



Matematisk statistik
Stockholms universitet

Hur bra fungerar prognoser med Lee-Cartermodellen?

Helen Teclu

Examensarbete 2007:13

Postal address:

Matematisk statistik
Dept. of Mathematics
Stockholms universitet
SE-106 91 Stockholm
Sweden

Internet:

<http://www.math.su.se/matstat>



Hur bra fungerar prognoser med Lee-Cartermodellen?

Helen Teclu*

September 2007

Sammanfattning

Under större delen av 1900-talet har man i Sverige utjämnat dödligheten med Makehamsfunktionen. I praktiken brukar observerade dödligheten ges i form av ettåriga dödlighetssannolikheten q_x medan man vid användande av Makehamsfunktioner utjämnar dödlighetsintensiteten μ_x istället, x representerar olika åldrar. Men nu har den så kallade Lee-Carter modellen använts för att skatta dödligheten.

I DUS06 har undersökts hur den framtida dödligheten kommer att bete sig. Med hjälp av Lee-Carter modellen med poissonfördelade dödsfall och linjär extrapolering av κ_t -funktionen har svenska befolkningens dödlighet prognostiserats fram till 2050. Dödlighetsestimeringen bygger på extrapolation dvs man tar hänsyn till historisk data för att kunna prediktera kommande dödlighet. Syftet med det här examensarbetet är att skapa en uppfattning om felen i prognoser av framtida dödlighet. Fördenskull har vi studerat historisk data med Lee-Carter modellen och sedan jämfört detta med verkliga utfallet.

Slutsatsen av denna studie är ju längre periods prognos man gör över dödligheten desto mer ökar osäkerheten i prognosen. Som max bör man göra 20 års prognos. 10 års prognos ger bästa prognosen. Men trots att det är osäkert att göra långtidsprognos över dödligheten med Lee-Carters modellen måste försäkringsbolaget göra dödlighetsprognoser cirka 50 år framåt.

*Postal address: Matematisk statistik, Stockholms universitet, SE-106 91, Stockholm, Sweden. E-mail: teclu_helen@hotmail.com. Handledare: Anders Björkström

Abstract

During the 20th century the Makeham model was the most common model that used to smooth the mortality in Sweden. Usually the observed mortality gives in the form of q_x while the Makeham function is used to smooth the death rate μ_x , x represent different ages. But now the Lee-Carter model is used to estimate the mortality.

Using the Lee-Carter model with Poisson deaths and linear extrapolating of $\kappa(t)$ -function, we have predicted the Swedish population until 2050. The mortality estimating is based on extrapolation, which means we consider the historical data to predict the future mortality. The purpose with this paper has been to get knowledge of the possible flaws Lee-Carter models of the future mortality. By using Lee-Carter model we have studied historical data by taking different variables as comparable variables in different periods of time.

The conclusion of these studies are that the longer periods of time you predict the mortality the more insecure is the prognosis. As max you should do 20 years prognosis with the Lee-Carter model. 10 years prognosis gives the best prognosis. Even though insurance companies realize it is not a good option to make long term prognosis because of the insecure mortality rate, they do them.

Innehåll

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Förord | 4 |
| 2 | Introduktion | 5 |
| 2.1 | Syfte | 5 |
| 3 | Metod och datamaterialet | 5 |
| 3.1 | Lee-Carter modell | 5 |
| 3.2 | Datamaterialet | 6 |
| 4 | Skattning av parametrarna i Lee-Carter med ML-metoden | 7 |
| 5 | Jämförelsevariabler | 17 |
| 5.1 | Jämförelse mellan den skattade $\hat{\mu}_x(t)$ och den verkliga utfallet | 17 |
| 5.2 | Sannolikheten att man avlider i ett visst åldersintervall | 28 |
| 5.3 | Premien | 34 |
| 6 | Långperiodska prognoser | 39 |
| 6.1 | 20 års prognos | 39 |
| 6.1.1 | Sannolikheten att man avlider i ett visst åldersintervall | 47 |
| 6.1.2 | Relativa felet för premien | 50 |
| 6.2 | 40 års prognos | 53 |
| 6.2.1 | Sannolikheten att man avlider i ett visst åldersintervall | 56 |
| 6.2.2 | Relativa felet för premien | 59 |
| 7 | Slutsats | 61 |

1 Förord

Detta arbete är ett 20 poängs examensarbete i matematik-statistik. Det har utförts på uppdrag av finansinspektionen.

Jag vill särskilt tacka min handledare Bengt von Bahr som har visat intresse diskuterat arbetet med mig då jag haft frågor i ämnet men även annars uppmuntrat mig och gett mig en bredare syn på arbetet. Även Göran Ronge förtjänar att nämnas för att ha hjälpt mig att få examensarbetet. Jag vill även tacka all personal på finansinspektionen på aktuarieavdelningen för det trevliga bemötandet.

Slutligen vill jag tacka min handledare på Stockholms universitet Anders Björkström och alla mina föreläsare och doktorander som jag har haft under mina studier vid Stockholm universitet.

2 Introduktion

2.1 Syfte

I DUS06 har undersökts hur den framtida dödligheten kommer att bete sig. Med hjälp av Lee-Carter modellen med Poisson-fördelade dödsfall och linjär extrapolering av κ_t -funktionen har svenska befolkningens dödlighet prognostiserats fram till 2050.

Dödlighetsestimeringen bygger på extrapolation d.v.s man tar hänsyn till historisk data för att kunna prediktera kommande dödlighet. Syftet med det här examensarbetet är att skaffa en uppfattning om felet i prognoser av framtida dödlighet. För att skaffa en uppfattning om felet i prognoser av framtida dödlighet har vi studerat historisk data med Lee-Carters modellen och sedan jämfört detta med verkliga utfallet.

3 Metod och datamaterialet

3.1 Lee-Carter modell

Lee-Carters modell utvecklades i USA år 1992, den används för att estimerade framtida dödsriskerna.

Lee-Carters modellen tar hänsyn till att dödlighetsintensiteten är beroende av ålder och av aktuellt kalenderår. Trending av dödlighetsintensiteten ingår alltså explicit i grundmodellen. Låt $\mu_x(t)$ beteckna dödlighetsintensiteten för ålder x under kalenderår t . Modellen beskrivs av

$$\log \mu_x(t) = \alpha_x + \kappa_t \cdot \beta_x$$

I modellen är α_x en åldersberoende term oberoende av tiden κ_t mortalitetsindexfaktorn, vilken beror på kalenderår, och β_x är åldersberoende term som mäter respektive ålders responshastighet i dödlighetsintensiteten till förändring i mortalitetsindexfaktor. Historiska data används för att skatta parametrarna α_x , κ_t och β_x ($t \leq$ aktuellt kalenderår). Skattningarna av κ_t och β_x är produkten sinsemellan dessa som ger tidsförändringarna i den åldersspecifika dödligheten. Efter skattningarna av α_x , β_x och trendfaktorn κ_t kan vi enkelt estimerade framtida dödlighetsintensiteten genom att extrapolera funktionen $\kappa(t)$.

Observera att Lee-Carters modell alltså inte är en kontinuerlig parametrisk funktion där ett fåtal parameter anpassas till den observerade dödlighetsintensiteten $\mu_x(t)$, vilket är fallet med Makehamfamiljen och den logistiska familjen. Utgående från statistik för de T senaste åren skattas i Lee-Carters modell nämligen vektorerna $\alpha_x = [\alpha_1, \dots, \alpha_w]$, $\beta_x = [\beta_1, \dots, \beta_w]$ och $\kappa_t = [\kappa_{2004-T+t}, t = 0, 1, \dots, T]$, d.v.s till varje ålder x (maxålder w) svarar det ett α_x och ett β_x och till varje kalenderår t svarar det en trendfaktor κ_t . Modellanpassningen är därför att betrakta som fördelningsfri och Lee-Carters modell antar ingen speciell form på dödlighetsintensiteten, att jämföras med den antagna exponentiella tillväxten i Makehamfamiljen. I Lee-Carter modellen tenderar man följaktligen att skapa en tabell bestående av utjämnade och trend varianter av den observerade dödlighetsintensiteten. Trendestimeringen utnyttjar hela tidsserien av observationer från startåret till slutåret, vilket är en värdefull egenskap.

Modellen antar att dödlighetsintensiteten över tiden drivs av enda tids varierande parameter det vill säga av mortalitetindexfaktorn. Dödlighetsestimeringen bygger på extrapolering det vill säga man tar hänsyn till information som redan finns för att kunna förutspå kommande dödlighet.

Lee-Cartersmodell tar inte hänsyn till trendbrott utan den bygger väldigt mycket på långa trender som antages fortsätta.

3.2 Datamaterialet

Datamaterialet som används i detta arbete kommer från www.mortality.org hemsidan och består av befolkningsdata.

Befolkningsdata omfattar uppgifter om antal levande och antal döda i den svenska befolkningen per ålder (åldern mellan 20-90), kön och kalenderår under perioden 1900-2000. För vissa kalenderår saknades antal levande för både män och kvinnor .För dessa kalenderår har vi interpolerat datat.

Datamaterialet består av följande observationer. För ett antal åldrar x och ett antal kalenderår t har vi värden på

$N_x(t)$ =antal individer som lever vid utgången av kalenderåret t och fyller x år under kalenderåret t. Dessa individer är födda år $t - x$.

$D_x(t)$ =antal individer som avlider under kalenderåret t och fyllde eller skulle ha fyllt x år under kalenderåret t. Dessa individer är födda år $t - x$.

Risiktiden för den x-åriga delen av populationen under kalenderår t definieras som summan av den tiden som de individer som är födda under

kalenderår $t-x$ bidrar med under kalenderåret t . Risktiden betecknas med $R_x(t)$.

Risktiden uppskattas med medelvärdet av antal individer som var födda år $t-x$ och som levde vid slutet av år $t-1$ och antalet individer som var födda år $t-x$ och som levde vid slutet av år t . Skattningen av $R_x(t)$ skrivs som

$$\hat{R}_x(t) = \frac{N_{x-1}(t-1) + N_x(t)}{2}$$

Antalet individer som avlider under kalenderår t det vill säga $D_x(t)$ är binomialfördelat. Det skrivs som

$$D_x(t) \sim \text{Bin}(N_{x-1}(t-1), \mu_x(t))$$

Där $N_{x-1}(t-1) = N_x(t) + D_x(t)$ och sannolikheten $\mu_x(t)$ är enligt Lee-Carter modellen lika med $\exp(\alpha_x + \kappa_t \cdot \beta_x)$. Om väntevärdet av $D_x(t)$ det vill säga $R_x(t) \cdot \mu_x(t) \geq 10$ kan vi approximera med en poissonfördelning. Då är det om $R_x(t) \cdot \mu_x(t) \geq 10$, gäller att

$$D_x(t) \sim \text{appPo}(R_x(t) \cdot \mu_x(t))$$

där väntevärdet för den stokastiska variabeln $D_x(t)$ är lika med $R_x(t) \cdot \mu_x(t)$.

4 Skattning av parametrarna i Lee-Carter med ML-metoden

Vi skall nu härleda skattningarna för parametervektorerna α, κ och β med användande av maximumlikelihoodmetoden. Likelihoodfunktionen skrivs som

$$\begin{aligned} L(\alpha, \kappa, \beta) &= \prod_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \prod_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} P(D_x(t) = d_x(t)) = \\ &= \prod_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \prod_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} e^{-\lambda_x(t)} \cdot \frac{\lambda_x(t)^{d_x(t)}}{d_x(t)!} \end{aligned} \quad (1)$$

där $d_x(t)$ är observerat värde av den stokastiska variabeln $D_x(t)$. Här har vi använt $\lambda_x(t)$ vilket är det förväntade värdet av $D_x(t)$ för att förhoppningsvis förenkla läsbarheten. Utryckt i parametrarna α_x, κ_x och β_x kan $\lambda_x(t)$ skrivas som

$$\lambda_x(t) = E[D_x(t)] = R_x(t) \cdot \mu_x(t) = R_x(t) \cdot e^{\alpha_x + \kappa_t \cdot \beta_x} \quad (2)$$

Den normala proceduren att finna maximum för L-funktionen är att först logaritmera likelihoodfunktionen och där efter maximera den funktionen. Vi får, efter ha samlat ihop konstanterna i en term, benämnd konstant,

$$\ln[L(\alpha_x, \kappa_t, \beta_x)] = \sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} \sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} [-\lambda_x(t) + d_x(t) \cdot \ln(\lambda_x(t))] + konstant. \quad (3)$$

Ersätter vi nu $\lambda_x(t)$ med dess rätta uttryck i de aktuella parametrarna och förenklar skrivsättet något får vi

$$\ln L = \sum_{x,t} [-R_x(t) \cdot \mu_x(t) + d_x(t) \cdot \ln(R_x(t) \cdot \mu_x(t))] + konstant \quad (4)$$

vilket med användning av

$$\lambda_x(t) = E[D_x(t)] = R_x(t) \cdot \mu_x(t) = R_x(t) \cdot e^{\alpha_x + \kappa_t \cdot \beta_x} \quad (5)$$

kan skrivas,

$$\ln L = \sum_{x,t} [-R_x(t) \cdot e^{\alpha_x + \kappa_t \cdot \beta_x} + d_x(t) \cdot (\alpha_x + \kappa_t \cdot \beta_x)] + konstant \quad (6)$$

Det ingen inskränkning av modellen att anta att, till exempel,

$$\sum_t \kappa_t = 0$$

och

$$\sum_x \beta_x = 1$$

Man kan illustrera att dessa normeringar ej påverkar $\mu_x(t)$ genom följande resonemang.

Betrakta en uppsättning godtyckliga värden på α_x, κ_t och β_x . Om vi nu gör de linjära transformationerna $\alpha'_x = \alpha_x + c \cdot \beta_x$, $\kappa'_t = d \cdot (\kappa_t - c)$ och $\beta'_x = \beta_x / d$ får vi samma värde på $\mu_x(t)$. Man kan därför välja konstanterna

c och d efter behag.

Exempel 1: Med $c = \frac{1}{n} \sum_t \kappa_t$ blir $\sum_t \kappa'_t = 0$.

Exempel 2: Med $d = \sum_x \beta_x$ blir $\sum_x \beta'_x = 1$

Exempel 3: Om man vill att $\alpha'_x = \mu_x(T)$ för något särskilt kalenderår T , kan man sätta $\alpha'_x = \mu_x(T)$, $\kappa'_t = \kappa_t - \kappa_T$ och $\beta'_x = \beta_x$. Vi väljer här restriktionerna $\sum_t \kappa_t = 0$ och $\sum_t \beta_x = 1$

Den allmänna teorin för detta maximeringsproblem kan formuleras på följande sätt. För att hitta maximum för denna funktion borde man bilda gradientvektorn och andra-derivat-matrisen, och med en Newton-Raphson-metodik iterativt söka sig fram till en maximumpunkt.

Vi har en endimensionell funktion $f(x)$ av en k -dimensionell variabel x , som uppfattas som en kolumnvektor. Vi betecknar gradientvektorn (som också är en kolumnvektor) i punkten x och $g(x)$ och andra-derivat-matrisen i punkten x med $B(x)$. Taylorutveckling av funktionen och dess gradient i punkten a har formen

$f(x) = f(a) + g(a)^T \cdot (x - a) + \frac{1}{2} \cdot (x - a)^T \cdot B(a) \cdot (x - a) + \text{termer av högre ordning}$

$$g(x) = g(a) + B(a) \cdot (x - a)$$

+termer av högre ordning

där superindex T står för transponering. Om matrisen $B(a)$ är positivt eller negativt definit så har den andragradsytan som representeras av de första termerna i utvecklingen sin extrempunkt i den punkt där gradienten är lika med noll, nämligen i punkten $x = a - B(a)^{-1}g(a)$. Newton-Raphson-iterationen mot extrempunkt sker då genom att bilda en följd x_n , där x_0 är en första gissning och $x_{n+1} = x_n - B(x_n)^{-1}g(x_n)$.

Emellertid blir denna allmänna metod rätt komplicerad. Andra-derivat-matrisen har hög ordning och det stöter på problem att beräkna dess invers. I stället fungerar en förenklad iterationsmetod, där man itererar en komponent av parametervariabeln i sänder. Vi bildar därför

$$\frac{d \ln L}{d \alpha_x} = \sum_t [-R_x(t) \cdot e^{\alpha_x + \kappa(t) \cdot b_x} + d_x(t)], \quad \text{för alla } x \quad (7)$$

$$\frac{d \ln L}{d \kappa(t)} = \sum_x [-R_x(t) \cdot b_x \cdot e^{\alpha_x + \kappa(t) \cdot b_x} + d_x(t) \cdot b_x], \quad \text{för alla } t \quad (8)$$

$$\frac{d \ln L}{d \beta_x} = \sum_t [-R_x(t) \cdot \kappa(t) \cdot e^{\alpha_x + \kappa(t) \cdot b_x} + d_x(t) \cdot \kappa(t)], \quad \text{för alla } x \quad (9)$$

Ekvationerna (7-9) kan med hjälp av tidigare införda beteckningar skrivas på ett enklare sätt. Genom att utnyttja (2), som anger väntevärde för $D_x(t)$, får vi

$$\frac{d \ln L}{d \alpha_x} = \sum_t [d_x(t) - \lambda_x(t)], \quad \text{för alla } x$$

$$\frac{d \ln L}{d \kappa(t)} = \sum_x [d_x(t) - \lambda_x(t)] \cdot b_x, \quad \text{för alla } t$$

$$\frac{d \ln L}{d \beta_x} = \sum_t [d_x(t) - \lambda_x(t)] \cdot \kappa(t), \quad \text{för alla } x$$

På samma sätt fås andra derivatorna

$$\frac{d^2 \ln L}{d \alpha_x^2} = - \sum_t \lambda_x(t), \quad \text{för alla } x$$

$$\frac{d^2 \ln L}{d \kappa^2(t)} = - \sum_x b_x^2 \cdot \lambda_x(t), \quad \text{för alla } t$$

$$\frac{d^2 \ln L}{d \beta_x^2} = - \sum_t \kappa^2(t) \cdot \lambda_x(t), \quad \text{för alla } x$$

Iterationen sker nu steg för steg genom att givet värden α_x , $\kappa(t)$ och b_x som uppfyller bivillkoret $\sum_t \kappa_t = 0$ och $\sum_x \beta_x = 1$ först bilda preliminära nya värden givna av

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_x &= \alpha_x + h \cdot \frac{\sum_t [d_x(t) - \lambda_x(t)]}{\sum_t \lambda_x(t)} \\ \tilde{\kappa}(t) &= \kappa(t) + h \cdot \frac{\sum_x [d_x(t) - \lambda_x(t)] \cdot b_x}{\sum_x \lambda_x(t) \cdot b_x^2(t)} \\ \tilde{\beta}_x &= \beta_x + h \cdot \frac{\sum_t [d_x(t) - \lambda_x(t)] \cdot \kappa(t)}{\sum_t \lambda_x(t) \cdot \kappa^2(t)}\end{aligned}$$

Här har i iterationen införts en steglängdsparameter h . Orsaken är att den riktiga iterationen utnyttjar inversen av andraderivatsmatrisen. Den ger ett samlat värde på krökningen av den yta som representeras av den funktion som ska maximeras. Andraderivatans avseende på enskild variabel är ett mått på krökningen i just den variabels riktning. Denna krökning kan vara mycket mindre (vilket motsvarar större krökningsradie), vilket i sin tur leder till att extremvärde förläggs längre bort. Parametern h ges därför ett värde som är mindre än 1.

Därefter normeras de preliminära värdena på sätt som angivits ovan, så att bivillkoren uppfylls. De nya värdena för α_x , $\kappa(t)$ och b_x i iterationen blir därför

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_x &= \tilde{\alpha}_x + c \cdot \tilde{b}_x \\ \bar{\kappa}(t) &= (\tilde{\kappa}(t) - c \cdot d) \\ \bar{b}_x &= \tilde{b}_x / d\end{aligned}$$

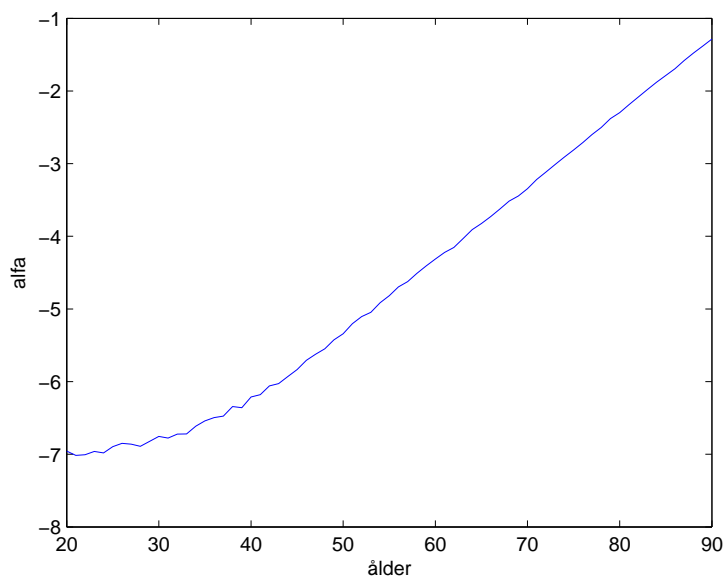
där

$$c = \frac{1}{n} \sum_t \tilde{\kappa}(t)$$

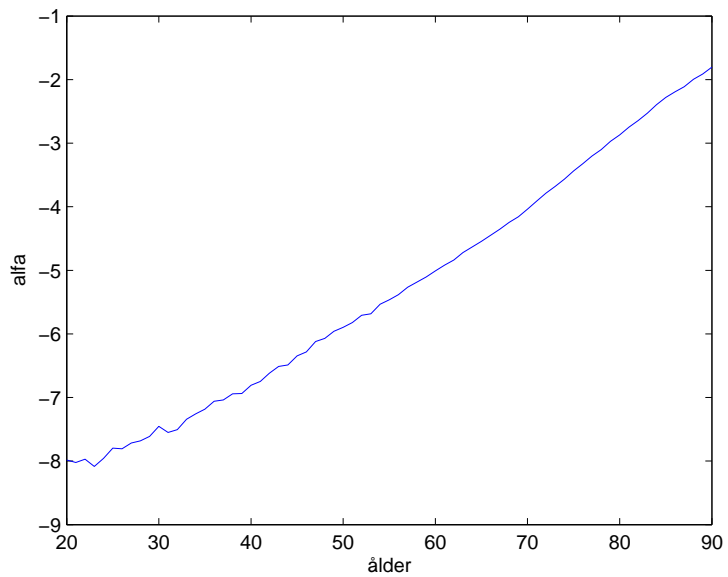
och

$$d = \sum_x \tilde{b}_x$$

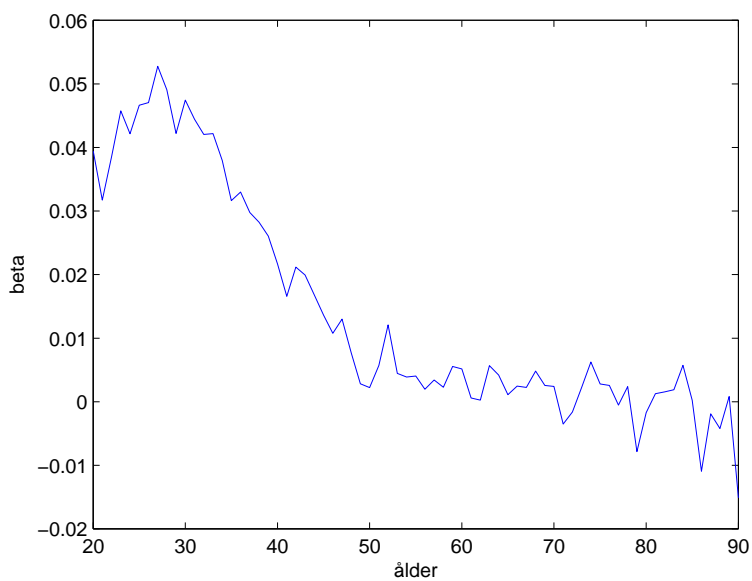
Skattningarna utfördes i Matlab. I tillämpningarna h valdes till 0.1 och 0.01. Tillräcklig noggrannhet uppnås då normalt efter 340-1800 iterationer. I figur 1-6 har vi skattningen av parametrarna α för perioden 1980-1990, β för perioden 1900-1920 och κ för perioden 1980-1990.



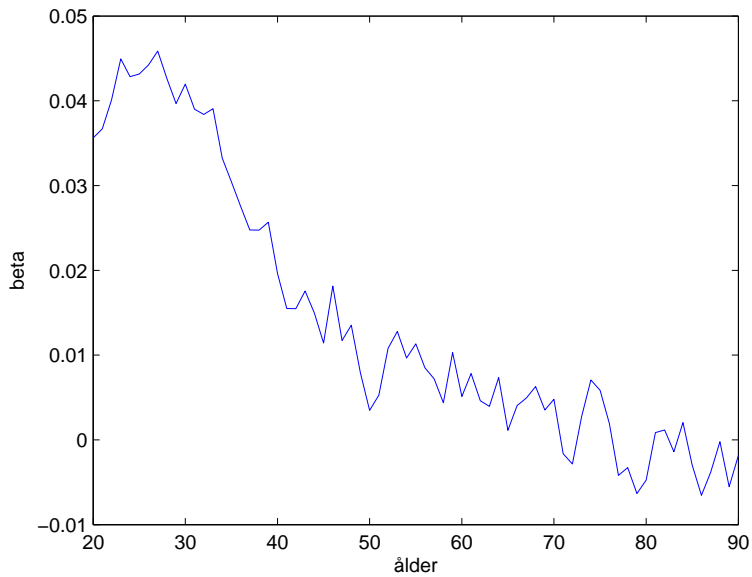
Figur 1: Skattningen av alfa för män åldern mellan 20-90 år, kalenderår 1980-1990



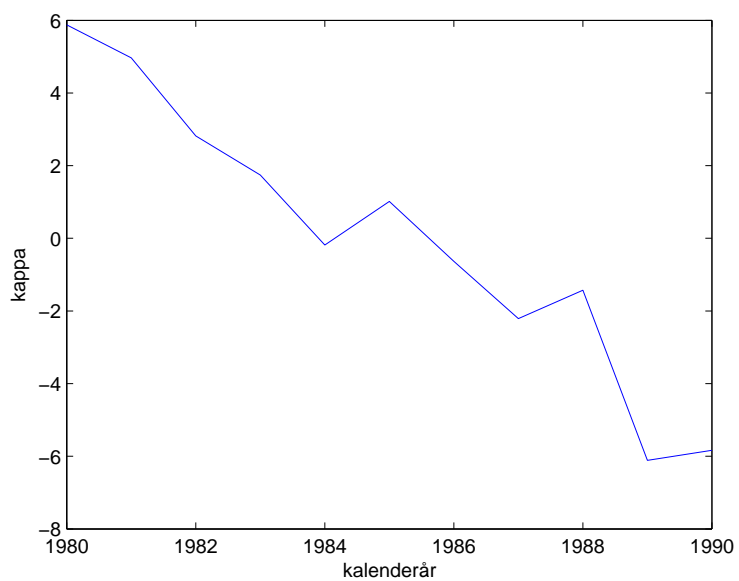
Figur 2: Skattningen av alfa för kvinnor åldern mellan 20-90 år, kalenderår 1980-1990



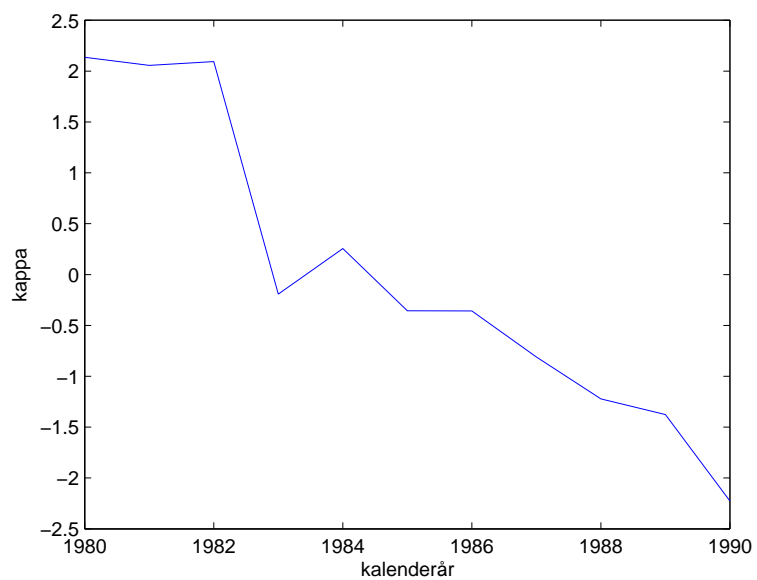
Figur 3: Skattningen av beta för män åldern mellan 20-90 år, kalenderår 1910-1920



Figur 4: Skattningen av beta för kvinnor åldern mellan 20-90 år, kalenderår 1910-1920



Figur 5: Skattningen av κ för män åldern mellan 20-90 år, kalenderår 1980-1990



Figur 6: Skattningen av κ för kvinnor åldern mellan 20-90 år, kalenderår 1980-1990

I figur 1 och 2 ovan visas den första parametern i Lee-Carters modell α_x . Parametern α_x är nästan räta linjen och det visar att dödligheten kan beskrivas väl med Makeham-modellen, där dödligheten växer exponentiellt med åldern. Lutningen av kurvorna förändras med ökande ålder. Både för män och kvinnor är α_x förhållandevis instabilt fram till 55-årsåldern. Från figur 1 och 2 ser vi att α_x ökar med åldern för både män och kvinnor, men den är något lägre för kvinnor än för män, vilket även stämmer väl med den empiriska dödlighetsintensiteten.

Kurvorna över β_x -termen är mycket oregelbundna. Modellens β_x -term kan tolkas som genomslaget av trendfaktorn $\kappa(t)$ i olika åldrar. Ju högre β_x desto större genomslag har trendfaktorn. Då $\kappa(t)$ är avtagande, vilket framgår av figur 5 och 6 kommer således dödlighetsintensiteten att minska mer över tiden i åldrar med höga β_x -värden än sådana med lägre. Kurvorna över $\kappa(t)$ visar att kvinnors dödlighet avtar långsammare med kalenderår än mäns.

Figur 3-4 visar att trenden i dödligheten kommer att variera både beroende på kön och ålder. Vi kan se att trenden har ett mer jämnt genomslag över olika åldrar för män än kvinnor. Kvinnor har en högre minskning än män i åldrarna 30-45 år. Däremot var minskningen av dödligheten högre för män i åldrarna 45-90 år.

Skattningarna av parametrarna i Lee-Carters modellen är olika för olika kalenderår och åldrar. Till exempel skattningen av κ både för män och kvinnor för perioden 1910-1920 som vi ser i figur 7-8 här nedan. Kurvorna över κ_t är oregelbundna. Förklaringen till den är spanska sjukan. Dödligheten fördubblas på grund av sjukdomen. Spanska sjukan var en svår epidemi av influensa som bröt ut i Madrid 1918, under slutet av första världskriget. Första fallet av spanska sjukan konstaterades i Sverige vid midsommar av 1918. Antal döda personer under 1918 var 104 591 jämfört med 1917 som var 77 385.



Figur 7: Skattningen av kappa för män åldern mellan 20-90 år, kalenderår 1910-1920



Figur 8: Skattningen av kappa för kvinnor åldern mellan 20-90 år, kalenderår 1910-1920

Genom att sätta samman dem skattade parameterarna (α_x, β_x och $\kappa(t)$) i Lee-Carters modellen fås den logaritmerade dödlighetsintensiteten för ålder x och kalenderår t .

5 Jämförelsevariabler

Som tidigare nämnts är syftet att skaffa en uppfattning om felet i prognoser av framtida dödlighet. För den skull studerar vi i detta arbete historisk data med Lee-Carters modellen och sedan jämföra detta med verkliga utfallet genom att ta några jämförelsevariabler. Som jämförelsevariabler har vi valt

1) Skatta $\mu_x(t)$ genom att använda observationer från lika många år bakåt i tiden som sedan ska skattas i framtiden och jämföra det med verkliga fallet.

2) Vad är skillnaden mellan den skattade sannolikheten att en x -årig individ avlider i ett givet åldersintervall givet att individen lever vid x och verkliga fallet.

3) Hur mycket skulle försäkringsbolaget ta ut i premie för olika försäkringar med den skattade $\hat{\mu}_x(t)$ och verkliga fallet.

För dem ovan nämnda jämförelsevariabler gör vi tio års, tjugo års och fyrty års prognoser och ser sedan hur mycket det skiljer sig från verkliga utfallet. Där även jämföra dem tre olika periodernas prognoser för att se om felet ökar eller minskar när man gör långa periodisk prognoser.

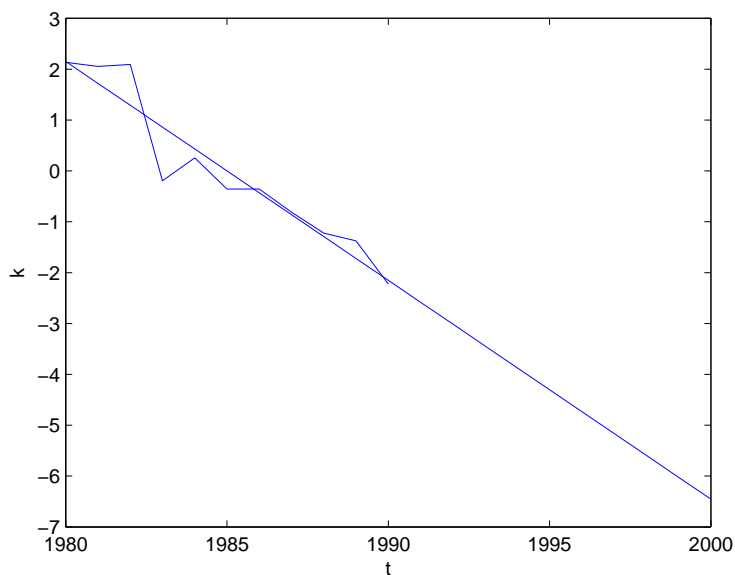
5.1 Jämförelse mellan den skattade $\hat{\mu}_x(t)$ och den verkliga utfallet

Dödlighetsestimeringen bygger på att extrapolation d.v.s man tar hänsyn till historisk data för att kunna prediktera kommande dödlighet. Parametrarna i Lee-Carters modellen skattas med hjälp av historisk data. För att utföra dem tre olika periodiska prognoser som nämns ovan, skattar vi parametrarna i Lee-Carters modellen (α_x, β_x och κ_t) utifrån data från intervallet $t=[T, T+t]$, där $T=1900-2000$ och t är lika med tio för tio års prognos, tjugo för tjugo års prognos och fyrty för fyrty års prognos.

Med hjälp av de skattade parameterarna kan vi nu gå bakåt i tiden och estimerar dödlighetsintensiteten $\mu_x(t)$ genom att använda observationer från lika många år bakåt i tiden som sedan ska skattas i framtiden för dem tre olika perioderna. Modellen antar att dödlighetsintensiteten över tiden drivs av enda tidsvarierande parameter d.v.s κ_t . Utifrån den skattade $\kappa(t)$ skattar vi en linje trend med minsta-kvadratmetoden (se figur 9). Den skattade

trenden i $\kappa(t)$ används i prognosen.

I figur 9 har en linje trend skattas med minsta-kvadratmetoden utifrån den skattade $\kappa(t)$, t för perioden 1980-2000. Detta är för tio års prognos för kvinnor. För den övriga prognosen betar sig den skattade trenden i $\kappa(t)$ ungefär på samma sätt både för män och kvinnor.



Figur 9: Skattningen av kappa för kvinnor åldern mellan 20-90 år, kalenderår 1980-1990

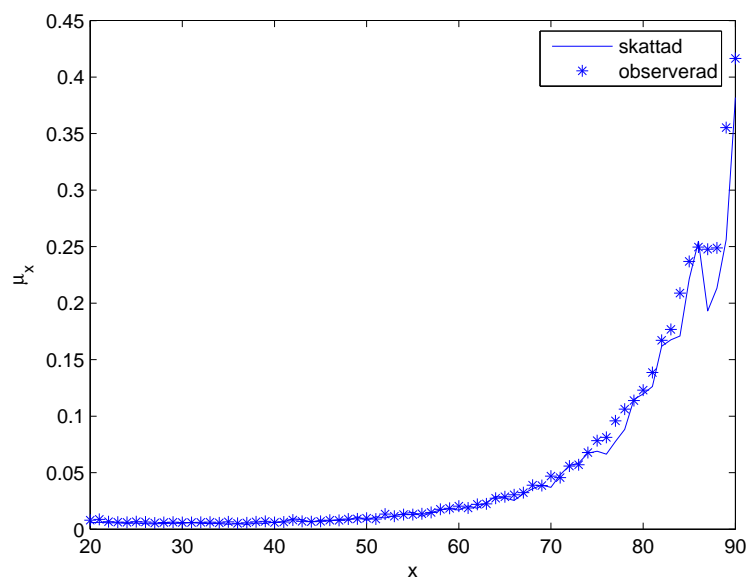
Därur bildas prognostiserade $\mu_1(x) = \hat{\mu}(x, t) = \exp[\alpha_x + \beta_x \cdot \kappa(T)]$ för något intervall som ligger utanför det intervallet $[T, T+t]$ där vi skattar parametrarna α_x , β_x och $\kappa(t)$.

Skattningen av den verkliga observerade dödligheten i den ursprungliga datamaterialet vid tidpunkten T är $\mu_2(x) = \mu = \frac{D}{R}$ där D är antal döda individer och R är risktiden. Vi har ju sett tidigare att skattningen av R är $\hat{R}_x(t) = \frac{N_{x-1}(t-1) + N_x(t)}{2}$ och att $N_{x-1}(t-1) = N_x(t) + D_x(t)$, då är det $\hat{\mu}$ är antal döda genom medeltalet hur många som lever under året,

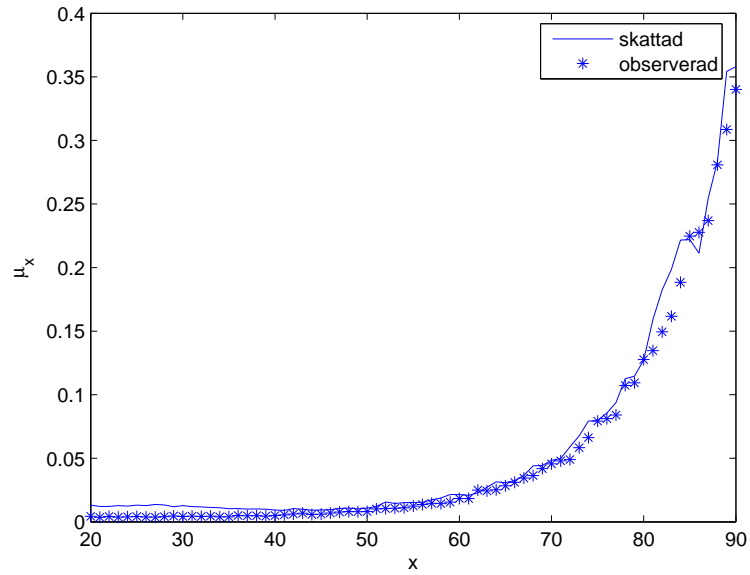
$$\hat{\mu} = \frac{D_x(t)}{N_x(t) + \frac{D_x(t)}{2}}$$

Nu kan vi utföra jämförelsen mellan den skattade dödlighetsintensiteten $\mu_1(x)$ och verkliga utfallet $\mu_2(x)$ genom att plota dem i samma graf. Vi börjar med att göra tio års prognos för dem tre olika jämförelse variabler. I figur 10-27 nedan har vi den observerade och skattade dödlighetsintensite-

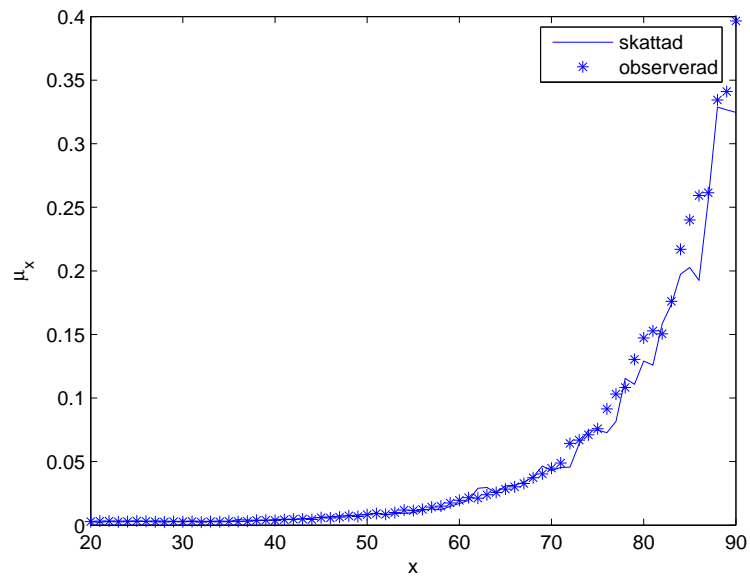
ten, både för män och kvinnor åldern mellan (20-90) år.



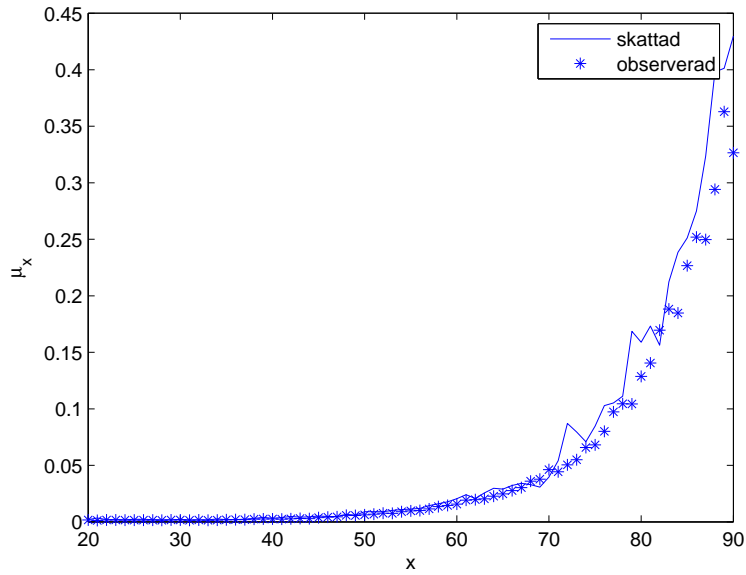
Figur 10: Observerad $\mu_x(t)$ 1920 och skattad från 1900-1910, för män



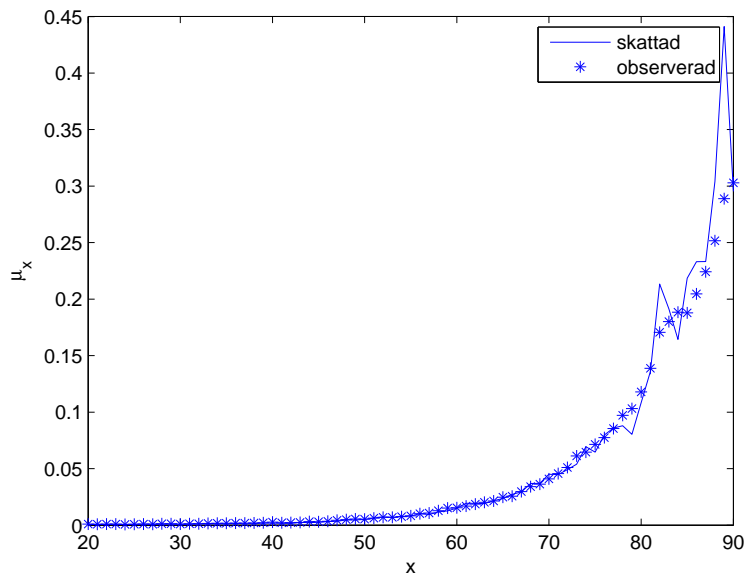
Figur 11: Observerad $\mu_x(t)$ 1930 och skattad från 1910-1920, för män



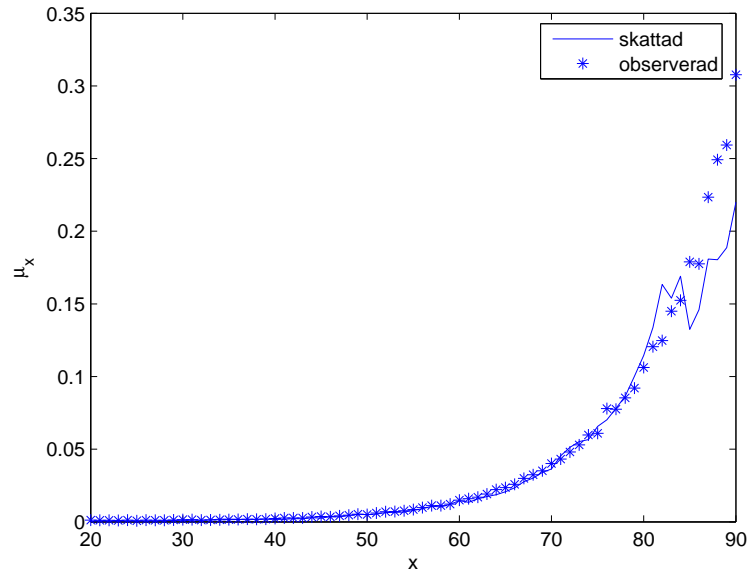
Figur 12: Observerad $\mu_x(t)$ 1940 och skattad från 1920-1930, för män



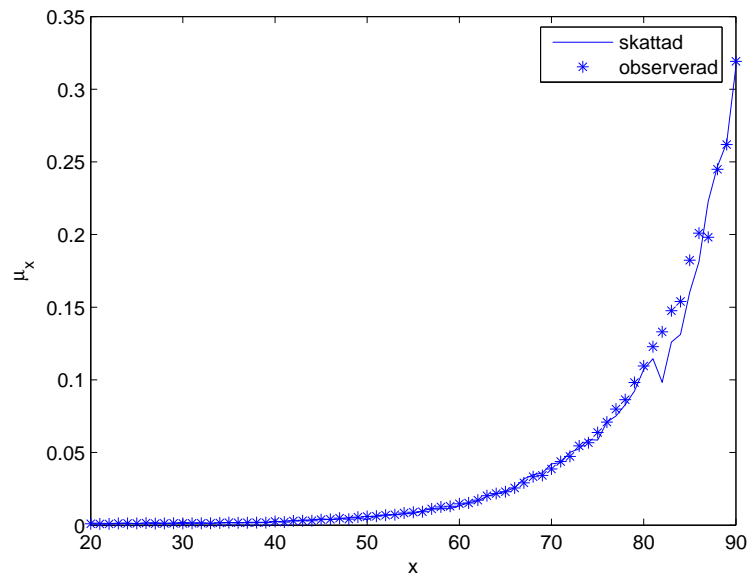
Figur 13: Observerad $\mu_x(t)$ 1950 och skattad från 1930-1940, för män



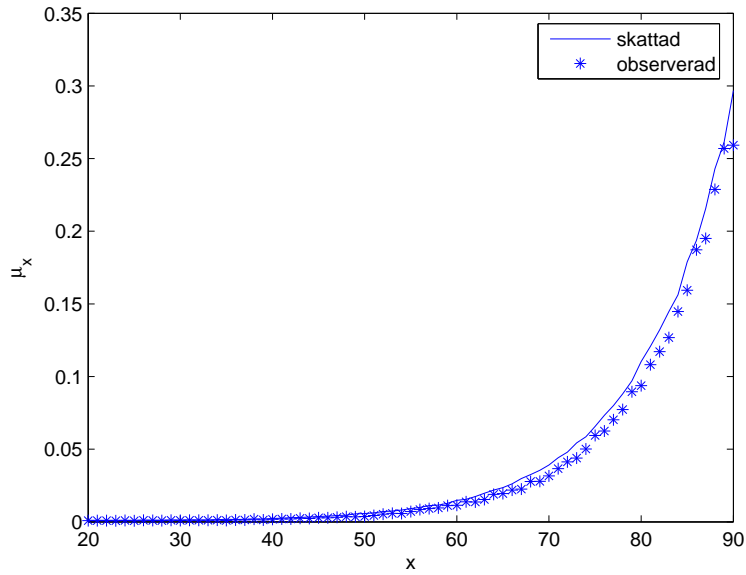
Figur 14: Observerad $\mu_x(t)$ 1960 och skattad från 1940-1950, för män



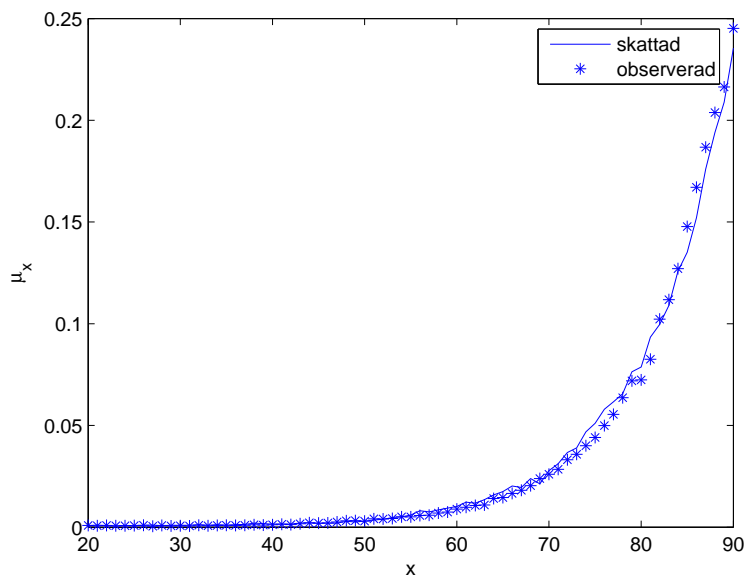
Figur 15: Observerad $\mu_x(t)$ 1970 och skattad från 1950-1960, för män



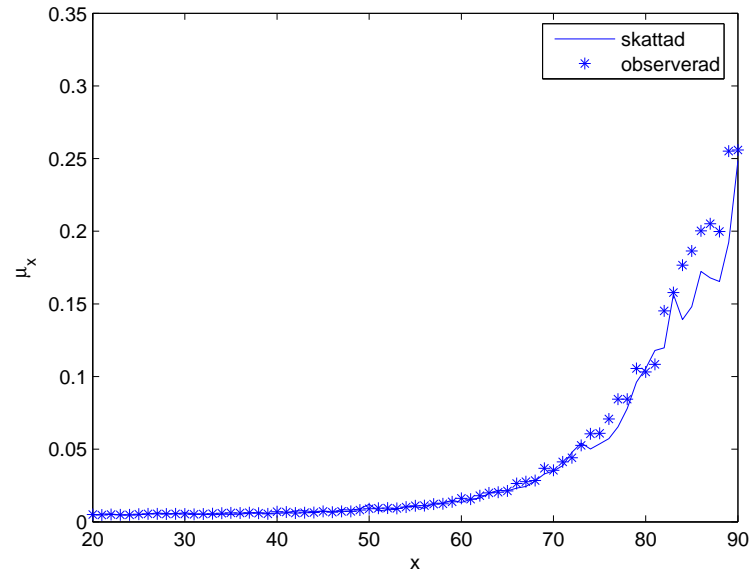
Figur 16: Observerad $\mu_x(t)$ 1980 och skattad från 1960-1970, för män



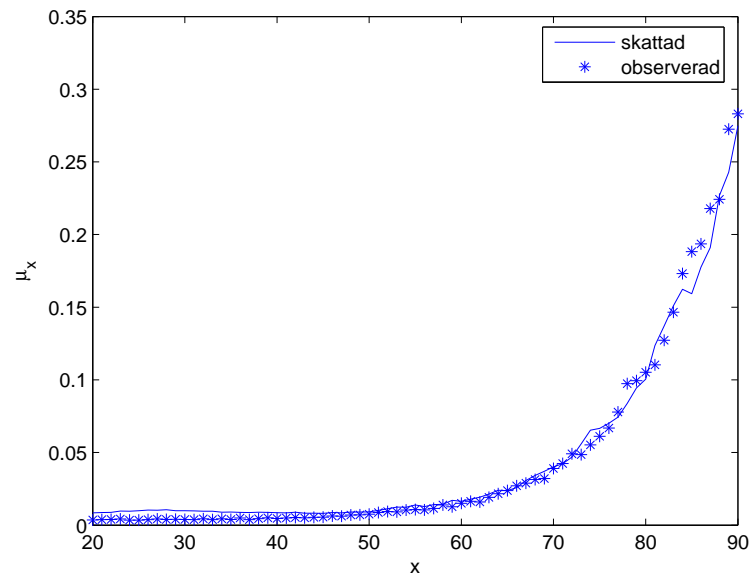
Figur 17: Observerad $\mu_x(t)$ 1990 och skattad från 1970-1980, för män



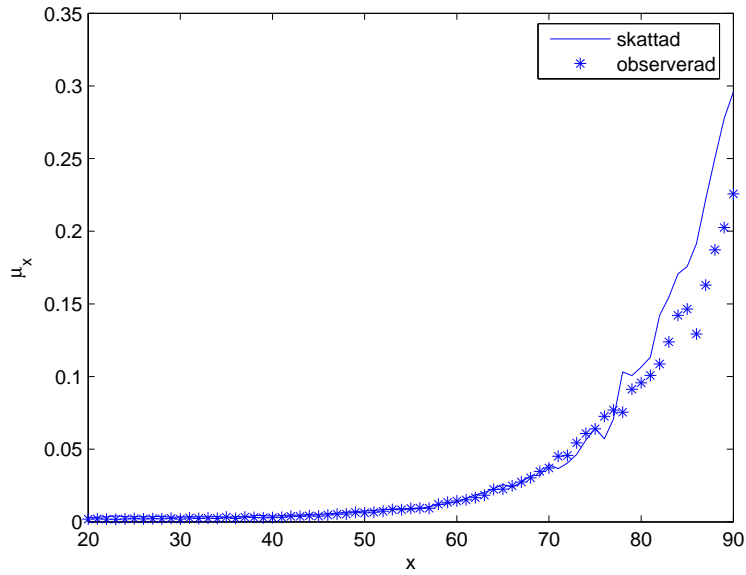
Figur 18: Observerad $\mu_x(t)$ 2000 och skattad från 1980-1990, för män



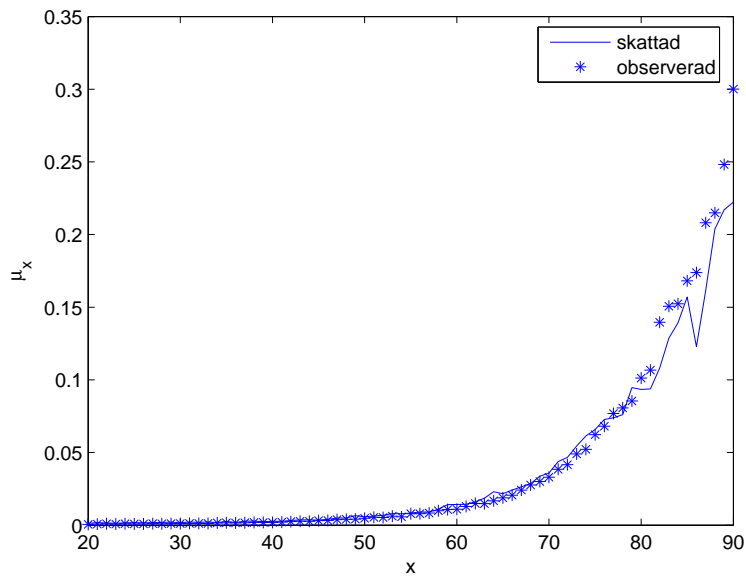
Figur 19: Observerad $\mu_x(t)$ 1920 och skattad från 1900-1910, för kvinnor



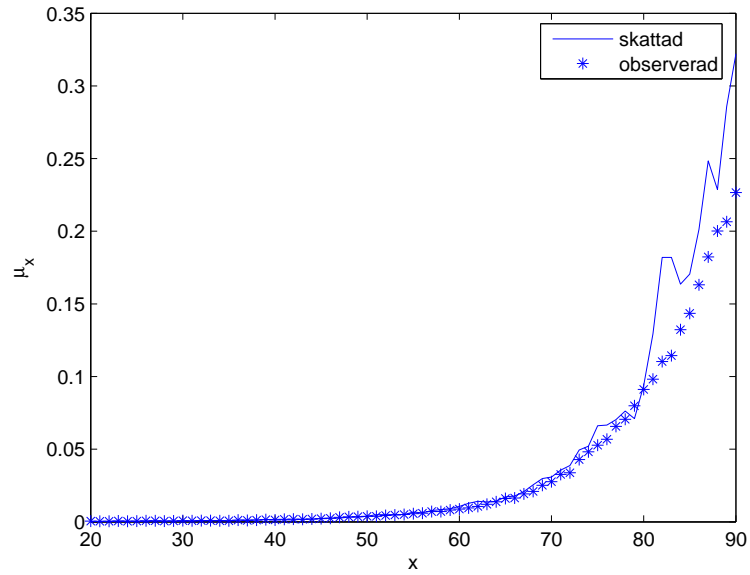
Figur 20: Observerad $\mu_x(t)$ 1930 och skattad 1910-1920, för kvinnor



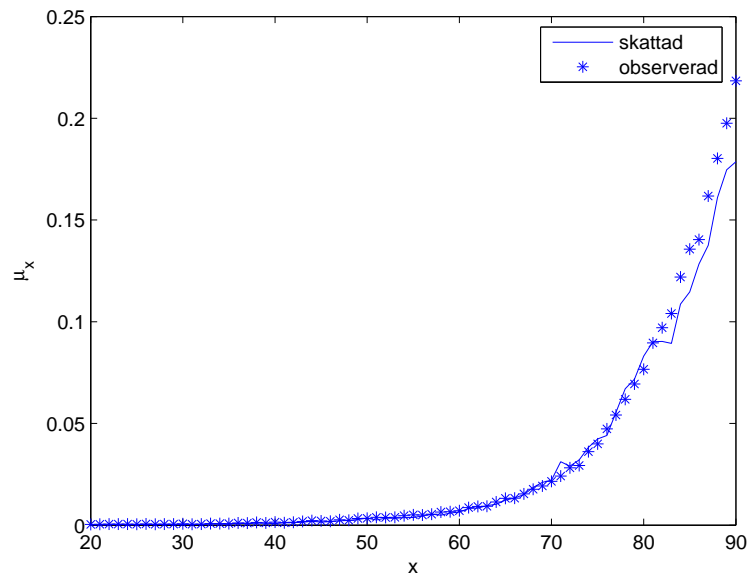
Figur 21: Observerad $\mu_x(t)$ 1940 och skattad från 1920-1930, för kvinnor



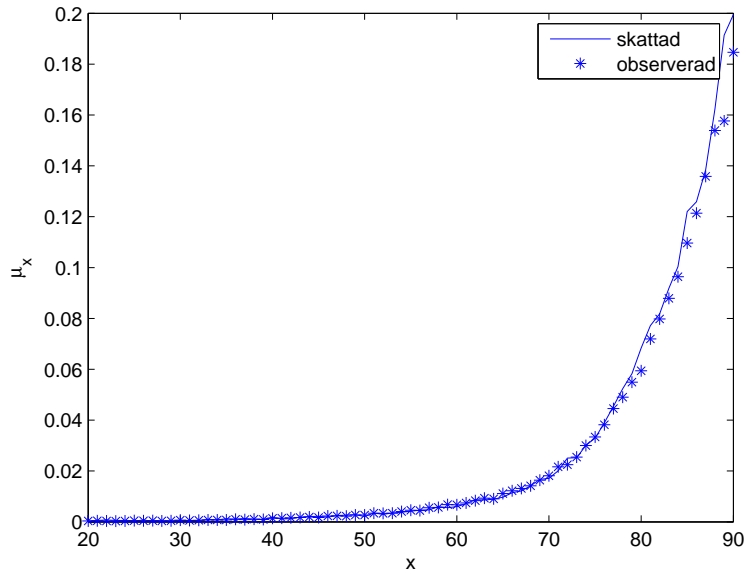
Figur 22: Observerad $\mu_x(t)$ 1950 och skattad från 1930-1940, för kvinnor



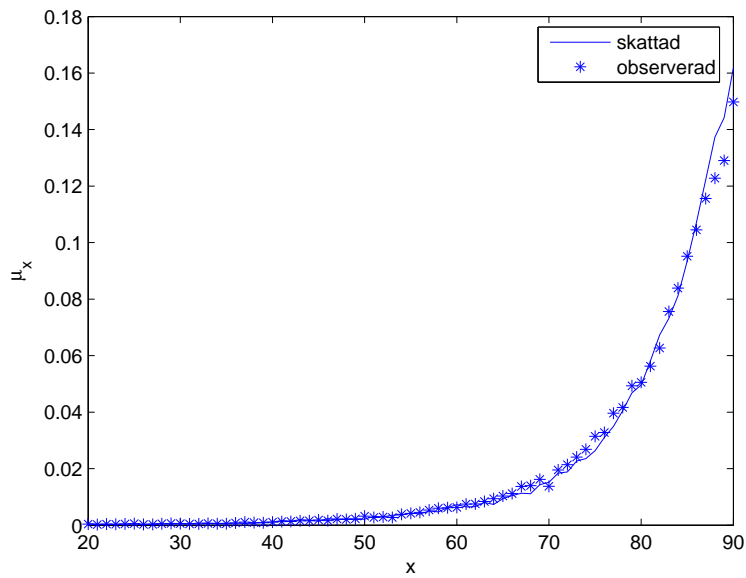
Figur 23: Observerad $\mu_x(t)$ 1960 och skattad från 1940-1950, för kvinnor



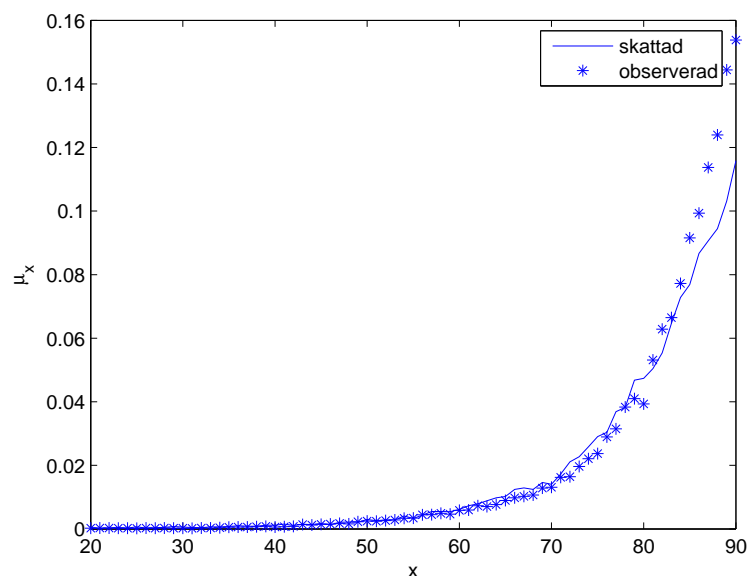
Figur 24: Observerad $\mu_x(t)$ 1970 och skattad från 1950-1960, för kvinnor



Figur 25: Observerad $\mu_x(t)$ 1980 och skattad från 1960-1970, för kvinnor



Figur 26: Observerad $\mu_x(t)$ 1990 och skattad från 1970-1980, för kvinnor



Figur 27: Observerad $\mu_x(t)$ 2000 och skattad från 1980-1990, för kvinnor

Den prognostiserade dödlighet påverkas främst av trenden och vilken inverkan den har i olika åldrar, det vill säga kombinationen av värden på β_x och $\kappa(t)$. Parametern α_x sätter startnivå på dödlighet. I figur 11 och 20 kan vi se hur skattningen av κ_t i figur 7-8 för både män och kvinnor påverkar prognosen. Modellen överskattar dödligheten redan vid låga åldrar. Dödligheten både hos män och kvinnor, åldern mellan 20 till ungefär 75 år överensstämmer mellan observerade data och skattade dödlighet. Därimot vid högre åldrar än 75 minskar överensstämmelsen. Detta kan bero på att det är för få observationer vid höga åldrar.

5.2 Sannolikheten att man avlider i ett visst åldersintervall

En annan jämförelsetal är att titta på skillnaden mellan den skattade sannolikheten att en x -årig individ avlider i intervallet $(x, x+h)$ där $h > 0$, givet att individen lever vid x , det vill säga $P[T < x+h \mid T \geq x]$ där T är individens livslängd.

Fördenskull bildar vi överlevelsefunktionen $\ell(x)$, $20 \leq x \leq 90$. Överlevelsefunktionen är sannolikheten för en x -årig individ att leva ytterligare t år. Vi har formeln

$$\ell(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu(y)dy\right)$$

Men nu har vi $\mu(x)$ bara från $x=20$, så vi kan bara få fram

$$\frac{\ell(x)}{\ell(20)} = \exp\left(-\int_{20}^x \mu(y)dy\right), \text{ för } 20 < x \leq 90$$

och den kan vi approximera med trapetsformeln enligt följande:

$$\frac{\ell(x)}{\ell(20)} = \exp\left(\frac{\mu(20) + \mu(x)}{2} + \sum_{y=21}^{x-1} \mu(y)\right), \text{ för } 20 < x \leq 90$$

Nu kan vi bilda denna funktion för alla x med $20 < x \leq 90$ för båda dödlighetsfunktionerna μ_1 och μ_2 . Vi kallar $\frac{\ell(x)}{\ell(20)}$ för $g(x)$, så vi har $g_1(x)$ och $g_2(x)$. Då har vi

$$P[a \leq T_x < b] = \frac{\ell(a) - \ell(b)}{\ell(a)} = \frac{g(a) - g(b)}{g(a)} = 1 - \frac{g(b)}{g(a)},$$

för något värde på a och b .

Med hjälp av ovan stående formel kan vi nu bilda den sannolikheten som vi ska jämföra för de båda dödlighetsfunktionerna μ_1 och μ_2 . Vi har bestämt oss för att studera sannolikheten att en individ avlider i denna åldersintervall $P[30 \leq T < 50 \mid T > 30]$, $P[50 \leq T < 65 \mid T > 50]$ och $P[65 \leq T < 80 \mid T > 65]$.

Från tabell 1-2 kan observeras att dödligheten minskar ju längre fram i tiden vi kommer. Minskningen av dödligheten beror på förbättrade levnadsförhållande och livsstil. Mediciniska utvecklingen har också spelat en stor roll i minskningen av dödligheten. Denna utveckling antas fortsätta även i framtiden. Vi kan även observera att kvinnor har lägre sannolikhet att dö än män. Relativa felet för män respektive kvinnor är mindre för åldern 65 år jämfört med åldern under 65 år. Figuren 27 och 28 nedan visar relativa felet för män respektive kvinnor, där vi ser att metoden överskattar sannolikheten att en individ avlider i de olika åldersintervallerna för kvinnor. Metoden överskattar sannolikheten att en individ avlider i åldersintervallet (30,50) givet att

man lever vid 30 år, för män. Däremot underskattar metoden sannolikheten för åldersintervall (50,65) och för åldersintervall (65,80) varken överskattar eller underskattar metoden sannolikheten.

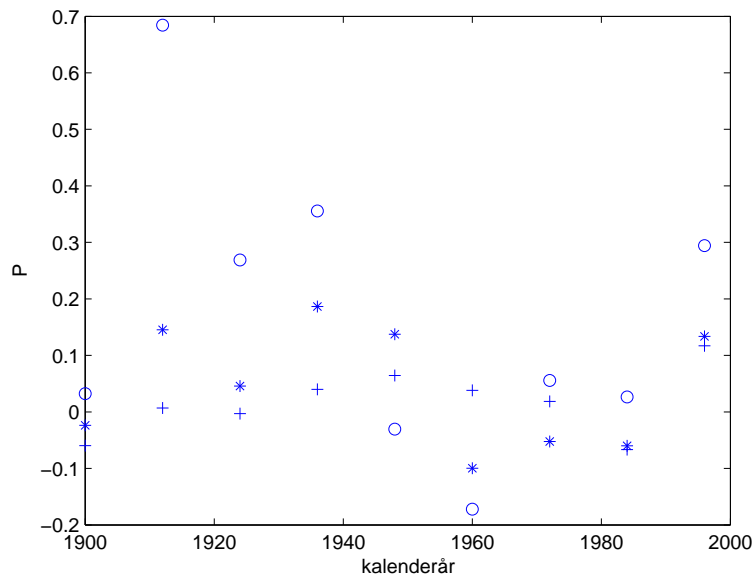
Att metoden överskattar sannolikheten att man avlider i dem givna åldersintervall betyder att i verkligheten är sannolikheten lägre och minskar med tiden. Detta har både för och nackdel för försäkringsbolaget. Nackdelen är om individen tecknar en livsränta försäkring, då är effekten negativ för försäkringsgivaren men däremot om individen tecknar en dödsfalls försäkring kan hända att försäkringsgivaren tar ut mycket i premien, då kan försäkringsgivaren lämna tillbaka pengarna som återbärning om försäkringen är berättigade till återbärning. När metoden underskattar sannolikheten gäller det tvärtom.

| Period | | Skattat P | Verklig P | Relativa felet |
|----------------|-------------------------------------|-----------|-----------|----------------|
| 1900-1910→1920 | P[$30 \leq T < 50$ $T \geq 30$] | 0,1243 | 0,1204 | 0,0322 |
| | P[$50 \leq T < 65$ $T \geq 50$] | 0,1802 | 0,1846 | -0,0238 |
| | P[$65 \leq T < 80$ $T \geq 65$] | 0,5270 | 0,5604 | -0,0596 |
| 1910-1920→1930 | P[$30 \leq T < 50$ $T \geq 30$] | 0,1627 | 0,0966 | 0,6843 |
| | P[$50 \leq T < 65$ $T \geq 50$] | 0,2085 | 0,1821 | 0,1452 |
| | P[$65 \leq T < 80$ $T \geq 65$] | 0,5639 | 0,5600 | 0,0068 |
| 1920-1930→1940 | P[$30 \leq T < 50$ $T \geq 30$] | 0,0879 | 0,0693 | 0,2689 |
| | P[$50 \leq T < 65$ $T \geq 50$] | 0,1771 | 0,1694 | 0,0456 |
| | P[$65 \leq T < 80$ $T \geq 65$] | 0,5490 | 0,5506 | -0,0030 |
| 1930-1940→1950 | P[$30 \leq T < 50$ $T \geq 30$] | 0,0619 | 0,0457 | 0,3555 |
| | P[$50 \leq T < 65$ $T \geq 50$] | 0,1649 | 0,1389 | 0,1866 |
| | P[$65 \leq T < 80$ $T \geq 65$] | 0,5486 | 0,5276 | 0,0398 |
| 1940-1950→1960 | P[$30 \leq T < 50$ $T \geq 30$] | 0,0330 | 0,0340 | -0,0304 |
| | P[$50 \leq T < 65$ $T \geq 50$] | 0,1254 | 0,1103 | 0,1375 |
| | P[$65 \leq T < 80$ $T \geq 65$] | 0,5066 | 0,4760 | 0,0643 |
| 1950-1960→1970 | P[$30 \leq T < 50$ $T \geq 30$] | 0,0249 | 0,0300 | -0,1722 |
| | P[$50 \leq T < 65$ $T \geq 50$] | 0,0846 | 0,0940 | -0,0996 |
| | P[$65 \leq T < 80$ $T \geq 65$] | 0,4225 | 0,4069 | 0,0382 |
| 1960-1970→1980 | P[$30 \leq T < 50$ $T \geq 30$] | 0,0294 | 0,0278 | 0,0557 |
| | P[$50 \leq T < 65$ $T \geq 50$] | 0,0808 | 0,0852 | -0,0523 |
| | P[$65 \leq T < 80$ $T \geq 65$] | 0,3553 | 0,3488 | 0,0185 |
| 1970-1980→1990 | P[$30 \leq T < 50$ $T \geq 30$] | 0,0250 | 0,0244 | 0,0264 |
| | P[$50 \leq T < 65$ $T \geq 50$] | 0,0757 | 0,0805 | -0,0600 |
| | P[$65 \leq T < 80$ $T \geq 65$] | 0,2989 | 0,3202 | -0,0667 |
| 1980-1990→2000 | P[$30 \leq T < 50$ $T \geq 30$] | 0,0243 | 0,0188 | 0,2942 |
| | P[$50 \leq T < 65$ $T \geq 50$] | 0,0795 | 0,0701 | 0,1336 |
| | P[$65 \leq T < 80$ $T \geq 65$] | 0,3048 | 0,2728 | 0,1169 |

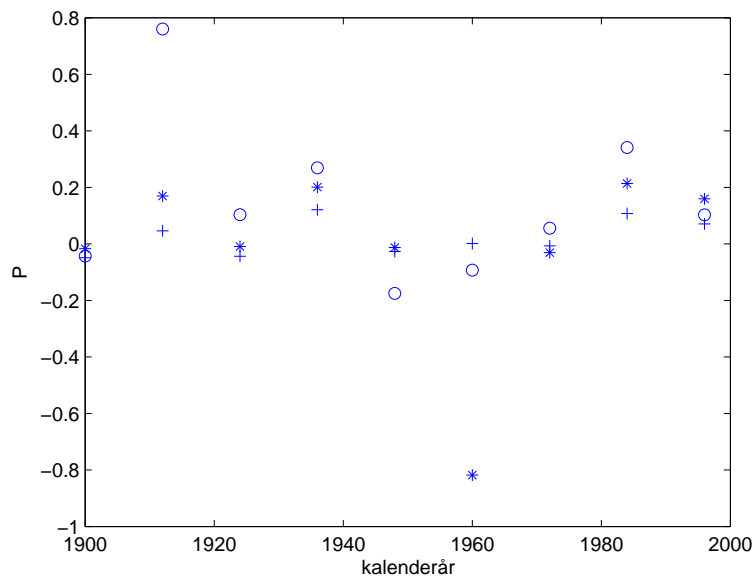
Tabell 1: Sannolikheten att en individ avlider i åldersintervall $(30,50)$, $(50,65)$ och $(65,80)$ kvinnor

| Period | | Skattat P | Verklig P | Relativa felet |
|----------------|---------------------------------|-----------|-----------|----------------|
| 1900-1910→1920 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,1224 | 0,1279 | -0,0429 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,2206 | 0,2244 | -0,0167 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,5886 | 0,6190 | -0,0491 |
| 1910-1920→1930 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,1871 | 0,1063 | 0,7605 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,2519 | 0,2153 | 0,1696 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,6418 | 0,6133 | 0,0465 |
| 1920-1930→1940 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,0919 | 0,0833 | 0,1037 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,2117 | 0,2137 | -0,0093 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,6160 | 0,6443 | -0,0438 |
| 1930-1940→1950 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,0717 | 0,0565 | 0,2694 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,2209 | 0,1839 | 0,2011 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,6763 | 0,6033 | 0,1209 |
| 1940-1950→1960 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,0417 | 0,0505 | -0,1749 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,1725 | 0,1747 | -0,0126 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,5758 | 0,5915 | -0,0265 |
| 1950-1960→1970 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,0462 | 0,0510 | -0,0929 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,1546 | 0,1684 | -0,0818 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,5632 | 0,5624 | 0,0015 |
| 1960-1970→1980 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,0550 | 0,0521 | 0,0557 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,1656 | 0,1708 | -0,0306 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,5596 | 0,5633 | -0,0067 |
| 1970-1980→1990 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,0526 | 0,0392 | 0,3411 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,1707 | 0,1406 | 0,2142 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,5681 | 0,5129 | 0,1076 |
| 1980-1990→2000 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,0332 | 0,0301 | 0,1028 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,1224 | 0,1055 | 0,1595 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,4659 | 0,4350 | 0,0709 |

Tabell 2: Sannolikheten att ett individ avlider i åldersintervall, (30,50), (50,65) och (65,80) män



Figur 28: *Relativa felet för sannolikheten att en individ avlider i åldersintervall (30,50) ringen, (50,65) ggr och (65,80) plus, kvinnor*



Figur 29: *Relativa felet för sannolikheten att en individ avlider i åldersintervall (30,50) ringen, (50,65) ggr och (65,80) plus, män*

5.3 Premien

Här ska vi undersöka hur mycket försäkringsbolaget skall ta ut i premie från en x -årig individ som är försäkrad, för olika försäkringar med den skattade $\hat{\mu}_x(t)$ och verkliga fallet. Vi har tagit två försäkringar som har mest med döden att göra, uppskjuten temporär livränta och kapitalförsäkring för dödsfall.

Uppskjuten temporär livränta innebär att, från försäkringsbolaget betalas det ut ett konstant belopp k per år med början efter m år så länge som den försäkrade lever, dock längst i s år. Försäkringsbeloppet betalas med andra ord ut under åldersperioden $(x+m, x+m+s)$ under förutsättningen att individen lever i intervallet.

Kapitalförsäkring för dödsfall innebär att, från försäkringsbolaget betalas det ut 1 krona då den försäkrade avlider under förutsättning att det inträffar senast då den försäkrade uppnått åldern z . Från försäkringsbolaget görs alltså enbart en engångsutbetalning.

Beräkningen som ska göras här nu är kapitalvärdet. Kapitalvärdet av en utbetalning är väntevärdet av nuvärdet av utbetalningen diskonterad med avseende på räntan och dödlighet. Fördenskull bestämmer vi kommutationsfunktionerna $D(x)$, $N(x)$ och $M(x)$. $D(x)$ är de levandes diskonterade tal, $N(x)$ är summan av de levandes diskonterade tal och $M(x)$ är summan av de avlidnas diskonterade tal.

$$D(x) = \ell(x) \cdot \exp(-\delta \cdot x),$$

$$N(x) = \int_x^\infty D(t)dt,$$

$$M(x) = \int_x^\infty \mu_t D(t)dt$$

där $x \geq 0$ och $\delta = 0,02$.

Med hjälp av Euler-Maclaurins summationformel kan $N(x)$ skrivas som

$$N(x) = \sum_{i=0}^w D(x+i) - \frac{D(x)}{2} - \frac{1}{12}(\mu_x + \delta)D(x).$$

$M(x)$ kan skrivas som, $M(x) = D(x) - \delta N(x)$.

Med de ovanstående kommutationsfunktionerna kan vi nu beräkna kapitalvärdet för uppskjuten temporär livränta och kapitalförsäkring för dödsfall. Vi börjar med att beräkna kapitalvärdet för uppskjuten temporär livränta. Betrakta åldern ($x=30$ och $x=45$) för två individer som är försäkrade. Om individen är 30 år gammal betalar han premie i 35 år ($m=35$), efter 65 får han utbetalningar i 15 år ($s=15$) om individen är vid liv, dvs utbetalningen sker i åldersintervallet (65,80) och om individen är 45 år gammal betalar han premie i 20 år ($m=20$), efter 65 får han utbetalningar i 15 år ($s=15$) om individ är vid liv, dvs utbetalningen sker i åldersintervall (65,80). Årspremien för uppskjuten temporära livränta för $x=30$ ges av

$$A = \frac{N(65) - N(80)}{N(30) - N(65)}$$

och engångspremien ges av

$$E = \frac{N(65) - N(80)}{D(30)}$$

Årspremien för kapitalförsäkring för dödsfall, $x=30$ ges av

$$E = \frac{M(30) - M(65)}{N(30) - N(65)}$$

Engångspremien för kapitalförsäkring för dödsfall, $x=30$ ges av

$$E = \frac{M(30) - M(65)}{D(30)}$$

Årspremien för uppskjuten temporära livränta för $x=45$ ges av

$$P = \frac{N(65) - N(80)}{N(45) - N(65)}$$

och engångspremien ges av

$$E = \frac{N(65) - N(80)}{D(45)}$$

Årspremien för kapitalförsäkring för dödsfall, $x=45$ ges av

$$P = \frac{M(45) - M(65)}{N(45) - N(65)}$$

Engångspremien för kapitalförsäkring för dödsfall, $x=45$ ges av

$$E = \frac{M(45) - M(65)}{D(45)}$$

I Tabellen 3-6 och figur 30-31 har vi relativa felet till de två olika försäkringarna, för de olika åldrarna. Om relativa felet är störst eller minst för de olika åldrarna är svårt att säga, för det varierar mycket. Relativa felet för uppskjuten temporär livränta för kvinnor i figuren 30 nedan ser vi att metoden underskattar premien för båda åldrarna men däremot överskattar premien för kapitalförsäkringen för båda åldrarna. I figur 31 ser vi att metoden överskattar årspremien och underskattar engångspremien för uppskjuten temporär livränta för båda åldrarna för män. Årspremien för Kapitalförsäkringen för dödsfall överskattas för åldern 45 och underskattas för åldern 30 men däremot överskattar metoden engångspremien för båda ålderarna.

| Period | Årspremie för åldern 30 | Engångspremie för åldern 30 | Årspremie för åldern 45 | Engångspremie för åldern 45 |
|----------------|----------------------------|--------------------------------|----------------------------|--------------------------------|
| 1900-1910→1920 | 0,0157 | 0,0453 | 0,0181 | 0,0462 |
| 1910-1920→1930 | -0,0626 | -0,1137 | -0,0357 | -0,0529 |
| 1920-1930→1940 | -0,0069 | -0,0579 | 0,0019 | -0,0419 |
| 1930-1940→1950 | -0,0581 | -0,0544 | -0,0481 | -0,0423 |
| 1940-1950→1960 | -0,0391 | -0,0982 | -0,0374 | -0,0983 |
| 1950-1960→1970 | -0,0228 | -0,0712 | -0,0271 | -0,0768 |
| 1960-1970→1980 | 0,0054 | -0,0076 | 0,0054 | -0,0061 |
| 1970-1980→1990 | 0,0168 | 0,0218 | 0,0168 | 0,0228 |
| 1980-1990→2000 | -0,0286 | -0,0308 | -0,0258 | -0,0262 |

Tabell 3: *Relativa felet av årspremie och engångspremie för uppskjuten temporär livränta, kvinnor*

| Period | Årspremie för åldern 30 | Engångspremie för åldern 30 | Årspremie för åldern 45 | Engångspremie för åldern 45 |
|----------------|----------------------------|--------------------------------|----------------------------|--------------------------------|
| 1900-1910→1920 | 0,0076 | 0,0065 | 0,0109 | 0,0084 |
| 1910-1920→1930 | 0,4555 | 0,3733 | 0,1983 | 0,1745 |
| 1920-1930→1940 | 0,1507 | 0,1332 | 0,0781 | 0,0700 |
| 1930-1940→1950 | 0,2686 | 0,2496 | 0,2253 | 0,2095 |
| 1940-1950→1960 | 0,0888 | 0,0872 | 0,1123 | 0,1085 |
| 1950-1960→1970 | -0,1389 | -0,1335 | -0,0916 | -0,0876 |
| 1960-1970→1980 | -0,0163 | -0,0168 | -0,0426 | -0,0416 |
| 1970-1980→1990 | -0,0290 | -0,0293 | -0,0519 | -0,0512 |
| 1980-1990→2000 | 0,1875 | 0,1819 | 0,1339 | 0,1307 |

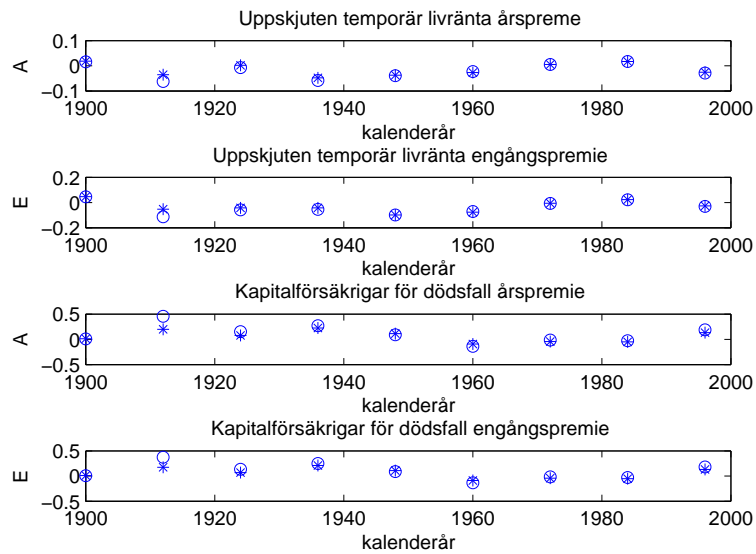
Tabell 4: *Relativa felet av årspremie och engångspremie för kapitalförsäkring för dödsfall, kvinnor*

| Period | Årspremie för åldern 30 | Engångspremie för åldern 30 | Årspremie för åldern 45 | Engångspremie för åldern 45 |
|----------------|----------------------------|--------------------------------|----------------------------|--------------------------------|
| 1900-1910→1920 | 0,0242 | 0,0547 | 0,0568 | 0,0477 |
| 1910-1920→1930 | -0,0912 | -0,1754 | -0,0586 | -0,1054 |
| 1920-1930→1940 | 0,0054 | 0,0269 | 0,0065 | 0,0333 |
| 1930-1940→1950 | -0,0818 | -0,1372 | -0,0702 | -0,1267 |
| 1940-1950→1960 | 0,0181 | 0,0643 | 0,0156 | 0,0615 |
| 1950-1960→1970 | -0,0047 | -0,0948 | -0,0109 | -0,1054 |
| 1960-1970→1980 | 0,0083 | 0,0662 | 0,0126 | 0,0845 |
| 1970-1980→1990 | -0,0770 | -0,1180 | -0,0671 | -0,1116 |
| 1980-1990→2000 | -0,0350 | -0,0496 | -0,0326 | -0,0449 |

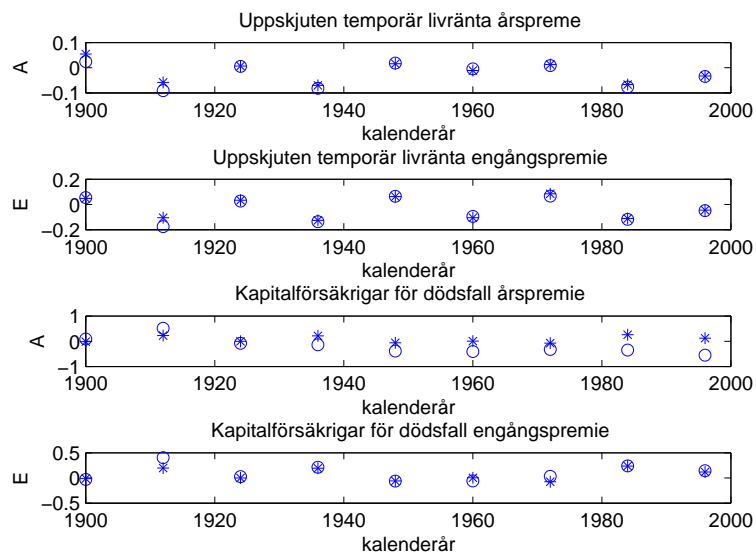
Tabell 5: *Relativa felet av årspremie och engångspremie för uppskjuten temporär livränta, män*

| Period | Årspremie för åldern 30 | Engångspremie för åldern 30 | Årspremie för åldern 45 | Engångspremie för åldern 45 |
|----------------|----------------------------|--------------------------------|----------------------------|--------------------------------|
| 1900-1910→1920 | 0,0870 | -0,0309 | -0,0137 | -0,0126 |
| 1910-1920→1930 | 0,5110 | 0,4025 | 0,2272 | 0,1951 |
| 1920-1930→1940 | -0,0807 | 0,0246 | -0,000967 | 0,00017 |
| 1930-1940→1950 | -0,1374 | 0,2117 | 0,2114 | 0,1934 |
| 1940-1950→1960 | -0,3880 | -0,0632 | -0,0609 | -0,0580 |
| 1950-1960→1970 | -0,4067 | -0,0604 | 0,000179 | 0,0041 |
| 1960-1970→1980 | -0,3240 | 0,0317 | -0,0778 | -0,0761 |
| 1970-1980→1990 | -0,3498 | 0,2406 | 0,2554 | 0,2364 |
| 1980-1990→2000 | -0,5522 | 0,1456 | 0,1210 | 0,1184 |

Tabell 6: *Relativa felet av årspremie och engångspremie för kapitalförsäkring för dödsfall, män*



Figur 30: *Relativa felet för båda försäkringarna (ringen för $x=30$ och ggr för $x=45$), kvinnor*



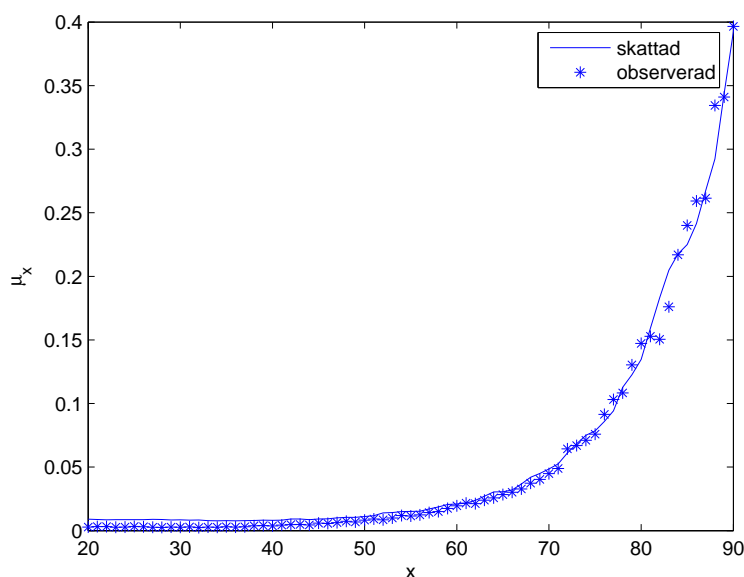
Figur 31: *Relativa felet för båda försäkringarna (ringen för $x=30$ och ggr för $x=45$), män*

6 Långperiodska prognoser

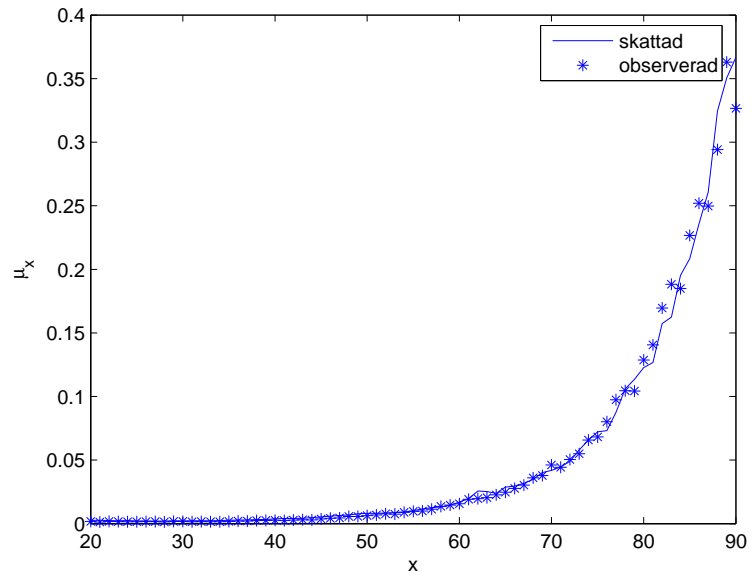
Det man är intresserad av är egentligen att göra långtids prognos över dödligheten med Lee-Carters modellen. Frågan är hur bra överensstämmer prognosen med verkligheten. Med hjälp av jämförelsevariabler som används ovan ska vi göra 20 och 40 års prognos.

6.1 20 års prognos

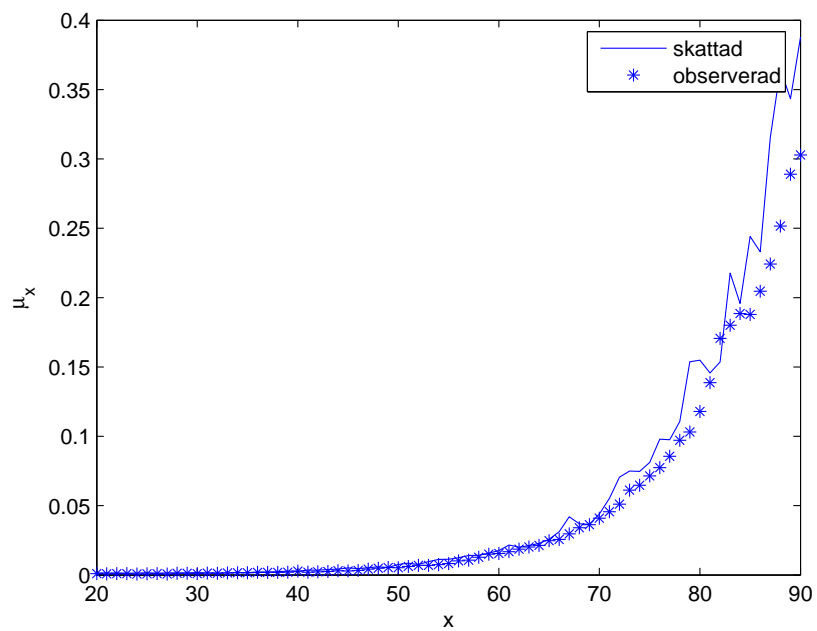
Skattningen av dödlighetsintensiteten görs precis på samma sätt som 10 års prognos för 20 års prognos. Figur 32-38 nedan visar att skattningen av dödligheten överensstämmer ganska bra för åldern under 65 med den observerade dödligheten för män men däremot för åldern över 65 antingen överskattar eller underskattar metoden dödligheten. För kvinnor ser vi från figur 39-45 att den skattade dödligheten överensstämmer ganska bra fram till åldern ungefär 70 men för åldern över 70 antingen överskattar eller underskattar metoden dödligheten. Jämfört med 10 års prognosen så har anpassningen med den observerade dödlighet för 20 års prognosen har minskat ganska mycket. Minskningen är lägre för kvinnor än för männen. Det verkar som att ju längre periods prognos man gör över dödligheten desto mer ökar osäkerheten i prognosen.



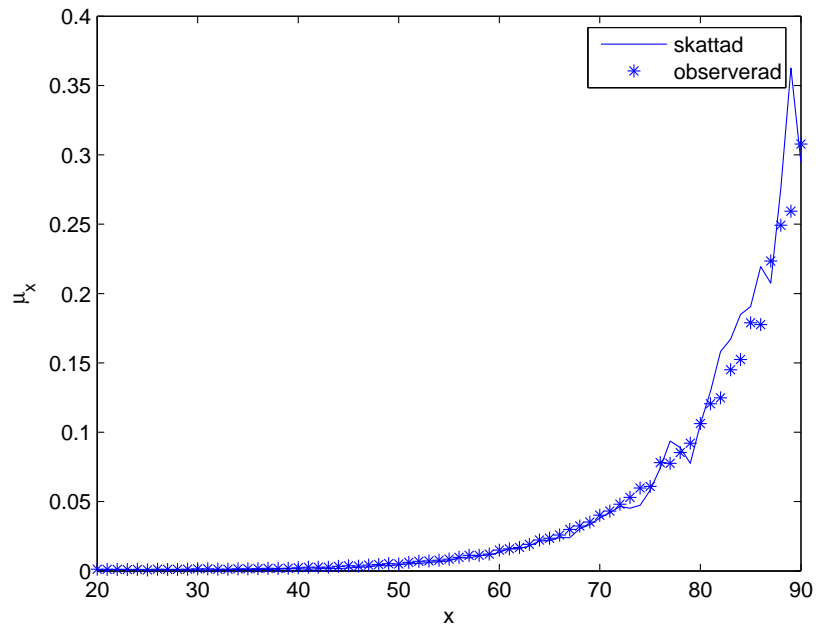
Figur 32: Observerad $\mu_x(t)$ 1940 och skattad från 1900-1920, för män



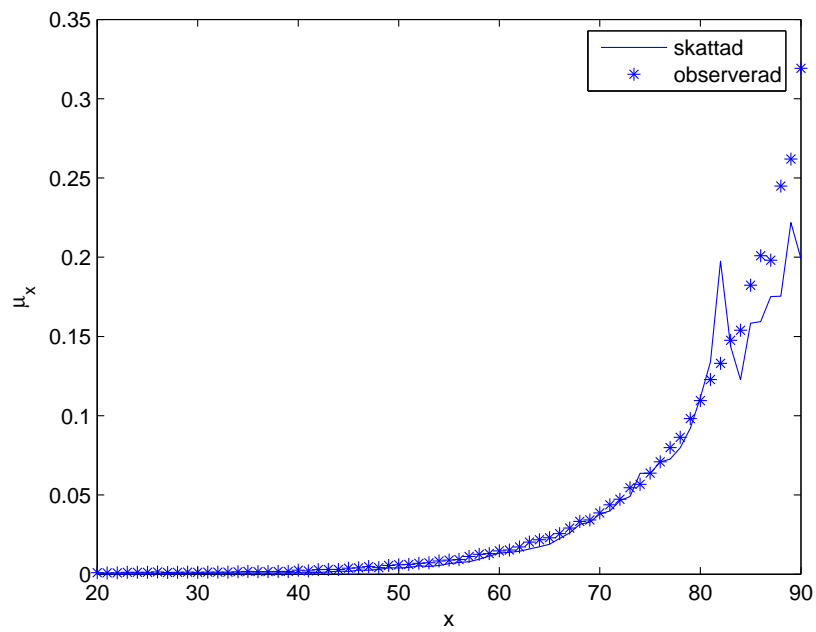
Figur 33: Observerad $\mu_x(t)$ 1950 och skattad från 1910-1930, för män



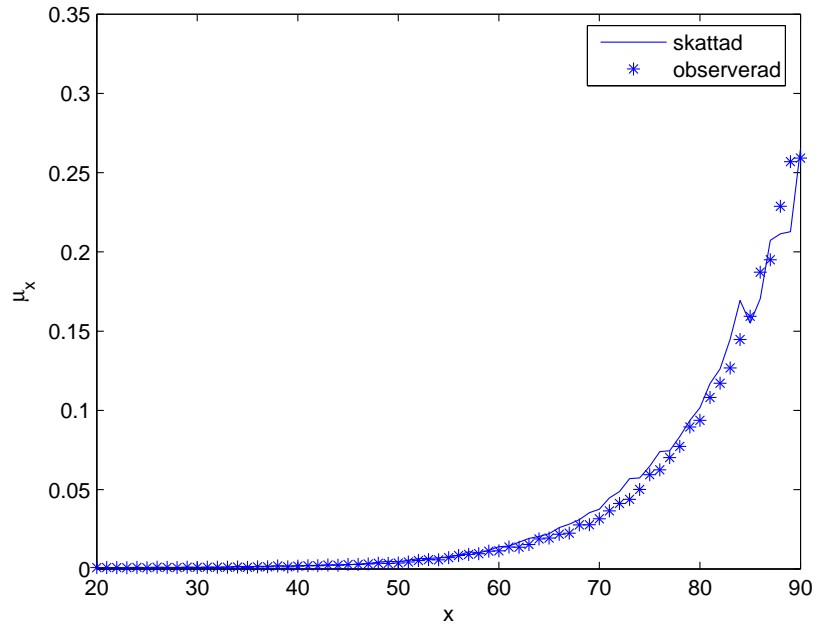
Figur 34: Observerad $\mu_x(t)$ 1960 och skattad från 1920-1940, för män



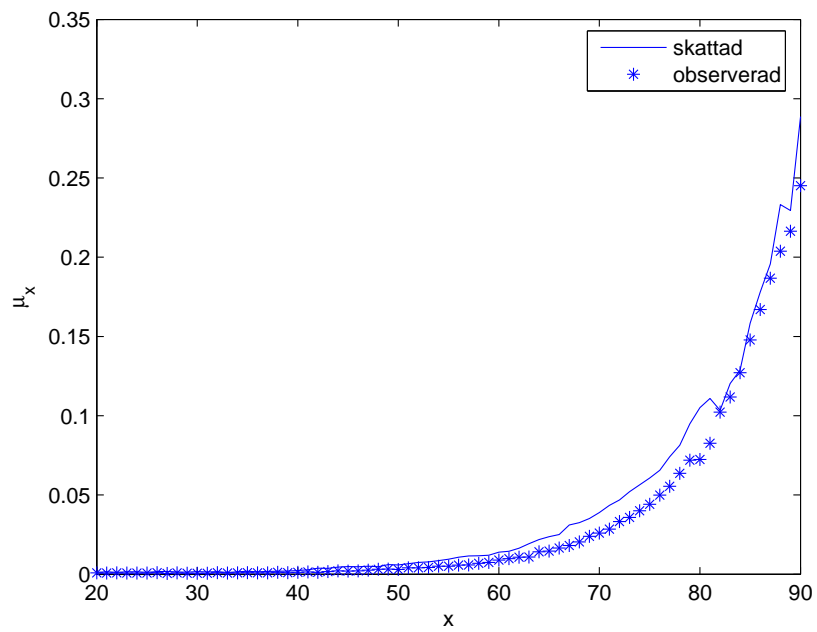
Figur 35: Observerad $\mu_x(t)$ 1970 och skattad från 1930-1950, för män



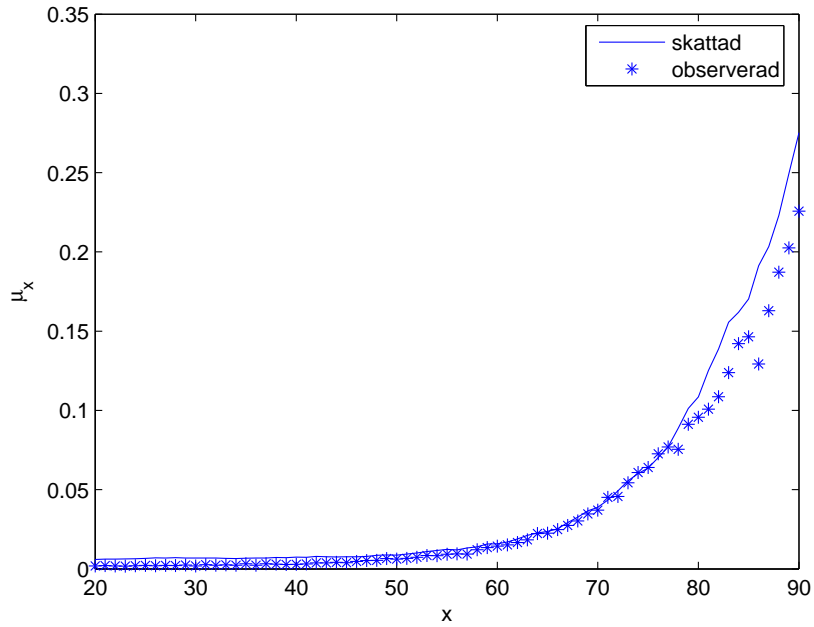
Figur 36: Observerad $\mu_x(t)$ 1980 och skattad från 1940-1960, för män



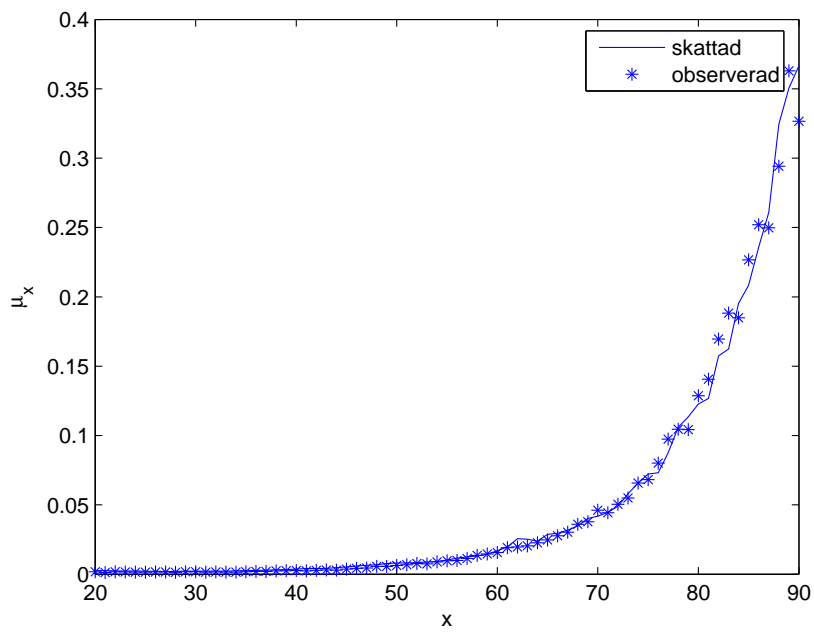
Figur 37: Observerad $\mu_x(t)$ 1990 och skattad från 1950-1970, för män



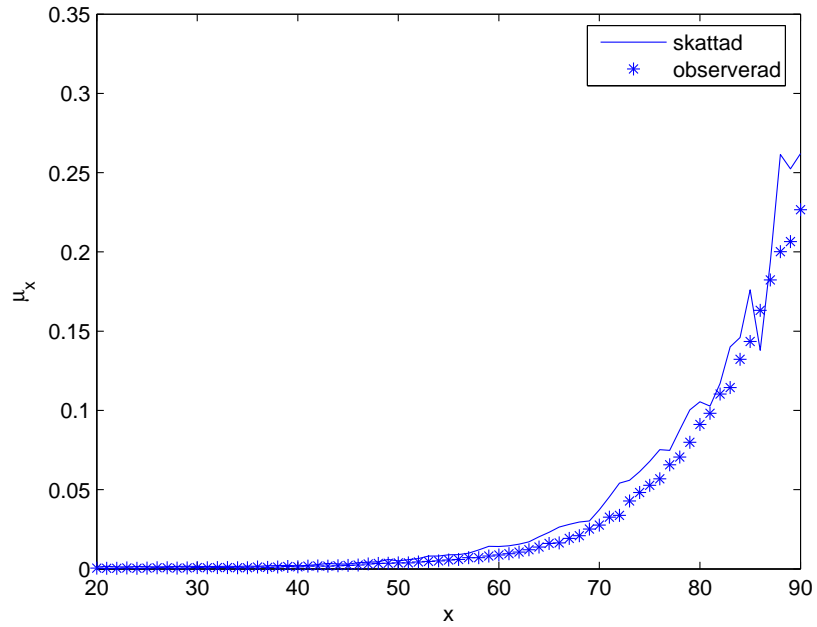
Figur 38: Observerad $\mu_x(t)$ 2000 och skattad från 1960-1980, för män



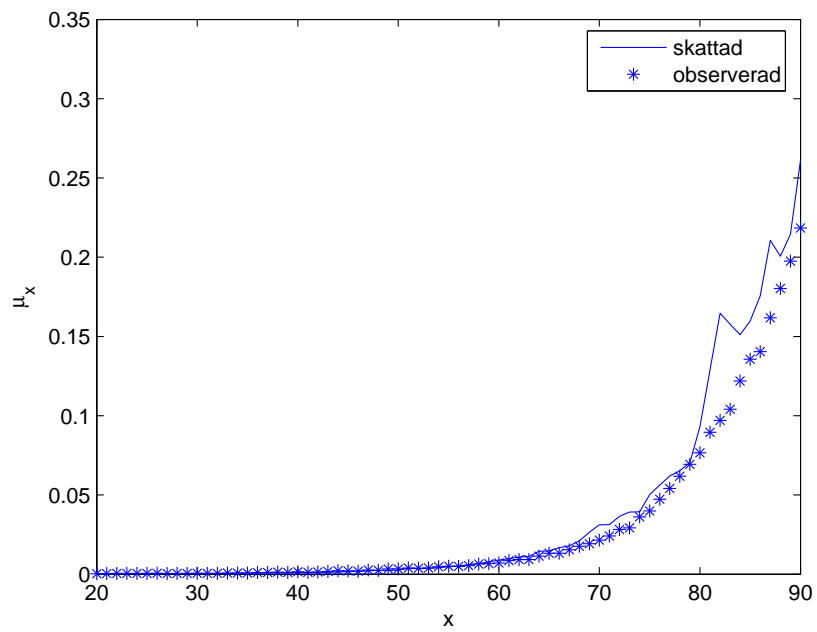
Figur 39: Observerad $\mu_x(t)$ 1940 och skattad från 1900-1920, för kvinnor



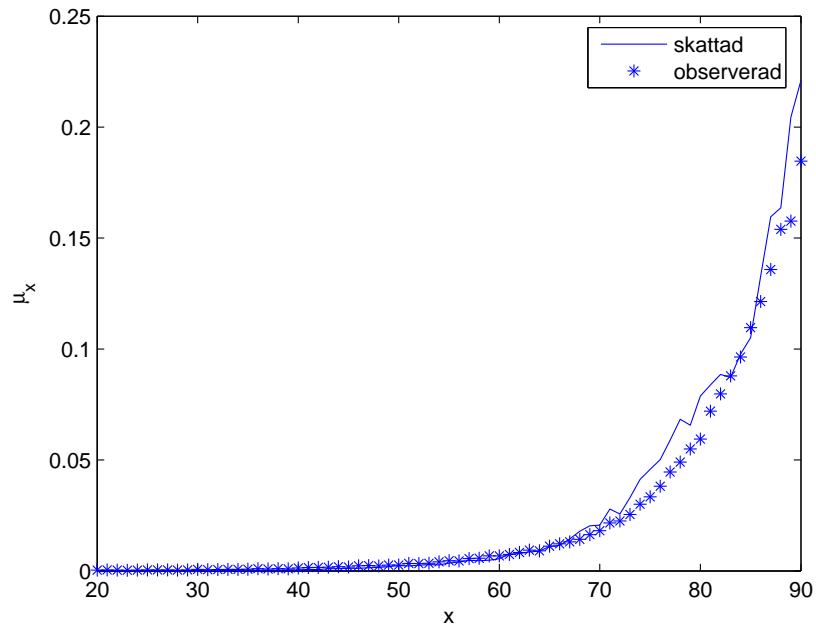
Figur 40: Observerad $\mu_x(t)$ 1950 och skattad från 1910-1930, för kvinnor



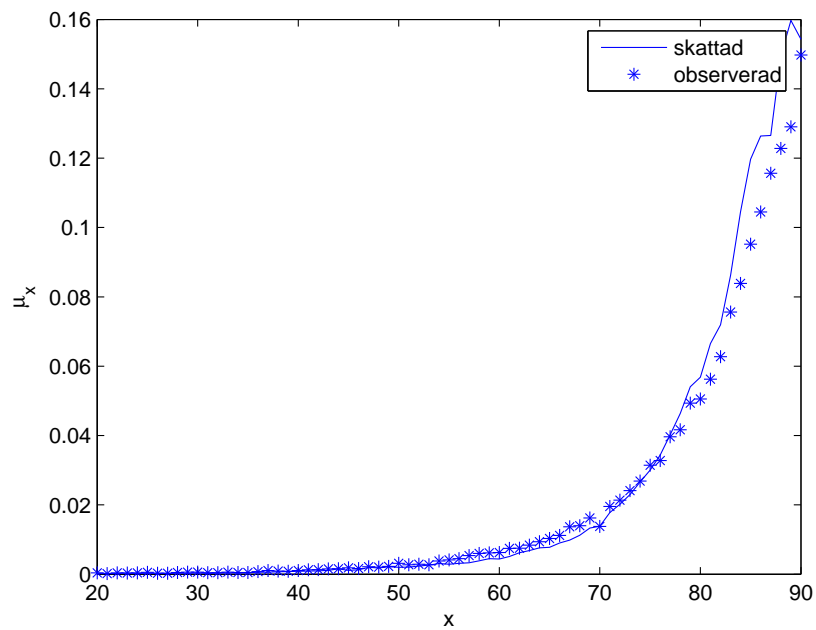
Figur 41: Observerad $\mu_x(t)$ 1960 och skattad från 1920-1940, för kvinnor



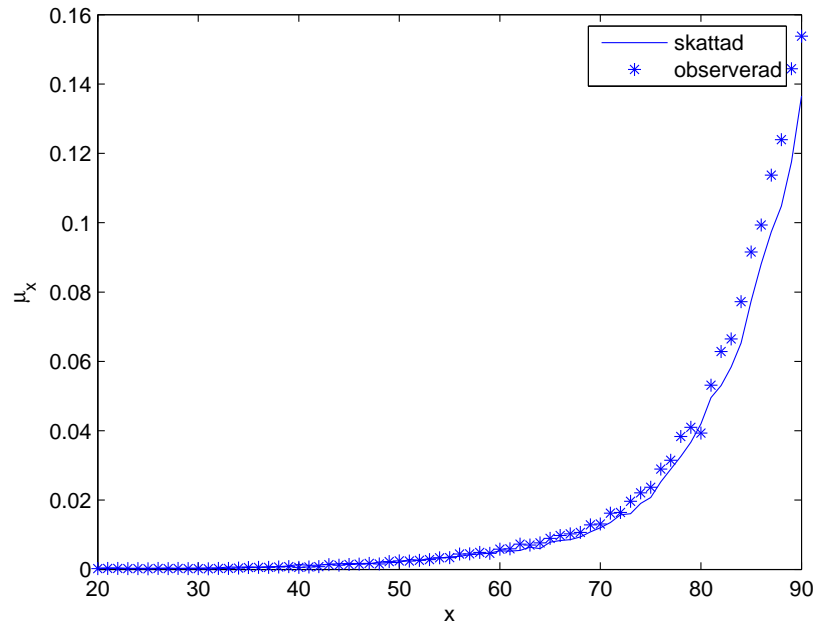
Figur 42: Observerad $\mu_x(t)$ 1970 och skattad från 1930-1950, för kvinnor



Figur 43: Observerad $\mu_x(t)$ 1980 och skattad från 1940-1960, för kvinnor



Figur 44: Observerad $\mu_x(t)$ 1990 och skattad från 1950-1970, för kvinnor



Figur 45: Observerad $\mu_x(t)$ 2000 och skattad från 1960-1980, för kvinnor

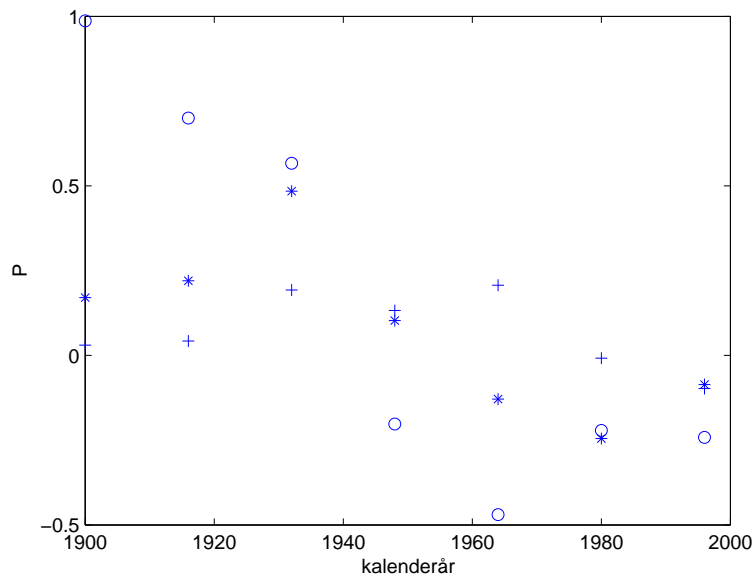
6.1.1 Sannolikheten att en individ avlider i åldersintervallet (30,50), (50,65) och (65,80)

| Period | | Skattat P | Verklig P | Relativa felet |
|----------------|-------------------------|-----------|-----------|----------------|
| 1900-1920→1940 | P[30 ≤ T < 50 T ≥ 30] | 0,1376 | 0,0693 | 0,9864 |
| | P[50 ≤ T < 65 T ≥ 50] | 0,1983 | 0,1694 | 0,1704 |
| | P[65 ≤ T < 80 T ≥ 65] | 0,5674 | 0,5506 | 0,0304 |
| 1910-1930→1950 | P[30 ≤ T < 50 T ≥ 30] | 0,0777 | 0,0457 | 0,7001 |
| | P[50 ≤ T < 65 T ≥ 50] | 0,1695 | 0,1389 | 0,2199 |
| | P[65 ≤ T < 80 T ≥ 65] | 0,5499 | 0,5276 | 0,0423 |
| 1920-1940→1960 | P[30 ≤ T < 50 T ≥ 30] | 0,0533 | 0,0340 | 0,5666 |
| | P[50 ≤ T < 65 T ≥ 50] | 0,1637 | 0,1103 | 0,4842 |
| | P[65 ≤ T < 80 T ≥ 65] | 0,5677 | 0,4760 | 0,1927 |
| 1930-1950→1970 | P[30 ≤ T < 50 T ≥ 30] | 0,0239 | 0,0300 | -0,2024 |
| | P[50 ≤ T < 65 T ≥ 50] | 0,1043 | 0,0940 | 0,1027 |
| | P[65 ≤ T < 80 T ≥ 65] | 0,4608 | 0,4069 | 0,1324 |
| 1940-1960→1980 | P[30 ≤ T < 50 T ≥ 30] | 0,0147 | 0,0278 | -0,4697 |
| | P[50 ≤ T < 65 T ≥ 50] | 0,0743 | 0,0852 | -0,1287 |
| | P[65 ≤ T < 80 T ≥ 65] | 0,4209 | 0,3488 | 0,2067 |
| 1950-1970→1990 | P[30 ≤ T < 50 T ≥ 30] | 0,0191 | 0,0244 | -0,2141 |
| | P[50 ≤ T < 65 T ≥ 50] | 0,0608 | 0,0805 | -0,2451 |
| | P[65 ≤ T < 80 T ≥ 65] | 0,3175 | 0,3202 | -0,0081 |
| 1960-1980→2000 | P[30 ≤ T < 50 T ≥ 30] | 0,0233 | 0,0188 | 0,2420 |
| | P[50 ≤ T < 65 T ≥ 50] | 0,0641 | 0,0701 | -0,0860 |
| | P[65 ≤ T < 80 T ≥ 65] | 0,2461 | 0,2728 | -0,0979 |

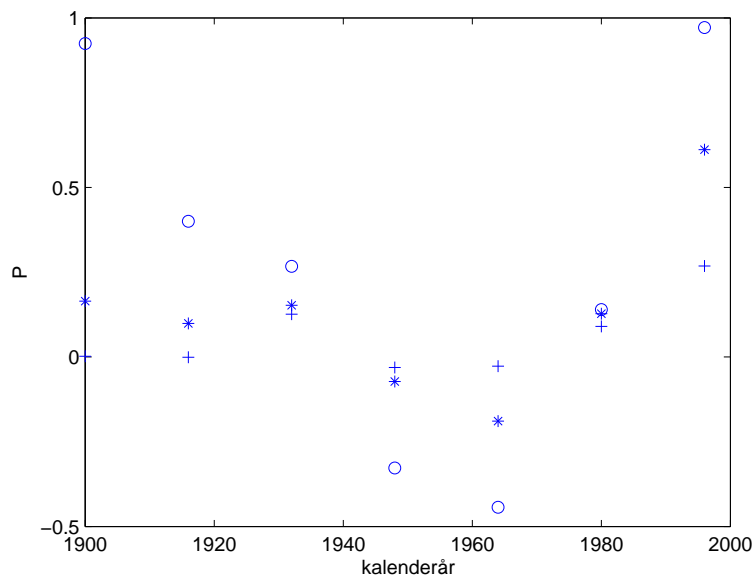
Tabell 7: Sannolikheten att en individ avlider i ett vist åldersintervall, kvinnor

| Period | | Skattat P | Verklig P | Relativa felet |
|----------------|---------------------------------|-----------|-----------|----------------|
| 1900-1920→1940 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,1602 | 0,0833 | 0,9241 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,2489 | 0,2137 | 0,1647 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,6456 | 0,6443 | 0,0020 |
| 1910-1930→1950 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,0790 | 0,0565 | 0,4002 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,2022 | 0,1839 | 0,0990 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,6028 | 0,6033 | 0,00086 |
| 1920-1940→1960 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,0640 | 0,0505 | 0,2673 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,2013 | 0,1747 | 0,1522 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,6662 | 0,5915 | 0,1263 |
| 1930-1950→1970 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,0343 | 0,0510 | -0,3275 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,1562 | 0,1684 | -0,0722 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,5448 | 0,5624 | -0,0312 |
| 1940-1960→1980 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,0290 | 0,0521 | -0,4432 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,1384 | 0,1708 | -0,1894 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,5480 | 0,5633 | -0,0271 |
| 1950-1970→1990 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,0447 | 0,0392 | 0,1399 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,1585 | 0,1406 | 0,1274 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,5591 | 0,5129 | 0,0901 |
| 1960-1980→2000 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,0593 | 0,0301 | 0,9713 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,1701 | 0,1055 | 0,6116 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,5518 | 0,4350 | 0,2683 |

Tabell 8: Sannolikheten att en individ avlider i ett vist åldersintervall, män



Figur 46: *Relativa felet för sannolikheten att en individ avlider i åldersintervall (30,50) ringen, (50,65) ggr och (65,80) plus, kvinnor*



Figur 47: *Relativa felet för sannolikheten att en individ avlider i åldersintervall (30,50) ringen, (50,65) ggr och (65,80) plus, män*

I figur 46 ser vi att metoden underskattar sannolikheten att en individ avlider i åldersintervallet (30,50), däremot överskattar metoden sannolikheten för ålderintervallet (50,65) och (65,80) för kvinnor. För män som vi kan se i figur 47 överskattar metoden sannolikheten för alla tre åldersintervall. Om vi jämför resultatet med 10 år prognos så ser vi att underskattningen och överskattningen varierar slumpmässigt för både män och kvinnor. Detta betyder att metoden inte överskattar eller underskattar sannolikheten systematiskt.

6.1.2 Relativa felet för uppskjuten temporär livränta och kapitalförsäkring för dödsfall

| Period | Årspremie för åldern 30 | Engångspremie för åldern 30 | Årspremie för åldern 45 | Engångspremie för åldern 45 |
|----------------|-------------------------|-----------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| 1900-1920→1940 | -0,0619 | -0,1425 | -0,0337 | -0,0936 |
| 1910-1930→1950 | -0,0603 | -0,0961 | -0,0440 | -0,0747 |
| 1920-1940→1960 | -0,1275 | -0,1857 | -0,1137 | -0,1749 |
| 1930-1950→1970 | -0,0443 | -0,1050 | -0,0463 | -0,1088 |
| 1940-1960→1980 | -0,0446 | -0,1456 | -0,0514 | -0,1545 |
| 1950-1970→1990 | 0,0385 | 0,0402 | 0,0344 | 0,0380 |
| 1960-1980→2000 | 0,0188 | 0,0452 | 0,0200 | 0,0498 |

Tabell 9: *Relativa felet av årspremie och engångspremie för uppskjuten temporär livränta, kvinnor*

| Period | Årspremie för åldern 30 | Engångspremie för åldern 30 | Årspremie för åldern 45 | Engångspremie för åldern 45 |
|----------------|-------------------------|-----------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| 1900-1920→1940 | 0,5474 | 0,4622 | 0,2582 | 0,2267 |
| 1910-1930→1950 | 0,3946 | 0,3599 | 0,2876 | 0,2635 |
| 1920-1940→1960 | 0,5329 | 0,5033 | 0,5122 | 0,4793 |
| 1930-1950→1970 | 0,0020 | 0,0052 | 0,0575 | 0,0586 |
| 1940-1960→1980 | -0,2402 | -0,2320 | -0,1450 | -0,1388 |
| 1950-1970→1990 | -0,2037 | -0,2002 | -0,2179 | -0,2131 |
| 1960-1980→2000 | 0,0139 | 0,0109 | -0,0657 | -0,0654 |

Tabell 10: *Relativa felet av årspremie och engångspremie för kapitalförsäkring för dödsfall, kvinnor*

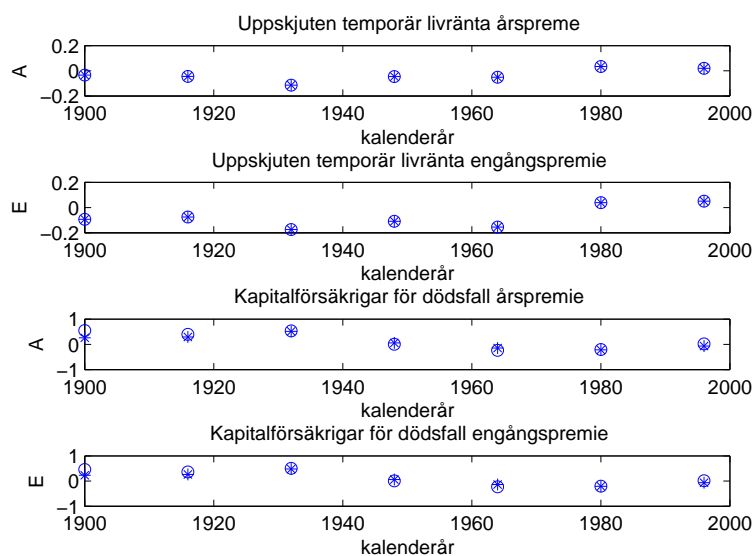
| Period | Årspremie för åldern 30 | Engångspremie för åldern 30 | Årspremie för åldern 45 | Engångspremie för åldern 45 |
|----------------|----------------------------|--------------------------------|----------------------------|--------------------------------|
| 1900-1920→1940 | -0,0801 | -0,1397 | -0,0464 | -0,0768 |
| 1910-1930→1950 | -0,0327 | -0,0404 | -0,0213 | -0,0253 |
| 1920-1940→1960 | -0,0668 | -0,0849 | -0,0544 | -0,0728 |
| 1930-1950→1970 | 0,0383 | 0,0397 | 0,0289 | 0,0273 |
| 1940-1960→1980 | 0,0330 | -0,0349 | 0,0177 | -0,0529 |
| 1950-1970→1990 | -0,0847 | -0,1339 | -0,0746 | -0,1255 |
| 1960-1980→2000 | -0,1424 | -0,1829 | -0,1202 | -0,1591 |

Tabell 11: *Relativa felet av årspremie och engångspremie för uppskjuten temporär livränta, män*

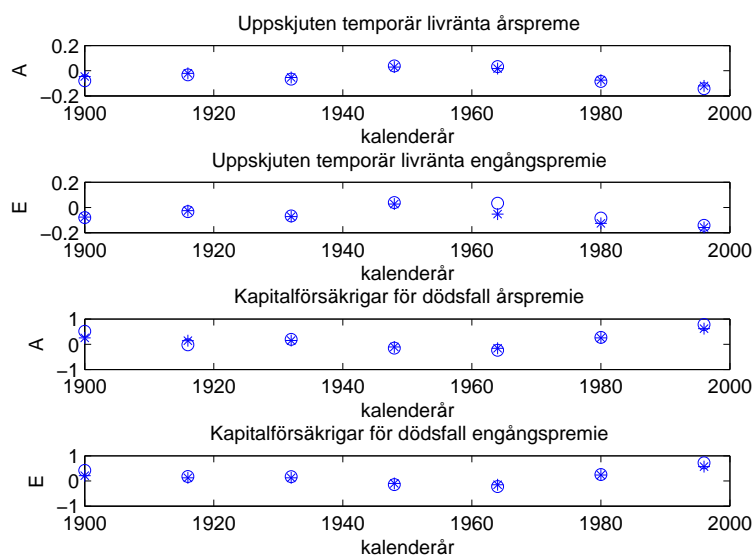
| Period | Årspremie för åldern 30 | Engångspremie för åldern 30 | Årspremie för åldern 45 | Engångspremie för åldern 45 |
|----------------|----------------------------|--------------------------------|----------------------------|--------------------------------|
| 1900-1920→1940 | 0,5119 | 0,4175 | 0,2493 | 0,2124 |
| 1910-1930→1950 | -0,0253 | 0,1767 | 0,1403 | 0,1264 |
| 1920-1940→1960 | 0,1907 | 0,1725 | 0,1438 | 0,1264 |
| 1930-1950→1970 | -0,1546 | -0,1441 | -0,1048 | -0,0962 |
| 1940-1960→1980 | -0,2411 | -0,2254 | -0,1625 | -0,1485 |
| 1950-1970→1990 | 0,2744 | 0,2572 | 0,2542 | 0,2356 |
| 1960-1980→2000 | 0,7800 | 0,7221 | 0,6170 | 0,5694 |

Tabell 12: *Relativa felet av årspremie och engångspremie för kapitalförsäkring för dödsfall, män*

I figur 48-49 nedan ser vi att metoden underskattar premien för uppskjuten temporär livränta och överskattar kapitalförsäkringen för dödsfall för män respektive kvinnor för både åldrarna. Jämför med 10-års prognosen så betar sig metoden på samma sätt för kvinnor men för män varierar slumpmässigt.



Figur 48: *Relativa felet för båda försäkringarna (ringen för $x=30$ och ggr för $x=45$), kvinnor*

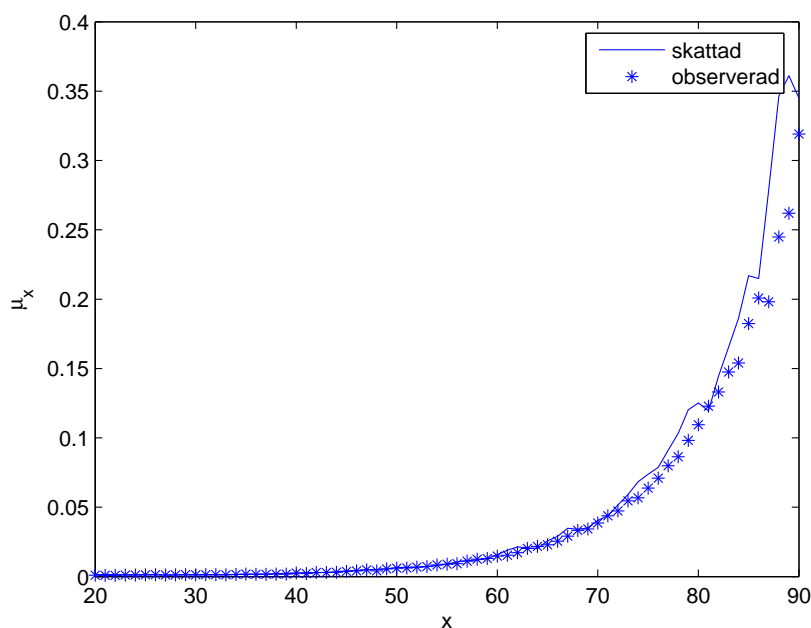


Figur 49: *Relativa felet för båda försäkringarna (ringen för $x=30$ och ggr för $x=45$), män*

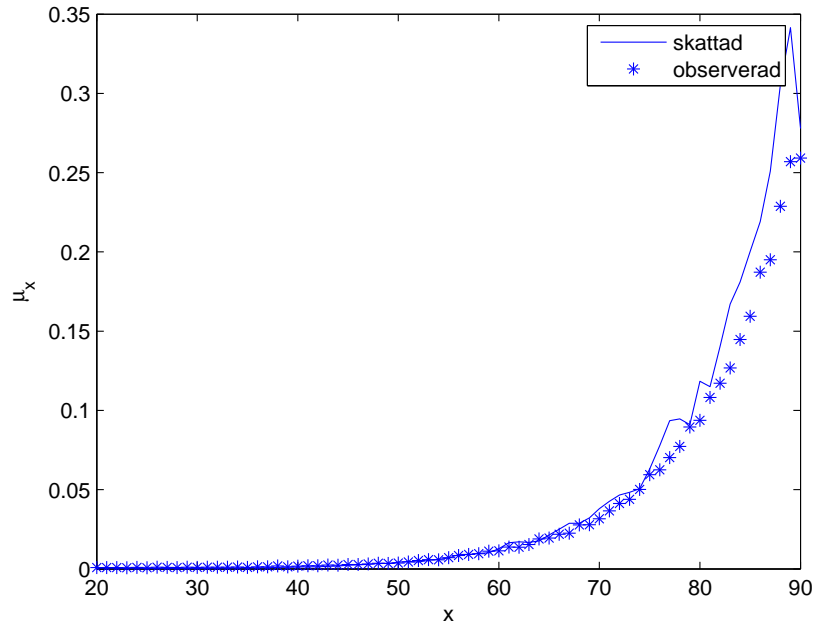
6.2 40 års prognos

Även här görs skattningen av dödlighetsintensiteten precis på samma sätt som 10-års och 20-års prognos. Skattningen av dödlighetsintensiteten för män som vi kan se i figur 50-52 här nedan visar att den skattade dödlighetsintensiteten överensstämmer med den observerade för åldern upp till ungefär 65. För åldern över 65 överskattar metoden dödligheten. För kvinnor i figur 53-55 däremot överensstämmer den skattade dödligheten med den observerade fram till åldern 60, för åldern över 60 överskattar metoden dödligheten väldigt mycket. När vi jämförde 10-års prognosen med 20-års prognosen så var det att minskningen av överensstämmelsen var det mindre för kvinnor jämfört med mäns, här är det precis tvärtom minskningen är mindre för män. Att metoden överskattar eller underskattar dödligheten verkar vara slumpmässigt.

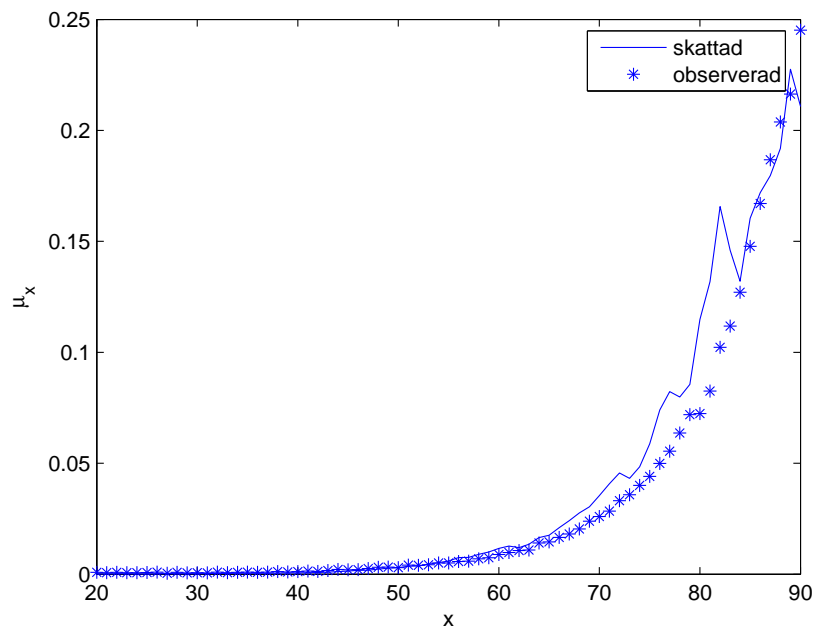
Att metoden överskattar dödlighetsintensiteten redan vid 60-års åldern för kvinnor kan inte vara bra. Detta betyder att i verkligheten är dödlighetsintensiteten lägre. Det här kan inte vara bra för försäkringsbolaget, man är ju intresserad av att veta hur mycket pengar man skall avsätta för framtida pension.



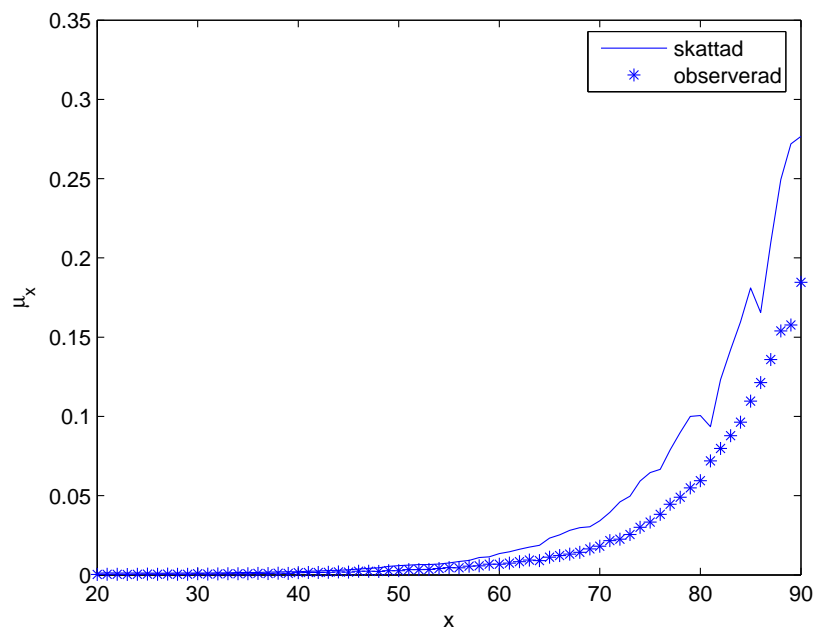
Figur 50: Observerad $\mu_x(t)$ 1980 och skattad från 1900-1940, för män



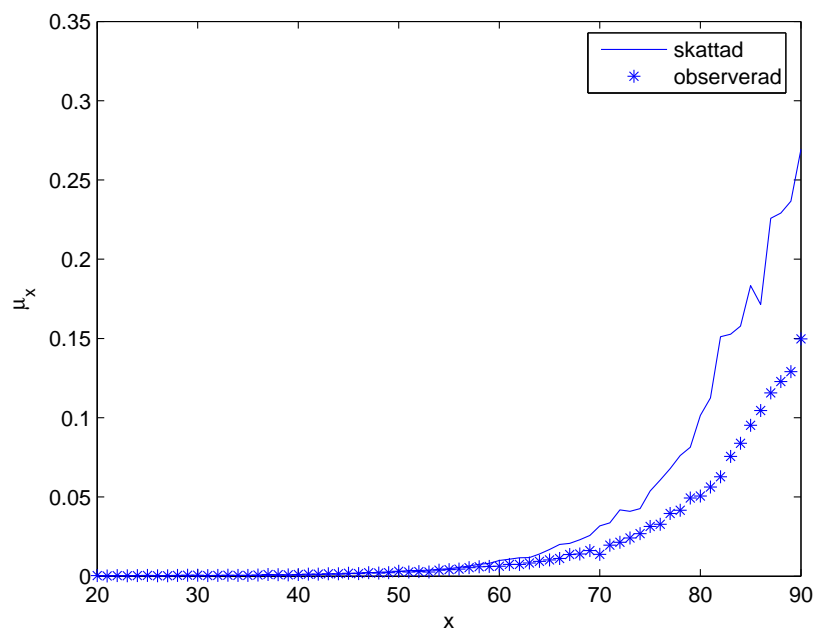
Figur 51: Observerad $\mu_x(t)$ 1990 och skattad från 1910-1950, för män



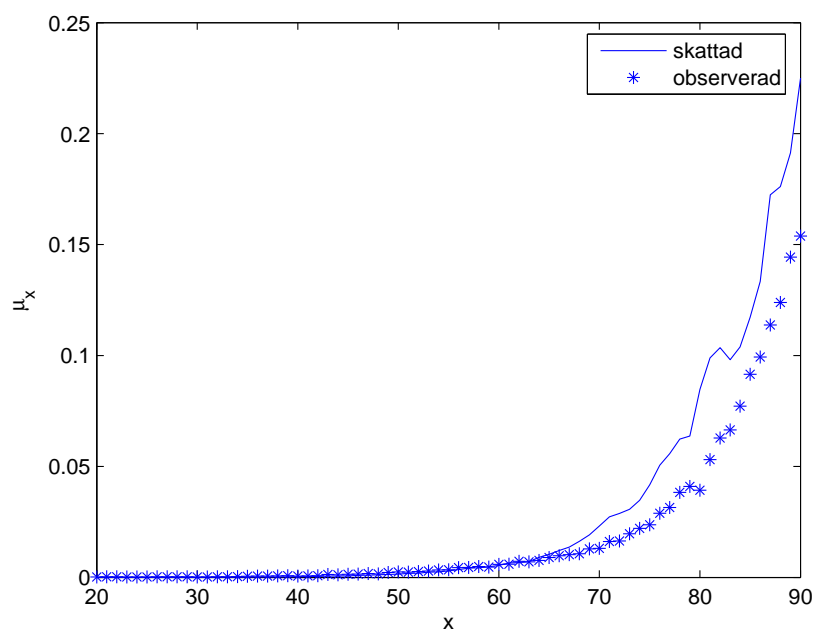
Figur 52: Observerad $\mu_x(t)$ 2000 och skattad från 1920-1960, för män



Figur 53: Observerad $\mu_x(t)$ 1980 och skattad från 1900-1940, för kvinnor



Figur 54: Observerad $\mu_x(t)$ 1990 och skattad från 1910-1950, för kvinnor



Figur 55: Observerad $\mu_x(t)$ 2000 och skattad från 1920-1960, för kvinnor

6.2.1 Sannolikheten att en individ avlider i åldersintervallet (30,50), (50,65) och (65,80)

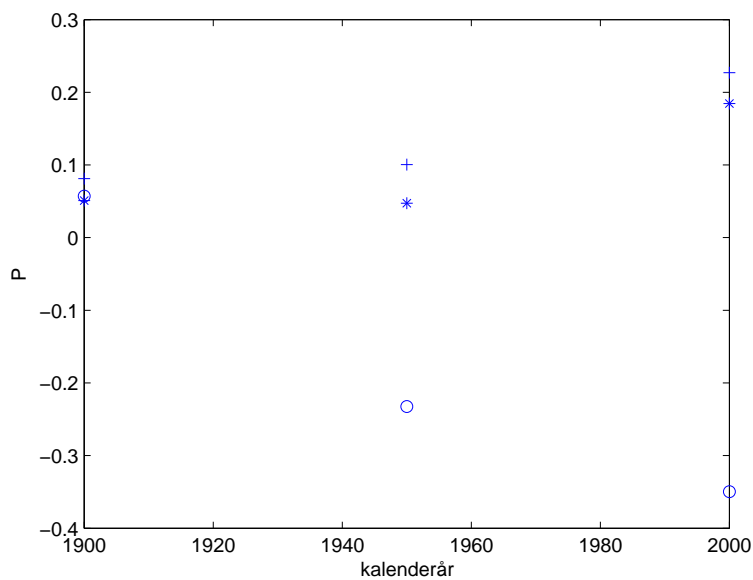
Sannolikheten att en individ avlider i åldersintervallet (30,50), (50,65) och (65,80)

| Period | | Skattat P | Verklig P | Relativa felet |
|----------------|---------------------------------|-----------|-----------|----------------|
| 1900-1940→1980 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,0551 | 0,0521 | 0,0570 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,1795 | 0,1708 | 0,0509 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,6090 | 0,5633 | 0,0811 |
| 1910-1950→1990 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,0301 | 0,0392 | -0,2326 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,1471 | 0,1406 | 0,0473 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,5643 | 0,5129 | 0,1004 |
| 1920-1960→2000 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,0196 | 0,0301 | -0,3496 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,1250 | 0,1055 | 0,1845 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,5338 | 0,4350 | 0,2269 |

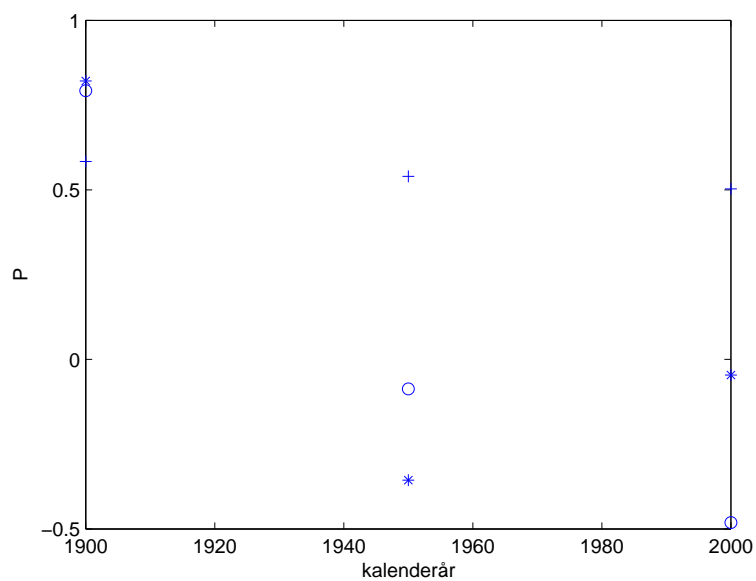
Tabell 13: Sannolikheten att en individ avlider i ett vist åldersintervall, män

| Period | | Skattat P | Verklig P | Relativa felet |
|----------------|---------------------------------|-----------|-----------|----------------|
| 1900-1940→1980 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,0498 | 0,0278 | 0,7926 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,1552 | 0,0852 | 0,8210 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,5524 | 0,3488 | 0,5835 |
| 1910-1950→1990 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,022 | 0,0244 | -0,0871 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,1092 | 0,0805 | 0,3560 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,4931 | 0,3202 | 0,5400 |
| 1920-1960→2000 | $P[30 \leq T < 50 T \geq 30]$ | 0,0097 | 0,0188 | -0,4814 |
| | $P[50 \leq T < 65 T \geq 50]$ | 0,0669 | 0,0701 | -0,0461 |
| | $P[65 \leq T < 80 T \geq 65]$ | 0,4100 | 0,2728 | 0,5027 |

Tabell 14: Sannolikheten att en individ avlider i ett vist åldersintervall, kvinnor



Figur 56: Relativa felet för sannolikheten att en individ avlider i åldersintervall (30,50) ringen, (50,65) ggr och (65,80) plus,män



Figur 57: *Relativa felet för sannolikheten att en individ avlider i åldersintervall (30,50) ringen, (50,65) ggr och (65,80) plus, kvinnor*

Metoden underskattar sannolikheten att en individ avlider i åldersintervallet (30,50) för män men däremot överskattar sannolikheten för åldersintervall (50,65) och (65,80) (se fig.56). För kvinnor underskattar metoden sannolikheten för åldersintervall (30,50) och (50,65) och överskattar sannolikheten för åldersintervall (65,80) (se fig.57).

6.2.2 Relativa felet för uppskjuten temporär livränta och kapitalförsäkring för dödsfall

För 40-års prognosen överskattar metoden åspremien och underskattar engångspremien för uppskjuten temporär livränta både för män och kvinnor. Däremot överskattar metoden både åspremien och engångspremien för kapitalförsäkring för dödsfall (se figur 57-58). kapitalförsäkring för dödsfall för 20 och 40-års prognos beter sig på samma sätt för både män och kvinnor men skiljer sig från 10-års prognos. Uppskjuten temporär livränta varierar slumpmässigt för dem tre olika periods prognoser. Att metoden överskattar eller underskattar premierna verkar vara slumpmässigt vilket betyder att metoden inte överskattar eller underskattar premeien systematisk.

| Period | Årspremie för åldern 30 | Engångspremie för åldern 30 | Årspremie för åldern 45 | Engångspremie för åldern 45 |
|----------------|-------------------------|-----------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| 1900-1940→1980 | -0,1810 | -0,2977 | -0,1658 | -0,2889 |
| 1910-1950→1990 | -0,1090 | -0,2382 | -0,1068 | -0,2407 |
| 1920-1960→2000 | -0,0483 | -0,1410 | -0,0528 | -0,1438 |

Tabell 15: *Relativa felet av årspremie och engångspremie för uppskjuten temporär livränta, kvinnor*

| Period | Årspremie för åldern 30 | Engångspremie för åldern 30 | Årspremie för åldern 45 | Engångspremie för åldern 45 |
|----------------|-------------------------|-----------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| 1900-1920→1940 | 0,8206 | 0,7837 | 0,8614 | 0,8108 |
| 1910-1930→1950 | 0,2149 | 0,2137 | 0,3199 | 0,3109 |
| 1920-1940→1960 | -0,1741 | -0,1687 | -0,1049 | -0,0999 |

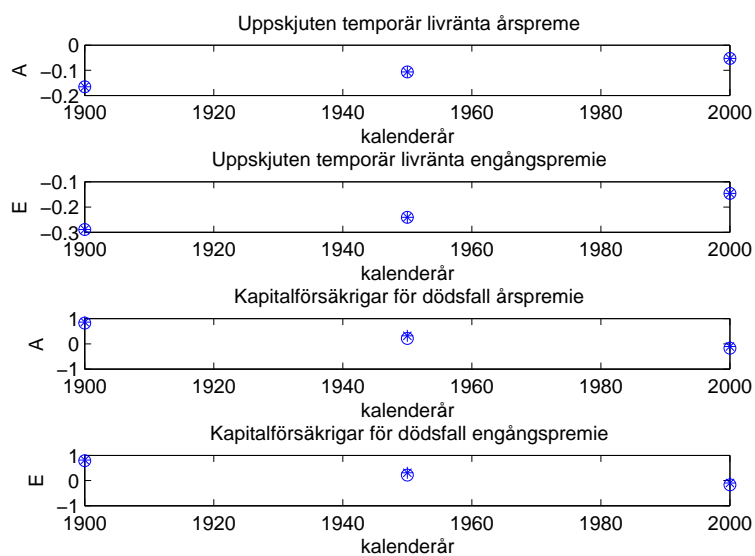
Tabell 16: *Relativa felet av årspremie och engångspremie för kapitalförsäkring för dödsfall, kvinnor*

| Period | Årspremie för åldern 30 | Engångspremie för åldern 30 | Årspremie för åldern 45 | Engångspremie för åldern 45 |
|----------------|-------------------------|-----------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| 1900-1940→1980 | -0,0349 | -0,0703 | -0,0325 | -0,0687 |
| 1910-1950→1990 | -0,0344 | -0,0717 | -0,0366 | -0,0800 |
| 1920-1960→2000 | -0,0683 | -0,1294 | -0,0670 | 0,1363 |

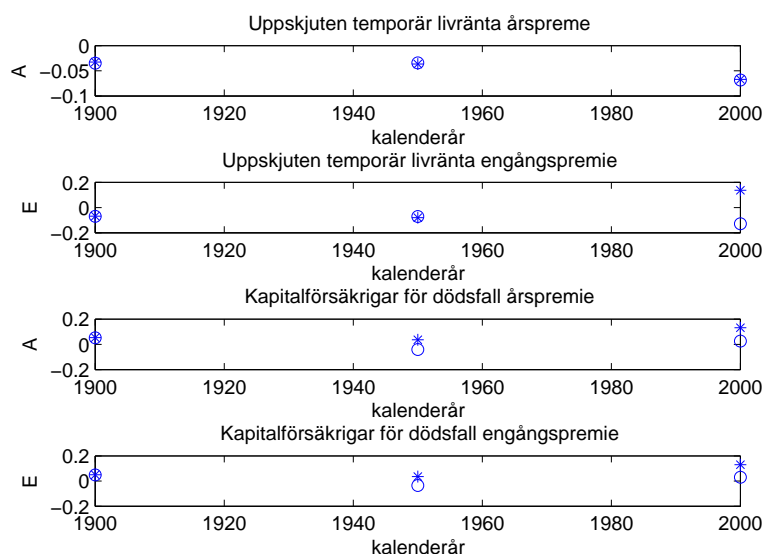
Tabell 17: *Relativa felet av årspremie och engångspremie för uppskjuten temporär livränta, män*

| Period | Årspremie för åldern 30 | Engångspremie för åldern 30 | Årspremie för åldern 45 | Engångspremie för åldern 45 |
|----------------|-------------------------|-----------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| 1900-1920→1940 | 0,0516 | 0,0491 | 0,0534 | 0,0500 |
| 1910-1930→1950 | -0,0408 | -0,0349 | 0,0356 | 0,0352 |
| 1920-1940→1960 | 0,0258 | 0,0307 | 0,1314 | 0,1295 |

Tabell 18: *Relativa felet av årspremie och engångspremie för kapitalförsäkring för dödsfall, ,män*



Figur 58: *Relativa felet för båda försäkringarna (ringen för $x=30$ och ggr för $x=45$), kvinnor*



Figur 59: *Relativa felet för båda försäkringarna (ringen för $x=30$ och ggr för $x=45$), män*

7 Slutsats

Historisk data visar att folk lever längre och längre. Minskning av dödligheten beror på förbättrade levnadsförhållanden och livsstil. Medelåldern vid dödsfall år 1968 var 74 år för kvinnor och 70 år för män jämfört medelåldern vid dödsfall år 2005 var 81,5 för kvinnor och 76,5 år för män. Med antagande av att förbättringar av levnadsförhållanden och livsstil även i framtiden har man gjort prognos över dödligheten med Lee-Carters modellen. Frågan är hur bra metoden överensstämmer med verkligheten.

Första jämförelsevariabeln dvs jämförelsen mellan den skattade dödlighetsintensiteten och verkliga utfallet för 10-års prognosen som vi kan se i figur 10-27, beskriver dödligheten hos män och kvinnor, åldern mellan 20 och 90 år. Skattningen för åldern 20 till ungefär 75 överensstämmer med den observerade datan både för män och kvinnor men för högre åldrar än 75 både för män och kvinnor minskar överensstämmelsen. Detta kan bero på att det är för få observationer i högre åldrar.

För 20-års prognosen överensstämmer dödlighetsintensiteten med den observerade fram till ålder 65 för män och fram till 70 år för kvinnor och för 40-års prognosen överensstämmer dödlighetsintensiteten med den observerade fram till 65 år för män och 60 år för kvinnor.

Om vi jämför 10-års prognosen med 20-års prognosen ser vi att överstämelsen mellan skattad och observerad dödlighet minskar för 20-års prognosen både för män och kvinnor, men minskningen är mindre för kvinnor. Överensstämmelsen blir bättre för män än kvinnor i 40-års prognosen. 10-års prognosen passar bäst med verkligheten jämfört med 20 och 40-års prognosen. Skillnaden mellan 20 och 40-års prognos för män är inte mycket men däremot för kvinnor skiljer det sig mycket. Felet ökar i prognosen ju längre periods prognos man gör. Att metoden överskattar dödlighetsintensiteten betyder att i verkligheten är dödlighetsintensiteten lägre. Detta kan vara ett problem för försäkringsbolaget att avsätta pengar för framtida pension. Från dem här tre olika periods prognoser kan vi observera att metodens överskattning eller underskattning av dödligheten är slumpmässig vilket betyder att metoden inte överskattar eller underskattar dödligheten systematisk.

I 10 och 20-års prognosen metoden överskattar relativa felet för sannolikheten att en individ avlider i de givna åldersintervallen, för män och kvinnor. I åldersintervallet (65,80) fördelar sig lika för män i 10-års prognosen. Metoden överskattar relativa felet för åldersintervallet (50,65), (65,80) och underskattar relativa felet för åldersintervallet (30,50) för kvinnor i 20 och 40-års prognosen. I 40-års prognosen underskattar metoden relativa felet för åldersintervallet (30,50), (50,65) och överskattar relativa felet för åldersintervallet (65,80) för män. Även här kan vi observera att metoden inte överskattar eller underskattar sannolikheten systematiskt.

Metodens överskattning av sannolikheten att en individ avlider i ett visst åldersintervall betyder att sannolikheten i verkligheten är mindre. Detta har både fördel och nackdel för försäkringsbolaget. Nackdelen är om en individ tecknar en livränta försäkring, då är det en negativ effekt för försäkringsgivaren men däremot om individen tecknar en dödsfall försäkring kan hända att försäkringsgivaren tar ut mycket i premie, då kan försäkringsgivaren lämna tillbaka pengarna som återbäring om försäkringen är berättigade till återbäring.

Slutligen är frågan hur mycket försäkringsbolaget skall ta ut i premie med den skattade och observerade dödlighetsintensiteten. I 10 och 20-årsprognosen överskattas och underskattas premien för kvinnornas del på samma sätt som i 40-årsprognosen. För män är överskattning och underskattning mer slumpmässigt, liksom för sannolikheten.

I allmänhet kan man väl säga att Lee-Carter är en bra metod att skatta dödligheten med. Enligt resultatet av detta arbete bör man göra högst 20 års prognos. 10 års prognos ger bästa prognosen. Men trots att det är osäkert att göra långtids prognos över dödligheten med Lee-Carters modellen måste försäkringsbolaget göra dödlighetsprognoser cirka 50 år framåt. Att beräkna

sannolikheten att en individ avlider i ett visst åldersintervall och bestämma premien med Lee-Carters modellen är inget jag skulle rekommendera.

Referenser

- [1] EDSBERG LENNART: Användarhandledning för MATLAB version 6, NADA
- [2] WWW.MORTALITY.ORG
- [3] GUNNAR ANDERSSON: Livförsäkringsmatematik
- [4] JÖRGEN OLSÉN: Modeller och projektioner för dödlighetsintensitet (en anpassning till svensk populationdata 1970-2004)
- [5] FTN/DUS06: Analys av försäkringsdödligheten i Sverige
- [6] MICHEL DENUIT AND ESTHER FORSTIGNO: Association and heterogeneity of insured lifetimes in the Lee-Carter framework. No.1/2007 Scandinavian Actuarial Journal