0$ och $\sum_x \beta_x = 1$. Vi kan då tolka parametrarna i modellen enligt:

- α_x kan ses som medelvärdet av $\ln(\mu_x(t))$ över observationsåren t .
- $\kappa(t)$ ger tidstrenden i dödlighetsintensiteten.
- β_x beskriver avvikelser från $\ln(\mu_x(t))$ då $\kappa(t)$ varierar.

Parametrarna i modellen skattas från befolkningsdata enligt avsnitt 3.1.2. Trendkomponenten $\hat{\kappa}(t)$ extrapoleras därmed på framtiden, i denna undersökning genom en rät linje. Tillsammans med de åldersberoende skattningarna $\hat{\alpha}_x$ och $\hat{\beta}_x$ ger detta insatt i funktion 3.1-5 oss den framtida predikterade dödlighetsintensiteten för befolkningen.

Det finns kritik även till denna modell. Trenden i dödligheten kanske inte håller i sig även i framtiden. Detta medför att det är svårt att välja hur långt tillbaka i tiden vi ska gå för att kunna prediktera framtida dödlighet på bästa sätt. Vi använder här befolkningsdata för åren 1985-2005 för att skatta Lee-Cartermodellen. Om vi istället hade använt åren 1945-2005 hade skattningarna fått ett annat utseende och därmed också vår prediktion. Det är därmed viktigt att uppdatera sina Lee-Carterparametrar emellanåt och därmed anpassa sin dödlighet till nya trender. Modellen innehåller även många parametrar, om vi betraktar m åldrar under n kalenderår har vi $m \cdot n$ observationer och $m + m + n$ parametrar. Sen kan vi också ägna en tanke om hur det står till med oberoendet i Poisson-modellen. Det finns anledning att tro att det inte är fullkomligt oberoende mellan $D_x(t)$ och $D_y(s)$, då $x \neq y$ och $t \neq s$. Och det bör nog vara så att om många x -åringar avlider ett år, så gör många $(x+1)$ -åringar och $(x-1)$ -åringar det också. Modellen garanterar heller inte ökad dödlighet med ökad ålder såsom Makehamanpassningen.

3.1.2 Lee-Cartermodellen för befolkningen för åren 1985-2005

Lee-Cartermodellen som används i denna rapport är den som FTN tog fram till *Försäkrade i Sverige – dödlighet och livslängder, Prognoser 2007-2050*, [5]. Vi ger i detta avsnitt en sammanfattning på hur modellen togs fram till den rapporten, och det mesta går att återfinna i [5].

Vi antar Poisson-fördelade dödsfall och denna variant av Lee-Cartermodellen brukar kallas Poisson-log-bilinjäramodellen. Skattningen av modellen grundar sig på befolkningsstatistik från Statistiska

Centralbyrån av svenska invånare som är födda i Norden i åldrarna $x \in \{30, \dots, 90\}$ år under åren $t \in \{1985, \dots, 2005\}$. Befolkningsdata är nödvändigt för att kunna skatta trenden i dödligheten på ett tillförlitligt sätt. Vi behöver nämligen data med hög exponering och med homogen sammansättning för detta.

Parameterskattningarna bygger på maximumlikelihood-teknik för modellering av observerat antal avlidna individer. Vi visar här nedan en del av härledningen av skattningen av parametervektorerna

$$\underline{\alpha} = \{\alpha_x; x = x_{\min}, \dots, x_{\max}\}, \underline{\kappa} = \{\kappa(t); t = t_{\min}, \dots, t_{\max}\} \text{ och} \\ \underline{\beta} = \{\beta_x; x = x_{\min}, \dots, x_{\max}\}.$$

Vi får likelihoodfunktionen till:

$$L(\underline{\alpha}, \underline{\kappa}, \underline{\beta}) = \prod_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \prod_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} P(D_x(t) = d_x(t)) = \prod_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \prod_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \exp(-\lambda_x(t)) \frac{\lambda_x(t)^{d_x(t)}}{d_x(t)!}, \quad (3.1-6)$$

där:

$$\lambda_x(t) = E[D_x(t)] = ETR_x(t) \cdot \mu_x(t) = ETR_x(t) \cdot \exp(\alpha_x + \kappa(t) \cdot \beta_x). \quad (3.1-7)$$

Detta ger att vi kan skriva loglikelihoodfunktionen enligt:

$$\ln[L(\underline{\alpha}, \underline{\kappa}, \underline{\beta})] = \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} [-\lambda_x(t) + d_x(t) \cdot \ln(\lambda_x(t))] + k \quad (3.1-8) \\ = \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} [-ETR_x(t) \cdot \exp(\alpha_x + \kappa(t) \cdot \beta_x) + d_x(t) \cdot (\alpha_x + \kappa(t) \cdot \beta_x)] + k,$$

där k är en konstant.

Detta uttryck kan vi sedan maximera numeriskt med en iterationsteknik enligt Newton-Raphson. Vi hänvisar den intresserade läsaren till [5].

För individer med en ålder över 90 år använder vi en modifierad skattningsteknik. α_x skattas för åldrarna 91-103 år enligt:

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{t_{\max} - t_{\min} + 1} \cdot \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \ln(\hat{\mu}_x(t)). \quad (3.1-9)$$

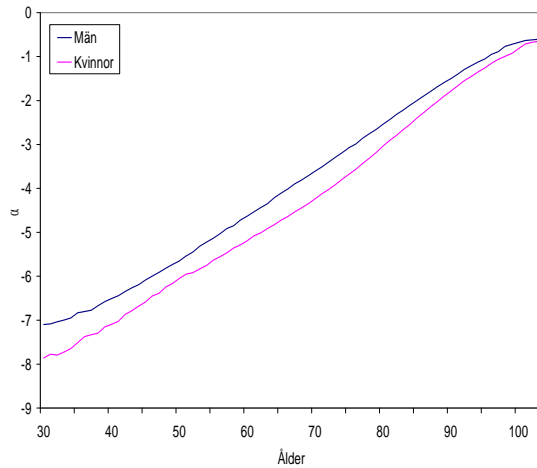
Trendfaktorn $\kappa(t)$ skattar vi som tidigare. Datamaterialet är för litet för att vi på ett tillförlitligt sätt ska kunna skatta trendfaktorns inverkan β_x . Vi antar istället att β_x avtar linjärt från det skattade värdet vid 91 års ålder till 0 vid 100 år. Därefter antas dödligheten inte förbättras över tiden, det vill säga $\beta_x = 0$ för $x \in \{100, \dots, 103\}$.

För att få en linjär trend utjämnar vi den skattade trendfaktorn $\hat{\kappa}(t)$ med hjälp av minsta-kvadratmetoden för en linje. Den linje vi får fram låter vi sedan framskrida fram till år 2050, och efter det antar vi en halverad lutning fram till år 2080. Vi har därmed extrapolerat dödlighetstrenden in i framtiden.

$\hat{\beta}_x$ utjämnas med 5-års glidande medelvärde. För att få monotont stigande dödlighet med ökad ålder gör vi även ytterligare viss utjämning av $\hat{\kappa}(t)$ och $\hat{\beta}_x$.

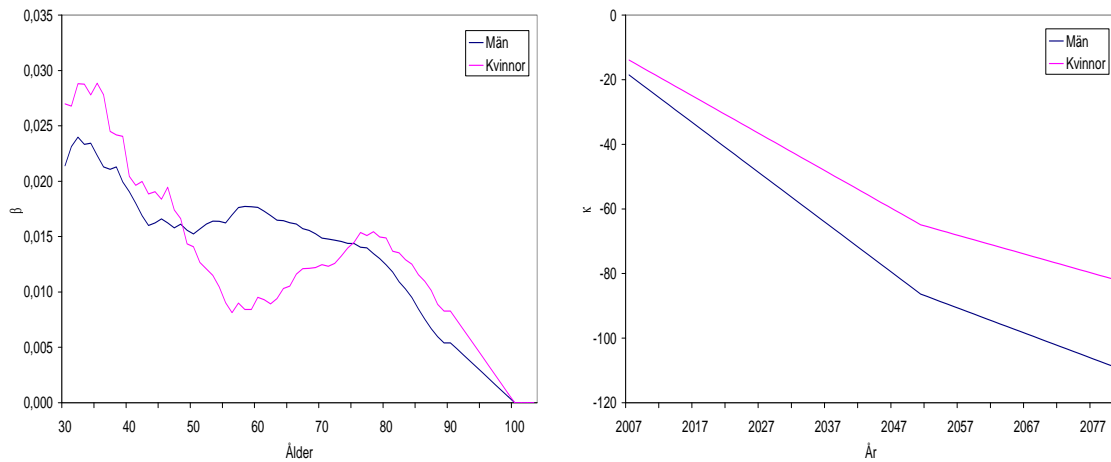
I figur 3.1-1 återfinner vi $\hat{\alpha}_x$, som motsvarar den logaritmerade medeldödlighetsintensiteten i respektive ålder under den studerade perioden. Vi ser att den ligger högre för män än kvinnor över alla åldrar.

Figur 3.1-1, $\hat{\alpha}_x$ för kvinnor, män



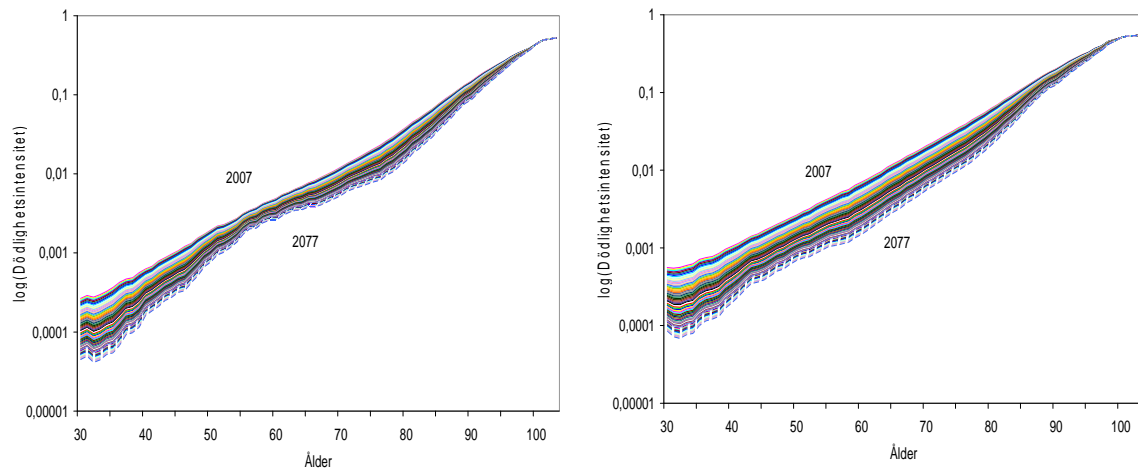
I figurerna 3.1-2 och 3.1-3 återfinns de parametrar som påverkar trenden i dödlighetsintensiteten. β_x är den parameter som styr genomslaget av trendfaktorn $\kappa(t)$ för olika åldrar. Då trendfaktorn är negativ (som här, se figur 3.1-3), så kommer dödlighetsintensiteten minska mer över tiden i de åldrarna med höga β_x -värden än de med låga. Alltså kommer dödligheten att minska mer för män i åldrarna mellan 50-75 år än för kvinnor i samma åldersintervall.

Figur 3.1-2 och 3.1-3, utjämnade $\hat{\beta}_x$ för kvinnor, män, samt utjämnade $\hat{\kappa}(t)$ för kvinnor, män



Med hjälp av $\hat{\alpha}_x$ och de utjämnade $\hat{\beta}_x$ och $\hat{\kappa}(t)$ samt formel 3.1-5 kan vi nu skatta den framtida befolkningsdödligheten år t för ålder x .

Figur 3.1-4 och 3.1-5, predikterade dödligheten befolkningen, kvinnor, män, år 2007-2077



Vi ser i figurerna av dödligheten att det är en större skillnad för män än för kvinnor mellan år 2007-2077 i åldersintervallet 50-75 år. Det är trenden under den observerade perioden (år 1985-2005) som ger detta utslag.

3.1.3 Modell för skattning av framtida försäkringsdödlighet

Eftersom vårt försäkringskollektiv dels är för litet och dels ändras från år till år, men inte nödvändigtvis dödligheten så måste vi ta befolkningsdata till hjälp för att kunna skatta trenden i dödligheten. Vi skattar därför Lee-Cartermodellen för befolkningen enligt tidigare avsnitt. Relationen mellan försäkringsdödligheten och dödligheten hos befolkningen kan vi beskriva som:

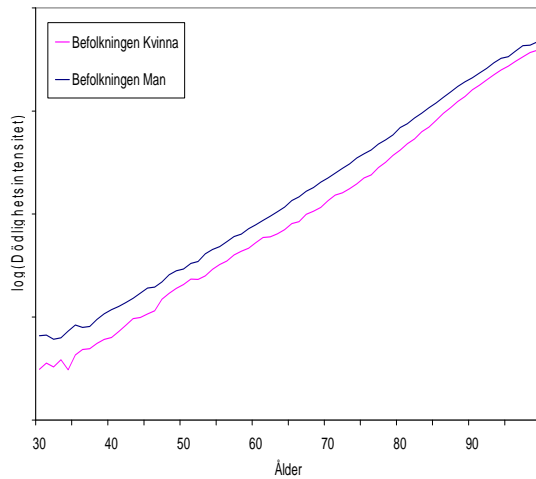
$$k_x^{i,B} = \frac{\mu_x^i}{\mu_x^B} \quad (3.1-10)$$

i = TPS för år 2001-2005 (det så kallade "skarvade" TPS under avsnitt 2.3.2).

μ_x^B = dödlighetsintensiteten för befolkningen 2001-2005.

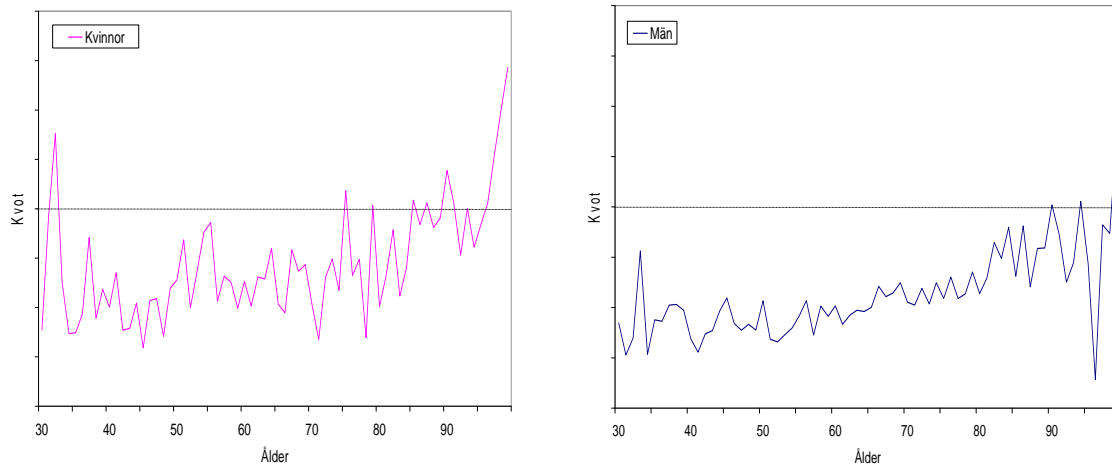
Dessa bestånd är också indelade efter kön. TPS-beståndet som vi använder här kan ändras till något annat av de bestånd som diskuteras under avsnitt 2.3.2.

Figur 3.1-6, aktuell dödlighet i befolkningen, μ_x^B



Vi ser att den aktuella dödlighetsintensiteten i befolkningen för kvinnor som väntat ligger under den manliga för alla åldrar. Det är intressant att jämföra figur 3.1-6 med figurerna 3.1-4 och 3.1-5 där vi alltså predikerat fram befolkningsdödligheten med den dynamiska Lee-Cartermodellen. Dynamiken och trenden i modellen ger snabbt utslag och vi ser att den snabbt får ett svajigt utseende där dödligheten inte hela tiden ökar med ökad ålder, vilket nästan är fallet för alla åldrar för den aktuella befolkningsdödligheten.

Figur 3.1-7 och 3.1-8, kvoten, $k_x^{i,B}$, i=kvinna, i=man



I figurerna ovan står den streckade linjen för $k_x^{i,B} = 1$, det vill säga att dödligheten i befolkningen är den samma som den för de försäkrade. Vi ser i figurerna att den manliga TPS-dödligheten ligger under befolkningens i alla åldrar förutom vid vissa höga åldrar (90 år, 94 år och 99 år). Den kvinnliga kvoten hoppar mer upp och ner och dödligheten för TPS-beståndet ligger över befolkningens för flera åldrar (32 år, 75 år, 79 år och de flesta åldrar över 85 år). Vi ser en antydning till att det är större skillnad i dödlighet mellan en försäkrad och en icke försäkrad man, än motsvarande för en kvinna.

Dessa kvoter applicerar vi sedan på den trendade dödlighetsintensiteten för befolkningen som vi får med hjälp av Lee-Cartermodellen μ_x .

Vi får då dödligheten från år 2007-2080 för önskad delbeståndet, det vill säga:

$$\mu_x^i(t) = k_x^{i,B} \cdot \mu_x(t) \quad (3.1-11)$$

Denna metod bygger på att vi antar ett konstant förhållande mellan dödligheten hos befolkningen och försäkringsbeståndet över prognosperioden.

Sen kan vi även för en viss ålder x med födelseår F skriva dödlighetsintensiteten som $\mu_x^*(F)$, där vi då har:

$$\mu_x^*(F) = \mu_x(x + F) \quad (3.1-12)$$

Detta kan vi till exempel använda om vi vill studera individer som är födda under ett speciellt decennium, vilket vi kommer att göra senare under avsnitt 3.3.

3.2 Skattning av den aktuella försäkringsdödligheten

Vi tar här fram den aktuella empiriska dödlighetsintensiteten i försäkringsbestånden genom den centrala dödskvoten enligt formel 5.1-15, och från denna gör vi även en Makehamanpassning. Som jämförelse visar vi nuvarande antagandena. Dessa följer en Makehammodell med en parameteruppsättning för livsfallsdödlighet och en för dödsfallsdödlighet och utan risk, samt en förskjutning mellan könen. För centrala dödskvoten visar vi också ett femårs glidande medelvärde.

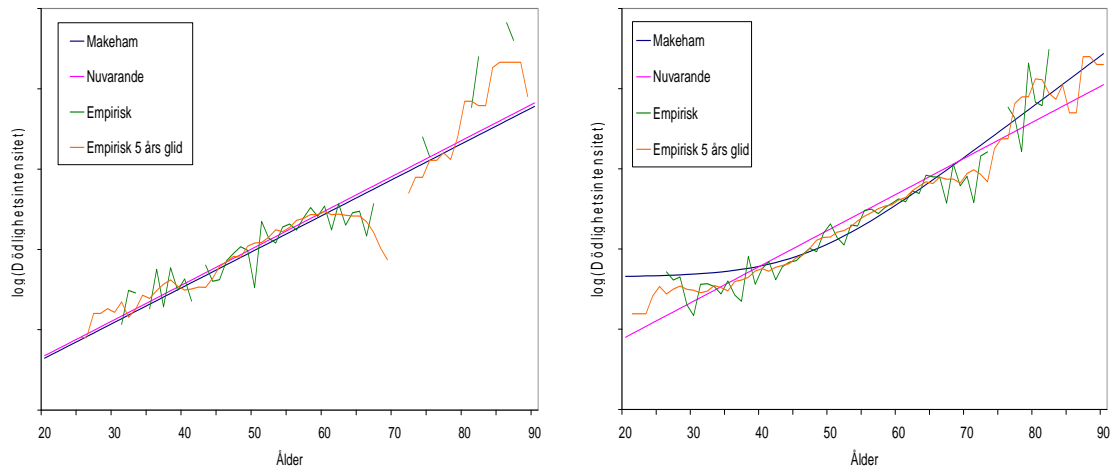
Parameterskattningarna i Makehamanpassningen har vi fått fram enligt modifierade minimum χ^2 -metoden som finns beskriven i [1]. Den går i korta drag ut på att vi minimerar:

$$Q = \sum_{i=1}^n w_{x_i} \cdot (\hat{\mu}_{x_i} - a - b \cdot \exp(c \cdot x_i))^2 \quad (3.2-1)$$

där vi valt vikterna till den skattade risktiden (se 5.1-11), $w_{x_i} = E\hat{TR}_x$. Detta val av vikter gör att åldrar där vi har mycket observationer får större vikt.

Från Makehamanpassningen, den empiriska dödlighetsintensiteten, nuvarande dödlighetsantaganden och befolkningsdata (år 2006, hämtad ifrån [6]) har förväntad återstående livslängd skattats enligt formel 5.1-16. Resultatet för dessa kommer inte explicit att redovisas i denna rapport, med det kommer att diskuteras i detta avsnitt. Förväntad återstående livslängd kan i vissa fall överskattas för den empiriska dödligheten, då vissa bestånd saknar individer i låga och i höga åldrar, så ingen dödlighetsintensitet bidrar till formel 5.1-16 för dessa åldrar.

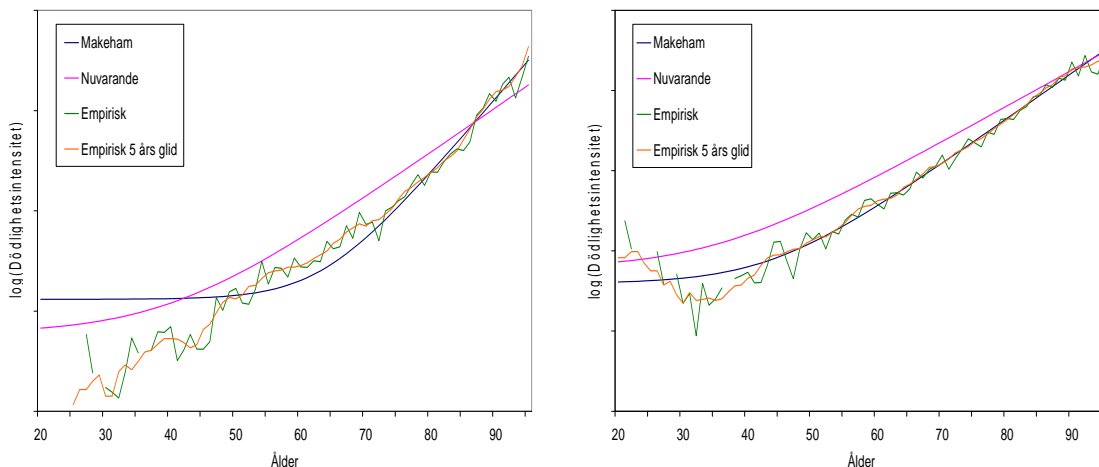
Figur 3.2-1 och 3.2-2, aktuell livsfallsdödlighet, kvinnor respektive män



Vi ser att för det för kvinnor i vissa åldrar över 70 år inte finns tillräckligt med data för att skatta dödlighetsintensiteten. Även för män är dödlighetsintensiteten väldigt osäker över 70 år. Detta är inte så konstigt med tanke på att beståndet främst består av individer mellan 20-70 år (se figurerna 2.3-4 -2.3-7). Makehamanpassningen blir också osäker i de åldrarna utanför detta åldersintervall. Dock kan vi antyda att för män i de åldrarna med relativt stort bestånd (30-60 år) överskattas dödligheten med nuvarande antaganden.

Förväntad återstående livslängd ligger i storleksordningen runt 5 år över befolkningens för både kvinnor och män. För kvinnor skiljer sig inte den förväntade livslängden sig åt lika kraftigt mellan de olika modellerna som för männen. Det är främst Makehamanpassningen för männen som skiljer sig från de andra, detta troligtvis på grund utav att vi gör anpassningen av vikt där vi har hög exponering. Skulle vårt slutgiltiga dödlighetsantagande för män med livsfallsdödlighet vara denna Makehamanpassning skulle vi kraftigt underskatta dödligheten i detta bestånd. Detta bestånd är det med störst livslängdskillnad mellan könen. Förväntad återstående livslängd för en 65-årig kvinna är 33 % längre än för en man. För befolkningen i stort ligger denna siffra på 18 % (år 2006, data från [6]).

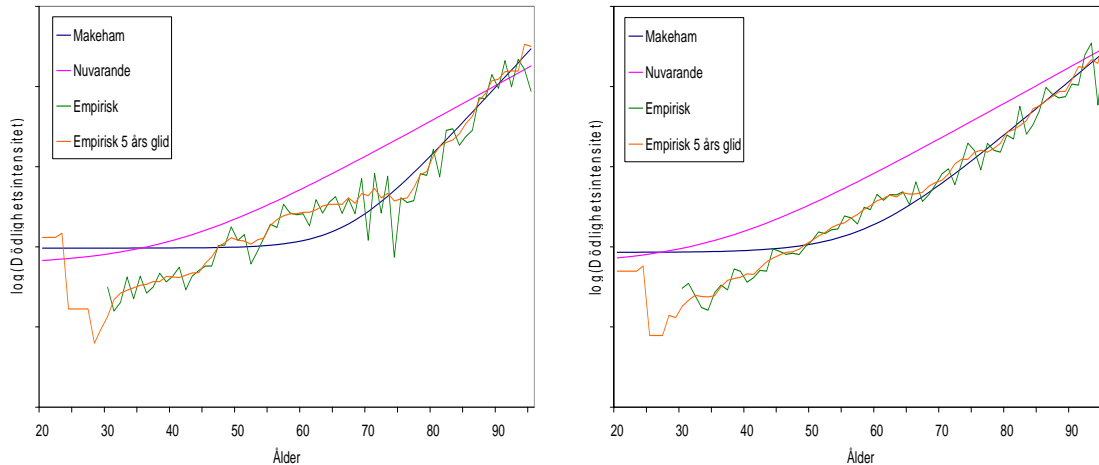
Figur 3.2-3 och 3.2-4, aktuell dödsfallsdödlighet, kvinnor respektive män



Vi ser i figurerna 3.2-3 och 3.2-4 att dödsfallsdödligheten både för kvinnor och män överskattas med nuvarande antaganden gentemot de empiriska för åldrarna 30-85 år. Dessa bestånd har större bredd än de ovan, och innehåller individer från 0 år till uppemot 100 år (se figurerna 2.3-8 - 2.3-11). Förväntad återstående livslängd för en nyfödd får stor skillnad mellan den empiriska skattningen och nuvarande

antaganden. Den ligger 5 % över för kvinnorna och 7 % över för männen. Makehamanpassningen ligger mellan dessa värden. En 65-årig kvinna med dödsfallsdödlighet förväntas leva 15 % längre än motsvarande man.

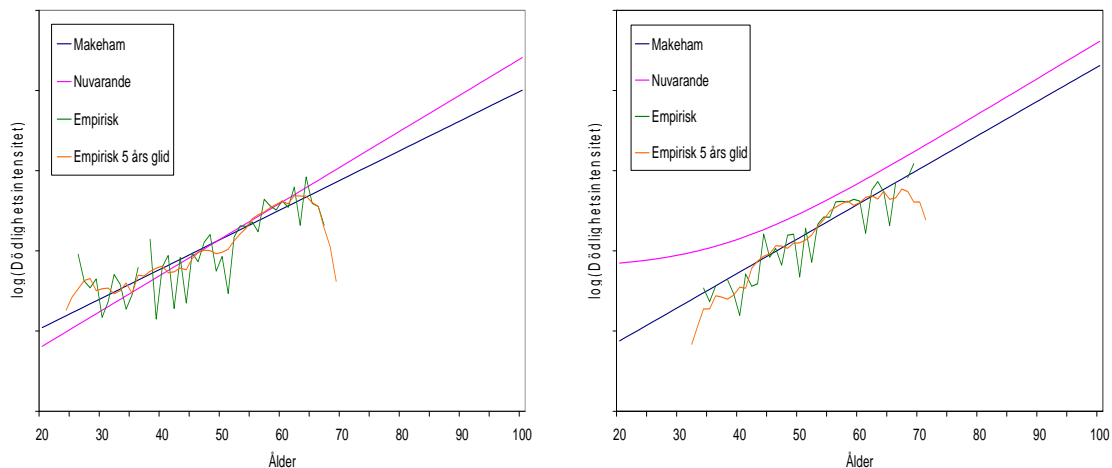
Figur 3.2-5 och 3.2-6, aktuell dödlighet försäkringar utan risk, kvinnor respektive män



För försäkringar utan risk överskattas dödligheten med nuvarande antaganden gentemot empiriska dödligheten och ifrån den framtagna Makehamanpassningen i åldrarna 35-90 år. Detta ger kraftiga utslag på förväntad återstående livslängd, där 65-åriga kvinnor förväntas leva 18 % längre och 65-åriga män 33 % längre med aktuella Makehamanpassningen gentemot nuvarande antaganden. I figur 2.3-12 - 2.3-15 återfinns dessa bestånd och för dem antalet avlidna. Skillnaden mellan könen är inte så stor i detta bestånd som de ovan. Vid pensionsålder (65 år) förväntas en kvinna ha 11 % längre livstid kvar än en man.

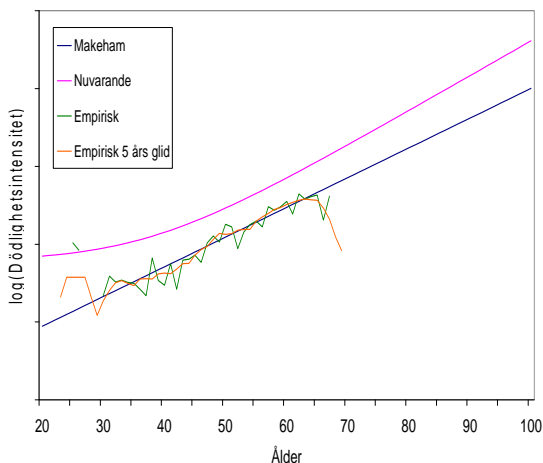
Om vi nu ser på skillnaden i dödlighet mellan de olika risksummeindelningarna, så gäller att för kvinnor så ser det ut som att de med livsfallsdödlighet och försäkringar utan risk har högst förväntad livslängd. För männen har försäkringar utan risk den längsta förväntade livslängden, medan de med livsfallsdödlighet och de med dödsfallsdödlighet har ungefär densamma. För männen är detta lite motsägande, eftersom det borde vara så att någon som tror sig leva länge tecknar en försäkring med livsfallsdödlighet, och det motsatta när det gäller försäkringar med dödsfallsdödlighet. Detta kanske skulle ge ett annat utfall om vi hade ett ännu större försäkringsbestånd att arbeta med.

Figur 3.2-7 och 3.2-8, aktuell dödlighet avtalspension, livsfallsdödlighet respektive dödsfallsdödlighet

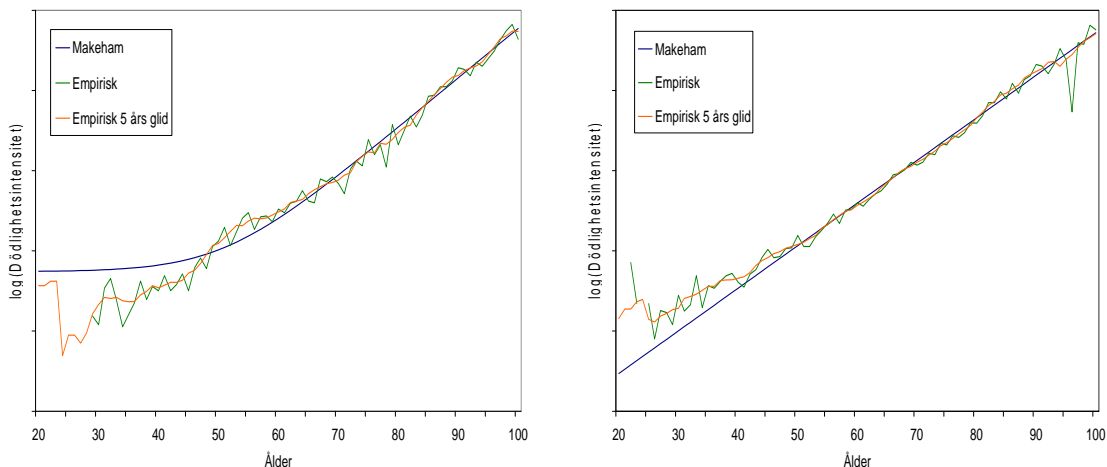


I figurerna 3.2-7 - 3.2-9 återfinns vi aktuell dödlighet för avtalspension uppdelat efter risksumma. Vi ser att för försäkringar med dödsfallsdödlighet respektive de utan risk så överskattas nuvarande antaganden dödligheten. Så är inte fallet för de med livsfallsdödlighet där dödligheten istället underskattas fram till 50 års ålder, och sedan överskattas från ungefär 70 år. I figurerna över beståndet i avtalspension (2.3-16 - 2.3-21) såg vi att dessa var begränsade till åldrarna 20-70 år. Detta medför att om vi bara använder den empiriska dödligheten, eller en Makehamanpassning av denna, så kommer den förväntade återstående livslängden att överskattas. Det är främst i åldrarna över 70 år (se figur 2.3-32 och 2.3-34) som individer börjar avlida. En möjlighet för att få bukt på det här problemet är att göra som vi gjorde för TPS-beståndet, det vill säga att "skarva" med ett bestånd av liknande karaktär som har ett större åldersintervall.

Figur 3.2-9, aktuell dödlighet avtalspension, utan risk



Figur 3.2-10 och 3.2-11, aktuell dödlighet i "skarvad" TPS, kvinnor respektive män

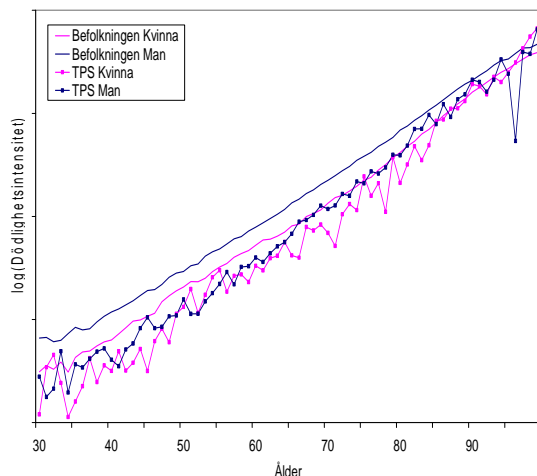


För TPS finns inga passande nuvarande antaganden att jämföra med eftersom vi inte gjort någon indelning efter risksumma för dessa. Makehamanpassningen för dessa bestånd blev väldigt bra vilket medför att förväntad återstående livslängd inte skiljer sig alls mycket då vi beräknar den utifrån den anpassade eller den empiriska dödligheten. Skillnaden i förväntad återstående livslängd för en 65-åring i detta bestånd gentemot befolkningen är 5 % längre för kvinnorna och 14 % längre för männen. Skillnaden mellan könen inom TPS-beståndet är att kvinnor i 65-års ålder förväntas leva 9 % längre än en jämgammal man. Trots att vi har ett rätt stort försäkringsbestånd så blir den empiriska dödligheten "hackig". Vissa utjämnningar (såsom glidande medelvärde) och eventuellt lite handpåläggning skulle kunna snygga till kurvan ytterligare inför när vi sedan applicerar denna dödlighetsintensitet med Lee-Cartermodellen. Beståndet och antalet avlidna i dessa bestånd återfinns i figurerna 2.3-26 - 2.3-29.

3.3 Prediktion av framtida TPS-dödligheten med hjälp av Lee-Cartermodellen

Det vi i detta avsnitt kallar TPS-beståndet är egentligen det "skarvade" TPS-beståndet i avsnitt 2.3.2. Vi visar här aktuell TPS-dödligheten igen och hur dess dödlighet förhåller sig till befolkningsdödligheten och mellan könen:

Figur 3.3-1, aktuell dödligheten för TPS, kvinnor, män

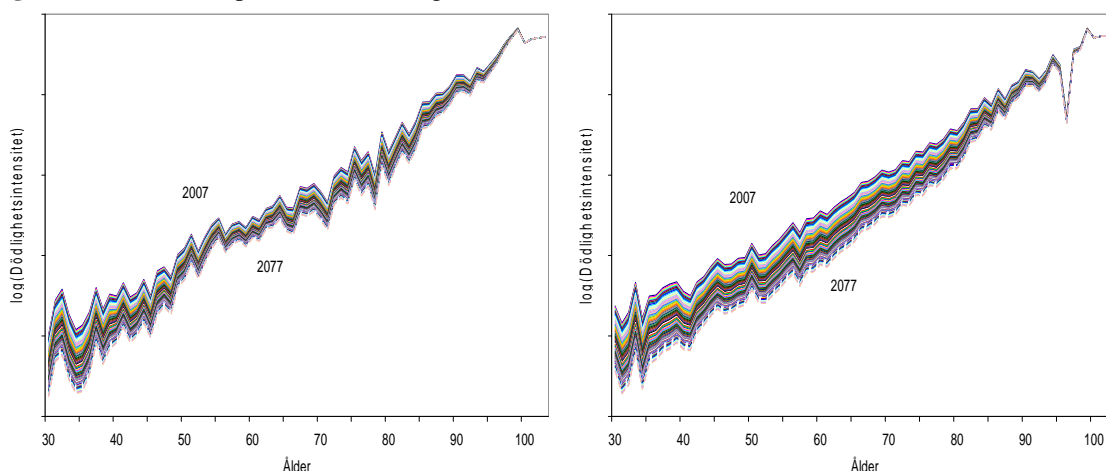


Vi ser i figur 3.3-1 att trots att vi aggregerat data över flera år och har ett stort försäkringsbestånd så är dödligheten väldigt hackig. Vi borde kanske utjämna dödligheten här (till exempel med ett glidande medelvärde) innan vi bildar kvoten med befolkningsdata, men vi avvaktar en eventuell utjämning tills dess att vi applicerat denna dödlighet med Lee-Cartermodellen och fått fram utseendet på vår predikterade dödlighet. Den stora sänkningen av dödligheten som vi ser för "TPS-männen" i åldrarna över 95 år kan elimineras genom att vi sätter kvoten (3.1-10) till 1 för åldrarna över 95 år. Detta borde inte vara någon inskränkning på försäkringsdödligheten, ty skillnaden i dödlighet mellan en försäkrad och en icke försäkrad i åldrar över 95 år borde vara marginell. Dock avvaktar vi en sådan utjämning.

Vi ser också att de försäkrade kvinnornas dödlighet i vissa åldrar överstiger männens. Detta sker främst i åldrarna runt 50-55 år. I dessa åldrar har männens dödlighet förbättrats avsevärt under trendens baseringsperiod (åren 1985-2005) så i dessa åldrar kommer en extrapolerad dödlighet ge lägre dödlighet för männen även i framtiden. De försäkrade männens dödlighet ligger långt under motsvarande för befolkningen och de försäkrade kvinnornas ligger under befolkningens för de flesta åldrarna vilket vi såg i figur 3.1-7 - 3.1-8.

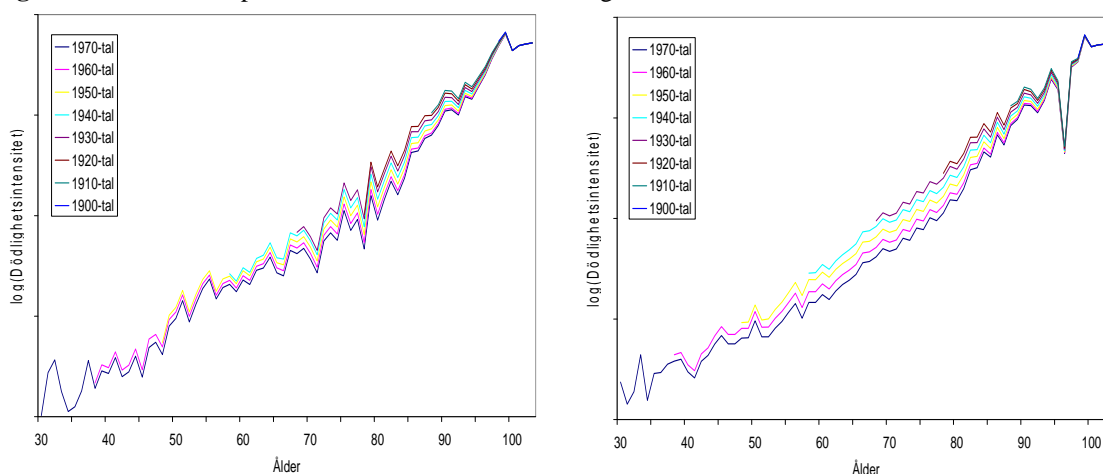
Här kommer motsvarande figurerna 3.1-5 - 3.1-6 då vi applicerat Lee-Cartermodellen med kvoten 3.1-10, det vill säga TPS-dödligheten delat med motsvarande för befolkningen.

Figur 3.3-2 och 3.3-3, predikerade dödligheten för TPS, kvinnor, män, år 2007-2077



I likhet med figur 3.1-5 - 3.1-6 över predikerade dödligheten i befolkningen, ser vi här att dödligheten sjunker mer för män än för kvinnor. Det är skillnaden i trend mellan könen för befolkningsdödligheten som ligger bakom detta (se avsnitt 3.1.2). Alla värdena i figurerna ovan är mer eller mindre predikerade. Ser vi på en 30-åring år 2007, så är bildas dess dödlighetsintensitet av kvoten mellan den aktuella (baserad på data 2001-2005) försäkringsdödligheten för en 30-åring och den aktuella befolkningsdödligheten i samma ålder (och samma kalenderårsintervall), som sedan multipliceras med Lee-Cartermodellen för 30-åringar år 2007, som då är en prediktionsmodell.

Figur 3.3-4 och 3.3-5, predikerade decenniekohortdödligheten för TPS, kvinnor, män



Det är denna Lee-Cartervariant uppdelad efter födelsedecennier som vi kommer att använda vidare i rapporten. Denna indelning medför en viss utjämning som kan vara bra, men medför vissa konstigheter såsom att dödligheten mellan en 50-åring född år 1959 och en som är född år 1960 skiljer sig åt, men den skiljer sig inte mellan en 50-åring som är född år 1959 och år 1950. Värdena i figurerna 3.3-4 och 3.3-5 har vi fått fram genom att först använda formel 3.1-2 för att omvandla kalenderårsmortality till kohortdödlighet för alla åldrar. Som exempel har vi att kalenderårsmortality $\mu_{40}(2007)$ motsvarar kohortdödligheten $\mu_{40}^*(2007 - 40) = \mu_{40}^*(1967)$. För att sedan få kohortdödligheten uppdelad efter vilket decennium försäkringstagaren är född i tar vi medelvärden per ålder inom varje födelseår som ingår i det studerade födelsedecenniet. Som exempel ser vi här nedan uträkningarna av detta för dem som är födda på 1960-talet:

$$\mu_{38}^*(1960 - tal) = \mu_{38}^*(1969) \quad (3.3-1)$$

$$\mu_{39}^*(1960 - tal) = \frac{\mu_{39}^*(1969) + \mu_{39}^*(1968)}{2}$$

$$\mu_{40}^*(1960 - tal) = \frac{\mu_{40}^*(1969) + \mu_{40}^*(1968) + \mu_{40}^*(1967)}{3}$$

...

$$\mu_{47}^*(1960 - tal) = \frac{\mu_{47}^*(1969) + \mu_{47}^*(1968) + \dots + \mu_{47}^*(1960)}{10}$$

$$\mu_{48}^*(1960 - tal) = \frac{\mu_{48}^*(1969) + \mu_{48}^*(1968) + \dots + \mu_{48}^*(1960)}{10}$$

...

$$\mu_{103}^*(1960 - tal) = \frac{\mu_{103}^*(1969) + \mu_{103}^*(1968) + \dots + \mu_{103}^*(1960)}{10}$$

När vi nu studerar förväntad återstående livslängd utifrån denna decenniedödlighet så antar vi att individen lever vid den första studerade åldern i tidsperioden. Detta ger en påverkan på överlevelsefunktionen (5.1-9) som används för beräkningen av förväntad återstående livslängden (formel 5.1-10). Denna påverkan är att för till exempel en person som är född på 1960-talet så är den yngsta studerade åldern 38 år (denna individ är därmed född år 2007-38=1969), så vi säger då att $l(37) = 1$ för dem som är födda på 1960-talet. När vi studerar förväntad återstående livslängd tidigare så kunde individer avlida i tidigare åldrar, så detta borde innebära att den förväntade återstående livslängden med detta beräkningssätt medför högre förväntad livstid. Detta förfarande har vi även gjort direkt på Lee-Cartermodellen för befolkningen, och vi gör även så senare i rapporten då vi studerar en Makehamanpassning av denna Lee-Cartermodell.

Skillnaden i förväntad livslängd mellan könen är i genomsnitt 2,4 år för befolkningen och endast 1,1 år för de försäkrade i TPS-beståndet och det är kvinnan som har den större förväntade livslängden. Skillnaden minskar utifrån ju senare individen är född. Det är trenden i dödligheten som påverkar de som är sent födda mer. En person som är född på 1970-talets dödlighet är predikterad under en lång period och trenden får då större påverkan än för någon som är född på till exempel 1950-talet. Studerar vi återstående livslängd vid den normala pensionsålder 65 år så är skillnaden mellan könen för befolkningen 2,9 år för de födda på 1940-talet, och denna skillnad minskar till 2,1 år för de födda på 1970-talet. För de försäkrade gäller motsvarande 1,6 års skillnad för de födda på 1940-talet, vilket minskar till 1,0 år för sjuttioåringarna.

Om vi nu jämför befolkningen med de försäkrade inom TPS så är skillnaden i förväntad livslängd för kvinnorna i genomsnitt 1,4 år och för männen 2,7 år, där alltså de försäkrades förväntade livslängd är längre. För 65-åringa kvinnor är skillnaden i återstående livslängd 1,4 år om de är födda på 1940-talet och 1,0 år om de är födda på 1970-talet. Motsvarande för männen är 2,7 år för fyrtioåringarna och 2,2 år för sjuttioåringarna.

Utifrån denna utjämnade Lee-Cartermodell gör vi sedan Makehamanpassningar för alla födelsedecennier. Här använder vi formel 3.1-2, det vill säga Makehammodellen med linjär justering för höga åldrar. Vi sätter $\omega = 100$ år och $k = 0,03$, likt [5], vilket ger en bra skattning av dödligheten för de riktigt gamla.

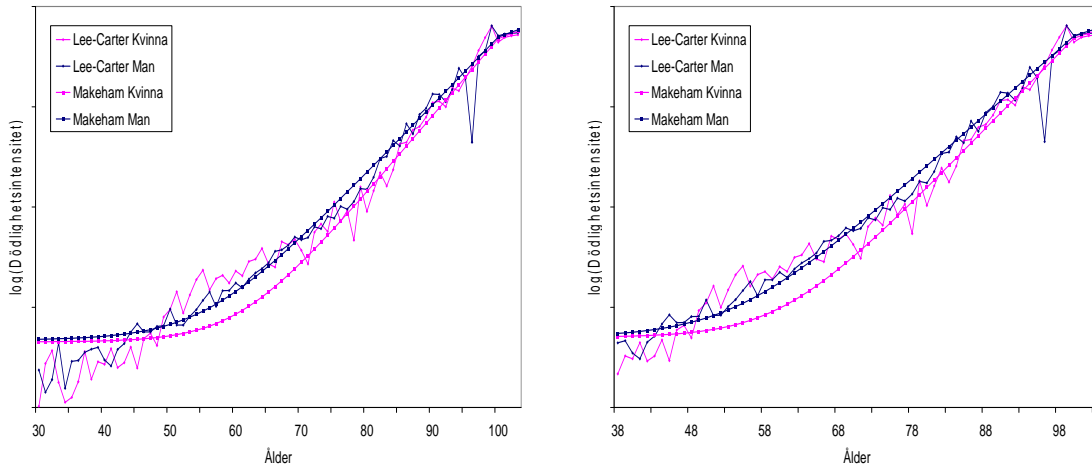
Anpassningen gör vi likt tidigare med hjälp av 3.2-1, men vi tar hjälp av handpåläggningsmetoden för att få att männens dödlighet hela tiden är lika som eller över kvinnans, och så att dödligheten minskar ju senare födelsedecennium individen har. Handpåläggningen medför inte så stora skillnader på kvadratavvikelsen från Lee-Cartermodellen gentemot om vi använder den anpassning vi fick direkt från 3.2-1.

Detta förfarande tar bort en stor del av dynamiken och trenden som vi införde med Lee-Cartermodellen och vi får tillbaka deterministiskheten i Makehammodellen. Men vi får i alla fall en modell som varierar med tiden i den mån att den beror på vilket födelseår individen har. Vi får också en utjämnning av dödligheten

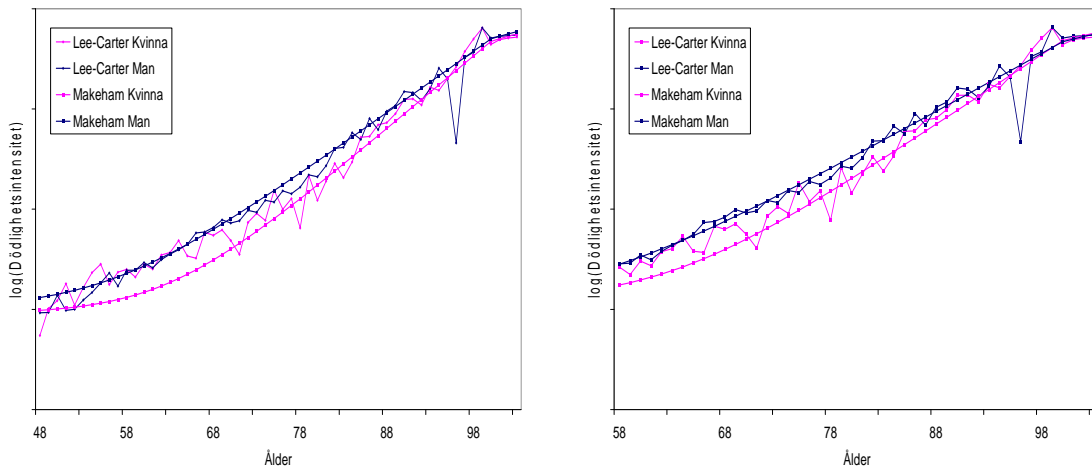
som mer liknar den aktuella dödligheten i befolkningen (se figur 3.1-6) och vi tror det är sannolikt att dödligheten i försäkringsbeståndet kommer att ha ett sådant utseende.

I figurerna 3.3-6 - 3.3-12 ser vi Makehamanpassningen och Lee-Cartermodellen för de olika födelsedecennierna.

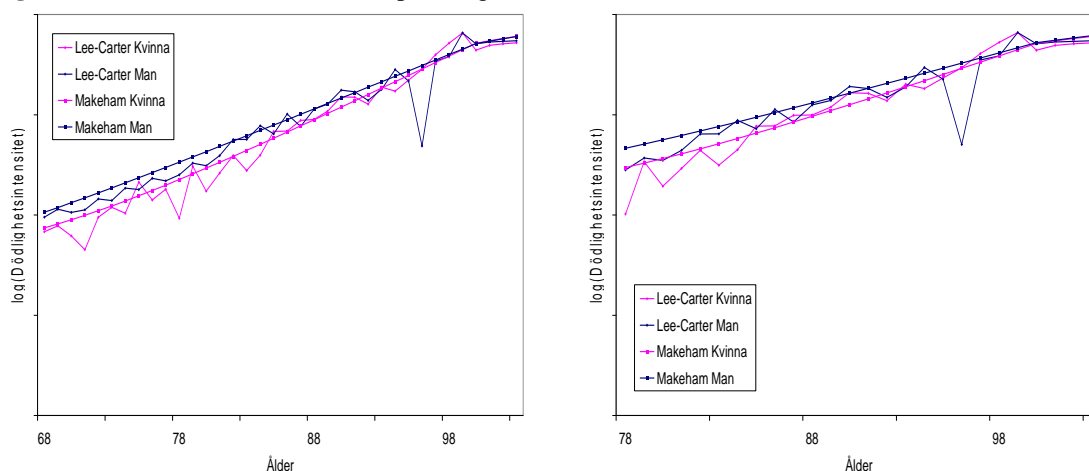
Figur 3.3-6 och 3.3-7, Makehamanpassning av Lee-Carter för TPS, födda 1970-tal, födda 1960-tal



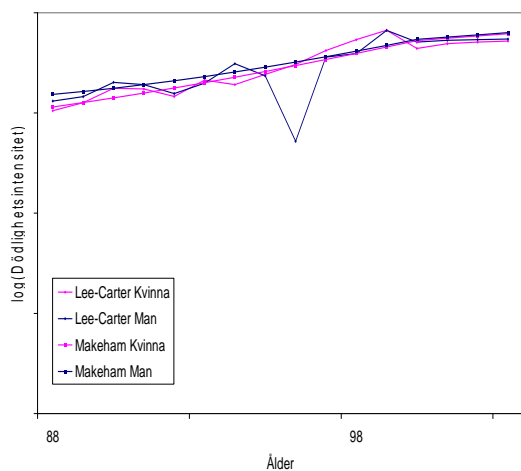
Figur 3.3-8 och 3.3-9, Makehamanpassning av Lee-Carter för TPS, födda 1950-tal, födda 1940-tal



Figur 3.3-10 och 3.3-11, Makehamanpassning av Lee-Carter för TPS, födda 1930-tal, födda 1920-tal



Figur 3.3-12, Makehamanpassning av Lee-Carter för TPS, födda 1910-tal



Även för denna Makehamanpassning har vi beräknat förväntad återstående livslängd. Handpålägningen trycker ner kvinnornas dödlighet en aning, främst för sena födelsedecennier, så att deras förväntade livslängd ligger över Lee-Cartermodellens i de flesta åldrarna. För männen överskattas dödligheten lite grann här gentemot Lee-Cartermodellens vilket medför något lägre förväntad återstående livslängd än tidigare. Skillnaden i förväntad livslängd mellan kvinna och man kommer med denna modell vara relativt konstant mellan de olika födelsedecennierna, och något större än skillnaden för den aktuella dödligheten i detta bestånd.

4 Diskussion

Om vi först ser tillbaka på den aktuella dödligheten i Skandia Links försäkringsbestånd (avsnitt 3.2) så ligger den under befolkningens för alla delbestånden. Det finns alltså fog för att säga att det är skillnad mellan försäkrades dödlighet och befolkningens. Kvinnans förväntade livslängd är längre än mannens inom alla delbestånd. Denna skillnad är dock minst inom det så kallade "skarvade" TPS-beståndet som är det bestånd som vi använde till att prediktera in i framtiden. De nuvarande dödlighetsantagandena skiljer sig åt om försäkringen har livsfallsdödlighet eller dödsfallsdödlighet och utan risk. Från den aktuella dödligheten kan vi inte säkerhetsställa att det är självklart med en skillnad i dödlighet efter tecken på risksumma, annat än för att få säkerhetsmarginaler mot de olika riskerna för de olika produkterna. Det visar sig faktiskt att de försäkringar som står utan risk är de som genererar högst förväntad livslängd. Om vi jämför den aktuella dödligheten med nuvarande antaganden så är skillnaden störst inom försäkringar med dödsfallsdödlighet och de utan risk, där nuvarande antaganden underskattar försäkringstagarnas livslängder både för kvinnor och för män. Trots att vissa av delbestånden är relativt stora så är deras empiriska dödlighetsintensitet väldigt ojämn (se figurerna i avsnitt 3.2). Branschgemensamma initiativ såsom [5] är viktiga för att ge ännu större underlag i form av försäkringsbestånd och därmed säkrare skattningar.

De modeller som beskrivs i avsnitt 3.1.1 har sina styrkor och svagheter. Lee-Cartermodellen som ligger till grund för vår dödlighetsmodellering är baserad på Sveriges befolkning. Det har tidigare visat sig att denna dynamiska modell har varit bra på att uppskatta dödligheten för befolkningarna i en rad länder. Trots detta måste parametrarna i modellen utjämnas för att få någotsånär tillförlitligt utseende. Trenden i modellen är väldigt svår att hantera, och vi handskas med frågor såsom:

Hur långt tillbaka i tiden skall vi gå för att få ett hum om hur trenden i dödlighet ser ut?

Hur långt fram i tiden kan vi tänkas tro att denna trend håller i sig?

Kommer medellivslängden fortsätta öka såsom i figur 1.1-1 eller kommer den rent av att avstanna?

De svar vi kan ge på sådana här frågor är bara kvalificerade "gissningar". Enligt nya regler såsom aktsamhetsprincipen måste vi ta trenden i dödligheten i beaktning. En dynamisk modell med trend såsom Lee-Cartermodellen kan vara ett bra alternativ. Dock medför dynamiken och trenden att vi får ett utseende på dödlighetsintensiteten i framtiden som inte påminner om den idag (se till exempel figur 3.1-4). De utjämnningar som gjorts i [5] av Lee-Cartermodellens parametrar (se 3.1.2) kan också ifrågasättas. Vilka utjämnningar bör eller måste vi göra på ett så här tidigt stadium, eller ska vi vänta med alla utjämningsarna till vi har predikerat fram vår framtida dödlighet? Vi applicerar sedan denna modell med försäkringstagarnas dödlighet. Trots det stora försäkringsbeståndet har vi en "hackig" empirisk försäkringsdödlighet och kombinerat med Lee-Cartermodellen får vi en framtida dödlighet enligt figurerna 3.3-2 och 3.3-3. Indelningen efter födelsedecennier utjämnar dödligheten en aning.

Makehamanpassningen med linjär justering för höga åldrar utifrån denna variant av Lee-Cartermodellen tar (viss) hänsyn till trenden, och med en dos av handpåläggning, en dödlighetsintensitet där männens dödlighet hela tiden ligger över eller lika med kvinnans. Skillnaden i dödlighet mellan könen med denna anpassning är rätt konstant även i framtiden, och ligger över den aktuella skillnaden. Modellen ger dynamik i den meningen att det är lägre dödlighet ju senare du är född.

För båda dessa modeller kommer kvinnans förväntade livslängd även i framtiden vara längre än mannens. Med Makehamanpassningen kommer männens dödlighet överskattas och kvinnans underskattas gentemot Lee-Cartermodellen, vilket ger kortare förväntad livslängd för männen och längre för kvinnorna.

Vi måste få med trenden i dödligheten, men det är inte självklart vilken metod som är det bästa för detta ändamål. Vilken av dessa modeller som kommer att efterspegla verkligheten är svårt att säga. Den som lever får se!

Angående vidare studier i ämnet så skulle en känslighetsanalys på till exempel premien för en livränta eller en kapitalförsäkring med dessa dödlighetsmodeller kontra nuvarande dödlighetsantaganden vara nästa steg i analysen.

5 Teori

I detta kapitel har vi samlat grundläggande livförsäkringsmatematik och viktiga skattningar. Det mesta går att finna i [1] och [5].

5.1 Grundläggande livförsäkringsmatematik

Vi betraktar en x -årig individ och låter T_x vara dess återstående livslängd. Fördelningen för T_x anger vi med F_{T_x} . Vi definierar överlevelsefunktionen, sannolikheten för en x -årig individ att leva längre än t år till, enligt:

$$l_x(t) = 1 - F_{T_x}(t) = P(T_x > t), \quad t \geq 0 \quad (5.1-1)$$

Låt $l_0(t) = l(t)$, då får vi att:

$$l_x(t) = P(T_x > t) = P(T > x+t | T > x) = \frac{P(T > x+t)}{P(T > x)} = \frac{l(x+t)}{l(x)} \quad (5.1-2)$$

Antag nu att T_x är kontinuerligt, då kan vi definiera:

$$\mu_x = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{1}{dx} \frac{F(x+dx) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = -\frac{l'(x)}{l(x)} \quad (5.1-3)$$

där $\mu_x \geq 0$ för $x \geq 0$ och $F'(x) = f(x)$. Med detta resultat får vi att följande likhet gäller:

$$l(x) = \exp(\ln(l(x))) = \exp\left(-\int_0^x \mu_s ds\right). \quad (5.1-4)$$

Och vidare att:

$$q_x = 1 - \exp\left(-\int_x^{x+1} \mu_s ds\right). \quad (5.1-5)$$

Vi antar (se avsnitt 2.2) att μ_s är konstant på $(x, x+1)$, och sätter $\mu_s = \mu_{x+1/2}$, då:

$$\ln(1 - q_x) = -\int_x^{x+1} \mu_s ds \approx \mu_{x+1/2}. \quad (5.1-6)$$

Antag nu att q_x är litet, då ger MacLaurinutveckling (runt $x=0$) oss:

$$\ln(1 - q_x) \approx 0 - q_x - \frac{q_x^2}{2} = -q_x \frac{1 - q_x^2/4}{1 - q_x/2}$$

så att:

$$\mu_{x+1/2} \approx \frac{q_x}{1 - q_x/2} \quad \text{och} \quad q_x \approx \frac{\mu_{x+1/2}}{1 + \mu_{x+1/2}/2}. \quad (5.1-7, 5.1-8)$$

Betrakta en godtycklig x -årig individ med återstående livslängd T_x . Då gäller att:

$$l(x) = l(x-1) \cdot (1 - q_{x-1}) = \prod_{i=0}^{x-1} (1 - q_i), \quad x = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.1-9)$$

där $l(0) = 1$.

Detta kan enkelt visas med induktion.

Förväntad återstående livslängd får vi genom:

$$e_x = E[T_x] = \int_0^{\infty} t \cdot \left(\frac{-l'(x+t)}{l(x)} \right) dt = \frac{1}{l(x)} \cdot \left([t \cdot l(x+t)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 1 \cdot l(x+t) dt \right) = \int_0^{\infty} \frac{l(x+t)}{l(x)} dt. \quad (5.1-10)$$

5.1.1 Skattningar

Risktiden approximerar vi med:

$$E\hat{T}R_x(t) = \frac{N_{x-1}(t-1) + N_x(t)}{2} \quad (5.1-11)$$

Om enda möjligheten att lämna beståndet är att dö, och att inga nytilskott sker, gäller att:

$$N_{x-1}(t-1) = D_x(t) + N_x(t) \quad (5.1-12)$$

Under det förhållandet gäller att:

$$E\hat{T}R_x(t) = N_x(t) + \frac{D_x(t)}{2} \quad (5.1-13)$$

Vi låter $d_x(t)$ vara det observerade värdet av den stokastiska variabeln $D_x(t)$.

Vi kan numerisk mäta hur många som lämnar beståndet på något annat sätt än genom att avlida med kvoten:

$$\hat{\xi}_x(t) = \frac{N_{x-1}(t-1) - d_x(t)}{N_x(t)} \quad (5.1-14)$$

Skattning av $\mu_x(t)$ gör vi genom den centrala dödskvoten:

$$\hat{\mu}_x(t) = \frac{d_x(t)}{E\hat{T}R_x(t)}, \quad (5.1-15)$$

där $\hat{\mu}_0(t) = 0$ på grund av att $d_0(t) = 0$ för alla bestånden.

Vi kan skatta förväntad återstående livslängd med hjälp av:

$$e_x = \int_0^{\infty} \frac{l(x+s)}{l(x)} ds \approx \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{l(x+i)}{l(x)} \right] - \frac{1}{2} - \frac{\mu_x}{12}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (5.1-16)$$

Denna skattning är utförd med hjälp av trapetsregeln och Euler-MacLaurins summationsformel. För tillvägagångssätt hänvisar vi den intresserade läsaren till [1].

6 Källförteckning

- [1] Andersson, G. (2005), *Livförsäkringsmatematik*, Svenska Försäkringsföreningen, Stockholm, Sverige.
- [2] Booth, H., Hyndman, R., Tickle, L., Jong, P. (2006), Lee-Carter mortality forecasting: a multi-country comparison of variants and extensions, *Working Papers in Demography*, No. 101.
- [3] Brouhns N., Denouit, M., Vermunt, I. (2002), A Poisson log-bilinear approach to the construction of projected lifetables, *Mathematics & Economics*, **31**, 373-393.
- [4] Brouhns N., Denouit, M., van Keilegom, I. (2005), Bootstrapping the Poisson log-bilinear model for mortality forecasting, *Scandinavian Actuarial Journal*, No. 3/2005, 212-224, Taylor & Francis, Hampshire, England.
- [5] FTN (2007), *Försäkrade i Sverige – dödlighet och livslängder, Prognoser 2007-2050*, Försäkringstekniska Forskningsnämnden, Stockholm, Sverige.
- [6] *Human Mortality Database*, tillgänglig via www.mortality.org, University of California, Berkely, USA och Max Planck Institute for Demographic Research, Tyskland.
- [7] Lee, R. (2000), The Lee-Carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications, *North American Actuarial Journal*, **4**, 80-93, USA.
- [8] Lee, R, Carter, L. (1992), Modeling and forecasting U.S. mortality, *Journal of American Statistical Association*, **87**, 659-671, USA.
- [9] Lindbergson, M. (2001), Mortality along elderly in Sweden, 1988-1997, *Scandinavian Actuarial Journal*, No. 1/2001, 79-94, Taylor & Francis, Dublin, Ireland.
- [10] Lundström, H, Qvist, J. (2004), Mortality forecasting and trend shifts: an application of the Lee-Carter model to Swedish mortality Data, *International Statistical Review*, **72**, 37-50, The Netherlands.
- [11] Melnikov, A., Romaniuk, Y. (2006), Evaluating the performance of Gompertz, Makeham and Lee-Carter mortality models for risk management with unit-linked contracts, *Mathematics & Economics*, **39**, 310-329.
- [12] Pitacco, E. (2004), Survival models in a dynamic context: a survey, *Mathematics & Economics*, **35**, 279-298.
- [13] Statistiska Centralbyrån, (2004), Dödlighet efter utbildning, boende och civilstånd. Perioden 1986-2003, *Demografiska rapporter*, 2004:4, Stockholm, Sverige.
- [14] Statistiska Centralbyrån, (2006), Sveriges framtida befolkning 2006-2050, *Demografiska rapporter*, 2006:2, Stockholm, Sverige.