

Matematisk statistik
Stockholms universitet

**Ornstein-Uhlenbeckprocessens
egenskaper vid modellering av finansiella
tidsserier**

Sandra Lundin

Examensarbete 2007:18

Postal address:

Matematisk statistik
Dept. of Mathematics
Stockholms universitet
SE-106 91 Stockholm
Sweden

Internet:

<http://www.math.su.se/matstat>



Matematisk statistik
Stockholms universitet
Examensarbete 2007:18,
<http://www.math.su.se/matstat>

Ornstein-Uhlenbeckprocessens egenskaper vid modellering av finansiella tidsserier

Sandra Lundin*

November 2007

Sammanfattning

Vid handel med finansiella derivat är det önskvärt att så långt som möjligt kunna förutsäga instrumentets framtida utveckling. Genom att analysera historiska data är det möjligt att anpassa en modell som mer eller mindre beskriver tidsseriens utveckling. I denna uppsats studeras Ornstein-Uhlenbeckprocessens egenskaper som modelleringsverktyg för räntor, valuta- och aktieindex. Det är sedan tidigare känt att räntor är sk mean-reverting, dvs tenderar att dra sig till ett långsiktigt medelvärde. OU-processen passar därför som väntat relativt bra för att modellera räntor men mindre bra för valutor och aktieindex. En nödvändig del i modellanpassningen är att skatta OU-processens tre parametrar. Detta har gjorts med maximum likelihoodmetoden. Då det konstaterats att en viss tidserie kan modelleras som en OU-process kan detta utnyttjas för att skapa en regelstyrd positionshantering för den aktuella tillgångsklassen. I detta examensarbete har detta gjorts genom att skapa en regel där två nyttofunktioner, total och riskjusterad avkastning, maximeras.

*Postal address: Matematisk statistik, Stockholms universitet, SE-106 91, Stockholm, Sweden. E-mail: lundin.sandra@gmail.com. Handledare: Anders Björkström

Abstract

When trading financial derivatives, it is desirable to be able to predict, as far as possible, the future development of an instrument. By analyzing historical data, it is possible to fit a model that more or less describes the development of the time series. In this thesis, we study the properties of the Ornstein-Uhlenbeck process as a tool for modelling interest rates, currency indices and stock indices. It is known that interest rates are mean-reverting, that is, they tend to return towards a long-term mean. The OU process, consequently, as expected, works relatively well for modelling interest rates, but less well for currencies and stock indices. A necessary part of the model fit is the estimation of the three parameters of the OU process. We do this with the maximum-likelihood method. Once it has been established that a certain time series can be modelled as an OU process, we can use this fact to create a rule for position handling for the class of assets under study. In this thesis we do this by creating a rule where two utility functions, total yield and risk-adjusted yield, are maximized.

Innehåll

1	Inledning	2
1.1	Bakgrund	2
1.2	Syfte	2
1.3	Disposition	3
2	Data	4
3	Teori och Modell	6
3.1	Stokastiska processer	6
3.2	Ornstein-Uhlenbeck processen	6
3.2.1	Fördelning, väntevärde och varians	7
3.2.2	Passagetider för OU-processen	8
3.3	Metod för skattning av parametrar	9
3.4	Modellens anpassning till data	10
3.4.1	Stokastisk volatilitet	10
3.5	Metod för handlingsregel	11
3.5.1	Maximering av den totala avkastningen	11
3.5.2	Maximering av den riskjusterade kvoten $\bar{r}/\sigma(r)$	12
4	Resultat	14
4.1	Anpassning av modellen till tidsserierna	14
4.1.1	Räntor	14
4.1.2	Aktieindex	16
4.1.3	Valutakurser	18
4.1.4	Övriga serier	18
4.2	Utformning av handelsregeln	19
5	Slutsatser	22
A		24
A.1	Härledning av funktionerna vid parameterskattningarna	24
A.2	Väntevärde och varians för passagetider i OU-processen	26
A.3	Normalfördelningsplottar samt väntevärden och varianser för de normerade variablerna	27

Kapitel 1

Inledning

1.1 Bakgrund

Hur priser på finansiella värdepapper utvecklas över tiden beror bl a på en mängd slumpmässiga faktorer. Det är därför naturligt att modellera denna typ av processer som stokastiska. Det är sedan tidigare känt att priser på räntor tenderar att vara mean-reverting, dvs dra sig mot ett långsiktiga medelvärde. Eftersom Ornstein-Uhlenbeck processen (OU-processen) har denna mean-reverting egenskap är det rimligt att anta att den är ett bra sätt att modellera ränteutveckling. Det är också intressant att undersöka huruvida även andra tillgångsklasser som aktieindex och valutakurser kan modelleras på detta sätt. Om man kan visa att priserna på ett finansiellt derivat utvecklas enligt en OU-process kan denna information användas för att skapa en regelstyrd positionshantering. Man kan då inta en kort position då priset nått en viss nivå, hålla denna tills det att nivån för det långsiktiga medelvärdet passerats, och på motsvarande sätt inta en lång position om priset sjunker under en viss nivå. Det optimeringsproblem som uppstår vid val av dessa nivåer består i att hitta den nivå som maximerar avkastningen eller minimerar risken.

1.2 Syfte

Syftet med denna uppsats är att studera modelleringsegenskaperna hos OU-processen för att se om prisbildningen på finansiella derivat kan modelleras som en sådan stokastisk process. Detta sker genom att analysera historiska tidsserier för räntor, valutakurser och aktieindex hämtade från Reuters databas EcoWin. Det är inte de specifika tidsserierna i sig som är intressanta utan de modelleringsegenskaper OU-processen har. För att kunna utforma en handlingsregel för positionshanteringen måste det först konstateras att den aktuella tillgångsklassen följer en OU-process. När det är gjort kan sedan en handlingsregel för denna utformas. Syftet med examensarbetet är således

dels att ta fram en metod för att undersöka OU-processens lämplighet som modelleringsverktyg samt dels att utifrån detta uforma en handlingsregel för positionshantering. Alla beräkningar kommer att ske i Matlab och Excel.

1.3 Disposition

I kapitel 2 ges en beskrivning av de olika tidsserierna som analyseras. Kapitel 3 redogör för den grundläggande teorin för OU-processer samt allmänt för teorin om stokastiska processer. Här beskrivs även de metoder som använts för parameterskattningar, för modellens anpassning till tidsserierna och för utvecklandet av handelsregeln. Kapitel 4 tar upp resultaten för de olika tidsserierna vad gäller modellens anpassning till data. Här presenteras också utformningen av handlingsregeln för de olika tidsserierna. Slutligen diskuteras slutsatser i kapitel 5.

Kapitel 2

Data

De tidsserier som undersöks består av räntor, aktieindex och valutakurser och är hämtade från Ecwin. I ett första skede analyseras 11 ränteserier, 8 aktieserier och 3 valutaserier. Ränteserierna består av dagliga och månatliga räntor. De 6 första serierna innehåller dagliga 10-åriga swapräntor för USA, Storbritannien, Tyskland, Japan och Schweiz. Övriga 5 är månadsräntor och beskriver 10-åriga benchmarks för ovan nämnda länder. Tidsserierna med aktieindex består av 5 st med dagliga och 3 med månatliga kurser från börserna i USA, Storbritannien, Tyskland, Japan och Schweiz. I uppsatsen analyseras även tidsserier innehållande följande valutakurser månadsvis: USD/JPY, USD/GBP och USD/DEM. Man vet av erfarenhet att ränteserier ofta kan modelleras som en Ornstein-Uhlenbeck process. Därför har ytterligare tre ränteserier undersökts. De innehåller alla svenska räntor där den första beskriver sk break even inflation som är 10årig swapränta - 10årig uppskattad realränta. De två andra serierna beskriver skillnaden mellan de 10åriga och de 5- resp. 2åriga swapräntorna, och benäms Curve slope 1 och Curve slope 2. I rapporten används följande beteckningar för de olika tidsserierna:

FX1	—	Japan, Spot Rates, USD/JPY, End of period JPY
FX2	—	UK, Spot Rates, USD/GBP, End of period, GBP
FX3	—	Germany, Spot Rates, USD/DEM, End of period, DEM
S1	—	Break-even inflation, 10Y swap rate-estimated 10Y real yield
S2	—	Curve slope 1, 10Y swap-2Y swap
S3	—	Curve slope 2, 10Y swap-5Y swap

Tabell 2.1: Beteckningar för valutaserierna och övriga ränteserier

Dagsserier	
EQD1	— US Standard& Poors, 500 composite, Index, Price Return, Close, USD
EQD2	— UK FTSE, 100, Index, Price Return, Close, GBP
EQD3	— Germany, Deutsche Boerse, DAX30, Index, Total Return, Close, EUR
EQD4	— Japan Nikkei,225,Index,Close, JPY
EQD5	— Switzerland,SMI,Swiss Market Index, Price Return,Close, CHF
Månadsserier	
EQM1	— US Standard& Poors, 500 composite, Index, Price Return, end of period, USD
EQM2	— Germany,Deutche Boerse,DAX30,Index, Total Return,end of period, USD
EQM3	— Japan Nikkei,225,Index, end of period, USD

Tabell 2.2: Beteckningar för aktieserierna

Dagsserier	
IRD1	— United States,Interest Rate Swaps,10år/3mån,Close, USD
IRD2	— United Kingdom,Interest Rate Swaps,10år,Close, GBP
IRD3	— Germany,Interest Rate Swaps,10år,Close, EUR
IRD4	— Japan,Interest Rate Swaps,10år,Close, JPY
IRD5	— Switzerland,Interest Rate Swaps,10år,Close, CHF
Månadsserier	
IRM1	— US Government Benchmarks, 10år,yield,end of period, USD
IRM2	— US Government Benchmarks, 30år,yield,end of period, USD
IRM3	— UK Government Benchmarks, 10år,yield,end of period,GBP
IRM4	— Germany Government Benchmarks, 10år,yield,end of period,EUR
IRM5	— Japan Government Benchmarks, 10år,yield,end of period,JPY
IRM6	— Switzerland Government Benchmarks, 10år,yield,end of period, CHF

Tabell 2.3: Beteckningar för ränteserierna

Kapitel 3

Teori och Modell

3.1 Stokastiska processer

Det finns en stor mängd litteratur som tar upp teorin för stokastiska processer. Se till exempel [4] och [3]. Sheldon Ross beskriver i [6] en stokastisk process som en samling av stokastiska variabler $\{X(t), t \in T\}$. För varje t är alltså $X(t)$ en stokastisk variabel. Ofta betecknar t tiden och $X(t)$ sägs då vara processens tillstånd vid tiden t . Det är denna innebörd av stokastisk process som kommer att tillämpas här. En av de vanligaste stokastiska processerna i kontinuerlig tid är den Brownska Rörelsen. I Ross definieras den enligt följande:

*En stokastisk process $\{X(t), t \in T\}$ sägs vara en **browsk rörelse** om*

- $X(0) = 0$
- $X(t), t > 0$ har stationära och oberoende inkrement
- $X(t) \in N(0, \sigma^2 t)$ för alla $t > 0$

*Om $\sigma^2 = 1$ kallas processen ovan för en **standardiserad browsk rörelse**.*

3.2 Ornstein-Uhlenbeck processen

Låt $\{X(t), t \geq 0\}$ vara en standardiserad browsk rörelse. Då kallas processen $\{V(t), t \geq 0\}$ för en Ornstein-Uhlenbeck process (OU-process) om

$$V(t) = \mu + \sigma e^{-\eta t/2} X(e^{\eta t})$$

Detta är ekvivalent med den mer formella definitionen av en OU-process som bl a ges av Franco i [2].

Definition OU-process. En stokastisk process $\{X(t), t \geq 0\}$ är en OU-process om den är en lösning till följande differentialekvation

$$\begin{cases} dX(t) = \eta(\mu - X(t))dt + \sigma dB(t) \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

Här är $B(t)$ en standardiserad brownsk rörelse och η , μ och σ konstanter. Processen $X(t)$ utvecklas alltså slumpmässigt men tenderar att dra sig mot någon nivå μ . Parametern η anger med vilken hastighet själva reversionen sker och σ är en konstant som förstärker slumpfelstermen $B(t)$. Franco visar i [2] att lösningen till 3.2 ges av

$$X(t) = X(0)e^{-\eta t} + \int_0^t \eta e^{-\eta(t-s)} \mu ds + \int_0^t e^{-\eta(t-s)} \sigma dB(s)$$

3.2.1 Fördelning, väntevärde och varians

I fortsättningen kommer notationen $X_t = X(t)$ att tillämpas. Väntevärde och varians för X_t i det obetingade fallet är, se [1]

$$E[X_t] = \mu \quad Cov(X_s, X_t) = \frac{\sigma^2}{2\eta} e^{-\eta|s-t|}$$

Om vi istället betingar med avseende på processens värde vid tiden 0, X_0 , visar Finch i [1] att X_t är normalfördelad med, kovarians och varians enligt följande:

$$E[X_t | X_0 = c] = \mu + (c - \mu)e^{-\eta t} \quad (3.1)$$

$$Cov(X_s, X_t) = \frac{\sigma^2}{2\eta} (e^{-\eta|s-t|} - e^{-\eta(s+t)}) \quad (3.2)$$

$$var(X_t | X_0 = c) = \frac{\sigma^2}{2\eta} (1 - e^{-2\eta t}) \quad (3.3)$$

där variansen fås genom att sätta $s = t$ i 3.2. Då $\mu = c = 0$ och η går mot 0 är alltså processen approximativt en brownsk rörelse. Om startvärdet är känt kan sedan det betingade väntevärdet och variansen för en godtycklig tidpunkt härledas ur 3.1 och 3.3. Det ger följande väntevärde och varians.

$$E[X_{t+s}|X_t = c] = \mu + (c - \mu)e^{-\eta s} \quad (3.4)$$

$$\text{var}(X_{t+s}|X_t = c) = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta s}) \quad (3.5)$$

Slutligen fås tätheten för $X_{t+s}|X_t$ genom att inse att $X_{t+s}|X_t$ är normalfördelad med väntevärde och varians enligt (3.4) och (3.5).

$$f(x_{t+s}|x_t; \mu, \eta, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{\sigma^2}{\eta} (1 - e^{-2\eta s})}} * \exp - \left[\frac{1}{\frac{\sigma^2}{\eta} (1 - e^{-2\eta s})} (x_{t+s} - \mu - (x_t - \mu)e^{-\eta s})^2 \right] \quad (3.6)$$

3.2.2 Passagetider för OU-processen

Vid modellering av finansiella priser är det av stort intresse att studera passagetider. Den matematiska teorin för passagetider i OU-processen är dock mycket avancerad och till stora delar utforskad. I denna rapport kommer därför endast en översikt presenteras. För djupare härledningar hänvisas till litteraturen inom området. Det man är intresserad av när det gäller passagetider är sk *First passage times*, dvs den tid det tar för processen att första gången nå en viss nivå S , givet att den nu befinner sig i en viss nivå c . Kännedom om dessa passagetider kan användas till att prissätta sk knock in och knock out optioner. Dvs optioner som får ett värde först då en viss nivå har passerats. Med hjälp av fördelningen för passagetider kan även förväntad tid innan vinst eller förlust uppnås skattas. En regel skulle kunna utformas så att en position tas, om sannolikheten för att processen når en viss nivå inom en viss tid är tillräckligt liten/stor. Syftet skulle då vara att maximera avkastningen samtidigt som sannolikheten för att processen når någon kritisk nivå inom en given tid är mindre än ett värde, β . Givet att processen startar i $X_0 = c$ definieras passagetiden $T_{S,c}$ som: (se tex [1])

$$T_{S,c} = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq S | X_0 = c\}$$

För att kunna beräkna väntevärde och varians är det av intresse att hitta ett uttryck för fördelningen för passagetiden. Problemet består alltså i att hitta ett uttryck för $g(t, S|c)$, där:

$$g(t, S|c) = \frac{\partial}{\partial t} P\{T_{S,c} \leq t\} \quad (3.7)$$

Denna fördelning kan härledas genom att använda s.k. Laplacetransformationer. Detta görs i bl a av Ricciardi och Sato i [7]. Idén är att transformera om g till g^* (där g^* är Laplacetransformen av g) för att få en mer lätthanterlig funktion. Sedan transformeras funktionen tillbaka genom beräkning av inversen till transformationen. Hur detta görs beskrivs bl a i [7]. I specialfallet då $S = 0, \eta = 1$ och $\sigma = 2$ finns ett känt explicit uttryck för (3.7), se [1] och [7], nämligen:

$$g(t, 0|x_0 = c) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|c|e^{-t}}{(1 - e^{-2t})^{3/2}} \exp \left[-\frac{c^2 e^{-2t}}{2(1 - e^{-2t})} \right]$$

Genom att utnyttja teorin om Kolmogorovs framåtekvationer visar Thomas i [8] att de moment som behövs för att beräkna väntevärde och varians kan härledas. Som tidigare nämns ryms inte denna teori inom ramen för detta examensarbete. En översikt av härledningen återfinns i appendix A.2.

3.3 Metod för skattning av parametrar

För att skatta modellens parametrar används maximum likelihoodmetoden som innebär att loglikelihooden maximeras. Med beteckningen $\ell = \log[L(f(x; \mu, \eta, \sigma))]$ gäller som känt att

$$L(f) \propto \prod_t f(x_{t+s}; \mu, \eta, \sigma)$$

där s är samplingsintervallet. Genom att sätta in (3.6) ovan fås därför att ℓ är lika med:

$$\ell = -\frac{n}{2} \log \left[\frac{\sigma^2}{2\eta} \right] - \frac{1}{2} \sum_t \log[1 - e^{-2\eta s}] - \frac{\eta}{\sigma^2} \sum_t \frac{(x_{t+s} - \mu - (x_t - \mu)e^{-\eta s})^2}{(1 - e^{-2\eta s})} \quad (3.8)$$

Problemet består alltså i att maximera denna funktion. Detta kan antingen göras analytiskt genom att lösa det ekvationssystem som fås då de partiella derivatorna sätts lika med 0. I detta fall är detta emellertid svårt då uttrycket för $\frac{\partial \ell}{\partial \eta}$ blir mycket svårhanterligt. Ett annat alternativ är att

maximera ℓ numeriskt. Detta görs lämpligast med någon programvara, t ex Matlab. I [2] redogör Franco för en alternativ metod för att maximera (3.8) där han uttrycker $\hat{\mu}$ som en funktion av $\hat{\eta}$, $\hat{\mu} = f(\hat{\eta})$. På liknande sätt uttrycks sedan $\hat{\sigma}$ som en funktion av $\hat{\mu}$ och $\hat{\eta}$, $\hat{\sigma} = g(\hat{\mu}, \hat{\eta})$. Sedan sätts funktionerna $\hat{\mu}$ och $\hat{\eta}$ in direkt i ℓ som sedan maximeras med avseende på η . Problemet reduceras då i

$$\min_{\eta} V(\eta) \tag{3.9}$$

där

$$\begin{aligned} V(\eta) = & -\frac{n}{2} \log \left[\frac{g(f(\eta), \eta)^2}{2\eta} \right] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log [1 - e^{-2\eta s}] - \\ & - \frac{\eta}{g(f(\eta), \eta)^2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_{t+s} - f(\eta) - (x_t - f(\eta))e^{-\eta s})^2}{1 - e^{-2\eta s}} \end{aligned}$$

Lösningen till (3.9) ger sedan ML-skattningen $\hat{\eta}$. När $\hat{\eta}$ är känd kan sedan $\hat{\mu} = f(\hat{\eta})$ och $\hat{\sigma} = g(\hat{\mu}, \hat{\eta})$ beräknas. En härledning av funktionerna $f(\hat{\eta})$ och $g(f(\hat{\eta}), \hat{\eta})$ finns i appendix A.1.

3.4 Modellens anpassning till data

För att testa huruvida modellen passar bra till de faktiska tidsserierna utnyttjas att variabeln $Y_{t+s} = X_{t+s} - (\mu + (X_t - \mu)e^{-\eta s})$ är $N(0, \tau^2)$ -fördelad om modellen stämmer. Här är $\tau^2 = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta s})$. Alltså gäller att variabeln $Z_{t+s} = \frac{Y_{t+s}}{\tau}$ då är $N(0, 1)$. Givet en stickprovsvektor X undersöks sedan om Z verkligen är normalfördelat med väntevärde 0 och varians 1. Det kan tex göras med hjälp av en normalfördelningsplot och de skattade värdena $\hat{\mu}, \hat{\sigma}$. Om Z är normalfördelat passar alltså modellen bra till data.

3.4.1 Stokastisk volatilitet

Vissa serier ser ut att passa för OU-modellering om man bortser från avvikelser i svansarna. En orsak till dessa avvikelser kan vara att det föreligger sk stokastisk volatilitet. Det innebär att parametern σ inte är konstant som antagits ovan utan i själva verket är stokastisk. Detta skulle innebära att volatiliteten varierar över tiden med perioder av hög volatilitet. Ett sätt att hantera detta är att modellera feltermen i modellen med sk ARCH- och GARCH-modeller där ARCH står för *autoregressive conditional heteroscedastic process* och GARCH är en generaliserad variant av ARCH. Teorin för dessa modeller ligger dock utanför ramen för detta examensarbete.

3.5 Metod för handlingsregel

Då det är känt att tidsserien följer en OU-process är det också känt att den tenderar att dra sig mot något långsiktigt medelvärde μ . Ju längre bort ifrån μ processen kommer desto högre är sannolikheten att den i nästa steg återvänder mot μ . Exakt när processen når sitt lokala max går förstås inte att säga. Däremot går det att finna en optimal nivå $\mu \pm \gamma$ då tillgången köps respektive säljs. (Observera att μ genomgående har satts till 0 för att förenkla beräkningarna. Man kan givetvis transformera μ till något annat önskat värde.) Det som söks är alltså det värde på γ som maximerar/minimerar någon nyttofunktion $U(\gamma)$. Funktionen U kan t ex beskriva avkastningen eller risken. Till att börja med införs några beteckningar. Därefter beskrivs metoder för två olika alternativ av definitionen av U .

Variabel	Beskrivning
$S_t = \frac{E[X_{t+1} X_t] - X_t}{\sigma}$	Sharpekvoten, riskjusterat mått på den dagliga avkastningen
$P_t = \begin{cases} 1 & \text{om } S_t > \gamma \\ 0 & \text{om } S_t < \gamma \\ -1 & \text{om } S_t < -\gamma \end{cases}$	Positionen vid tiden t
$r_{t+1} = P_t(X_{t+1} - X_t)$	Avkastningen vid tiden $t + 1$
$V_{t+1} = V_t + r_{t+1}$	Akkumulerad avkastning vid tiden $t + 1$

Begreppet position anger i detta sammanhang om man är säljare eller köpare av tillgången. Att ha en kort position innebär att vara säljaren medan en lång position indikerar att man är köparen. $P_t = 1$ innebär alltså att man vid tiden t köper tillgången. När $P_t = 0$ gör man ingenting, dvs stänger positionen, och om $P_t = -1$ är man säljaren. Notera att alla variabler ovan utom sharpekvoten beror på valet av γ .

3.5.1 Maximering av den totala avkastningen

Den enklaste definitionen av nyttofunktionen U är att låta U vara den totala slutliga avkastningen. Denna betecknas V och är summan av alla tidigare avkastningar vid varje tidpunkt. Avkastningen vid en viss tidpunkt beror dels på vilken position man har vid tidpunkten samt hur tillgångens värde har förändrats mellan föregående och nuvarande tidpunkt. Låt nu \mathbf{V} vara en kolumnvektor med det totala avkastningarna V för olika värden på γ .

Genom att utnyttja att $V_0 = 0$ kan \mathbf{V} skrivas på matrisform

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} * \mathbf{I}$$

där

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_{\gamma_1} \\ V_{\gamma_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{0,\gamma_1} & P_{1,\gamma_1} & \dots \\ P_{0,\gamma_2} & P_{1,\gamma_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} X_1 - X_0 \\ X_2 - X_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

P_{0,γ_1} är alltså positionen vid tiden 0 då γ är valt till γ_1 . Om man nu plottar kolumnvektorn \mathbf{V} mot en vektor γ med olika värden på γ ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ osv) kan man i plotten avläsa vilket värde på γ som ger den högsta avkastningen.

3.5.2 Maximering av den riskjusterade kvoten $\bar{r}/\sigma(r)$

Vid maximering av total avkastning tas ej hänsyn till volatiliteten. Då denna ibland kan vara stor är det vanligt att istället välja γ så att kvoten $\bar{r}/\sigma(r)$ maximeras. En hög kvot tyder på att den genomsnittliga avkastningen vid varje tidpunkt är hög samtidigt som variansen är låg. Även här kan matrismultiplikation utnyttjas för se vilken nivå på γ som ger den högsta kvoten. För att få \bar{r} för olika värden på γ divideras helt enkelt varje element i \mathbf{V} med antalet element i \mathbf{V} , dvs

$$\bar{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \bar{r}_{\gamma_1} \\ \bar{r}_{\gamma_2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{1}{\text{längd}(\mathbf{V})} * \mathbf{V}$$

För att beräkna variansen av $\bar{\mathbf{r}}$ för olika gammavärden definieras först matrisen \mathbf{r} enligt följande:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} P_{0,\gamma_1}(X_1 - X_0) & P_{1,\gamma_1}(X_2 - X_1) & \dots \\ P_{0,\gamma_2}(X_1 - X_0) & P_{1,\gamma_2}(X_2 - X_1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

I själva verket är summan av raderna i \mathbf{r} ingenting annat än elementen i \mathbf{V} . Nedan definieras en vektor \mathbf{S} vars element är variansen av varje rad i \mathbf{r} . En vektor som innehåller den riskjusterade kvoten fås nu genom att dividera elementen i $\bar{\mathbf{r}}$ med elementen i \mathbf{S} . Denna vektor benäms \mathbf{K} nedan och har alltså följande utseende:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \text{var}(\mathbf{r}_{1,j}) \\ \text{var}(\mathbf{r}_{2,j}) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{r}}(1)/\mathbf{S}(1) \\ \bar{\mathbf{r}}(2)/\mathbf{S}(2) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

På samma sätt som med den totala avkastningen kan vektorn \mathbf{K} plottas mot en vektor med olika värden på γ för att på så sätt se vilket gammavärde som ger högst värde på kvoten.

Kapitel 4

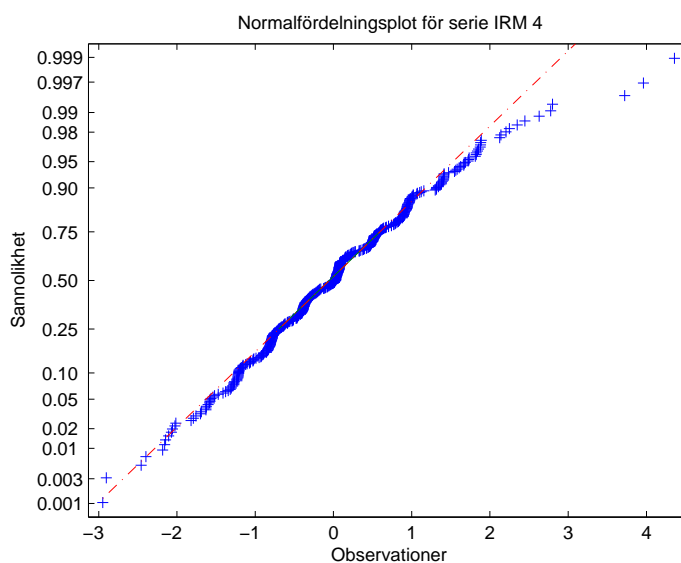
Resultat

4.1 Anpassning av modellen till tidsserierna

De olika tidsserierna kan anpassas till modellen genom att utföra normalfördelningstestet som beskrivs i 3.4. Först skattas modellens parametrar enligt metoden i 3.3. Med dessa skattningar beräknas sedan de betingade väntevärdena för alla tidpunkter. För OU-processen är dessa väntevärden för alla $t > 0$ lika med $E[X_{t+s}|X_t = c] = \mu + (c - \mu)e^{-\eta s}$. För att modellen ska anses passa bra krävs att den normerade variabeln Z som beskrivs i avsnitt 3.4 är normalfördelad, har ett väntevärde nära 0 och en varians nära 1. Kravet på att variabeln Z ska vara normalfördelad kan testas med Matlabs funktion `normplot`. Om normalfördelning föreligger kommer stickprovspunkterna att bilda en rät linje. Nedan redovisas resultatet av testen för de olika tidsserierna. Normalfördelningsplottar och beräkningar av väntevärden och varianser för alla tidsserier återfinns i bilaga A.3.

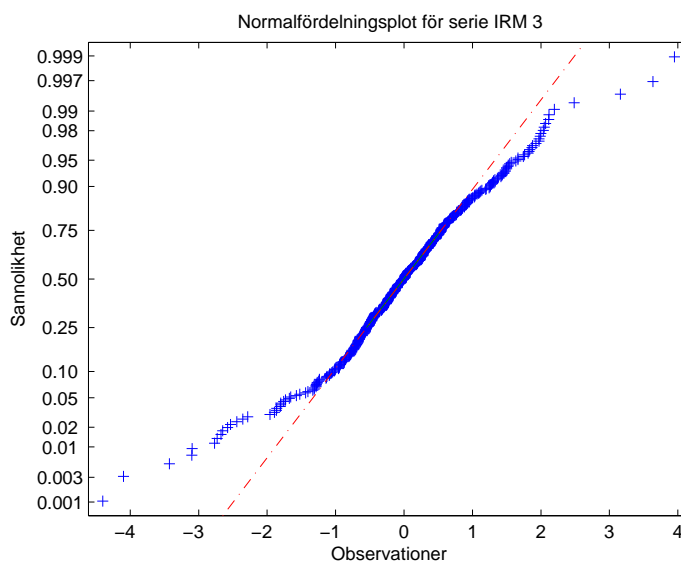
4.1.1 Räntor

Generellt sett visar sig modellen passa ganska bra för ränteserierna med månadsdata och något sämre för serierna med dagsdata. Vid beräkning av väntevärde och varians för den normerade variabeln Z hamnar dessa nära 0 och 1 för de flesta av tidserierna. Av ränteserierna med månadsdata passar modellen mycket bra till serien IRM4 och nästan lika bra till IRM1. I figuren nedan framgår att stickprovspunkterna följer en rät linje.



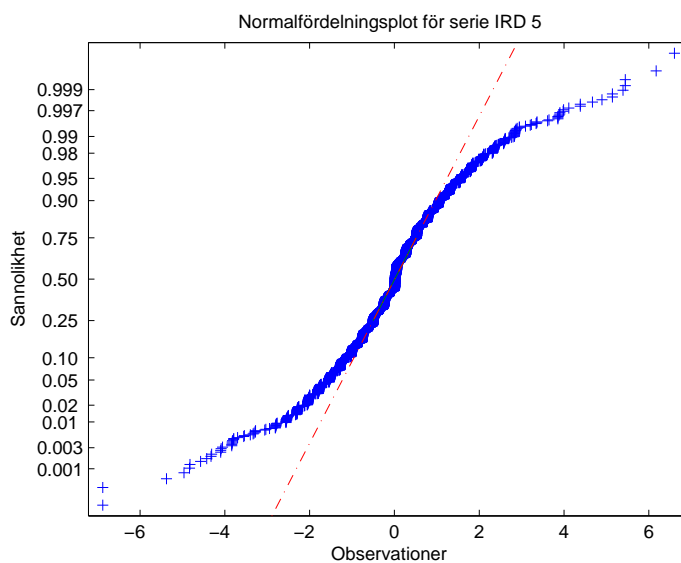
Figur 4.1: Normalfördelningsplot för ränteserierna IRM₄

Modellen verkar även passa relativt bra för serierna IRM2 och IRM3, (se figur nedan.) Här kan man dock se att de höga värdena är lite för höga samtidigt som de låga är för låga. Som nämntes i avsnitt 3.4.1 kan detta eventuellt bero på att stokastisk volatilitet föreligger.



Figur 4.2: Normalfördelningsplot för ränteserierna IRM₃

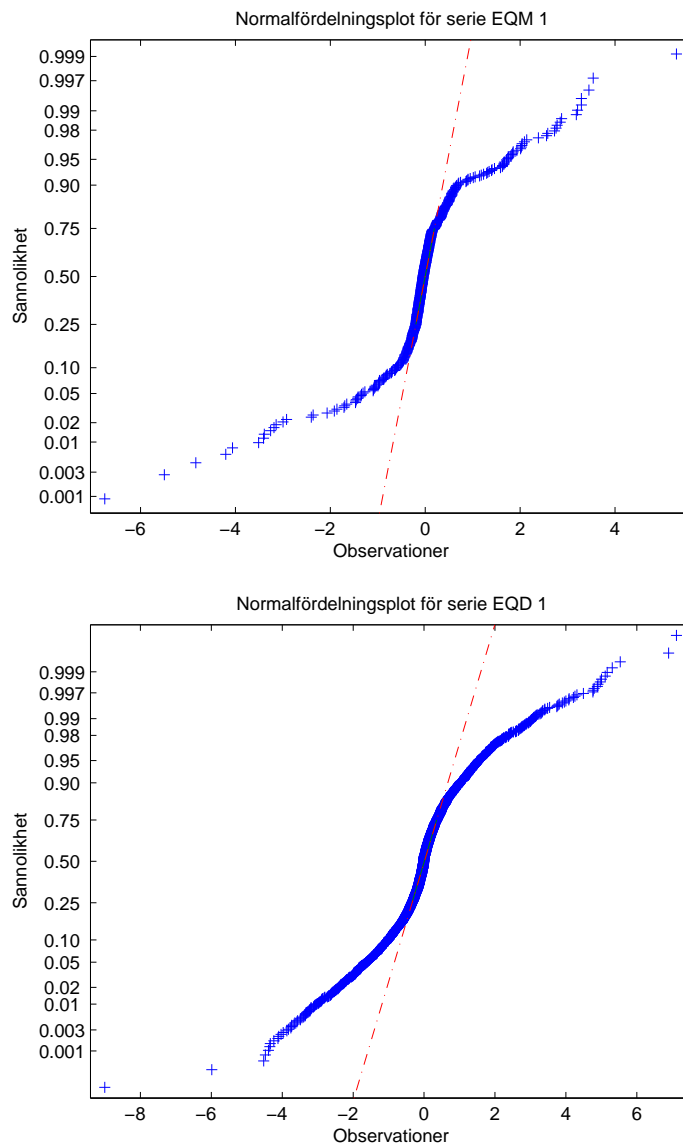
När det gäller ränteserierna med dagsdata passar modellen betydligt sämre. För de flesta av dessa serier syns på normalfördelningsplottarna att stickproven inte alls bildar en rät linje utan istället har en tydlig s-formad struktur. Detta syns tydligt i figuren nedan som visar plottarna för IRD5. Här är de höga värdena betydligt högre än man kan vänta sig om modellen passar. Detsamma gäller för de lägre värdena.



Figur 4.3: Normalfördelningstest för ränteserie IRD5

4.1.2 Aktieindex

För aktieserierna gäller generellt att OU-processen inte passar lika bra som modell som för ränteserierna. Även om väntevärde och varians för den normerade variabeln Z hamnar nära 0 och 1 visar normalfördelningsplottarna samtliga fall att de normerade inkrementen inte är normalfördelade. Detta gäller både för serierna med dagsdata och de med månadsdata. Ett exempel visas i figuren nedan och där syns det tydligt att residualerna i modellerna har systematiska strukturer.

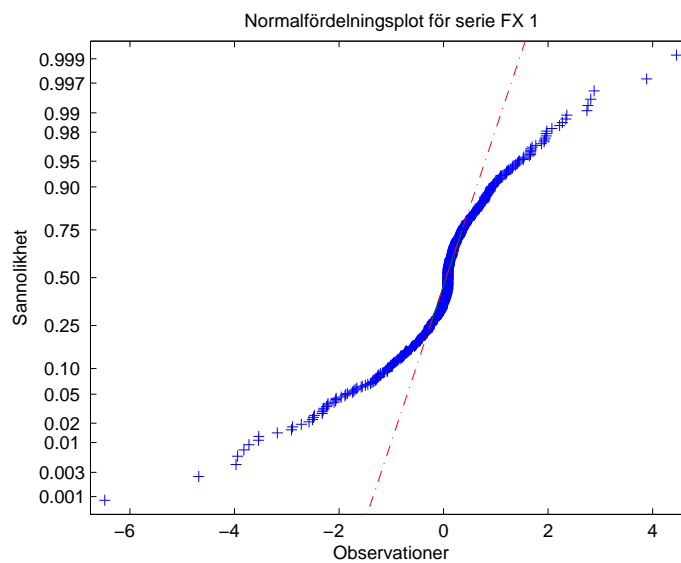


Figur 4.4: Normalfördelningstest för aktieindex *EQM1* och *EQD1*

Att modellen inte verkar passa för någon av de 8 aktieserierna tyder på att Ornstein-Uhlenbeck processen inte är lämplig för modellering av dessa priser. Det är inte heller något som är väntat då aktiepriser ofta istället anses följa en lognormal fördelning.

4.1.3 Valutakurser

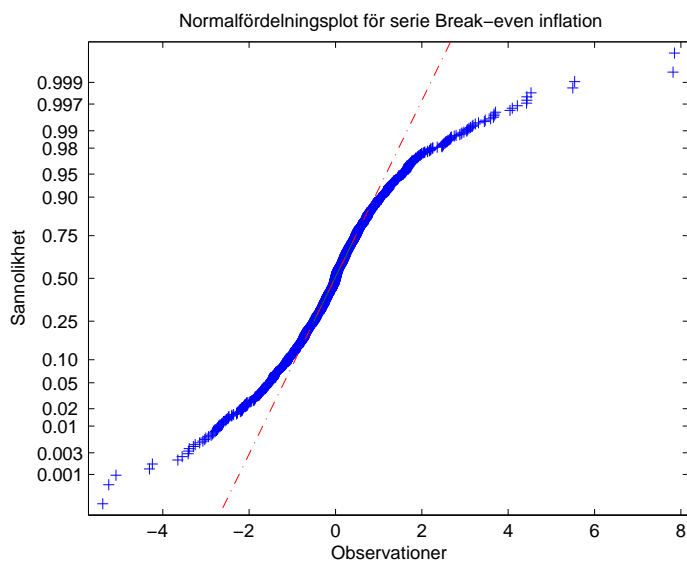
Modellen passar inte heller särskilt bra för att beskriva prisutvecklingen för de serier med valutakurser som analyserats. För samtliga 3 serier visar normalfördelningsplottarna att de normerade inkrementen inte är normalfördelade. Liksom för övriga serier hamnar dock väntevärde och varians för Z nära 0 och 1 vilket tyder på att väntevärdesstrukturen trots allt är den samma som i en Ornstein-Uhlenbeck process.



Figur 4.5: Normalfördelningstest för aktieindex FX1

4.1.4 Övriga serier

Vid en första anblick verkar modellen inte heller passa särskilt bra för modellering av serierna s_1, s_2, s_3 . Om man bortser från att de höga respektive låga värden avviker är serie s_1 den av dessa serier som ändå bäst lämpar sig för OU-modellering. Normalfördelningsplotten för denna serie visas i figuren nedan.



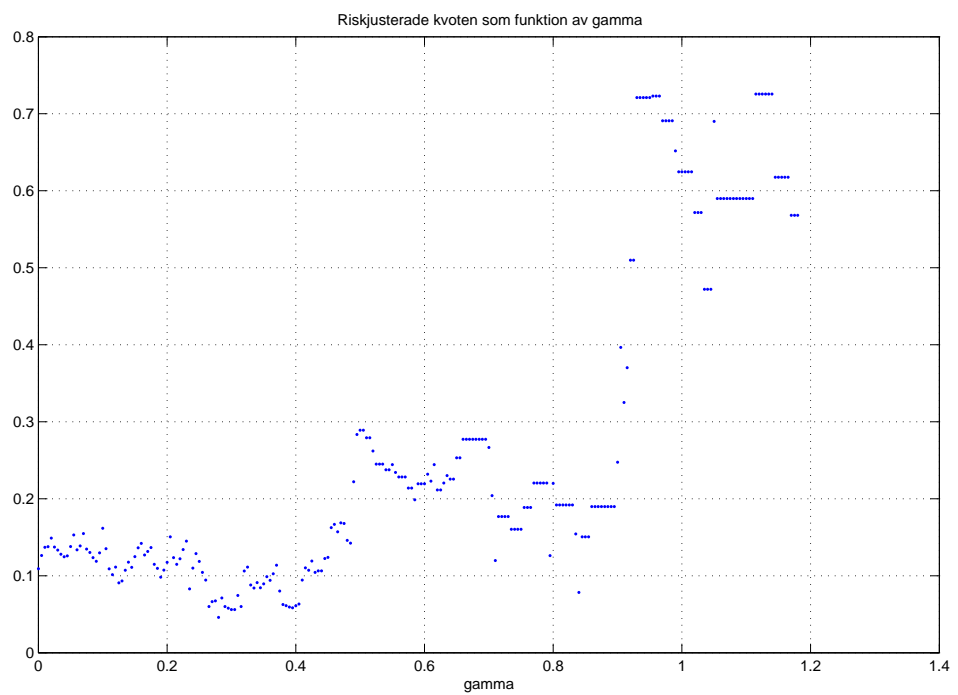
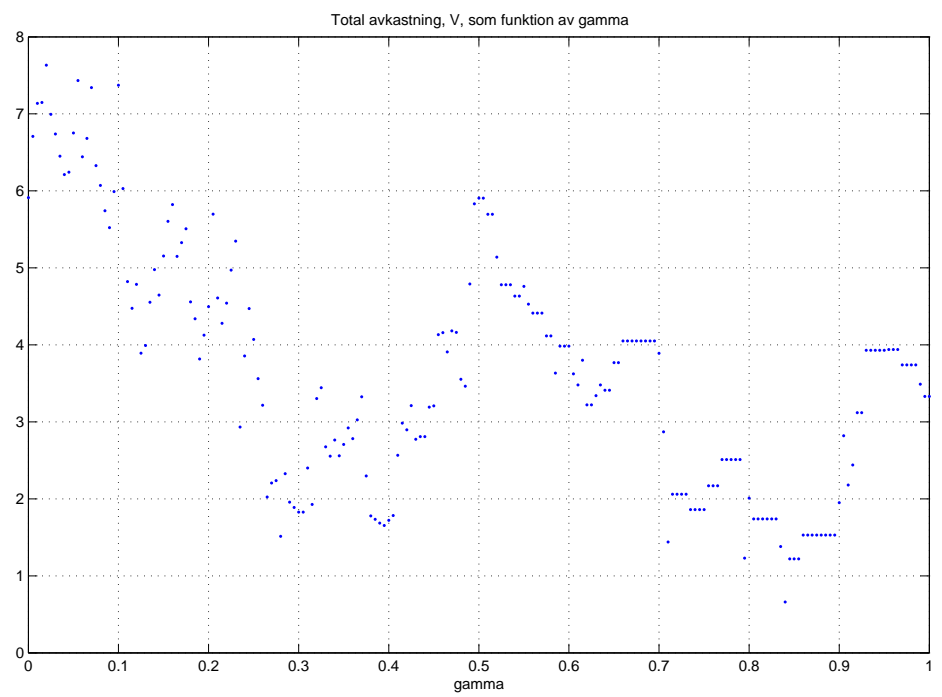
Figur 4.6: Normalfördelningstest för $S1$

4.2 Utformning av handelsregeln

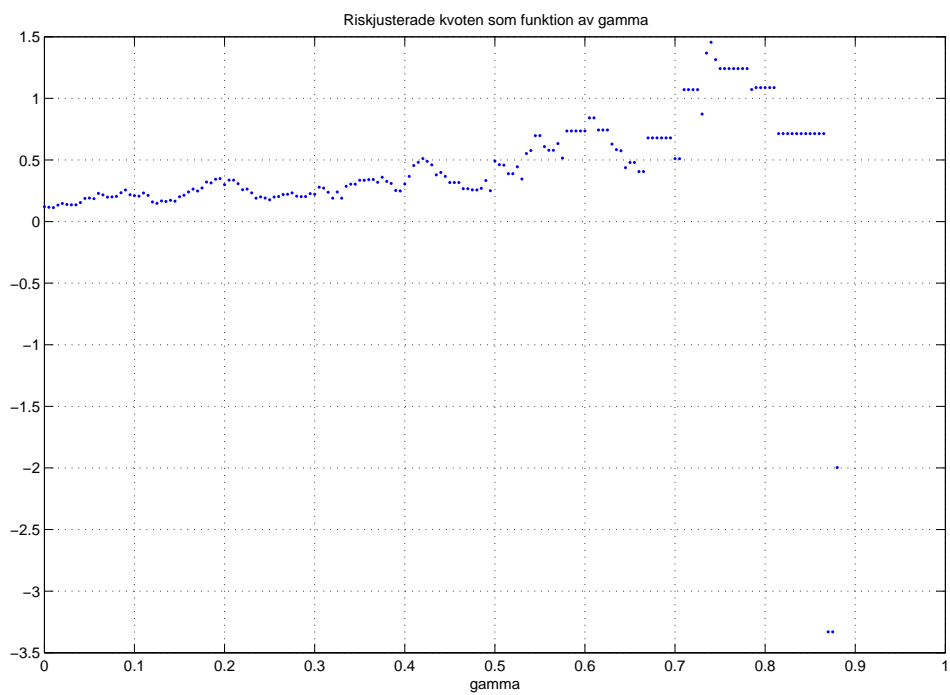
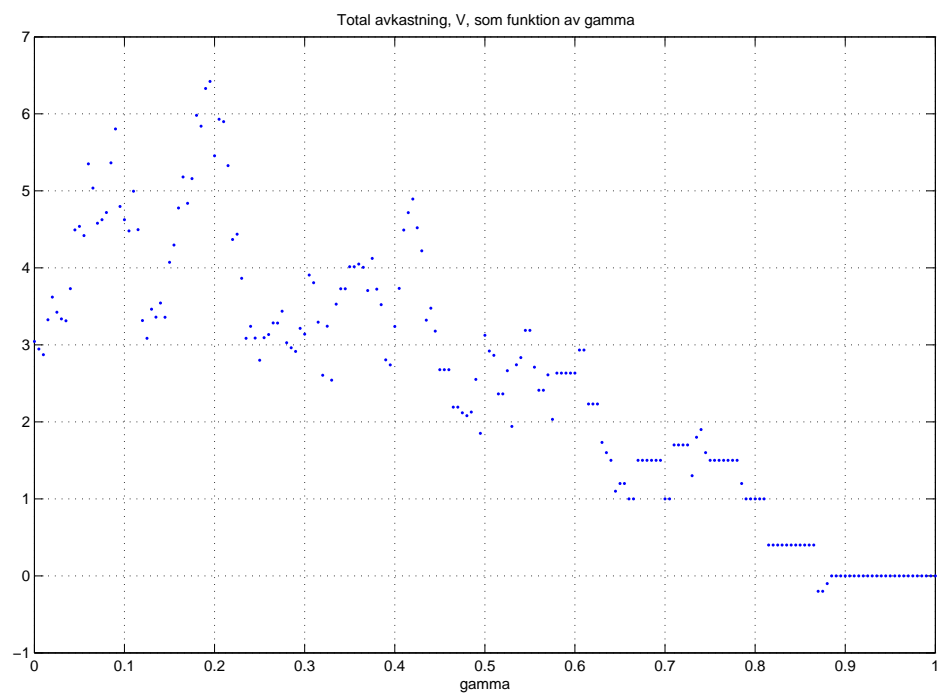
För de tillgångsklasser där OU-processen anses vara lämplig som modell har en handlingsregel utformats på så sätt att ett optimalt värde på nivån γ hittats enligt metoderna i avsnitt 3.5. I figuren nedan visas resultatet av plottarna för serierna IRM1 och IRM4.

För ränteserien IRM1 ligger den optimala nivån för γ med avseende på total avkastning väldigt nära 0. Det innebär att det krävs ett lågt värde på sharpkvoten (den förväntade dagliga avkastningen) för att en position ska tas. Om man istället använder den riskjusterade kvoten som mått blir den optimala nivån för γ ungefär 0,95. Den riskjusterade kvoten kräver alltså ett högre värde på sharpkvoten innan någon position tas jämfört med om total avkastning används som mått.

För serien IRM4 blir motsvarande värden på γ 0.2 respektive 0.74.



Figur 4.7: Total avkastning och riskjusterad kvot som funktion av gamma, serie IRM1



Figur 4.8: Total avkastning och riskjusterad kvot som funktion av gamma, serie IRM_4

Kapitel 5

Slutsatser

Denna uppsats har två huvudsyften. Dels att ta fram en metod för att avgöra huruvida ett finansiellt derivat går att modellera som en OU-process eller ej, samt att utforma en handlingsregel för positionstagande i det aktuella instrumentet.

Den metod som utvecklats för modellanpassningen har två delar. Först skattas OU-processens parametrar η , μ och σ för de tidsserier som studerats. Detta sker enligt teorin för maximum likelihoodskattningar som innebär att processens likelihoodfunktion härleds och sedan maximeras med avseende på de tre parametrarna. Vanligtvis sker detta analytiskt genom att de partiella derivatorna beräknas. Som skattningar väljs sedan de värden på η , μ och σ som uppfyller ekvationerna

$$\begin{cases} \frac{\partial \ell(\mathbf{x}; \mu, \eta, \sigma)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \ell(\mathbf{x}; \mu, \eta, \sigma)}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial \ell(\mathbf{x}; \mu, \eta, \sigma)}{\partial \sigma} = 0 \end{cases}$$

I detta fall har dock en annan metod använts för att finna ML-skattningarna. Denna metod beskrivs i avsnitt 3.3 och går i korthet ut på att uttrycka μ och σ som funktioner av η och sedan maximera likelihoodfunktionen med avseende på endast η . Problemet blir då betydligt enklare eftersom det nu reducerats i att maximera en funktion av en variabel.

Den andra delen av modellanpassningen innebär att väntevärde och varians beräknas för processens inkrement. Därefter transformeras de stokastiska variabler som inkrementen utgör så att nya stokastiska variabler uppstår. Om modellen stämmer kommer dessa nya variabler att vara $N(0,1)$ -fördelade. För att undersöka detta används Matlabs funktion `normplot`.

Modellen visar sig passa relativt bra för de ränteserier som testats och mindre bra för aktie- och valutaserierna. När det gäller ränteserierna passar

modellen allra bäst för de serier som innehåller månadsdata och något sämre för de med dagsdata.

Den andra delen av detta examensarbete består i att utforma en handlingsregel för positionstagande. Handlingsregeln utformas så att en nyttofunktion maximeras. Här har två olika nyttofunktioner använts, total och riskjusterad avkastning. Med totalavkastning som nyttofunktion kan positioner tas betydligt oftare än om riskjusterad avkastning används eftersom den sistnämnda även tar hänsyn till osäkerheten i skattningarna av den dagliga avkastningen.

Bilaga A

A.1 Härledning av funktionerna vid parameter-skattningarna

För att kunna hitta maximumlikelihoodskattningarna av modellens parametrar söks lösningen till följande ekvationssystem.

$$\begin{cases} \frac{\partial \ell(\mathbf{x}; \mu, \eta, \sigma)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \ell(\mathbf{x}; \mu, \eta, \sigma)}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial \ell(\mathbf{x}; \mu, \eta, \sigma)}{\partial \sigma} = 0 \end{cases}$$

Den första ekvationen kan uttryckas som en funktion av enbart η givet att $n, \sigma \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \mathbf{x}} &= -\frac{2\eta}{\sigma^2} \sum_t \frac{(x_{t+s} - \mu - (x_t - \mu)e^{-\eta s})(e^{-\eta s} - 1)}{1 - e^{-2\eta s}} = \\ &= -\frac{2\eta}{\sigma^2} \sum_t \frac{(x_{t+s} - \mu(1 - e^{-\eta s}) - x_t e^{-\eta s})(1 - e^{-\eta s})}{(1 - e^{-\eta s})(1 + e^{-\eta s})} = \\ &= -\frac{2\eta}{\sigma^2} \sum_t \frac{x_{t+s} - \mu(1 - e^{-\eta s}) - x_t e^{-\eta s}}{1 + e^{-\eta s}} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Då $\eta \neq 0$ är (A.1) = 0 om täljaren är det. Alltså fås:

$$\begin{aligned} \sum_t x_{t+s} - \mu(1 - e^{-\eta s}) - x_t e^{-\eta s} &= 0 \\ \hat{\mu} = f(\hat{\eta}) &= \frac{\sum_t x_{t+s} - x_t e^{-\eta s}}{\sum_t 1 - e^{-\eta s}} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

På samma sätt beräknas den partiella derivatan av ℓ med avseende på σ .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell}{\partial \sigma} &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(-\frac{n}{2} \log \left[\frac{\sigma^2}{2\eta} \right] \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\eta}{\sigma^2} \sum_t \frac{(x_{t+s} - \mu - (x_t - \mu)e^{-\eta s})^2}{1 - e^{-2\eta s}} \right) \\
&= -\frac{n}{\sigma} + \frac{2\eta \sum_t (x_{t+s} - \mu - (x_t - \mu)e^{-\eta s})^2 / (1 - e^{-2\eta s})}{\sigma^3} \quad (\text{A.3})
\end{aligned}$$

Om ekvationen ovan sätts lika med 0 fås nu att:

$$\begin{aligned}
\frac{2\eta \sum_t (x_{t+s} - \mu - (x_t - \mu)e^{-\eta s})^2 / (1 - e^{-2\eta s})}{\sigma^3} &= \frac{n}{\sigma} \\
\frac{2\eta \sum_t (x_{t+s} - \mu - (x_t - \mu)e^{-\eta s})^2 / (1 - e^{-2\eta s})}{n} &= \sigma^2 \quad (\text{A.4})
\end{aligned}$$

slutligen fås därmed att

$$\hat{\sigma} = g(\hat{\mu}, \hat{\eta}) = \sqrt{\frac{2\hat{\eta}}{n} \sum_t \frac{(x_{t+s} - \mu - (x_t - \mu)e^{-\eta s})^2}{1 - e^{-2\eta s}}} \quad (\text{A.5})$$

A.2 Väntevärde och varians för passagetider i OU-processen

För en OU-process $\{X(t), t \geq 0\}$ med driftsparameter $-\eta x$ och varians σ gäller enligt Kolmogorovs framåtekvationer att det i :te momentet av $T_{S,c}$ dvs $E[T_{S,c}^i = m_i(S, c)]$ måste uppfylla differentialekvationen:

$$\frac{1}{2}\sigma \frac{d^2 m_i}{dc^2} - \eta c \frac{dm_i}{dc} = -m_{i-1} \quad (\text{A.6})$$

Väntevärdet för passagetiden fås nu genom att lösa (A.6) med $i=1$ under bivillkoret $m_1(S, S) = 0$. Thomas visar i [8] att

$$E[T_{S,c}] = \frac{\sqrt{2\pi}}{\eta} \int_c^{s\sqrt{2\eta/\sigma}} \frac{\Phi(z)}{\sqrt{2\eta/\sigma}} e^{\frac{1}{2}z^2} dz \quad (\text{A.7})$$

Här är $z = x\sqrt{(2\eta/\sigma)}$ och $\Phi(\cdot)$ fördelningsfunktionen för $N(0, 1)$ -fördelningen. Keilson och Ross har i [5] tabellerat $E[T_{S,c}]$ för ett stort antal olika värden på S och c . På samma sätt fås sedan det andra momentet genom att lösa (A.6) med $i=2$ samt utnyttja att $m_2(S, S) = 0$.

$$E[T_{S,c}^2] = \frac{4}{\sigma} \int_c^s \int_{-\infty}^z m_1(y, s, t) e^{-\eta(y^2 - z^2)/\sigma} dy dz \quad (\text{A.8})$$

Från (A.7) och (A.8) följer att variansen för en *first passage time* ges av

$$\begin{aligned} \text{Var}[T_{S,c}] &= 8\sqrt{\left(\frac{\pi}{\sigma^3\eta}\right)} \int_c^s \int_{-\infty}^z \int_y^s \Phi(z) e^{-\eta(y^2 - x^2 - z^2)/\sigma} dx dy dz - \\ &\quad - \frac{4\pi}{\eta\sigma} \left[\int_c^s \Phi(z) e^{\eta x^2/\sigma} \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

A.3 Normalfördelningsplottar samt väntevärden och varianser för de normerade variablerna

Tidsserie	$E[Z]$	$Var(Z)$	Tidsserie	$E[Z]$	$Var(Z)$
ird1	-0.0040	1.0002	irm1	0.0010	1.0021
ird2	-0.0090	1.0001	irm2	0.0017	1.0021
ird3	-0.0045	1.0002	irm3	0.0016	1.0021
ird4	-0.0056	1.0002	irm4	0.0011	1.0021
ird5	-0.0093	1.0001	irm5	-0.0005	1.0021
			irm6	0.0001	1.0021

Tabell A.1: Beräknade värden från Ränteserierna

Tidsserie	$E[Z]$	$Var(Z)$	Tidsserie	$E[Z]$	$Var(Z)$
eqd1	0.0001	1.0002	eqm1	-0.0005	1.0018
eqd2	0.0014	1.0002	eqm2	-0.0004	1.0018
eqd3	-0.0008	1.0002	eqm3	-0.0003	1.0018
eqd4	0.0036	1.0002			
eqd5	0.0013	1.0002			

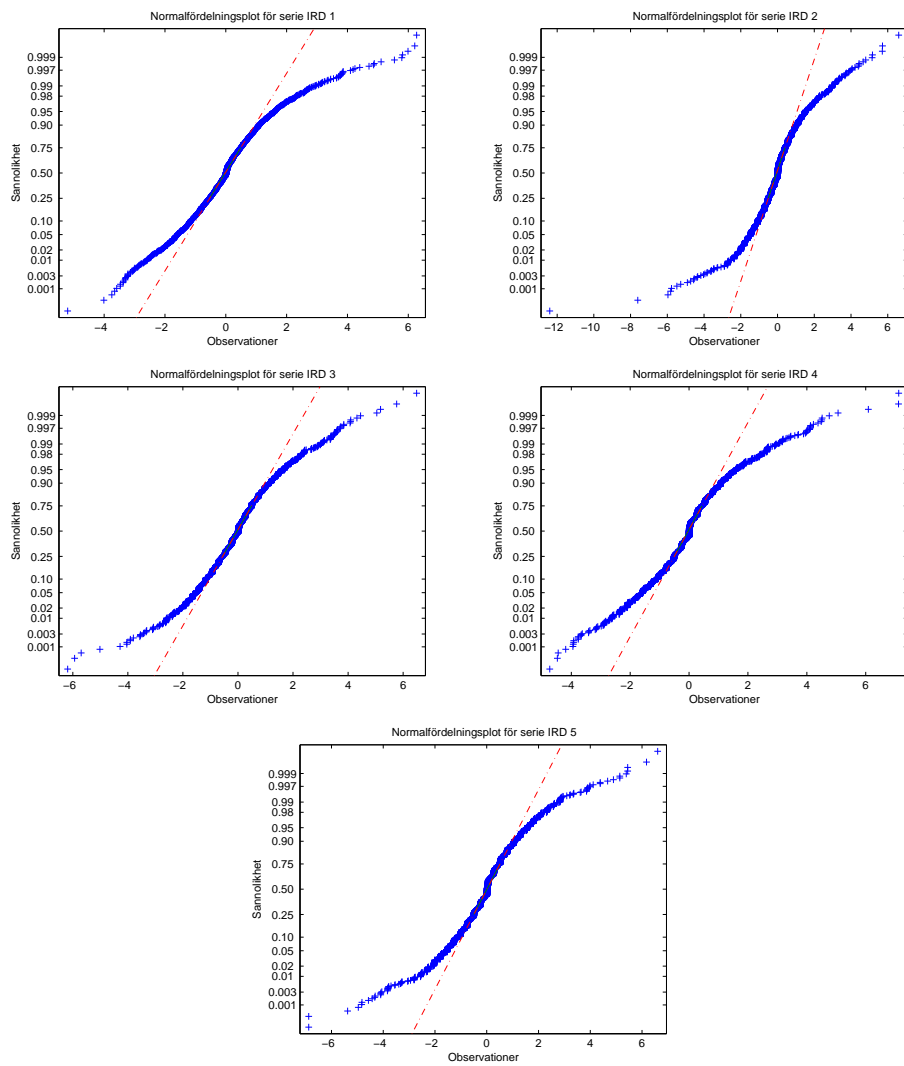
Tabell A.2: Beräknade värden från aktieindexserierna

Tidsserie	$E[Z]$	$Var(Z)$
fx1	-0.0000	1.0017
fx2	0.0008	1.0017
fx3	-0.0007	1.0017

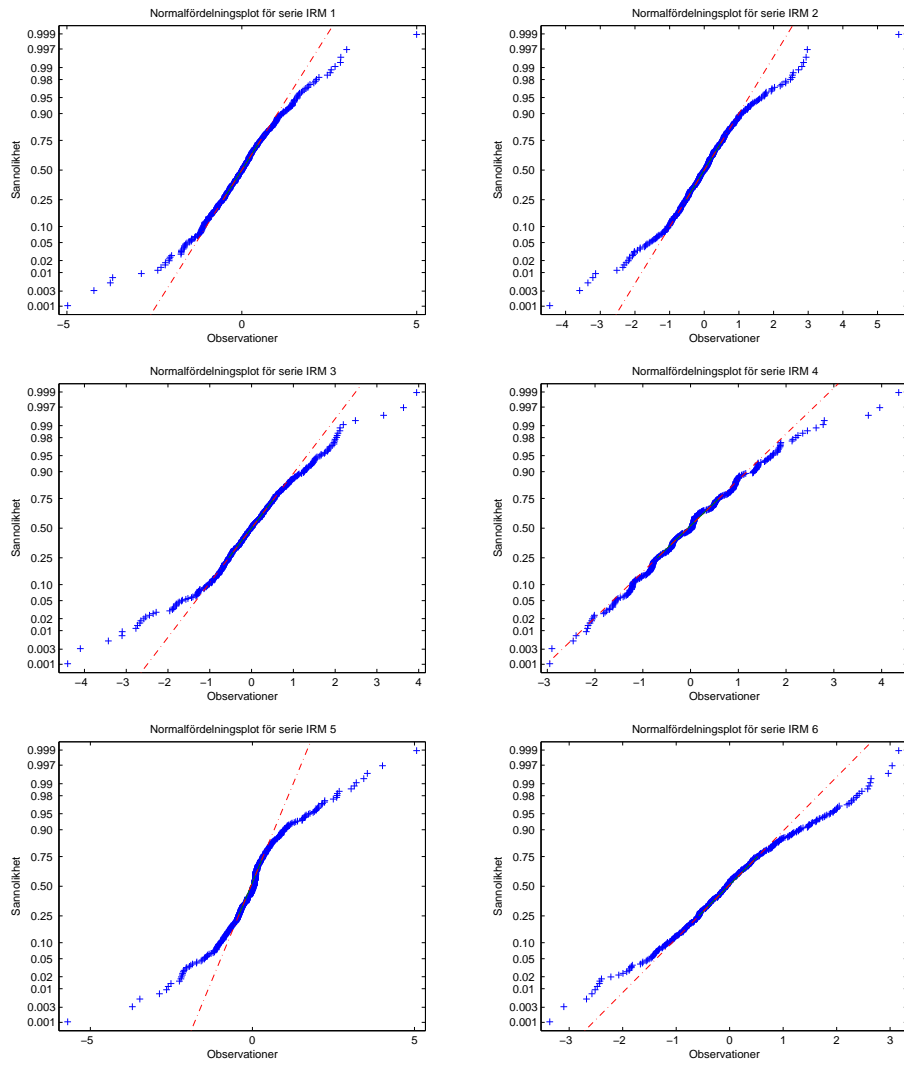
Tabell A.3: Beräknade värden från valutaserierna

Tidsserie	$E[Z]$	$Var(Z)$
s1	-0.0044	1.0004
s2	-0.0024	1.0004
s3	-0.0039	1.0004

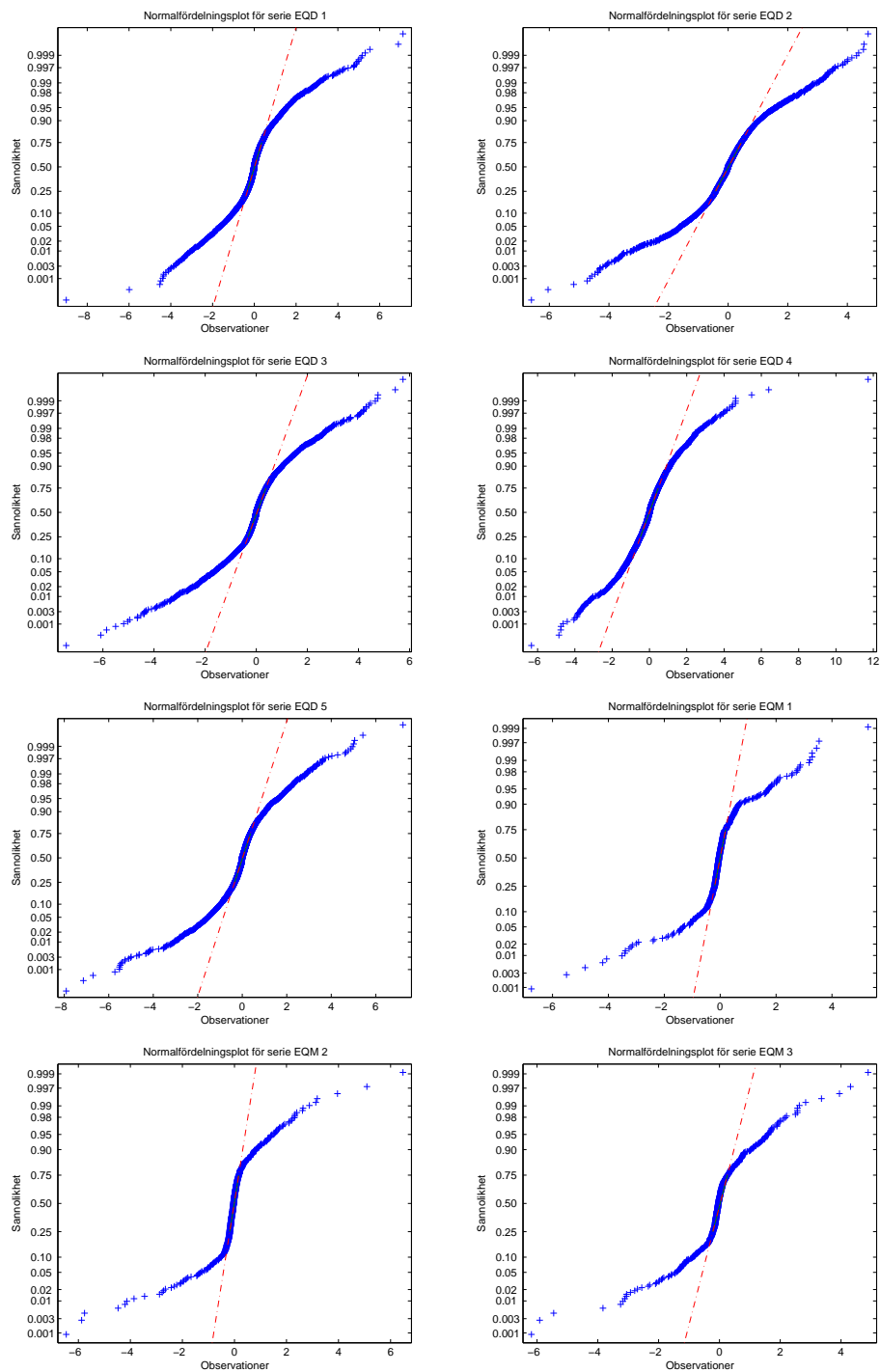
Tabell A.4: Beräknade värden från övriga ränteserier



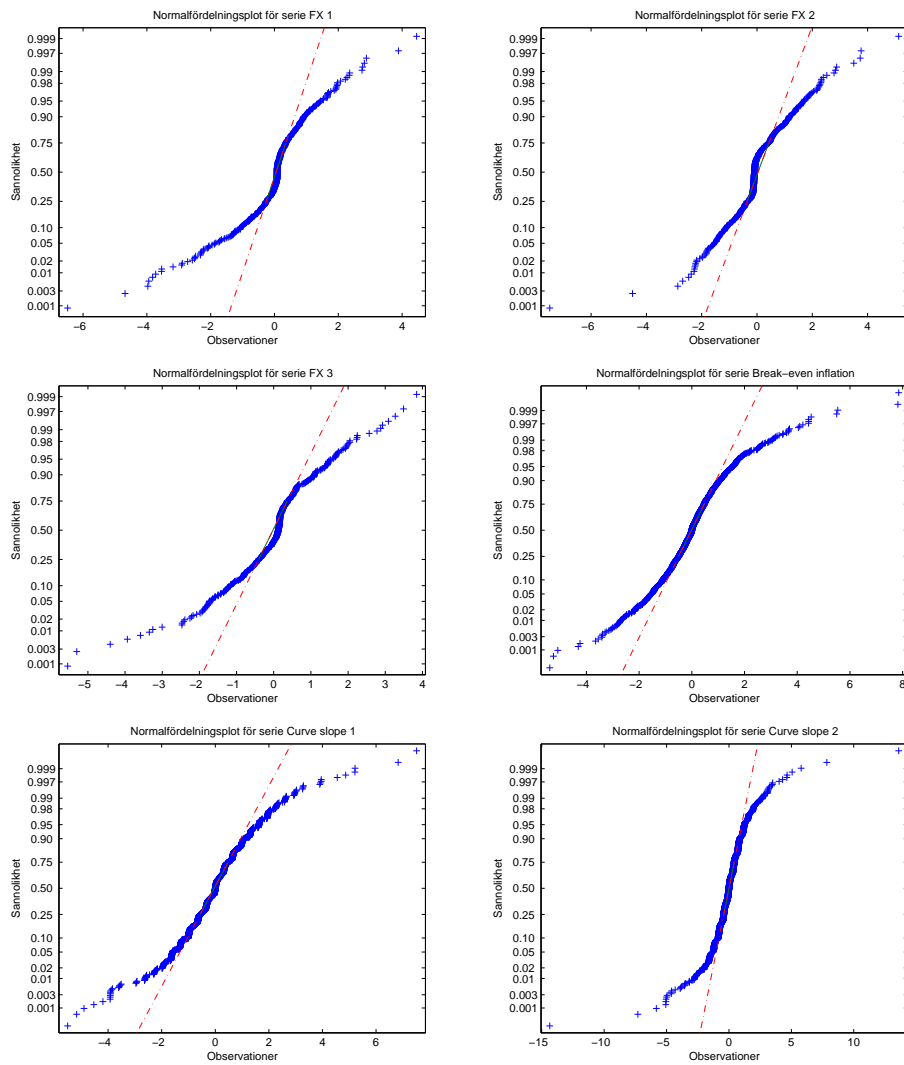
Figur A.1: Normalfördelningstest för ränteserierna med dagsdata



Figur A.2: Normalfördelningstest för ränteserierna med månadsdata



Figur A.3: Normalfördelningstest för aktieserierna



Figur A.4: Normalfördelningstest för serierna med valutakurser samt övriga räntor

Litteraturförteckning

- [1] Steven Finch: Ornstein-Uhlenbeck Process
- [2] José Carlos García Franco: Maximum likelihood estimation of mean reverting processes
- [3] I. Karatzas och S.E Shreve: Brownian Motion and Stochastic Calculus
- [4] S. Karlin och H.M Taylor: A Second course in stochastic processes
- [5] J. Keilson och H. F. Ross, Passage time distributions for Gaussian Markov (Ornstein-Uhlenbeck) statistical processes, *Selected tables in Mathematical Statistics*, v.III, Amer. Math. Soc., 1975 233-327; MR0408175
- [6] Sheldon Ross: An Introduction to Probability models
- [7] L.M. Ricciardi och S.Sato, First-Passage-time density and moments of the Ornstein-Uhlenbeck process, *J. Appl. Probab.* 25 (1988) 43-47; MR0929503 (89b:60189)
- [8] M. U. Thomas, Some mean first-passage time approximations for the Ornstein-Uhlenbeck process, *J. Appl. Probab.* 12 (1975) 600-604; MR0388558