Matematisk statistik
Stockholms universitet

Den kommunala pensionsskulden, fondera för att möta kommande pensionsutbetalningar

Patrik Engström

Examensarbete 2007:7

ISSN 0282-9169

Postadress:

Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm
Sverige

Internet:

http://www.matematik.su.se/matstat

Matematisk statistik
Stockholms universitet
Examensarbete **2007:7**,
http://www.matematik.su.se/matstat

Den kommunala pensionsskulden, fondera för att möta kommande pensionsutbetalningar

Patrik Engström*

Maj 2007

Sammanfattning

Inom kommuner och landsting i Sverige finns utöver den allmänna pensionen en tjänstepension som bygger på kollektivavtal. Nuvärdet av den del som intjänats fram till 1998 utgör för närvarande cirka 300 miljarder kronor och redovisas som en ansvarsförbindelse. Det är väl känt att pensionsutbetalningarna kommer att öka framöver. För att skatteintäkterna i framtiden skall räcka till kommunernas övriga ansvarsområden är det hög tid att redan nu avsätta medel som senare kan tas i anspråk för att hålla pensionsutbetalningarna på en rimlig nivå.

Syftet med detta examensarbete är att visa några olika modeller för placering av medel som avsatts samt jämföra dessa. Vid ändring av parametrarna i en modell erhålls ett fall som sedan testats genom ett stort antal simuleringar. Man kan då jämföra hur de olika modellerna beter sig utifrån vissa förutsättningar och jämföra utfallet med respektive sparform då räntor och aktier varierar. Data från en representativ kommun har använts. Ett tidsförlopp om 30 år har ansetts rimligt och därför använts i studien. Vid start avsätts lämpligt belopp som placeras i en tillgångsportfölj. Efter tio år börjar man ta medel från portföljen för att de kommande 20 åren skjuta till pengar årligen och på så sätt hålla nere pensionsutbetalningarna.

Slutsatsen av denna studie är att bästa portföljen i relation till avkastning och risk borde bestå av huvudsakligen aktier från början. Ju närmare utbetalningarna man kommer bör portföljen göras mindre volatil med obligationer vilka köps då räntan är hög.

*E-post: pikem@swipnet.se. Handledare: Thomas Höglund.

Abstract

Within town districts and country councils in Sweden there is besides the common agreement of pension also an occupational pension based on a collective agreement. The part that has been earned until 1998 is at the moment roughly around 300 billion SEK. It is known that the payments of pensions will increase ahead. Therefore it is important for the town districts to depose money right at this moment so the future payments of pensions will not affect other responsibility areas.

The purpose of this paper has been to present some different ways one could invest in a portfolio and compare these strategies. The conclusion is that the portfolio should hold mostly stocks in the beginning. But the closer you get to the time of payments the portfolio should contain more bonds. These bonds should be bought when the interest is high and the portfolio will become less volatile.

Innehåll

1 Förord

Detta arbete är ett 20 poängs examensarbete i matematisk-statistik. Det har utförts på uppdrag av KPA-pension i Stockholm.
Problemställningen har vuxit fram och formulerats på initiativ av Tommy Kindberg, chefaktuarie på KPA, samt Anders Karlsson, aktuarie på KPA.

Jag vill särskilt tacka Tommy Kindberg som med entusiasm och visat intresse diskuterat arbetet med mig då jag haft frågor i ämnet men även annars uppmuntrat mig och gett mig en bredare syn på problemet. Även Anders Karlsson och Tuomo Virolainen, tidigare chefaktuarie på KPA, förtjänar att nämnas då de tålmodigt lyssnat till och svarat på mina frågor samt kommit med synpunkter och goda råd.

Slutligen vill jag tacka Thomas Höglund som varit min handledare vid matematiska institutionen, Stockholms Universitet.

2 Introduktion

2.1 Bakgrund

En pensionsskuld är ett åtagande om framtida pension. Alla kommuner och landsting har pensionsskulder som byggts upp genom åren. Fordringsägarna är anställda och före detta anställda som på ålderns höst ska få ut sin kommunala tjänstepension. Det är väl känt att kostnaderna för pensioner kommer att öka framöver då de stora årskullarna födda på 40-talet går i pension. För att klara kostnadsökningen krävs en långsiktig planering, annars riskerar pensionerna till tidigare anställda att tränga ut annan kommunal verksamhet.

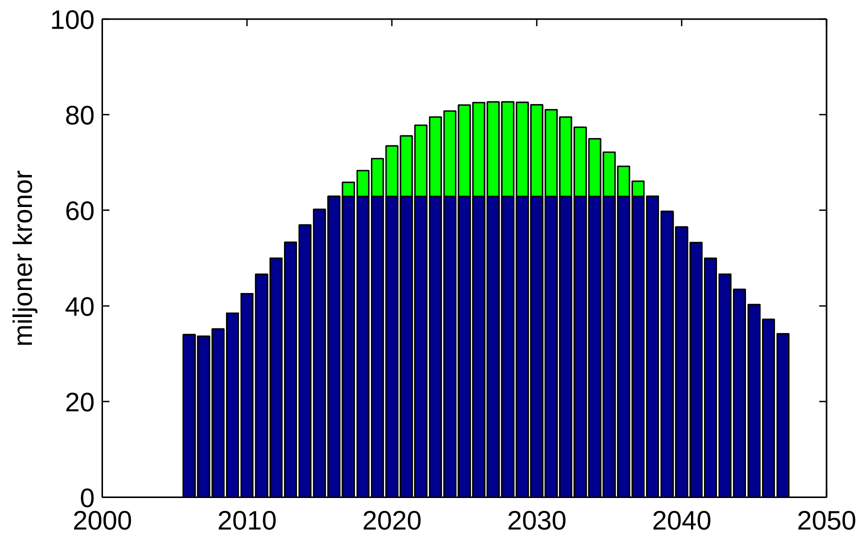
Utöver den allmänna pensionen från staten får anställda i kommuner och landsting tjänstepension som bygger på kollektivavtal. Fram till och med 1997 omfattades de anställda av pensionsavtalet PA-KL. Avtalet gav de anställda en tjänstepension i form av en viss procentsats av lönen, så kallad förmånsbestämd pension. De pensionsrätter som är intjänade t.o.m. 1997 uppgår för närvarande till cirka 300 miljarder kronor och redovisas som en ansvarsförbindelse. Pensionsrätter som intjänats från 1998 redovisas som en skuld i balansräkningen.

2.2 Syfte

Syftet med det här examensarbetet är att titta på olika möjligheter till placering av medel som avsatts för att täcka del av framtida pensionsutbetalningar. Eftersom pensionsutbetalningarna kommer att öka framöver så är det hög tid för kommunerna att avsätta medel redan nu för att senare (om ca 10 år) kunna skjuta till medel från en tillgångsportfölj (under kanske 20 års tid) och på så sätt hålla pensionsutbetalningarna på en rimlig nivå. Låt säga att "smärtgränsen" för en speciell kommun går vid 2016 års pensionsutbetalningar. Då vill man under de år där utbetalningarna är högre än år 2016 (exempelvis 2017-2038) skjuta till medel för att täcka de pensionsutbetalningar som ligger över 2016 års nivå. Detta illustreras av de ljusa topparna i fig1.

2.3 Målsättning

Målsättningen är att presentera några olika modeller som kan vara av intresse vid placering av medel avsatta för att täcka delar av framtida pensionsutbetalningar. Dessa modeller skall kunna jämföras vad gäller risk och avkastning samt hur stort belopp som bör avsättas för att avsatta medel skall räcka.



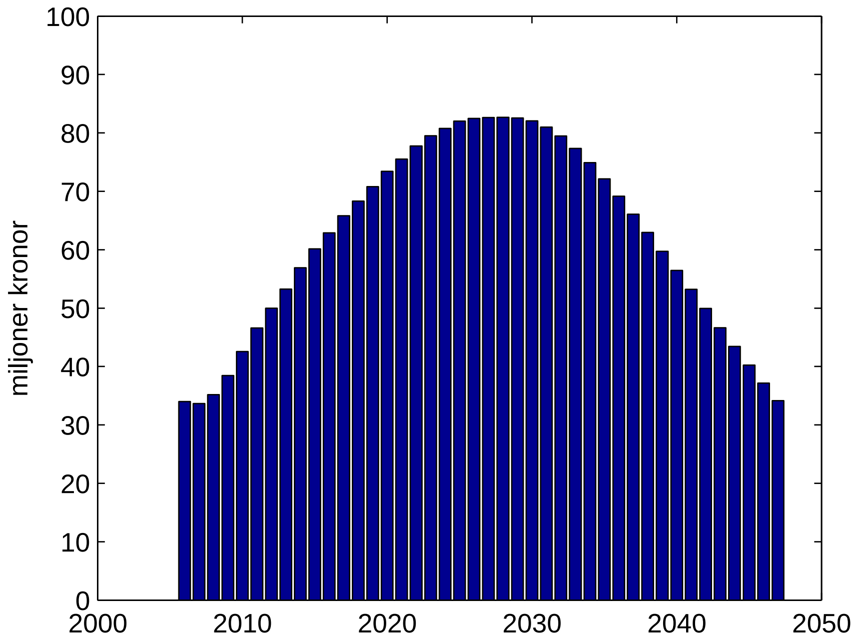
Figur 1: Framtida pensionsutbetalningar för en representativ kommun i löpande priser, där de grå staplarna illustrerar de pengar som skjuts till från en tillgångsportfölj.

3 Datamaterialet

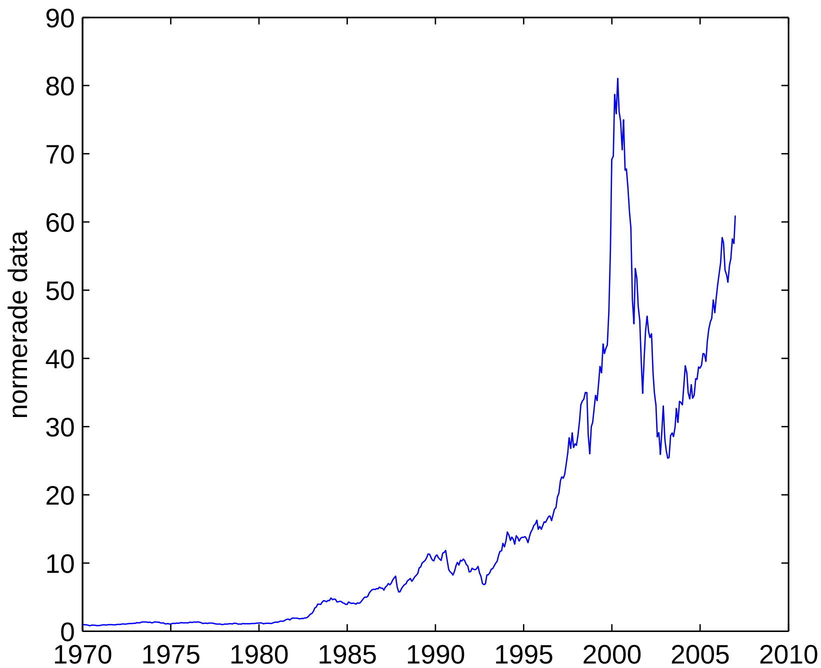
En del av det datamaterial som använts kommer från KPA-Pension och gäller framtida pensionsutbetalningar från en kommun mellan 2006-2047. Dels med “löpande priser” där man lagt på 2% inflation samt “fasta priser” där inget inflationsantagande gjorts. Summan av utbetalningarna mellan 2006-2037 (32år) uppgår till 2,1199 miljarder i löpande priser och 1,5259 miljarder i fasta priser. Plottar man de årliga utbetalningarna (se fig.2) syns tydligt hur pensionsutbetalningarna kommer att öka framöver.

Vad gäller aktiepriser har historiska månadsindex MSCI World Index samt MSCI Nordic Index, bägge mellan år 1970-2007, hämtats från Stockholms Universitetsbiblioteks databas. Dessa har bland annat använts för att skatta parametrarna till Black-Scholes modell för simulering av aktiepriser.

MSCI är en förkortning och står för: Morgan Stanley Capital International. Fig.3 visar utvecklingen för Nordiska index mellan 1970-2007 och fig.4 dito för World index. För att lättare kunna jämföra utvecklingen hos de båda aktieindex som använts har priserna i bilderna normerats så att båda startar på ett. Man kan då se att Nordiska index ökat mer än åttio gånger som mest, medan aktieindex för världsmarknaden som mest ökat drygt elva gånger under perioden 1970-2007.



Figur 2: Framtida pensionsutbetalningar för en representativ kommun, löpande priser.

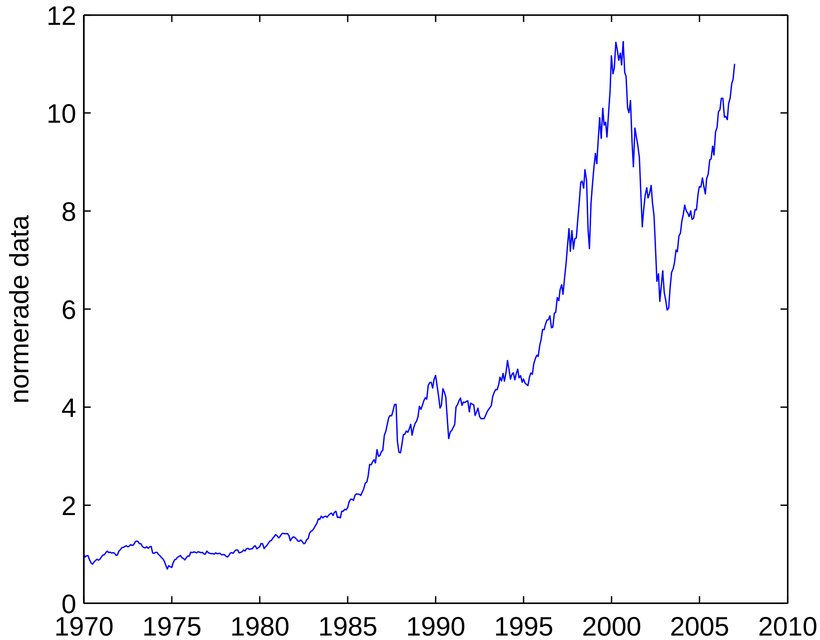


Figur 3: MSCI Nordic Index.

Historiska data för statsobligationernas räntor samt statsskuldväxlar (SSVX) har erhållits från Riksbanken. För statsobligationer har dagliga räntor mellan 1998-2007 använts. Man kan genom att titta på fig.5 få en uppfattning om hur räntorna varierat under denna period. Ränteutvecklingen illustreras också med hjälp av en tabell (tabell 1), där högsta respektive lägsta notering samt medelvärdet mellan dessa tagits med för respektive värdepapper.

	SSVX	STATSOBLIGATIONER								
Löptid	1år	2år	3år	4år	5år	6år	7år	8år	9år	10år
rmin	1,520	1,800	1,970	2,140	2,320	2,520	2,720	2,720	2,900	2,900
rmed	3,290	3,680	3,885	3,980	4,095	4,230	4,335	4,370	4,485	4,485
rmax	5,060	5,560	5,740	5,820	5,870	5,940	5,990	6,020	6,070	6,070

Tabell 1: Lägsta, högsta och medelränta för obligationer.



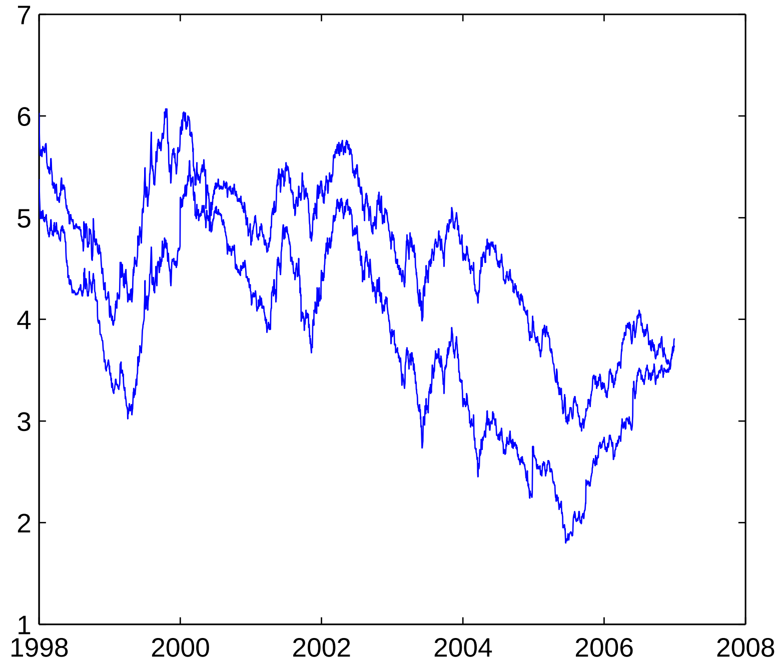
Figur 4: MSCI World Index.

4 Aktier

En aktie är en ägarandel i ett aktiebolag. Som aktieägare har man rätt till del i bolagets eventuella vinst samt utdelning. Aktier kan köpas och säljas fritt. Man kan som aktieägare få avkastning på sin investering dels genom att aktierna ökar i värde eller genom en årlig utdelning.

För att kunna välja vilka aktier som kan vara lämpliga att investera i är det viktigt att förstå vad som driver aktiekurserna. I grund och botten styr utbud och efterfrågan. Detta kan på kort sikt (1-3 år) leda till att en aktie rusar i höjden då många vill vara med på uppgången, liksom aktiemarknaden kan krascha då alla får panik. På längre sikt är det företagets utveckling som driver aktiekursen. Ett företag som är lönsamt och växer får förr eller senare en stark kursutveckling. Omvänt gäller att nya företag som inte visar vinst kan krascha oavsett hur populära de är.

Alla placeringsformer bär på någon form av risk. Jämfört med obligationer är aktier en relativt riskfylld sparform, särskilt på kort sikt. Aktiemarknadens historiska avkastning har varit ungefär 10% och risken mätt med standardavvikelsen ungefär 20%. Detta innebär att aktiemarknaden två år



Figur 5: Övre grafen visar ränteutvecklingen för GOVBOND10 och undre för GOVBOND2 mellan 1998-2007.

av tre avkastar mellan -10% och +30%. Tittar man på längre perioder (> 10 år) så verkar ändå aktier vara en sparform med hög avkastning i förhållande till rimligt låg risk. Men man bör också vara medveten om valutarisker när det gäller innehav av utländska aktier.

För att minimera risken i sitt aktiesparande kan man i första hand välja aktier i företag som är stabila, lågt värderade samt med en lång och lönsam bakgrund. I andra hand är det bra om man ser till att sprida riskerna i sin aktieportfölj, vilket innebär att man inte investerar alla sina pengar i ett företag eller en bransch.

5 Statsobligationer

Statsobligationer ges ut av Riksgäldskontoret. Löptiden är normalt mellan två och tolv år och förutom årliga ränteutbetalningar erhålls ett fast belopp på förfallodagen. De obligationer som inte ger årliga ränteutbetalningar, utan där placeraren får hela avkastningen på förfallodagen kallas nollkupongare. För att beräkna priset "B" på en nollkupongsobligation som ger 1 kr på förfallodagen har följande formel använts: B=$e^{-r \cdot T}$, där "T" betecknar löptiden och "r" räntan. Om man vill veta värdet på obligationen efter tiden t, (t < T) används: B=$e^{-r \cdot (T-t)}$.

6 Simulering

Den modell som enbart innehåller obligationer har testats i olika scenarion genom att variera räntorna.

För modellen med enbart aktier har MSCI World Index samt MSCI Nordic Index setts som två olika aktier vilka viktats på fyra olika sätt i portföljen. Vart och ett av dessa fyra sätt har sedan simulerats 10 000 gånger med olika scenarion för aktiepriserna. Kursutvecklingen för de "två aktierna" har simulerats fram med Black-Scholes modell för aktiepriser.

Black-Scholes simuleringsformel:
Låt S_t beteckna aktiepriset vid tidpunkt t.

$$S_{t+\Delta t} = S_t \cdot e^{\nu \cdot \Delta t + \sigma \cdot W_{\Delta t}},$$

där W_t är en Wienerprocess ($W_t \sim N(0,t)$), vilket innebär att ($W_{\Delta t}/\sqrt{\Delta t} \sim N(0,1)$).

Driften ν och volatiliteten σ har skattats utifrån de historiska indexkurser som använts (MSCI World Index 445mån, MSCI Nordic Index 445mån).

Sätt $X_k = ln(S_{k\Delta t}/S_{(k-1)\Delta t})$ för k=1,2,3,...,n. Då är $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ oberoende stokastiska variabler med väntevärde $\nu \cdot \Delta t$ och varians $\sigma^2 \cdot \Delta t$. Sätt $m = \nu \cdot \Delta t$ och $v = \sigma^2 \cdot \Delta t$.

Maximiskattningarna $\hat{m}$ och $\hat{v}$ ges då av $\hat{m} = (X_1, X_2, X_3, ..., X_n)/n, \hat{v} = \sum_{k=1}^{n}(X_k - \hat{m})^2/n$. Låt $\check{v} = n \cdot \hat{v}/(n-1)$. Då är $(n-1)\check{v}/v$ χ^2-fördelad med n-1 frihetsgrader och $\sqrt{n} \cdot (\hat{m} - m)/\sqrt{\check{v}}$ t-fördelad med n-1 frihetsgrader. Maximiskattningarna av ν och σ ges alltså av $\hat{\nu} = \hat{m}/\Delta t$, $\sigma^2 = \hat{v}/\Delta t$.

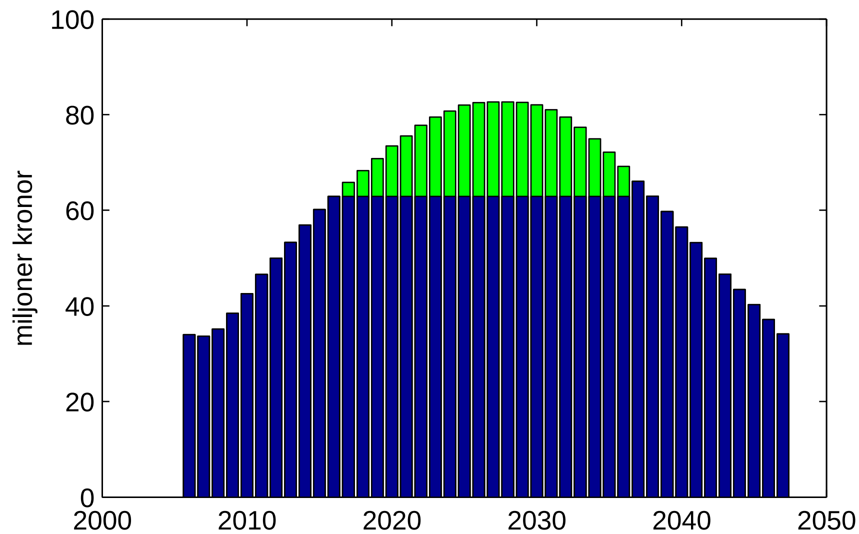
Vad gäller blandmodellerna, de som innehåller både aktier och obligationer, så har både räntorna varierats och vikterna till aktieportföljen. Sedan har 10 000 simuleringar gjorts för varje enskilt fall.

Man kan utveckla modellerna genom att införa godtyckliga tidpunkter för köp av obligationer och sedan simulera räntorna. En sådan modell blir mer komplicerad men med fördelen att den bättre beskriver verkligheten.

7 Modeller

Som tidigare nämnts är syftet att avsätta pengar i form av en tillgångsportfölj för att senare kunna ta medel från denna och på så sätt hålla pensionsutbetalningarna på en rimlig nivå under en viss tidsperiod då de annars skulle ha varit för höga. I modellerna är scenarion tänkta att sträcka sig över en trettioårsperiod. De första tio åren tas inga medel från tillgångsportföljen. Sedan tas årligen de belopp som krävs från portföljen för att de sista tjugo åren hålla pensionsutbetalningarna på en konstant nivå. När det gäller att hitta ett lämpligt startvärde “V0” på tillgångsportföljen har summan av de utbetalningar som skall finansieras av portföljen “D” beräknats. I vårt fall är denna summa: D=282 670 000kr, och illustreras av de grå staplarna i fig.6. Startvärdet på portföljen bör ej vara lägre än 70% av D, där D är framräknat med antagande om 2% inflation. Tar man ett lägre ingångsbelopp till portföljen ökar sannolikheten att pengarna inte räcker till de utbetalningar man hade för avsikt att täcka.

Avkastningen “K” har beräknats genom att ta det belopp man har kvar efter trettio år då samtliga utbetalningar är gjorda “V(30)” och sedan dela detta resultat med ingångsbeloppet V0, d.v.s. $K = V(30)/V0$. Detta är inte den traditionella definitionen av avkastning men fördelen blir den att negativa värden på K betyder att pengarna inte räckte ända fram till skillnad från den normala definitionen på K där ett värde mellan minus ett och noll betyder att det faktiskt finns pengar kvar. Om vi får en avkastning K=0 så räckte pengarna precis. Är avkastningen negativ så har pengarna tagit slut innan alla utbetalningar gjorts. Om däremot avkastningen K är positiv



Figur 6: Framtida pensionsutbetalningar, löpande priser,
för en representativ kommun.

så anger den hur stor summa pengar som finns kvar, när samtliga utbetalningar är gjorda, i förhållande till ingångsbeloppet V0. En avkastning K=0,5 innebär till exempel att det fins 50% av V0 kvar och en avkastning K=1,5 att vi har 1,5 gånger V0 kvar då samtliga utbetalningar är avklarade.

För att lättare kunna avgöra hur de olika modellerna kan skilja sig åt i fråga om avkastningen så har förutom medelavkastningen även ett 95% ensidigt prediktionsintervall tagits med. Detta intervall har tagits fram genom att man plockar ut den 501 lägsta observationen vid 10 000 simuleringar. Intervallet [obs.nr. 501] talar alltå om för oss att avkastningen med 95% sannolikhet inte kommer att vara lägre än detta värde. Så länge värdet är större än eller lika med noll har pengarna räckt ända fram.

Tre olika modeller har använts. Ena modellen har enbart aktier i tillgångsportföljen, den andra enbart obligationer och den tredje är en blandmodell med både aktier och obligationer i portföljen. Samtliga modeller har varierats på ett antal sätt utifrån de parametrar som ingår i respektive modell. För de modeller där aktier ingår har 10 000 simuleringar gjorts för vart och ett av de scenarion som betraktats. Hos de modeller som innehåller obligationer har räntorna hos dessa varierats. Aktieportföljen har antagits innehålla två typer av aktier där den ena bygger på MSCI Nordic Index och den andra MSCI World Index. Vikterna har kallats w1 för andel nordiska aktier och w2 för andel aktier på världsmarknaden (w1+w2=1). Räntorna för SSVX och statsobligationer har valts till en hög samt en låg. Dessa har tagits fram genom att titta på historiska dagsräntor mellan 1998-2007 där helt enkelt det högsta respektive lägsta värdet på räntan för respektive värdepapper valts ut.

7.1 Endast aktier

Hela startbelopet V0 placeras i en aktieportfölj som de första tio åren lämnas orörd. Därefter tas medel årligen från portföljen för att täcka de summor som man från början bestämt sig för att skjuta till.
Tillgångsportföljen antas bestå av två aktier med vikterna w1 och w2 som beskrivs ovan. Priserna på respektive aktie tas fram genom simuleringar med Black-Scholes (se under Simulering) där parametrarna för simuleringsmodellen skattas utifrån de historiska index som använts, MSCI Nordic samt MSCI World mellan 1970-2007.

Portföljen har viktats på tre olika sätt och 10 000 simuleringar har gjorts för vart och ett av de tre olika fall med olika vikter som beaktats. Först har portföljen försetts med endast nordiska aktier (w1=1 & w2=0), sedan tvärtom med enbart aktier på världsmarknaden (w1=0 & w2=1). I det sista fallet har ett mer fördelaktigt sätt att vikta portföljen valts, där andel nordiska aktier utgör 70% och andel aktier på världsmarknaden resterande 30% av portföljen (w1=0,7 & w2=0,3). Detta sista fall då man ändrat vikterna till portföljens aktier visade sig ge bättre resultat i form av relativt hög avkastning samt en låg sannolikhet att pengarna inte skulle räcka.

7.1.1 w1=1 & w2=0

(enbart nordiska aktier)

Om man tittar på fig.3 där kursutvecklingen för MSCI Nordic Index mellan 1970-2007 visas, så syns tydligt att värdet på aktierna stigit mycket mer än motsvarande för världsindex, fig.4. Men man ser också att svängningarna är större, vilket är tydligast efter mars år 2000 då aktiekurserna tog en rejäl djupdykning. Att vår aktieportfölj får vara orörd under de första tio åren gör att den med stor sannolikhet hinner återhämta sig om man skulle ha oturen att köpa aktierna precis innan en kraftig nedgång. Efter 10 000 simuleringar fås en medelavkastning på drygt 39 (vilket är mycket högt) och sannolikheten att pengarna inte räcker blev 1,46%. Med 95% sannolikhet kommer avkastningen inte att vara lägre än [1,6031]. Detta innebär att vi med 95% sannolikhet kommer att ha minst 1,6 gånger startbeloppet V0 kvar då samtliga utbetalningar är gjorda. Att medelavkastningen skiljer sig så pass mycket från värdet i prediktionsintervallet betyder att portföljen kan variera kraftigt (volatil portfölj).

7.1.2 w1=0 & w2=1

(enbart aktier på världsmarknaden)

Även då inga hänsyn tagits till valutarisker så är kursutvecklingen för detta index så pass dålig i början att medelavkastningen efter 10 000 simuleringar endast är 5,6783 jämfört med de dryga 39 som vi fick i fallet med enbart nordiska aktier. Sannolikheten att pengarna inte skulle räcka är hela 5,3% och ett 95% ensidigt prediktionsintervall ges av [-0,0503]. Det negativa värdet i intervallet betyder att pengarna inte skulle ha räckt om avkastningen blivit just denna.

7.1.3 w1=0,7 & w2=0,3

(70% nordiska & 30% på världsmarknaden)

Nu har vi en portfölj som är betydligt stabilare samtidigt som avkastningarna är generellt höga. Medelavkastningen är hela 23,5236 och sannolikheten att pengarna inte skall räcka endast 0,2%. Det kan dock vara av intresse att titta på ett 95% ensidigt prediktionsintervall som ges av [2,6574]. Vi bör alltså med 95% sannolikhet ha minst 2,66 gånger ingångsbeloppet V0 kvar då alla utbetalningar gjorts.

	lägre ensidigt 95% prediktionsintervall	medel-avkastning	Sh
w1=1 w2=0	1,6031	39,0947	0,0146
w1=0 w2=1	-0,0503	5,6783	0,0530 (5,3%)
w1=0,7 w2=0,3	2,6574	23,5236	0,0020 (0,2%)

Tabell 2: Enbart aktier.

8 Blandmodeller (aktier & obligationer)

Aktierna behandlas precis som under rubriken “Enbart aktier” medan räntorna för SSVX och statsobligationer har tagits från historiska data erhållna från Riksbanken. Lägsta respektive högsta ränta har plockats fram för respektive nollkupongsobligation (löptider 2-10 år) baserat på dagsräntorna mellan 1998-2007, liknande har gjorts för SSVX (löptid 1 år).

8.1 Blandmodell 1

(statsobligationer med 10 års löptid köps under 20 år, resten i aktier)

Vi börjar med att titta på en modell där statsobligationer med löptid 10 år köps årligen under de första 20 åren. Vid start (t=0) köps alltså statsobligationer med 10 års löptid för att täcka den del av pensionsutbetalningarna man vill skjuta till om 10 år, resterande del av ingångsbeloppet V0 läggs i en aktieportfölj. Ett år senare tas pengar ur aktieportföljen för att statsobligationer med löptid 10 år vilka skall bekosta den del av pensionsutbetalningarna man vill skjuta till om 10 år (11 år efter start). Detta förfarande upprepas i 20 års tid. Då har man säkrat de utbetalningar som planerades i början och de pengar som eventuellt finns kvar i aktieportföljen ses som en bonus vilken i vår modell lämnas orörd de sista tio åren. Att aktieportföljen lämnas orörd efter de att samtliga utbetalningar säkerställts med köp av statsobligationer är endast för att vi skall kunna jämföra avkastningen med de andra modeller som ingår i studien.

8.1.1 w1=1 & w2=0, låg ränta

Detta fall ger en hög medelavkastning på drygt 29, men också en relativt hög sannolikhet , 3,02%, att pengarna inte räcker. Ett lägre 95% ensidigt prediktionsintervall ges av [0,5439] och säger oss att vi med 95% sannolikhet kommer att ha minst 54% av startsumman V0 kvar då samtliga utbetalningar gjorts.Det är med nadra ord en relativt hög risk med enbart nordiska aktier i portföljen om räntan är genomgående låg. Eftersom pengar tas löpande från aktieportföljen från början så kan en låg kursutveckling från start kombinerat med låg ränta vara förödande för portföljen framtida utveckling.

8.1.2 w1=1 & w2=0, hög ränta

Om räntan däremot skulle vara genomgående hög behöver mindre belopp tas från aktieportföljen. Detta får till följd att sannolikheten för att pengarna inte skulle räcka sjunker till 0,54% vilket är betydligt bättre än för det förra fallet med låg ränta. Medelavkastningen är drygt 33 och med en sannolikhet på 95% kommer det att finnas minst 1,8 gånger ingångsbeloppet V0 kvar då alla utbetalningar gjorts.

8.1.3 w1=0 & w2=1, låg ränta

För detta fall är sannolikheten att pengarna inte räcker hela 6,04%. Medelavkastningen får anses som låg med sina 3,9174 och ett lägre ensidigt 95% prediktionsintervall ges av [-0,0919]. Dessa dåliga resultat beror på en låg kursutveckling för aktieportföljen i början. Jämfört med de andra fall för samtliga modeller som vi tittar på så är detta ett av de “värsta” scenarion man kan tänka sig.

8.1.4 w1=0 & w2=1, hög ränta

Den höga räntan gör att sannolikheten för att pengarna inte skall räcka sjunker till relativt låga 0,9% och medelavkastningen stiger till 5,1013. Med 95% sannolikhet kommer vi att ha kvar minst 56% av V0 när samtliga utbetalningar har gjorts.

8.1.5 w1=0,7 & w2=0,3, låg ränta

Med 70% nordiska aktier och 30% aktier på världsmarknaden får vi en väl viktad aktieportfölj med bra spridning (vi använder ju index). Detta gör den låga räntan till trots att sannoliketen för att pengarna inte skall räcka är relativt låga 0,64%. Avkastningen kommer med 95% sannolikhet att vara minst 1,5968. Medelavkastningen är med sina 17,0754 relativt hög och innebär att om det scenariot skulle inträffa får vi hela 17 gånger ingånsvärdet V0 kvar efter det att samtliga utbetalningar är gjorda.

8.1.6 w1=0,7 & w2=0,3, hög ränta

Detta fall får anses som ett av de mest fördelaktiga bland de vi skall titta på. Sannolikheten att pengarna skulle ta slut innan samtliga utbetalningar blivat gjorda är låga 0,05% och medelavkastningen hela 20,1926. Att avkastningen med 95% sannolikhet kommer att vara minst 2,7029 får väl anses som ett attraktivt scenario. Man bör dock komma ihåg att man inte själv kan välja vilket scenario som skall inträffa i verkligheten.

8.2 Blandmodell 2

(Statsobligationer med löptid 10 år köps vid start, resten av V0 i en aktieportfölj. När dessa obligationer faller ut köps SSVX samt statsobligationer med löptider 1-10 år och sedan samma sak efter 20 år.)

Vid start placeras en summa i statsobligationer med löptid 10 år och resterande del av V0 i en aktieportfölj. Det belopp som placeras i statsobligationer från början är tänkt att räcka till de utbetalningar man har för avsikt att skjuta till under perioden 10-20 år efter start. När dessa obligationer faller ut köps SSVX samt statsobligationer med löptider 1-10 år för att säkra utbetalningarna under den kommande tioårsperioden. Eventuellt överskott läggs till aktieportföljen, liksom pengar tas från aktieportföljen om så behövs. Tjugo år efter start tas pengar från aktieportföljen för att

	lägre ensidigt 95% prediktionsintervall	medel-avkastning	Sh
w1=1 w2=0 låg ränta	0,5439	29,2676	0,0302
w1=1 w2=0 hög ränta	1,8010	33,0787	0,0054
w1=0 w2=1 låg ränta	-0,0919	3,9174	0,0604 (6,04%)
w1=0 w2=1 hög ränta	0,5603	5,1013	0,0090
w1=0,7 w2=0,3 låg ränta	1,5968	17,0754	0,0064
w1=0,7 w2=0,3 hög ränta	2,7049	20,1926	0,0005 (0,05%)

Tabell 3: Blandmodell 1.

köpa SSVX samt statsobligationer med löptider 1-10 år. Nu har vi säkrat utbetalningarna för de sista tio åren och de pengar som eventuellt finns kvar i aktieportföljen ses som en bonus vilken i denna modell lämnas orörd tills samtliga utbetalningar är gjorda.

8.2.1 w1=1 & w2=0, låg ränta

En medelavkastning på drygt 19 är relativt högt, men det är också sannolikheten att pengarna inte skall räcka som hamnade på 2,12%. Detta fall beskriver en aktieportfölj med hög volatilitet, vilket innebär att avkastninarna kan variera kraftigt mellan olika scenarion. Med 95% sannolikhet kommer vi dock att ha minst 65% kvar av ingångsbeloppet V0 när samtliga utbetalningar gjorts.

8.2.2 w1=1 & w2=0, hög ränta

Hög ränta innebär att mer pengar hamnar i aktieportföljen från början vilket vid simuleringarna ger en bättre avkastning samt en lägre sannolikhet att pengarna inte räcker än i föregående fall. Sannolikheten att pengarna inte skall räcka är här 0,91% och medelavkastningen nästan 26. Med 95% sannolikhet kommer det åtminstone att finnas 1,2469 gånger startbeloppet

V0 kvar då alla utbetalningar är gjorda.

8.2.3 w1=0 & w2=1, låg ränta

Världsindex ger oss en portfölj som varierar mindre men där avkastningarn tyvärr är mycket låga. Så även om portföljen är stabilare är detta ett uselt fall med en medelavkastning på låga 2,7031 och en sannolikhet att pengarna inte räcker på höga 7,99%. Med 95% sannolikhet kommer avkastningen att vara större än -0,1699. Men då avståndet till medelavkastningen är relativt liten är risken stor att att pengarna inte kommer att räcka eller att endast lite finns kvar. Detta fall är det absolut värsta i studien.

8.2.4 w1=0 & w2=1, hög ränta

Den höga räntan gör att sannolikheten för att pengarna inte skall räcka sjunker rejält, från 7,99% till 2,6%, jämfört med föregående fall. Medelavkastningen är fortfarande relativt låg med sina 3,842 och ett lägre ensidigt 95% prediktionsintervall ges av [0,2426].

8.2.5 w1=0,7 & w2=0,3, låg ränta

I detta fall har vi en mer attraktiv aktieportfölj där medelavkastningen hamnade på 12,3869 och sannolikheten att pengarna inte skall räcka blev låga 0,71% den låga räntan till trots. Med 95% sannolikhet kommer vi i detta fall att ha minst 1,1619 gånger ingångsbeloppet V0 kvar då alla utbetalningar är gjorda.

8.2.6 w1=0,7 & w2=0,3, hög ränta

Att ha en bra aktieportfölj samtidigt som räntan är hög ger givetvis attraktiva scenarion. Efter 10 000 simuleringar är sannolikheten att pengarna inte räcker låga 0,06% och medelavkastningen hela 16,1284. Tittar vi på ett lägre ensidigt 95% prediktionsintervall, [2,0225], så ser vi att det fortfarande är ganska långt mellan detta värde och medelavkastningen vilket betyder att avkastningen kan variera kraftigt. Vi kommer dock att med 95% sannolikhet ha kvar minst dubbelt så mycket pengar än vad som avsattes i början när samtliga utbetalningar gjorts.

9 Endast obligationer

I den här modellen placeras hela ingångsbeloppet V0 i statsobligationer. Detta får till följd att endast räntorna kommer att påverka de olika fall som

	lägre ensidigt 95% prediktionsintervall	medel-avkastning	Sh
w1=1 w2=0 låg ränta	0,6453	19,4331	0,0212
w1=1 w2=0 hög ränta	1,2469	25,9312	0,0091
w1=0 w2=1 låg ränta	-0,1699	2,7031	0,0799 (7,99%)
w1=0 w2=1 hög ränta	0,2426	3,8420	0,0260
w1=0,7 w2=0,3 låg ränta	1,1619	12,3869	0,0071
w1=0,7 w2=0,3 hög ränta	2,0225	16,1284	0,0006 (0,06%)

Tabell 4: Blandmodell 2.

vi kommer att titta på och således görs inga simuleringar som för de modeller vilka innehåller aktiepriser.

En stor fördel med denna modell är dess stabilitet vilket bland annat visar sig i att sanolikheten för att pengarna inte skall räcka är noll i samtliga fall, givet att ingångsbeloppet V0 är samma som för de andra modellerna. Pengarna kommer således att räcka helt säkert förutsatt att räntorna inte blir mycket lägre i framtiden än för de historiska data som använts här.

Nackdelen med enbart obligationer i modellen är den låga avkastningen som i det mest gynnsamma fallet endast blev 3,6209. För de modeller som innehåller aktier var medelavkastningen lägre än detta i endast ett fall av femton. De räntor som använts har tagits från historiska dagskurser mellan 1998-2007 för respektive statsobligation (data erhållna från Riksbanken). Den lägsta och högsta räntan för respektive värdepapper har valts ut och använts för att skapa de olika scenarion som presenteras.

9.1 Obligationsmodell 1

Vid start köps statsobligationer med löptiden 10 år för hela ingångsbeloppet V0. På förfallodagen för dessa köps SSVX och statsobligationer med löptider

1-10 år, där de med löptider 1-9 år är tänkta att räcka till de utbetalningar som man avser att skjuta till under den kommande nioårsperioden. Resterande kapital placeras i statsobligationer med löptid 10 år. När denna andra tioårsperiod är till ända upprepas det scenario där vi köpte SSVX och statsobligationer med löptider 1-10 år för att nu täcka de utbetalningar som vi har för avsikt att skjuta till under den sista tioårsperioden. Det köps alltså obligationer vid tre olika tillfällen vilket innebär att vi har åtta olika scenarion om vi varierar räntan mellan låg och hög vid varje köptillfälle.

Givetvis blir avkastningen högst om räntan är hög vid samtliga köptillfällen och lägst om räntan är genomgående låg. Mer intressant är kanske då att titta på de scenarion där räntan inte är lika vid samtliga köptillfällen. Som exempel kan vi jämföra avkastningen för det fall där räntan är låg vid första köptillfället men hög vid de två sista (L,H,H), med det fall där räntan är hög vid första köptillfället men låg vid detvå sista (H,L,L). Avkastningen blir i det första fallet 1,9425 och för det andra 1,3853 vilket visar hur pass mycket avkastningen kan variera beroende på när räntan är hög respektive låg.

För att få en bättre överblick presenteras samtliga åtta scenarion i en tabell (tabell 5). Stort "H" betecknar hög ränta liksom stort "L" betecknar låg ränta. Nämnas kan också att i det "sämsta" fallet så finns ändå drygt 49% av ingångsbeloppet V0 kvar efter det att alla utbetalningar gjorts.

Avkastningen "K" i de åtta fall där räntan varierats mellan låg och hög.

räntor	H,H,H	H,H,L	H,L,H	L,H,H
K	3,6209	2,5032	2,0859	1,9425
räntor	H,L,L	L,H,L	L,L,H	L,L,L
K	1,3853	1,2808	0,8635	0,4949

Tabell 5: Obligationsmodell 1.

9.2 Obligationsmodell 2

För att få en bättre uppfattning om hur avkastningen påverkas av att räntorna varierar delas den första tioårsperioden upp i två femårsperioder. Detta för att kunna se om det lönar sig att köpa statsobligationer med löptid fem år istället för tio och sedan hoppas på att räntan går upp till nästa köptillfälle. Den enda skillnaden mot föregående modell ("obligationsmodell 1") är således att man vid start köper statsobligationer med löptid fem år istället för tio och fem år efter start köper obligationer med löptid fem år igen för att sedan göra precis som i den förra modellen.

Obligationer köps nu vid fyra olika tillfällen istället för tre och vi för då sexton olika fall om räntan vid varje köptillfälle varieras mellan låg och hög. Eftersom statsobligationer med löptid fem år ger en lägre ränta än de med löptid tio år, så ger ett scenario med samma ränta vid samtliga köptillfällen en sämre avkastning i den här modellen jämfört med den förra. Är däremot räntan låg vid första köptillfället och hög vid andra så blir avkastningen högre för denna modell. Samtliga sexton scenarion presenteras i en tabell (tabell 6.) för att ge en lättare överblick.

Avkastningen "K" i de sexton fall där räntan varierats mellan låg och hög.

räntor	H,H,H,H	H,L,H,H	L,H,H,H	H,H,H,L
K	3,4958	2,5136	2,5136	2,4141
räntor	H,H,L,H	L,H,H,L	H,L,H,L	L,L,H,H
K	1,9968	1,6968	1,6968	1,6889
räntor	H,H,L,L	L,H,L,H	H,L,L,H	L,L,H,L
K	1,3204	1,2795	1,2795	1,0961
räntor	L,H,L,L	H,L,L,L	L,L,L,H	L,L,L,L
K	0,7979	0,7979	0,6788	0,3631

Tabell 6: Obligationsmodell 2.

10 Diskussion

Den stora frågan när man diskuterar placering av de pengar man vill avsätta borde vara om man skall ha aktier eller ej i sitt sparande. Om vi utgår från en aktieportfölj som är rätt viktad och med en bra spridning bland aktierna så verkar det ändå som en bättre lösning med helt eller delvis aktier i tillgångsportföljen än enbart obligationer. Sannolikheten att pengarna inte skall räcka är förvisso större än noll, men ändå så pass liten att med tanke på avkastningen vore en tillgångsportfölj innehållande aktier ett mer attraktivt alternativ.

Nästa fråga blir då om man skall välja ett sparande med enbart aktier eller om man skall ha både aktier och obligationer. Vi antar som tidigare att aktieportföljen är rätt viktad och med en bra spridning. Nu är det räntorna för statsobligationer som spelar en stor roll för hur portföljen kommer att utvecklas. Om räntan är genomgående låg så blir sannolikheten att pengarna inte skall räcka lite högre för en portfölj med både aktier och obligationer än en med enbart aktier. Är däremot räntan hög vid varje köp av obligationer så får vi en stabilare portfölj om vi blandar aktier och obligationer. Sannolikheten att pengarna inte skall räcka ända fram är för en sådan portfölj mycket lägre än en med enbart aktier.

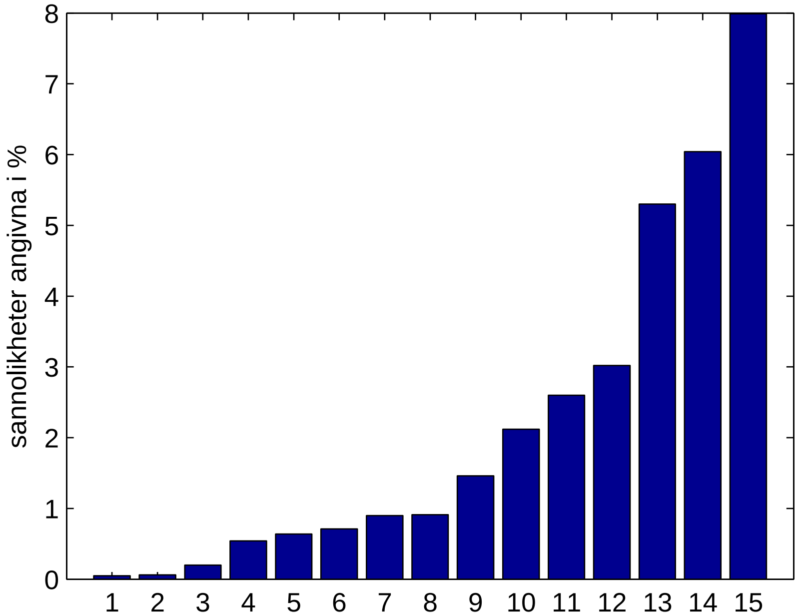
Det är rimligt och anta att räntan kommer vara både hög och låg under den tid som tillgångsportföljen skall "arbeta". Man kan då välja att köpa statsobligationer endast när räntan är hög och vänta om räntan är låg. De fixa tidpunkter för köp av obligationer som använts i studien är inget man bör ta hänsyn till i verkligheten. Obligationsmodellerna i studien visar hur fördelaktigt det är att vänta till rätt tillfälle med köp av obligationer.

Väljer man nu en tillgångsportfölj med både aktier och obligationer så kan man få en stabil portfölj med hög avkastning. Skulle man dock ha oturen att köpa aktierna precis innan en rejäl nedgång så kan det ta ett tag innan portföljen "återhämtat" sig. Som exempel kan vi titta på Stockholmsbörsens kraftiga fall i början av år 2000. När den började falla till följd av att IT-bubblan sprack så tog det sju år innan index var tillbaka på samma nivå igen.

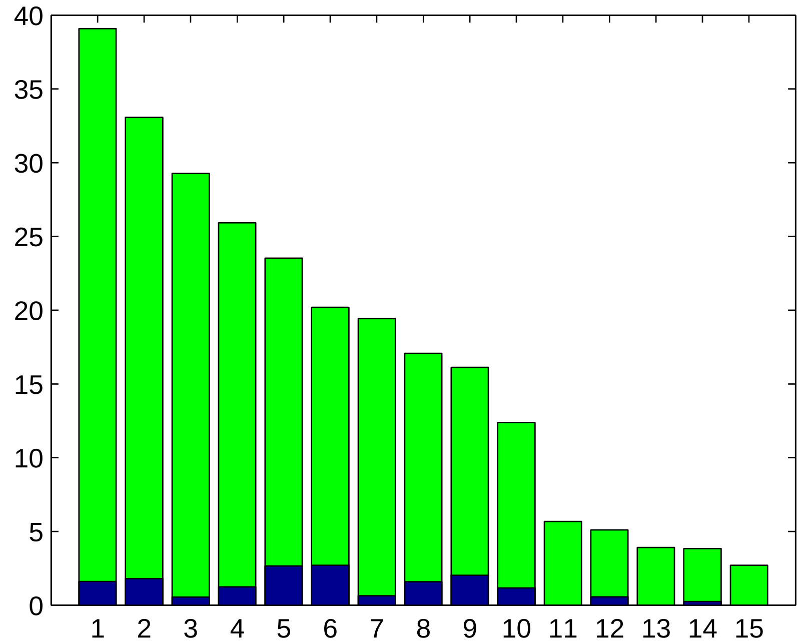
Med de långa scenarion på tjugo till trettio år som bör vara aktuella när en kommun avsätter medel för framtida pensionsutbetalningar är det nog ändå en fördel med aktier i portföljen. Mot slutet bör man dock ha en så pass stor del obligationer i portföljen att utbetalningarna är säkrade även om aktierna skulle sjunka kraftigt i värde.

Ingångsbeloppet V0 har ju i studien varit väl tilltaget för att pengarna med en mycket stor sannolikhet skall räcka. Där kan man diskutera om ett mindre belopp kan vara av intresse i verkligheten. Allt hänger på hur stor risk man är beredd att ta.

För att lättare kunna jämföra de olika modeller som innehåller aktier har två figurer valts att illustrera några intressanta samband. I fig.7 ses sannolikheten att pengarna inte skall räcka. De mest attraktiva scenariots sannolikhet har lagts längts till höger i figuren och det minst attraktiva, d.v.s. den högsta sannolikheten har placerats längst till vänster. Medelavkastningen visas i fig.8 där också värdet från ett lägre ensidigt 95% prediktionsintervall finns med. Ju mindre avståndet är mellan de mörka och ljusa staplarna i fig.8 ju stabilare är modellen. En så hög mörk stapel som möjligt anger ju att man troligen får mer pengar kvar när samtliga utbetalningar gjorts.



Figur 7: Sannolikheten att pengarna inte räcker:
1. Blandmodell 1: hög ränta, w1=0.7, w2=0.3
2. Blandmodell 2: hög ränta, w1=0.7, w2=0.3
3. Enbart aktier: w1=0.7, w2=0.3
4. Blandmodell 1: hög ränta, w1=1, w2=0
5. Blandmodell 1: låg ränta, w1=0.7, w2=0.3
6. Blandmodell 2: låg ränta, w1=0.7, w2=0.3
7. Blandmodell 1: hög ränta, w1=0, w2=1
8. Blandmodell 2: hög ränta, w1=1, w2=0
9. Enbart aktier: w1=1, w2=0
10. Blandmodell 2: låg ränta, w1=1, w2=0
11. Blandmodell 2: hög ränta, w1=0, w2=1
12. Blandmodell 1: låg ränta, w1=1, w2=0
13. Enbart aktier: w1=0, w2=1
14. Blandmodell 1: låg ränta, w1=0, w2=1
15. Blandmodell 2: låg ränta, w1=0, w2=1



Figur 8: Ljusa staplar = medelavkastningen:
Mörka staplar = lägre ensidigt 95% prediktionsintervall:
1. Enbart aktier: w1=1, w2=0
2. Blandmodell 1: hög ränta, w1=1, w2=0
3. Blandmodell 1: låg ränta, w1=1, w2=0
4. Blandmodell 2: hög ränta, w1=1, w2=0
5. Enbart aktier: w1=0.7, w2=0.3
6. Blandmodell 1: hög ränta, w1=0.7, w2=0.3
7. Blandmodell 2: låg ränta, w1=1, w2=0
8. Blandmodell 1: låg ränta, w1=0.7, w2=0.3
9. Blandmodell 2: hög ränta, w1=0.7, w2=0.3
10. Blandmodell 2: låg ränta, w1=0.7, w2=0.3
11. Enbart aktier: w1=0, w2=1
12. Blandmodell 1: hög ränta, w1=0, w2=1
13. Blandmodell 1: låg ränta, w1=0, w2=1
14. Blandmodell 2: hög ränta, w1=0, w2=1
15. Blandmodell 2: låg ränta, w1=0, w2=1

Referenser

[1] Capiński Marek & Zastawniak Tomasz: Mathematics for Finance, An introduction to Financial Engineering, ISBN: 1-85233-330-8

[2] Edsberg Lennart: Användarhandledning för MATLAB version 6, NADA

[3] Höglund Thomas: Föreläsningsanteckningar i Finansmatematik I & II, Matematiska Institutionen vid Stockholms Universitet

[4] KPA-pension: Pensionsskulden i kommuner och landsting, Rapport från KPA-pension November 2005

[5] Luenberger David G.: Investment Science, ISBN: 0-19-510809-4

[6] Stockholms Universitetsbiblioteks databas: MSCI Nordic Index & MSCI World Index 1970-2007

[7] Finansinspektionen: www.fi.se

[8] Riksbanken: www.riksbanken.se

[9] Riksgäldskontoret: www.rgk.se

[10] Stockholmsbörsen: www.omxgroup.com

[11] Köpa aktier: www.köpa-aktier.se