Matematisk statistik
Stockholms universitet

Effekter av olika dödlighetsantaganden för FOLO/försäkringstagarna

Anders Holm

Examensarbete 2004:2

Postadress:

Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm
Sverige

Internet:

http://www.math.su.se/matstat

EXAMENSARBETE I MATEMATISK STATISTIK, STOCKHOLMS UNIVERSITET
HT 2003

Effekter av olika dödlighetsantaganden för FOLO/försäkringstagarna

Anders Holm

Sammanfattning

Ett problem för livförsäkringsbolag är att skatta dödligheten på ett bra sätt. Det är viktigt för bolaget att göra korrekta dödlighetsantaganden. Dels för att man ur bolagssynpunkt inte vill betala ut för mycket pengar till försäkringstagarna samtidigt som man inte vill ”hålla inne” försäkringstagarnas pengar i form av dödlighetsvinster. Detta arbete visar på vilka svårigheter och problem som kan uppstå för bolaget vid skattning av dödligheten. Simuleringar har utförts av utbetalningar framåt i tiden för femtio pensionskohorter. Utgångspunkt har varit FOLO:s nuvarande dödlighetsantagande. Den verkliga dödligheten (den dödlighet försäkringstagarna följer) antas följa SCB:s senaste prognos om framtida dödlighet som är tagen från *Sveriges framtida befolkning, Befolkningsframskrivning för åren 2003-2050 (SCB 2003).* I olika scenarier har den verkliga dödligheten sedan varierats på olika sätt för att se hur hållbar FOLO:s prognos är. Resultaten från denna uppsats visar att det är viktigt för ett försäkringsbolag att regelbundet följa upp sina dödlighetsantaganden. Dödlighetsantaganden som inte stämmer överens med verkligheten får konsekvenser antingen i form av ojämna utbetalningar eller som vinster/förluster för bolaget. Möjligheten för en försäkringstagare att välja utbetalningstid gör prognoserna ännu osäkrare. Män har en erkänt kortare livslängd än kvinnor och därför missgynnas de av dagens könsneutrala dödlighetsprognos. Medvetna män kan göra strategiska val och på så sätt öka sina utbetalningar. Arbetet visar också att det är viktigt att ha en dödlighet som både beror på ålder och födelseår.

Abstract

A problem for life insurance companies is to estimate the mortality. It is important for the company to make a correct assumption of mortality. Partly because, from the companies point of view, they don’t want to pay too much money to the policy holders and at the same time they don’t want to keep money as mortality profits. This essay shows difficulties, which arise for companies when estimating the mortality. Simulations have been performed long-term ahead of payments for fifty pension cohorts. Starting point has been FOLO:s present mortality assumption. The real mortality (corresponding to the mortality of the policy holders) is based on SCB:s latest report of future mortality, *Sveriges framtida befolkning, Befolkningsframskrivning för åren 2003-2050 (SCB 2003*). In a number of scenarios, the real mortality has been varied in different ways, to exam the forecast made by FOLO. The results from this essay show the importance for the company to regularly follow up their mortality assumptions. Mortality assumptions which don’t correspond with reality will have consequences as unequal payments or profits/losses for the company. The possibility for a policy holder to choose disbursement period makes the forecast even more unreliable. Men has a shorter lifetime than women and they are treated unfairly by today’s sexneutral mortality assumptions. Conscious men can increase their payment by doing strategical choices. The essay also shows the importance having a mortality depending both on age and year of birth.

Innehållsförteckning

Förord

Jag har gjort mitt examensarbete på försäkringsbolaget Folksam, Skanstull. Arbetet är gjort på begäran av Folksam LO Fondförsäkringsbolag. Det omfattar 20 poäng och det ger en magisterexamen i matematisk statistik.

Jag vill med detta förord tacka min handledare på Folksam, Britt-Marie Persson, som varit till stor hjälp och svarat på frågor under arbetets gång. Jag vill också tacka Anna Lindberg som belyst samma problem i sitt examensarbete på premiepensionsmyndigheten PPM och hennes handledare Bengt von Bahr. Jag har tillsammans med Anna skapat ett program i Excel som vi båda använt i våra simuleringar. Tack också till min handledare på Universitetet, Anders Martin-Löf.

1 Inledning

1.1 Introduktion

Mitt examensarbete handlar om avtalspension i form av livslång fondförsäkring. Vid uppnådd pensionsålder har man samlat på sig en egen ”pott” med kapital till avtalspensionen, förutsatt att man har arbetat. Detta kapital ska sedan portioneras ut månadsvis så länge man lever. Första frågan man då ställer sig är hur mycket pengar som ska betalas ut varje månad? För detta ändamål finns det matematiska modeller. Man kan inte se in i framtiden hur länge människor kommer att leva. Men man kan se bakåt i tiden och skatta livslängder framåt i tiden.

Med olika antaganden om dödlighet har jag simulerat utbetalningar från ett försäkringsbestånd. Försäkringsbeståndet finns i Folksam LO Fondförsäkringsaktiebolag (i fortsättningen kallat FOLO) och består i dagsläget av över 250 000 försäkringar. Eftersom FOLO är relativt nystartat (1998) består försäkringsbeståndet idag av mestadels människor under 65 år. De flesta kunder är i dagsläget aktiva i arbetslivet och man vill veta vad som kommer att hända när dessa människor går i pension. Det jag vill undersöka är vad olika dödlighetsantaganden kan ge för effekter på bolagets resultat och på försäkringstagarnas pensioner.

Om man inte har sin livförsäkringsmatematik färsk kan det vara bra att börja läsa kapitel 6.1 där allmän sannolikhetsteori för livförsäkring redovisas.

1.2 Mål

Målet med arbetet är att se vilka effekter olika dödlighetsantaganden kan få för bolaget samt för pensionärerna. Hur bra stämmer de dödlighetsantaganden som bolaget använder med verkligheten? För att ta fram den verkliga dödligheten har jag använt mig av SCB:s prognos för befolkningsframskrivning.

1.3 Allmänt om pensionen

Följande former av pensioner finns:

- Allmän pension
- Avtalspension
- Privat pension

Den allmänna pensionen är grunden i pensionssystemet och den består av tre olika pensioner:

Inkomstpension
Till inkomstpensionen avsätts 16% av din pensionsgrundande inkomst. Pengarna används till att finansiera de som är pensionärer idag. Samtidigt får du en fordran på pensionssystemet så att du får inkomstpension när du blir pensionär. Inkomstpensionen räknas på årslöner upp till 7,5 prisbasbelopp (ca 300.000 kr/år).

Premiepension
Till premiepension avsätts 2,5% av din pensionsgrundande inkomst. Dessa pengar placeras i fonder som du själv har möjlighet att bestämma. Premiepensionen räknas på årslöner upp till 7,5 prisbasbelopp.

Garantipensionen
Garantipensionen utgör tryggheten i pensionssystemet och finansieras genom skatter. Denna pension fyller ut låga pensionsbelopp till en viss lägsta nivå. Detta betyder att alla människor oavsett om de arbetat har rätt till pension.

Dessa tre pensioner kallas för den allmänna pensionen. Det är 18,5% av din pensionsgrundande inkomst som går till den allmänna pensionen. Hur stor den allmänna pensionen blir beror på hur länge du arbetat, din lön, samhällsekonomin och avkastning på din premiepension samt på pensionsålder.

Utöver den allmänna pensionen finns även för de allra flesta tjänste/avtalspensionen som detta arbete handlar om och som arbetsgivaren betalar in varje år. För FOLO:s avtalspension avsätts 3,5 % av inkomsten. Det finns olika former av tjänstepension beroende på kollektivavtalsområde. För att ytterligare öka pensionen finns eget pensionssparande som ett alternativ.

1.4 Så fungerar FOLO:s avtalspension

Arbetare inom olika avtalsområden väljer var de ska placera sina avtalspensionspengar. Varje försäkrad har möjlighet att göra ett individuellt val av försäkringsgivare och därefter ett fondval beroende på vilken risk den försäkrade vill ta. Inom avtalsområdet kommer pengar in en gång om året, då arbetsgivaren betalar in pensionen. Alla inbetalade pengar hamnar först på ett avräkningskonto. Därifrån kommer pengarna in till fondförsäkringssystemet förutsatt att man valt fondförsäkring som sparform. Där finns ett konto för varje försäkring med den försäkrades fondval och pengar kommer in till varje försäkring regelbundet förutsatt att den försäkrade arbetar. Kapitalet för en försäkring byggs upp under arbetslivet och vid åldern x är kapitalet:

$$Kap(x) = \sum_{i=1}^{n} Andelar(x_i) * kurs(x_i)$$ där x är åldern och n är antalet valbara fonder

För att finansiera verksamheten tar FOLO ut en avgift på 90 kr per år för varje försäkring fram till pensionsåldern. Avgiften tas bort under utbetalningstiden. Dessa intäkter ska täcka bolagets driftskostnader (administration mm). Dessutom tar fondförvaltaren ut en avgift på 0,4 procent av fondkapitalet per år.

1.4.1 Fördelningsreserven (delningstalet)

Vid pensionsåldern har den försäkrade ett kapital på kontot i form av ett visst antal fondandelar i varje vald fond. För att veta hur mycket pengar bolaget ska betala ut till en person i en viss ålder delas personens sammanlagda kapital med fördelningsreserven. Fördelningsreserven vid en viss ålder är i FOLO lika med antalet månader som man förväntas ha kvar att leva enligt FOLO:s dödlighetsantagande.

$$Utb(x) = \frac{Kap(x)}{A(x)}$$ där $A(x)$ är fördelningsreserven vid åldern x

(Se Kapitel 6.2 för matematisk beskrivning)

1.4.2 Arvsvinst och risksumma

Då en försäkrad utan efterlevandeskydd dör lämnar personen kvar pengar efter sig. Hur mycket pengar den försäkrade har på sitt konto beror på ålder, lön samt antal arbetsår. Dessa pengar tillfaller bolaget och kallas frigjord risksumma. I gengäld betalar bolaget ut arvsvinster till sina kunder. Då man räknar ut arvsvinsten använder man sig av den ettåriga dödsrisken, $q_{arv}(x)$, som skattas av bolaget.

$$Arv(x) = Kap(x) * \frac{q_{arv}(x)}{1 - q_{arv}(x)}.$$

Arvsvinstens storlek beror på kapitalet och på den ettåriga dödsrisken, $q_{arv}(x)$. $q_{arv}(x)$ ökar med åldern x.

Bolaget strävar efter att:

- arvsvinster = frigjord risksumma

för alla åldrar och inom rimliga åldersgrupper (ex. kohortvis). Eventuellt vill bolaget ha en viss säkerhetsmarginal (arvsvinsten ska då vara något mindre än den frigjorda risksumman). Denna kan alltid delas ut i efterhand i form av återbäring.

Ovanstående uppnås då $q_{arv}(x)$ skattas korrekt. Se kapitel 6.3 för ytterligare teori.

1.5 Problem

Det är viktigt att FOLO gör dödlighetsantaganden som följer verkligheten. Man vill sträva efter att ett konstant antal fondandelar ska betalas ut varje månad. Hur reagerar kunderna om deras utbetalningar plötsligt måste sänkas?

Ett problem är att man inte på förhand vet hur länge människor lever. Man vill ha ett rättvist system där människor får ut de pengar de har rätt till. Försäkringsidén bygger på att de som lever kort betalar för dem som lever länge. Bolaget ska inte gå med dödlighetsvinst på de försäkrades bekostnad. Detta betyder att de pengar som kommer in till bolaget genom frigjord risksumma ska betalas tillbaks till kollektivet i form av arvsvinster. Därför ska bolaget inte hålla inne onödigt mycket pengar för att bygga upp en stor reserv. Då får en generations människor betala för att nästa generation ska ha det bra.

Det är viktigt att bolaget räknar med en dödlighet som följer verkligheten. Fel dödlighetsantagande leder till att bolaget kommer att betala ut antingen för mycket eller för lite pengar till sina kunder. Om man t ex skulle räkna med en för hög dödlighet så kommer bolaget att betala ut för mycket pengar och börjar det ”gå snett” kan det vara mycket svårt att rätta till det. Det kan också vara svårt att veta när man måste ändra dödlighetsantagande. Ett eller två års avvikande kanske kan bero på slumpen?

1.5.1 Problemformulering

Jag vill simulera utbetalningar från försäkringarna med olika antaganden om dödlighet och jämföra med de antaganden som bolaget använder idag. Hur stora blir bolagets vinster/förluster vid olika avvikelser? Data finns i ett stort försäkringsbestånd i FOLO. Problemet består i att styra utbetalningarna åt rätt håll med hjälp av korrekta beräkningsantaganden. Tanken är att systemet ska vara rättvist för de försäkrade, d v s en försäkrad ska få ut de pengar han sparat ihop om han lever medellivslångt.

Under rubriken ”scenarier att simulera” har jag redovisat de problem jag valt att undersöka.

2 Antaganden

Den modell jag använder är förenklad jämfört med verkligheten. Som jag nämnt tidigare så har de försäkringstagare som går i pension olika mycket pengar på sitt konto, beroende på fondval, lön, och antal arbetsår. För att underlätta arbetet så kommer jag att slå ihop försäkringar inom samma kohort (åldersgrupp). Vad jag är intresserad av är hur många försäkringar som finns i varje åldersklass samt deras totala värde vid varje ålder från 65 års ålder. Jag antar att varje försäkring är värd lika mycket, d v s att de försäkringstagare som går i pension har lika mycket pengar på kontot.

I verkligheten gör försäkringstagaren ett fondval men jag antar att det endast finns en fond med konstant tillväxt. Bolaget kan inte förutspå svängningar på börsen men sträva efter att betala ut samma antal fondandelar varje månad. Detta krävs enligt inkomstskattelagen under de fem första utbetalningsåren.

Jag antar också att försäkringstagarna dör enligt den ettåriga dödsrisken, $q_{verklig}(x)$. Det förekommer ingen slump i dödligheten. Försäkringstagarna dör i en jämn och ”fin” kurva. Jag antar att alla försäkringstagare går i pension vid 65 års ålder och att de tar ut sin pension livsvarigt och utan efterlevandeskydd. Detta betyder att de som dör i förtid lämnar sitt återstående kapital till kollektivet. Utbetalningar sker årsvis och jag bortser från avkastningsskatt. Händelser under ett år antas ske i följande ordning:

- Alla fyller år
- Utbetalning
- Några dör
- Frigjord risksumma tillfaller bolaget
- Arvsvinster delas ut till de som lever
- Ränta läggs på kapitalet (För FOLO sätts räntan för enkelhetens skull till 0)

När simuleringen startar kommer jag att räkna i fondandelar och inte ta hänsyn till ev. kurssvängningar och ev inflation. Bolaget ska sträva efter att utbetala en konstant mängd fondandelar varje år.

2.1 Framskrivning av kapital

Simuleringen börjar då försäkringstagarna fyller 65 år. Därför måste jag skriva fram varje åldersgrupps kapital till den dag då de går i pension. Framskrivningen görs i kronor.
Jag har gjort följande antaganden:

- Löneutveckling 1 %
- Premieannulation 1 % (t.ex. kunder som försvinner till tjänstemannaförbund)
- In/utflyttning 0 % (resultanten är 0)
- Inflation 0 %
- Värdeutveckling 1 % (netto efter skatt)
- Premieinbetalning per person år 2003, 7.300 kr (sker årsvis)
- Avkastningsskatt 0%

Från FOLO:s bestånd har jag tagit fram två vektorer, en antalsvektor och en kapitalvektor. För varje åldersgrupp har jag nuvärdet av deras kapital år 2003 och antal försäkringstagare som nu är i arbete år 2003. Dessa vektorer har jag skrivit fram till resp. årskulls 65-års dag med hjälp av ovanstående antaganden. Se kapitel 6 för matematisk beskrivning. I Appendix redovisas startvektorerna.

2.2 Dödligheten

För den verkliga dödligheten kommer jag att använda mig av den ettåriga dödsrisken $q_{verklig}(x,t)$ där x är ålder och t är kalenderår. Dödsrisken beror alltså både på ålder och kalenderår. För de som går i pension år 2003 ser dödsrisken ut så här.

kalenderår/ålder	65	66	…	115
2003	q(65,2003)	q(66,2004)	…	q(115,2053)

Tabell 1:Dödsrisk för pensionskohort år 2003

Dödsriskerna för de som går i pension år 2004 och framåt följer samma mönster som ovan.

2.2.1 FOLO:s dödlighet

För att skatta dödligheten använder sig FOLO av Makehams formel:

$\mu(x) = a + be^{cx}$ där a, b och c är konstanter och x är åldern

a = 0
b = 0,000008855
c = 0,1013

FOLO:s dödlighetsantagande följer den s k G-90 dödligheten. Enligt detta antagande kommer en person att leva i 24,1 år från den dag han fyller 65 år. Samma $\mu(x)$-kurva används idag för alla generationer och jag vill se hur väl den stämmer med verkligheten. Samma $\mu(x)$ används också för män och kvinnor. Jag har räknat om FOLO:s $\mu(x)$ till $q(x)$ för att få fram FOLO:s ettåriga dödsrisker. Detta $q(x)$ beror bara på åldern.

2.2.2 Den verkliga dödligheten

Jag har förutsatt att dödligheten för Sveriges befolkning stämmer överens med FOLO:s bestånd. Därför har jag använt mig av SCB:s prognos för befolkningsdödlighet för att ta fram den verkliga dödligheten. Den är tagen från SCB:s skrift om befolkningsframskrivning. SCB har en prognos för år 2003 för män resp. kvinnor. Denna prognos har jag skrivit fram med hjälp av SCB:s procentreduktion till och med år 2053. Exempelvis ser procentreduktionen för en 65 årig man ut på följande sätt.

Kön	ålder	dödsrisk	år 2004-2015	år 2019-2035	år 2039-2050
Man	65	0,0132	-1,40%	-1,05%	-0,70%

Tabell 2: Procentreduktion för en man som fyller 65 år 2003

För att ta fram dödsrisken för en 65 åring år 2004 samt dödsrisken för en 65 åring år 2005 har jag gjort på följande sätt.

$$q(65{,}2004) = q(65{,}2003) \cdot (1 - \frac{1{,}4}{100})$$
$$q(65{,}2005) = q(65{,}2003) \cdot (1 - \frac{1{,}4}{100})^2$$

SCB:s framskrivning går endast till år 2050, så de sista tre åren har jag använt procentreduktionen för år 2050. För att ta fram procentreduktionen för åren 2016-2018 och åren 2036-2038 har jag använt mig av interpolering. Jag får fram en dödlighetstriangel som ser ut som nedan.

kalenderår/ålder	65	66	…	…	115
2003	q(65,2003)	q(66,2004)			q(115,2053)
2004	q(65,2004)	q(66,2005)		q(114,2053)	
…			…		
…		…			
2053	q(65,2053)				

Tabell 3: SCB:s dödlighetsprognos t.o.m. år 2053

(Se appendix för tabell över hela procentreduktionen)

För att kunna genomföra min simulering vill jag även skatta den nedre halvan tabell 3 så att jag kan se vad som händer med alla de pensionskohorter som kommer in i systemet. Jag har för den nedre halvan av tabell 3 använt mig av samma procentreduktion som för det sista intervallet i SCB:s procentreduktion

SCB:s prognos gäller i femtio år och tyngdpunkten av min analys kommer att bero på denna prognos. T.ex. den kohort som går i pension år 2023 är 95 år då SCB:s prognos slutar och då har de allra flesta från den kohorten dött.

I FOLO:s bestånd finns en klar majoritet män. Närmare bestämt är i dagsläget ca 67% av beståndet män. För att ta fram den verkliga sammanslagna dödligheten har jag viktat ihop männens och kvinnornas dödlighet. Detta för att dödligheten ska följa FOLO:s bestånd. Jag har då antagit att fördelningen mellan män och kvinnor är samma (67/33) för alla åldrar upp till 65 år. Därefter kommer andelen kvinnor i beståndet att öka eftersom de i snitt lever längre än männen.

2.2.3 Vad säger SCB:s prognos?

Enligt SCB kommer de kvinnor som uppnår 65 års ålder år 2003 att ha en förväntad återstående medellivslängd på 22,2 år. Medellivslängden ökar sedan successivt för kvinnor fram till år 2053, då man tror att den återstående medellivslängden är 24,5 år för de kvinnor som då fyller 65. Männen har en återstående medellivslängd på 19,1 år från 65-årsdagen år 2003 för att år 2053 vara 22,5 år. För att räkna ut förväntad återstående livslängd har jag använt följande approximation:

$$E[T_{65}] \approx \frac{\sum_{x=65}^{115} l(x)}{l(65)}$$

Här är $l(65) = 1$ då jag antar att alla som kommer in i systemet överlever sin första utbetalning. När jag slår samman män och kvinnor och använder vikterna för FOLO:s bestånd så blir återstående medellivslängden år 2003 för en 65-åring 20,1 år. År 2053 är återstående medellivslängden 23,3 år.

$$E[T_{65-viktad}] \approx \sum_{X=65}^{115} l_{man}(x) * v_{man}(x) + \sum_{X=65}^{115} l_{kvinna}(x) * v_{kvinna}(x)$$

där v är vikten för man respektive kvinna

pensionsår/kön	kvinna	man	sammanslagen
2003	22,2	19,1	20,1
2053	24,5	22,5	23,1

Tabell4: Återstående livslängd enligt SCB givet att man fyllt 65 år

SCB spår alltså en ökning av medellivslängden både för män och kvinnor. Ovanstående visar att män har en kortare återstående medellivslängd än kvinnor.

.

2.3 Jämförelse mellan FOLO och PPM

I nedanstående stycke redovisas kort skillnader mellan FOLO och PPM. Detta för att programmet där simuleringarna utförs är anpassat både till FOLO och PPM.

2.3.1 Företagen

Premiepensionsmyndigheten, PPM är en statlig myndighet som ansvarar för premiepension. Premiepension är, som tidigare påpekats, den del av den allmänna pensionen som är fonderad. Riktlinjer för PPM sätts av staten och PPM är strikt bundna till dessa regler. Ett exempel på en sådan regel är könsneutrala dödlighetsprognoser. Premiepension tilldelas alla arbetstagare.

Folksam LO Fondförsäkringsaktiebolag är ett bolag inom Folksam koncernen som ansvarar för avtalspensionsförsäkring. De aktiva arbetstagarna inom olika kollektivavtalsområden har möjlighet att välja att placera sin avtalspension hos FOLO. FOLO har som krav att inte sänka utbetalningarna i andelar under de fem första utbetalningsåren på grund av inkomstskattelagen. För PPM gäller inte denna restriktion.

Gemensamt för dessa två typer av försäkring är att man gör ett fondval och därmed tar en risk för den framtida avkastningen.

2.3.2 Skillnader

I PPM:s system delas all risksumma som frigörs vid dödsfall ut som arvsvinst. Detta betyder i teorin att

$$q_{verklig}(x) = q_{arv}(x)$$

I FOLO:s system skattas istället $q_{arv}(x)$. En bra skattning bör överensstämma med den frigjorda risksumman.

I delningstalen skattar man den förväntade återstående livslängden med hjälp av $q_{del}(x)$. PPM och FOLO har olika skattningar på $q_{del}(x)$ och därmed olika delningstal. Denna skillnad beror t.ex. på att bestånden ser olika ut och på respektive aktuaries tro om den framtida dödligheten. PPM använder sig av diskonteringsränta då de räknar ut delningstalen. FOLO räknar utan ränteantagande.

För PPM har vi i praktiken

$$q_{verklig}(x) = q_{arv}(x) \neq q_{del}(x)$$

och för FOLO har vi i praktiken

$$q_{verklig}(x) \neq q_{arv}(x) = q_{del}(x)$$

Vad innebär nu dessa antaganden för bolaget respektive försäkringstagaren? Hos PPM betalas all frigjord risksumma ut som arvsvinst. Detta innebär att PPM inte kommer att göra någon dödlighetsvinst/förlust på de försäkrades bekostnad. Hos FOLO skattas arvsvinsten i förväg och i och med det kan eventuella dödlighetsvinster/förluster uppstå. FOLO gör en vinst då man antagit en lägre dödlighet i prognosen än den dödlighet verkligheten utvecklas enligt. FOLO avser då att i efterhand låta uppkommet överskott gå tillbaka till de försäkrade.

PPM:s tillvägagångssätt innebär att försäkringstagarnas utbetalningar kommer att variera så länge en perfekt prognos inte är satt (perfekt prognos innebär för både PPM och FOLO att $q_{verklig}(x) = q_{arv}(x) = q_{del}(x)$). Utbetalningarna kommer att höjas då för låg dödlighet antagits i delningstalen, eftersom det då lever kvar ett färre antal personer som delar på kohortens gemensamma kapital. Då en för hög dödlighet antas blir förhållandet omvänt. För FOLO:s försäkringstagare innebär det att utbetalningarna blir konstanta (i fondandelar).

I detta arbete använder vi oss av de ettåriga dödsriskerna, $q(x)$. I verkligheten arbetar FOLO och PPM med $\mu(x)$.

2.4 Programmet

Programmet är uppbyggt i Excel och är avsett att passa både för FOLO och PPM.
Som indata har jag:

- Antal personer i varje årskull vid 65 års ålder
- Totalt värde av inbetalda premier för varje årskull vid 65 års ålder

Simuleringen börjar vid 65 års ålder och för varje år som går kommer en ny årskull in i systemet.

Jag har tre ändringsbara $q(x)$. Först har vi den verkliga $q_{verklig}(x)$ som är tagen från SCB. Sedan har vi $q_{arv}(x)$ som används för arvsvinsten och $q_{del}(x)$ för delningstalet. I de beräkningar som FOLO gör så sätts $q_{arv}(x) = q_{del}(x)$. Jag kommer att ändra dessa $q(x)$ på olika sätt för att belysa mina frågeställningar. Hela programuppbyggnaden redovisas i appendix.

2.4.1 Simuleringen

I FOLO finns det ingen ränta i delningstalet så jag räknar för enkelhetens skull inte med någon ränta under själva simuleringen. Räntan och inflationen sätts till 0 % och därmed har jag ett konstant penningvärde. Simuleringen kommer att göras från år 2003 och femtio kohorter kommer att gå i pension. Jag antar att en hel kohort har dött vid 115 års ålder. Det tar således hundra år innan sista pensionskohorten dött bort. I början av 2003 är systemet tomt och bolagets uppsamlade vinster/förluster är noll. För varje år som går kommer en ny kohort in i systemet och de som är inne i systemet blir ett år äldre.

Vid 65 års ålder gör jag om kapitalet i kronor till andelar. Varje andel motsvarar 1 krona vid 65 års ålder. Jag redovisar resultaten i andelar.

3 Simulering

Förutsättning: Jag antar att jag har den verkliga dödligheten för år 2003-2103. Följande scenarier vill vi belysa:

3.1 Scenarier att simulera

1. Bolaget gör en perfekt dödlighetsprognos, $q_{verk} = q_{arv} = q_{del}$

Detta betyder att kapitalet pensionsspararna har vid 65 års ålder kan portioneras ut genom konstanta utbetalningar livsvarigt. Att kunna sätta en sådan prognos med en eventuell säkerhetsmarginal är bolagets strävan.

2. Verklig dödlighet enligt SCB

Jag använder de dödlighetsantaganden som bolaget använder idag, så kallad G-90 dödlighet och står fast vid samma dödlighet de närmaste 50 åren. Det betyder att arvsvinsten för en viss ålder är lika stor varje år och samma delningstal kommer att användas för varje kohort. Vi låter verkligheten utvecklas enligt SCB.

Hur bra stämmer bolagets skattning för första året? Om tio år? Om 20 år? Vad händer med försäkringstagarnas utbetalningar? Hur stor del av sitt sparade kapital får de ut i pension? Hur utvecklar sig bolagets kapital?

Som avslutning på detta scenario gör jag samma analys som PPM och antar att $q_{arv}(x) = q_{verklig}(x)$. Detta innebär att all frigjord risksumma går tillbaka till försäkringstagarna. Vad händer med utbetalningarna nu? Om t. ex. utbetalningarna ökar så skapas en orättvisa, i och med att de långlivade kan tillgodoräkna sig den vinst som de kortlivade gett upphov till.

3. Verkligheten följer inte SCB:s prognos, variant 1

I detta scenario visar det sig att SCB har gjort en felaktig framtidsprognos. SCB:s matris med q-värden multipliceras med α för att den förväntade medellivslängden ska bli längre/kortare. (Hela matrisen multipliceras med samma α, alltså hela q-kurvan kommer ligga över/under den verkliga).

Vi väljer α så att medellivslängden för en 65-åring som går i pension år 2003 ökar med 1 år, 3 år respektive 5 år.
$\alpha = 0{,}88$ för 1 år ökad förväntad livslängd från 65 år.
$\alpha = 0{,}68$ för 3 år ökad förväntad livslängd från 65 år.
$\alpha = 0{,}54$ för 5 år ökad förväntad livslängd från 65 år.

Vad händer med bolagets kapital? Hur stor del av försäkringstagarnas pengar kommer att betalas ut vid olika skillnader i återstående livslängd? Hur länge håller bolagets prognos vid olika avvikelser?

4. Verkligheten följer inte SCB:s prognos, variant 2

I detta scenario visar det sig SCB:s prognos inte håller för 50 år framåt. Antag att det om tio år exempelvis framkommer någon medicinsk upptäckt som gör att medellivslängden kommer att öka. Jag multiplicerar de ettåriga dödsriskerna med olika γ -värden som kommer påverka kalenderår.

γ_1 för kalenderår 2003-2012
γ_2 för kalenderår 2013-2022
γ_3 för kalenderår 2023-2103

Jag har tänkt mig följande scenario. Här antar jag att den återstående livslängden för en 65-åring som går i pension år 2003 ökar med ett år men det sker inte på samma sätt som i scenario 3. Om tio år slår SCB:s prognos fel då γ_2 slår in och den förväntade återstående livslängden ökar. År 2013 har den aktuella pensionskohorten fyllt 75 år. Detta kommer att påverka alla pensionskohorter i systemet men vid olika åldrar eftersom γ slår in för ett kalenderår. Följande γ -värden gör att en 65-åring som går i pension år 2003 får en ökad förväntad livslängd på 1 år:

$\gamma_1 = 1$ $\quad\quad$ $\gamma_2 = 0,83$ $\quad\quad$ $\gamma_3 = 0,83$

Ovanstående alternativ visar att dödligheten kan utvecklas på olika sätt och vad får det för konsekvenser för bolaget?

5. Bolaget gör en könsbaserad prognos

Jag vill se hur bra bolagets prognos stämmer om man skiljer på män och kvinnor. Alltså den verkliga q-matrisen består i första fallet bara av männens dödlighet och i andra simuleringen bara av kvinnornas. Borde bolaget göra separata dödlighetsantaganden för män och kvinnor? Idag antas en könsneutral dödlighet vilket missunnar männen. Hur länge till kommer männen acceptera denna orättvisa? Jag vill undersöka hur mycket högre utbetalning männen borde få då de har en känt kortare livslängd. Hur påverkas bolagets resultatet vid en könsbaserad dödlighet?

6. Anpassning av SCB:s q(x) till Makeham

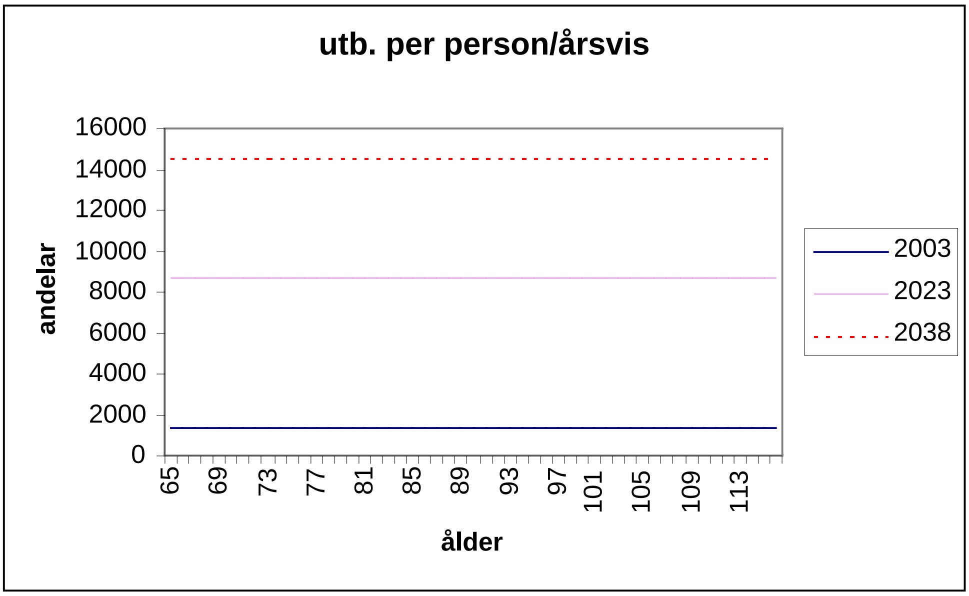
I det här sista scenariot vill jag hitta en Makeham-anpassning till SCB:s ettåriga dödsrisker för den generation som går i pension år 2003. Detta för att det i scenario 2 visar sig att FOLO:s $q(x)$ - värden inte överensstämmer med SCB:s. För att göra detta måste vi transformera SCB:s $q(x)$ - värden till $\mu(x)$. Detta gör vi med hjälp av teorin som följer i resultatet till detta scenario och med hjälp av Problemlösaren i Excel. Vad skulle det betyda om bolaget skulle använda de värden som tas fram till att räkna ut delningstal/arvsvinst för bolaget/försäkringstagarna?

4 Resultat

I detta kapitel redovisar jag resultaten från mina simuleringar. Jag har koncentrerat mig främst på fyra pensionskohorter. Jag tittar på resultatet för pensionskohort år 2003, år 2013, år 2023 samt år 2038 som är den första kohort som betalat in full pension.

4.1 Scenario 1. Bolaget gör en perfekt dödlighetsprognos

Bolaget gör en perfekt prognos och vi får konstanta utbetalningar. Den frigjorda risksumman som tillkommer bolaget vid dödsfall motsvarar precis arvsvinsten som bolaget ger tillbaka till försäkringstagarna.



Figur 4.1 Utbetalningar per person årsvis för tre pensionskohorter

Anledningen till att utbetalningen är så pass låg för pensionskohort år 2003 är att de endast sparat sedan år 1998 då FOLO startade. Det dröjer fram till år 2038 innan full pension betalas ut med nya systemet. De som är födda år 1973 är första årskullen som funnits i systemet ett helt arbetsliv (40 aktiva arbetsår).

I detta scenario får försäkringstagarna ut maximal årlig utbetalning. Varje kohort får ut hela sitt sparade kapital.

Pensions- År	kapital per kohort milj.and	utbetalat kapital i %	utbetalning per person/år i andelar
2003	22,4	100	1331
2013	525,8	100	5028
2023	1194,5	100	8722
2038	2306,5	100	14545

Tabell 4.1: Resultat kohortvis vid en perfekt prognos

4.2 Scenario 2. Verklig dödlighet enligt SCB

Nedan visas $q(x)$-kurvorna för pensionskohort år 2003, år 2053 samt den $q(x)$-kurva FOLO använder:

Figur 4.2 q(x)-kurvor för pensionskohort år 2003, år 2053 samt för FOLO

Genom att titta på grafen ser man att FOLO räknar med en lägre dödlighet än verkligheten. FOLO:s q(x)-kurva ser ut att stämma ganska bara upp till 80-års åldern men därefter är dödligheten för låg jämfört med verkligheten.

Då man gör en noggrannare analys ser man att dödligheten för de som går i pension år 2003 ligger över den dödlighet FOLO använder idag för alla åldrar. FOLO:s dödlighet för de som går i pension år 2053 är för hög i åldern 65 –80 men därefter räknar FOLO med en lägre dödlighet jämfört med verkligheten. Vad betyder nu detta?

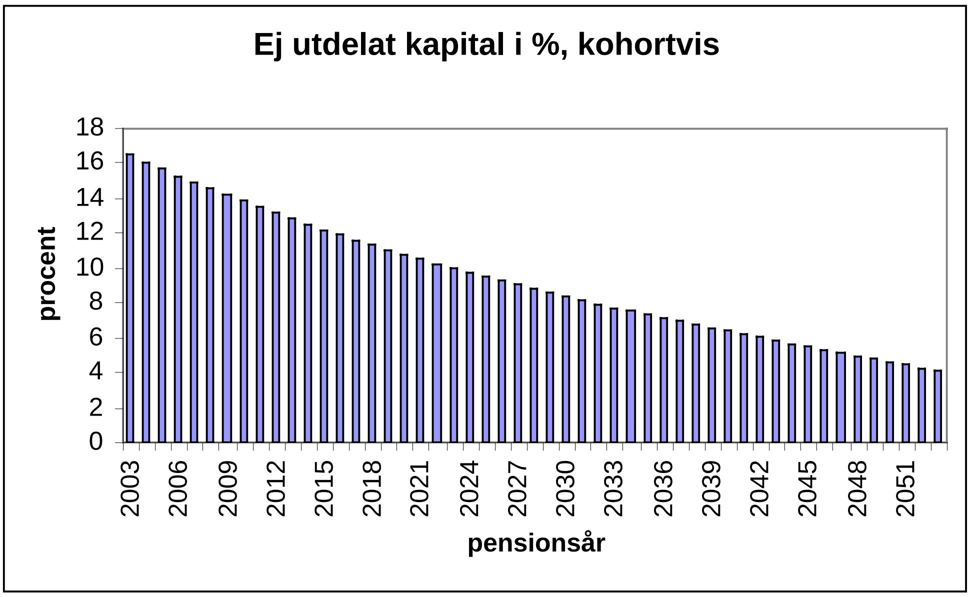
För de som går i pension år 2003 utbetalas 83,5 % av det kapital som fanns i starten. 16,5 % av det kapital som fanns vid pensioneringsdagen finns således kvar när den sista försäkringstagaren för kohort år 2003 dött. Bolagets utbetalade arvsvinster är lägre än den frigjorda risksumman för alla åldrar.

För de som går i pension 10 år senare år 2013 utbetalas 87,2 % av det kapital som fanns vid starten. De som pensioneras år 2023 får ut 90 % av sitt sparade kapital. FOLO:s dödlighetsskattning stämmer alltså bättre för senare årgångar jämfört med idag då man ser till det utbetalade beloppet. Nedan visas resultat för pensionskohort år 2003, 2013, 2023 samt för år 2038.

pension- år	kapital per kohort milj. and	Utbetalning per Kohort milj.and	utbetalt kapital i %	utbetalning person/år i and	optimal utb. person/år i and.
2003	22,4	18,7	83,5	1112	1331
2013	525,8	458,3	87,2	4382	5028
2023	1194,5	1075,3	90,0	7852	8722
2038	2306,5	2150,5	93,2	13561	14545

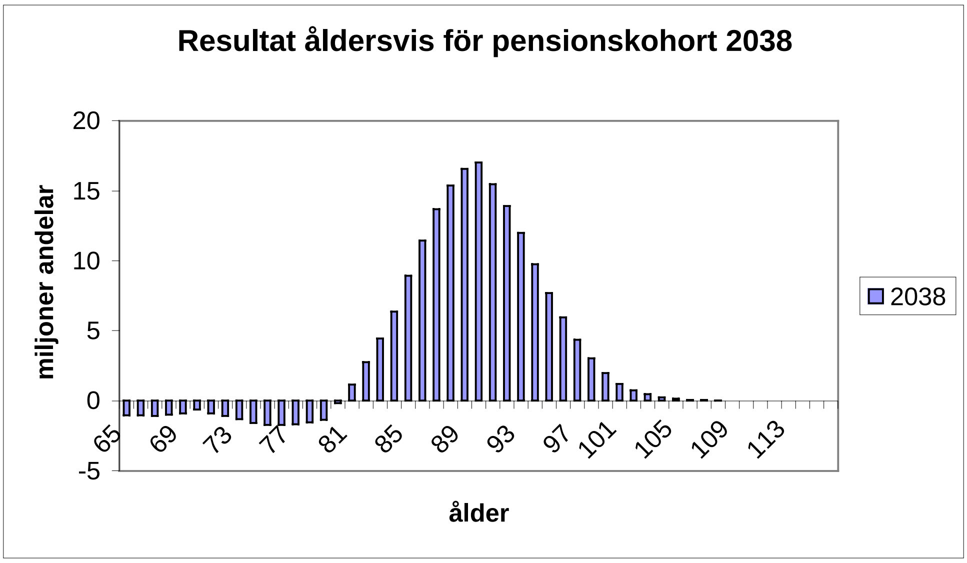
Tabell 4.2: Resultat kohortvis för bolagets nuvarande prognos

FOLO har en god marginal på dödlighetsintensiteten. Dagens dödlighetsantagande som FOLO gjort skulle kunna hållas fram till år 2053 utan att bolaget gör förlust förutsatt att min antagna dödlighet stämmer. Nedan visas ej utdelat kapital i % för varje pensionskohort.



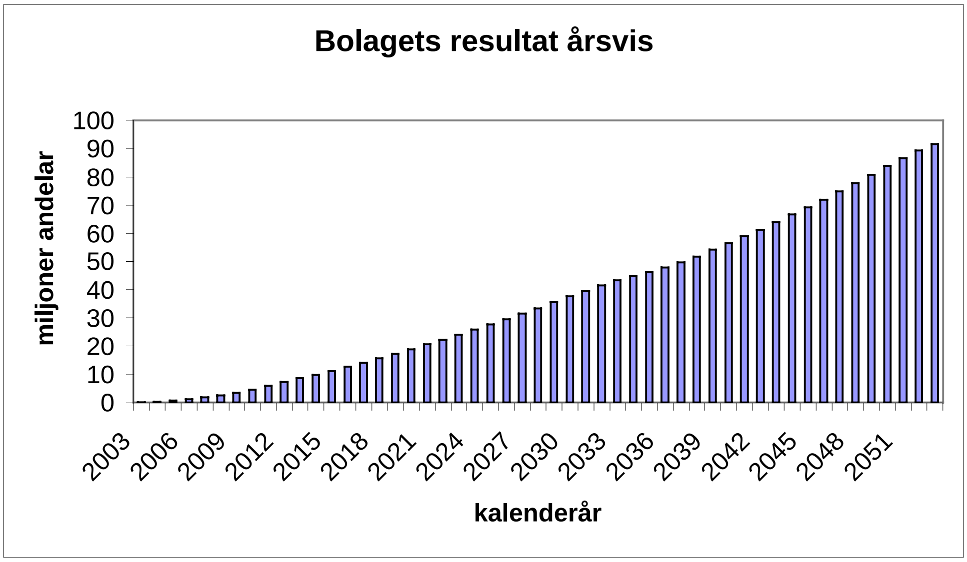
Figur 4.3 Ej utdelat kapital för varje pensionskohort

För de som går i pension år 2038 så utbetalas ca 93 % av deras sammanlagda kapital. Detta kan tyckas vara ganska bra men vid ytterligare analys ser man att FOLO:s dödlighet inte stämmer så bra. De första 15 åren efter pensionsdagen gör bolaget förluster. Det betalas ut mer arvsvinst än frigjord risksumma som kommer in. Därefter är frigjord risksumma>arvsvinst och bolaget ”tjänar” pengar på åldrar över 80 år. Dödlighetsintensiteten FOLO tillämpar blir för hög i åldrar 65- 80 år och därefter för låg.



Figur 4.4 Resultat för pensionskohort 2038

Håller man de dödlighetsantaganden som används idag ligger q(x)-kurvan under den verkliga dödligheten för alla åldrar (från 65) fram till de som går i pension år 2030. Därefter börjar bolaget göra förluster för vissa åldrar, främst för de första åren efter 65 år. Dessa förluster kompenseras av att FOLO:s dödlighet är för låg i åldrar över 80 och därmed finns kapital kvar för varje kohort när den sista personen dött. Nedan visas bolagets vinster de kommande 50 åren i ett diagram.



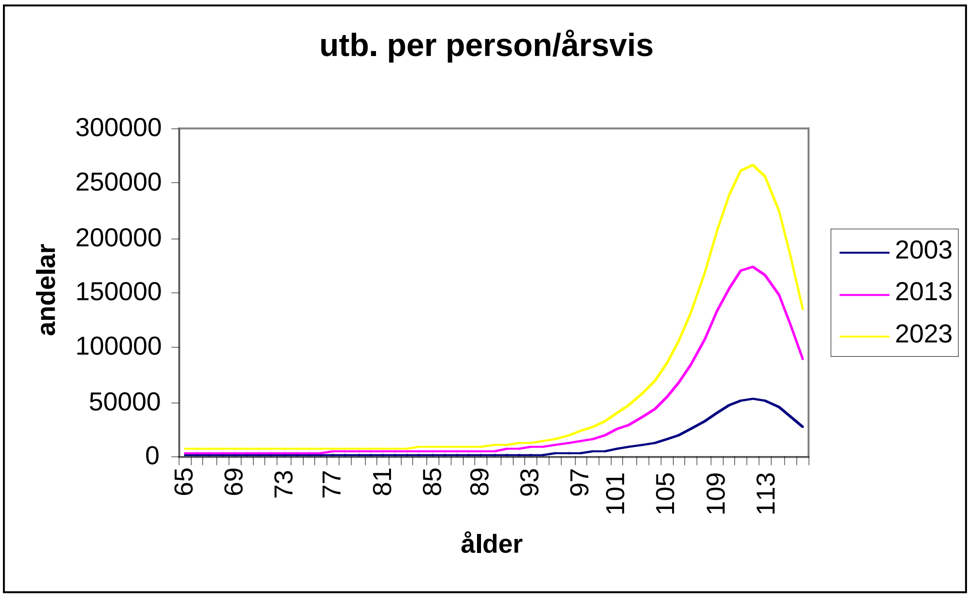
Figur 4.5 Bolagets årsvisa resultat i andelar 50 år framåt

Anm: Anledningen till att resultatet stiger är att det för varje år kommer in en ny pensionskohort i systemet.

Slutligt kapital i form av dödlighetsvinst/förlust år 2053:

- 1876 miljoner andelar

Slutligen vill jag i detta scenario låta all arvsvinst gå tillbaka till försäkringstagarna och jag använder mig av PPM:s tillvägagångssätt och sätter $q_{arv}(x) = q_{verklig}(x)$. Nu kommer bolaget inte att samla på sig något kapital, pengarna kommer istället att betalas ut och det bidrar till att utbetalningarna skjuter i höjden för höga åldrar eftersom bolagets delningstal är satta i överkant.



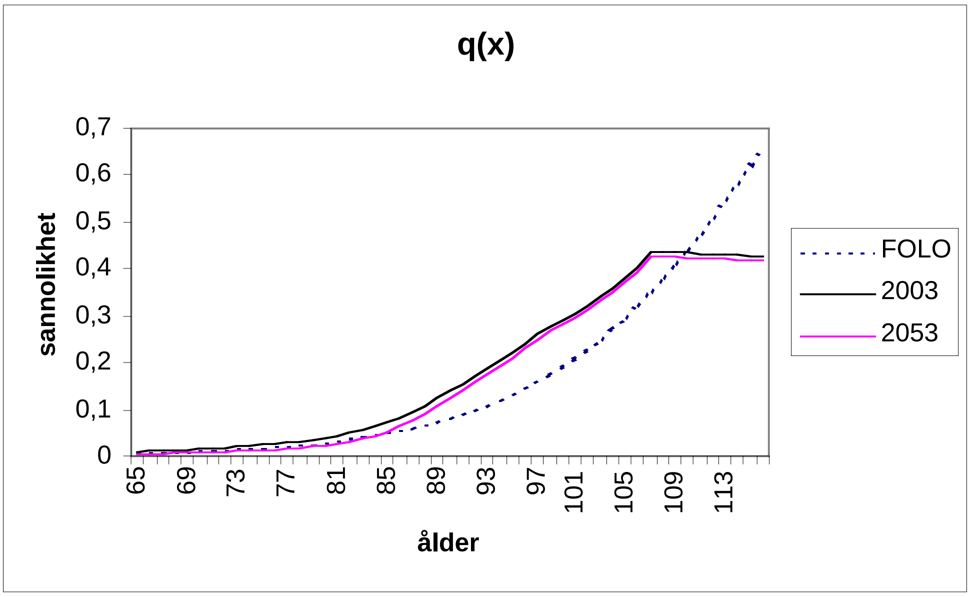
Figur 4.6 Årsvisa utbetalningar för tre pensionskohorter

Vi ser från figur 4.6 att detta är helt orimligt. De människor som lever längre än 90 år kommer att få stora höjningar på sin pension. Detta för att de kan tillgodoräkna sig den vinst som de kortlivade gett upphov till i och med att delningstalen från början är för höga. Det betyder att antalet personer dör snabbare än kapitalet minskar och mot slutet finns ett litet antal försäkringstagare kvar med ett stort kapital.

4.3 Scenario 3. Verkligheten följer inte SCB:s prognos, variant 1

Fall 1

Vi ökar den förväntade återstående livslängden för en 65-åring som går i pension år 2003 med 1 år. Detta medför en mindre ökning på medellivslängden för 65-åringar som går i pension efter år 2003 eftersom de redan har en längre förväntad återstående livslängd. T.ex. en 65-åring som går i pension år 2053 får en förväntad ökad livslängd på 0,89 år. Nedan visas q(x)-kurvan för pensionskohort år 2003, år 2053 samt FOLO:s q(x)-kurva.



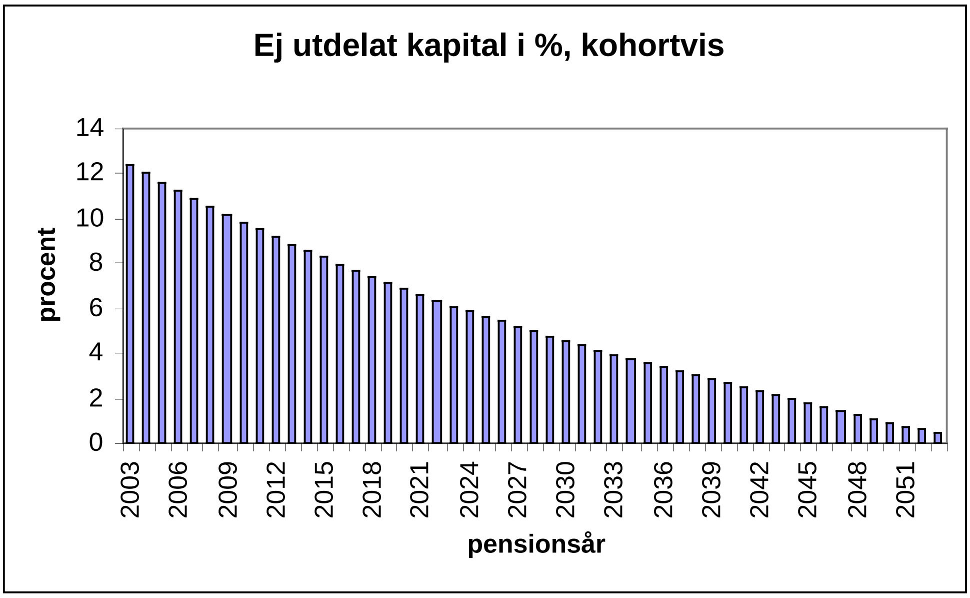
Figur 4.7 q(x)-kurvor för pensionskohort år 2003, år 2053 samt för FOLO med ett års ökad livslängd för en 65-årigsom går i pension år 2003

Ur tabellen nedan ser man att bolaget även här betalar ut för lite pengar. Bolagets prognos är säker.

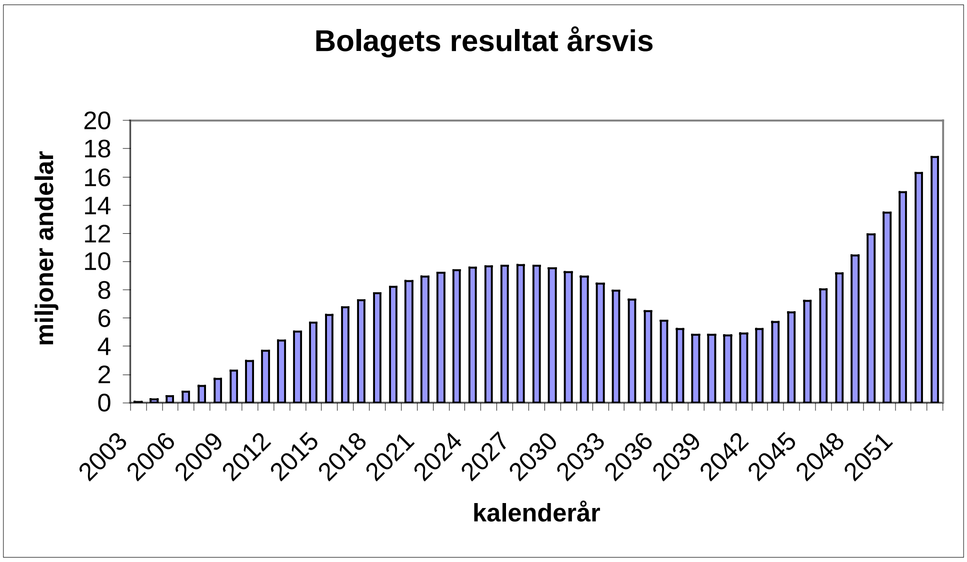
pensions- år	kapital per kohort milj. and.	utbetalt per kohort milj and.	utbetalt kapital i %	årlig utbetalning per person i andelar	optimal utb. person/år i and.
2003	22,4	19,6	87,6	1112	1269
2013	525,8	479,2	91,1	4382	4809
2023	1194,5	1121,5	93,9	7852	8363
2038	2306,5	2237,1	97,0	13561	13982

Tabell 4.3: Resultat då förväntad återstående livslängd ökar med ett år för en 65-åring som går i pension år 2003

De som går i pension år 2003 får i detta fall ut 87,6% av sitt sparade kapital. De som går i pension år 2038 får ut 97 % av sitt kapital. Vi ser att FOLO:s prognos fortfarande är säker och bolaget klarar av detta scenario. Nedan visas ej utdelat kapital i % för varje pensionskohort samt bolagets kapital årsvis för 50 år framåt.



Figur 4.8 Ej utdelat kapital för varje pensionskohort



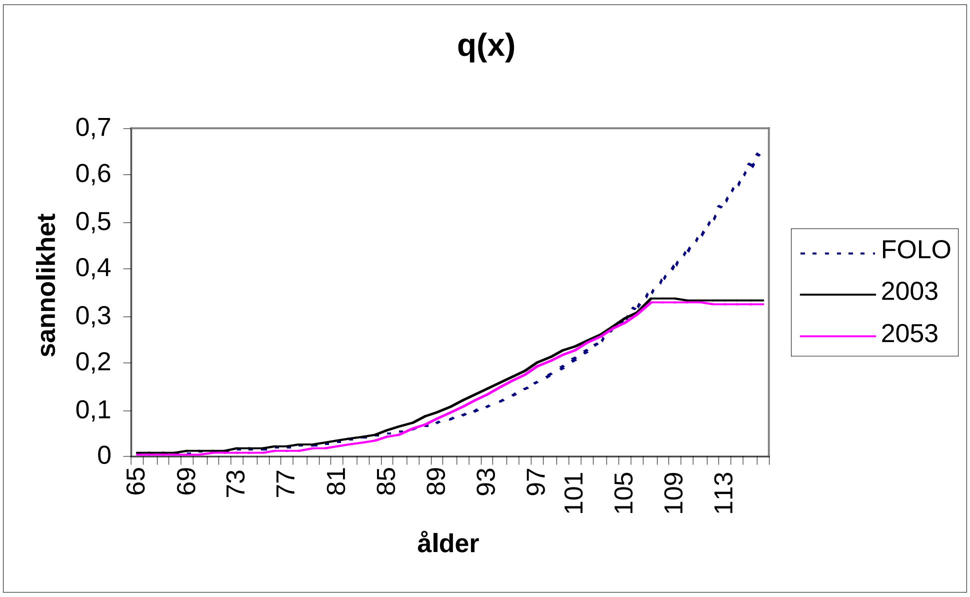
Figur 4.9 Bolagets årsvisa resultat i andelar 50 år framåt

Nu börjar bolaget göra förluster för vissa åldrar för de som går i pension efter år 2020 och förlusterna ökar sedan successivt. Dessa förluster kompenseras fortfarande av att FOLO:s dödlighet är för låg i åldrar över 80 år.

Slutligt kapital i form av dödlighetsvinst/förlust år 2053:

- 363,4 miljoner andelar

Fall 2
Vi ökar den förväntade återstående livslängden för en 65-åring som går i pension år 2003 med 3 år. Nedan visas q(x)-kurvan för pensionskohort år 2003, år 2053 samt FOLO:s q(x)-kurva.



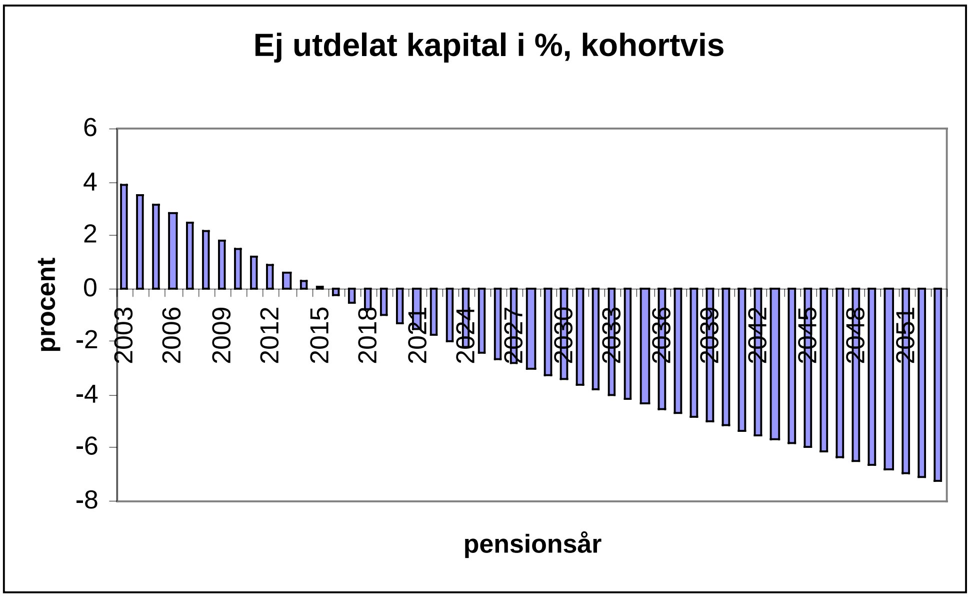
Figur 4.10 q(x)-kurvor för år 2003, år 2053 samt för FOLO med tre års ökad förväntad återstående livslängd för en 65-åring som går i pension år 2003

Även här har bolaget en säker prognos till att börja med.

pensions- år	kapital per kohort milj. and	utbetalt per kohort milj. and	utbetalt kapital i %	årlig utbetalning per person i andelar	optimal årlig utb/person and.
2003	22,4	21,5	96,1	1112	1156
2013	525,8	522,7	99,4	4382	4408
2023	1194,5	1217,9	102,0	7852	7701
2038	2306,5	2418,0	104,8	13561	12935

Tabell 4.4 Resultat då förväntad återstående livslängd ökar med tre år för en 65-åring som går i pension år 2003

De som går i pension år 2003 kommer få ut drygt 96 % av det sparade kapitalet. De som går i pension mellan åren 2012-2018 får ut hela sitt sparade kapital, 100 % (± 1%) . Därefter betalas det ut för mycket pengar till varje kohort och de som går i pension år 2038 får ut ca 5 % för mycket. Nedan visas ej utdelat kapital i % för varje pensionskohort.



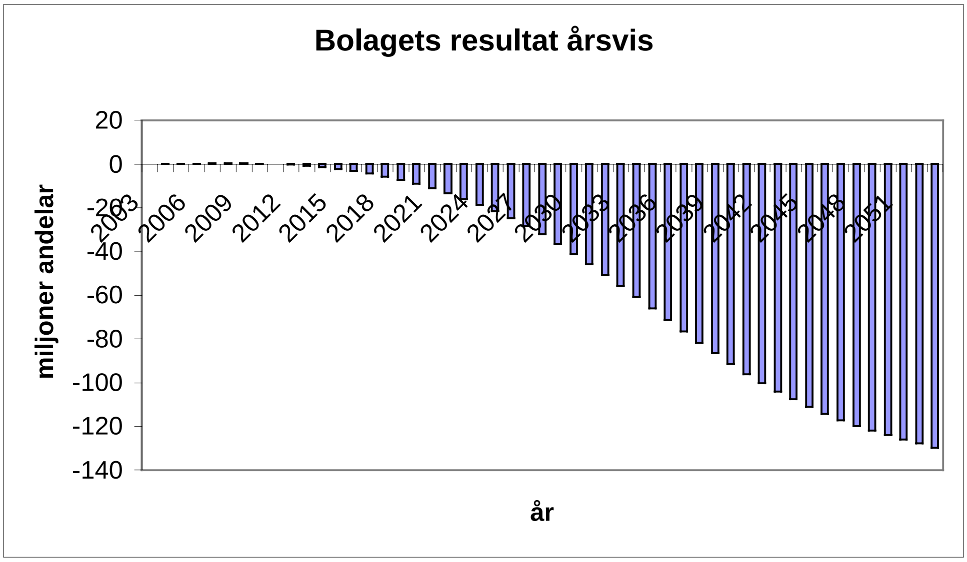
Figur 4.11 Ej utdelat kapital för varje pensionskohort

De första förlusterna kommer vid kohorter som går i pension efter år 2015. Men redan för pensionskohort 2003 börjar bolaget göra förluster för vissa åldrar (arvsvinsten> frigjord risksumma). Från pensionskohort 2003 ökar sedan antalet förlustår för senare pensionskohorter men det dröjer fram till pensionskohort 2015 innan FOLO betalar ut för mycket pengar.

Nedan visas hur bolagets kapital utvecklar sig för kohorten som går i pension år 2013. Denna pensionskohort får ut hela sitt sparade kapital (99,4%).

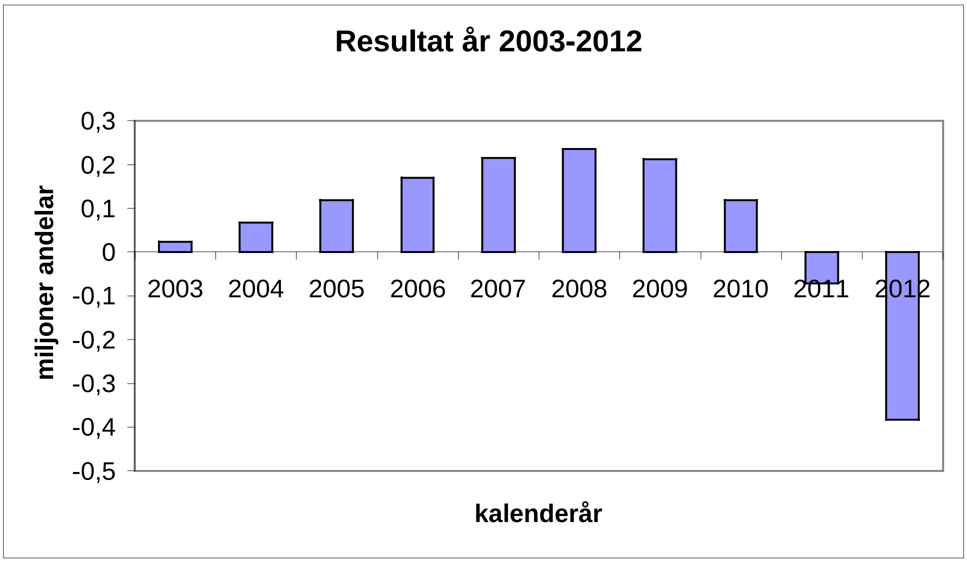
Figur 4.12 Bolagets resultat per ålder för försäkringstagare som går i pension år 2013

Av diagrammet ovan ser man att trots att alla pengar betalas ut så är dödligheten inte bra skattad. De första 20 åren betalas det ut mer arvsvinst än frigjord risksumma som kommer in. Bolaget bygger under dessa år upp skulder. Därefter är arvsvinsten mindre än den frigjorda risksumman och bolaget ”gör vinst”. Bolaget ska sträva efter att arvsvinsten = frigjord risksumma för alla åldersgrupper. Bolagets årsvisa resultat för 50 år framåt.



Figur 4.13 Bolagets årsvisa resultat i andelar 50 år framåt

Resultat för de första 10 åren redovisas nedan.

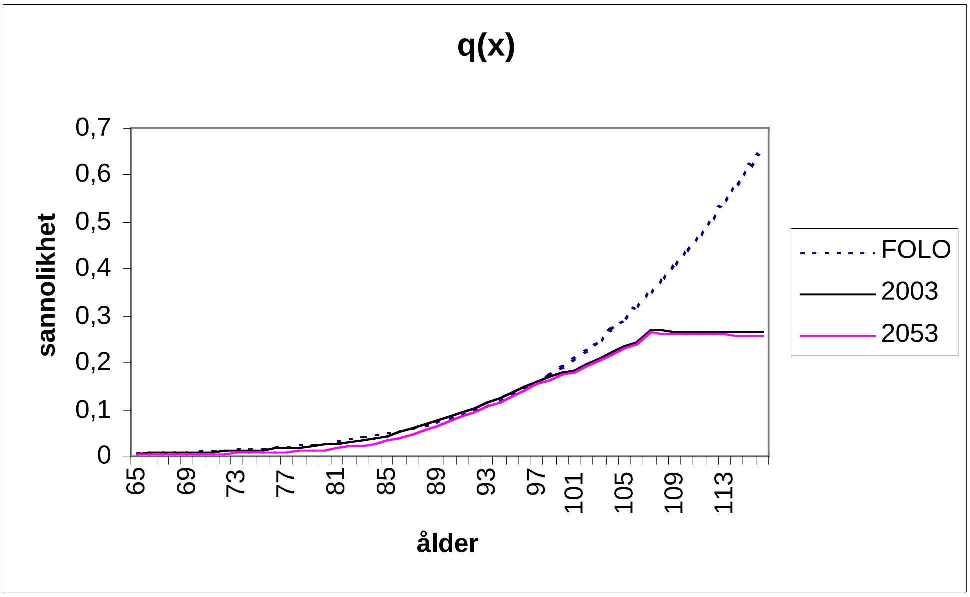


Figur 4.14 Bolagets årsvisa resultat för år 2003-2012

Slutligt kapital i form av dödlighetsvinst/förlust år 2053:

- -2465 miljoner andelar

Fall 3
Vi ökar medellivslängden för en 65-åring som går i pension år 2003 med 5 år. Nedan visas q(x)-kurvan för år 2003, år 2053 samt FOLO:s q(x)-kurva.



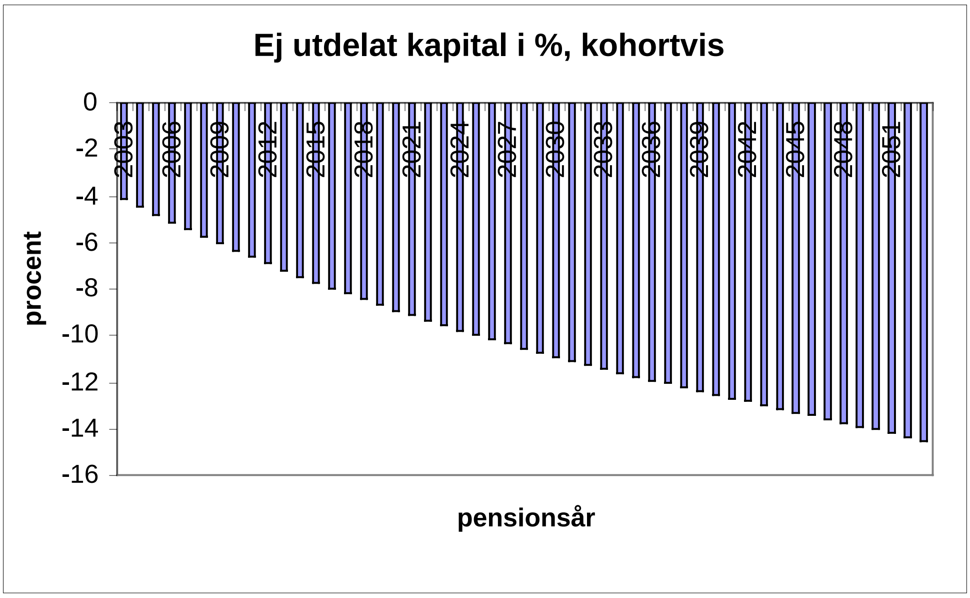
Figur 4.15 q(x)- kurvor för år 2003, år 2053 samt för FOLO med fem års ökad förväntad återstående livslängd för en 65-åring som går i pension år 2003

Nu betalas det ut för mycket pengar redan från pensionskohort år 2003.

pensions- år	kapital per kohort milj. and	utbetalt per kohort milj. and	utbetalt kapital i %	årlig utbetalning per person i andelar	optimal årlig utb/person and
2003	22,4	23,3	104,1	1112	1068
2013	525,8	563,6	107,2	4382	4089
2023	1194,5	1308,6	109,6	7852	7168
2038	2306,5	2588,5	112,2	13561	12084

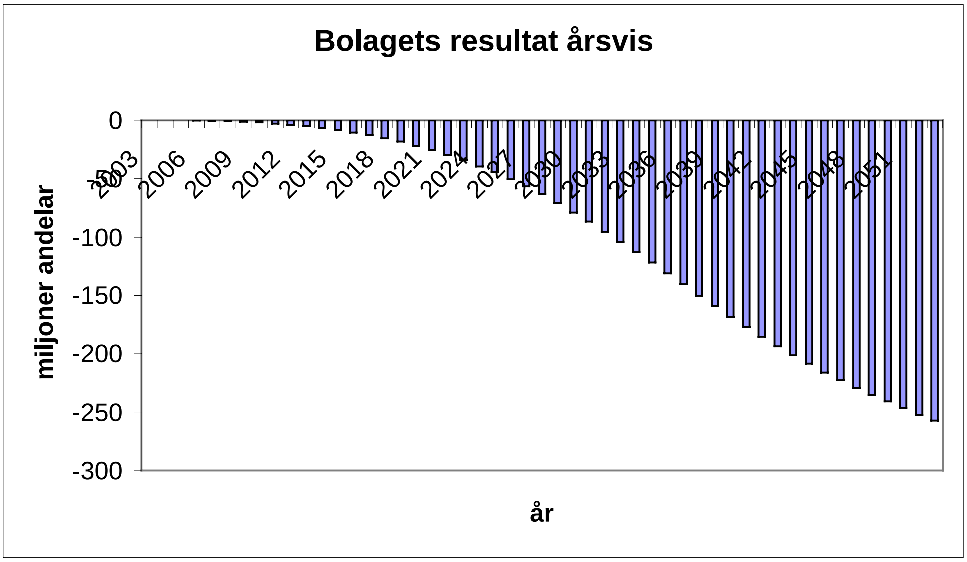
Tabell 4.6 Resultat då förväntad återstående livslängd ökar med fem år för en 65-åring som går i pension år 2003

Nedan visas ej utdelat kapital kohortvis i %



Figur 4.16 Ej utdelat kapital per pensionskohort

Bolaget gör stora förluster.



Figur 4.17 Bolagets årsvisa resultat i andelar för 50 år framåt

Slutligt kapital i form av dödlighetsvinst/förlust år 2053:

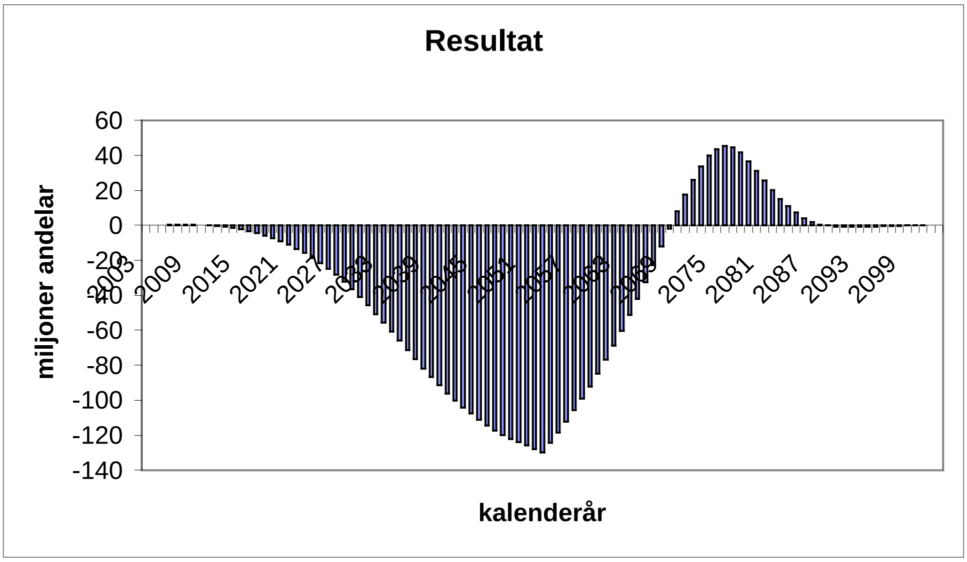
- -4744 miljoner andelar

Anm. Man kan se mitt program som ett slutet system och köra fram simuleringen i ovanstående fall till år 2103 då pensionskort 2053 dött bort och systemet är tomt. Bolagets resultat efter 50 respektive 100 år blir följande:

bolagets resultat	miljoner andelar år 2053	miljoner andelar år 2103
dagens prognos	1876	5365
plus 1 år	363	2616
plus 3 år	-2465	-3126
plus 5 år	-4744	-8538

Tabell 4.7 Bolagets resultat år 2053 samt år 2103

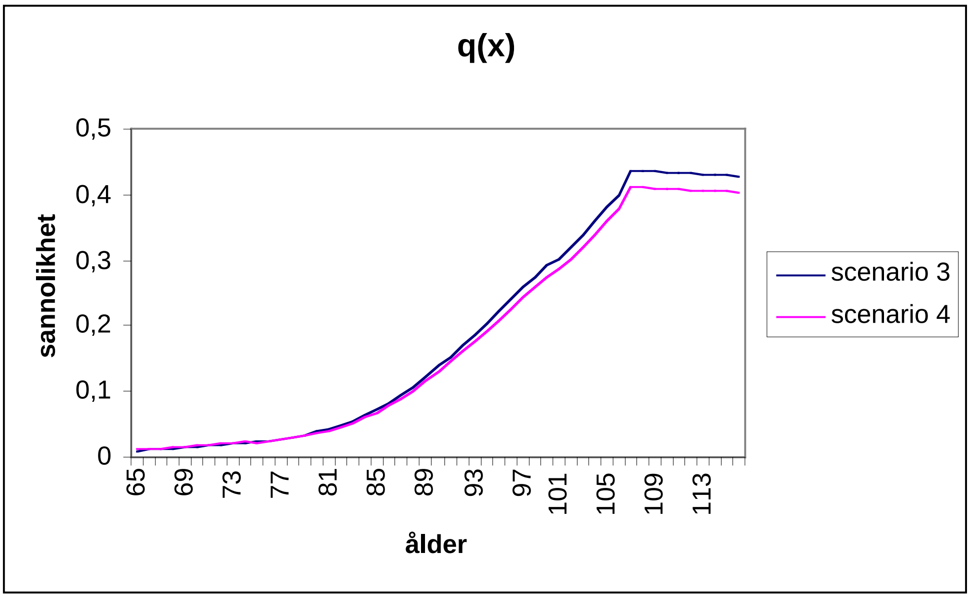
Enligt tidigare analyser ser man att bolaget ”gör vinster” i höga åldrar. T.ex. i dagens prognos och i fall 1 så ökar vinsterna kraftigt de sista 50 åren då man låter varje kohort dö bort. Detta beror på att stora vinster görs för alla pensionskohorter i höga åldrar. I fall 2 så minskar de årsvisa förlusterna efter 50 år för att sedan övergå i vinster. Bolagets negativa resultat hämtas upp till en viss del i och med att de årsvisa förlusterna övergår i vinster. Nedan visas resultat årsvis för fall 2 då förväntad återstående livslängd ökar med tre år.



Figur 4.18 Bolagets årsvisa resultat i andelar för 100 år framåt med en ökad förväntad återstående livslängd på 3 år för en 65-åring som går i pension år 2003

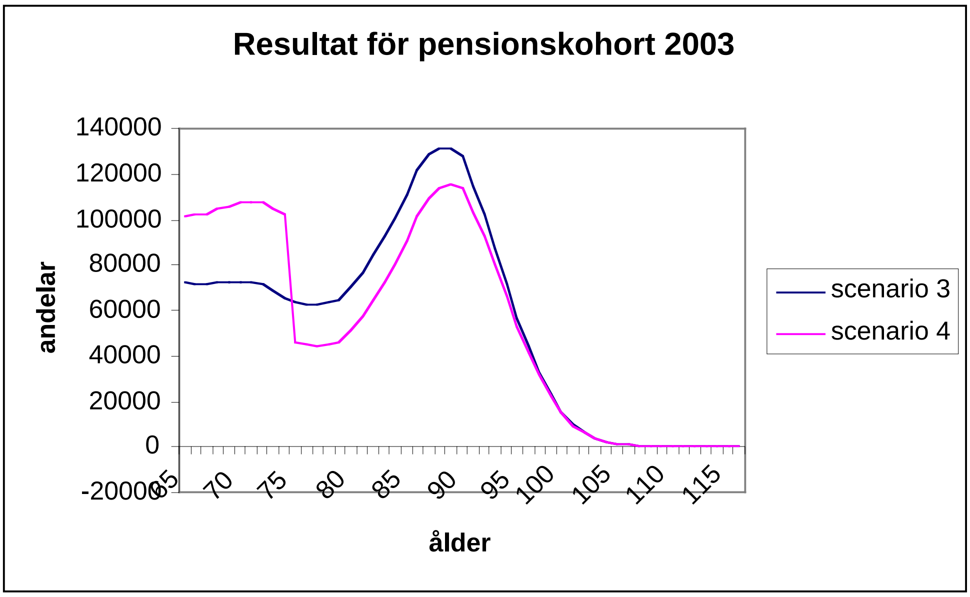
4.4 Scenario 4. Verkligheten följer inte SCB:s prognos, variant 2

Jag börjar med att visa q(x)-kurvan för scenario 3 fall 1 och q(x)-kurvan för scenario 4. Den ökade förväntade återstående livslängden för en 65-åring som går i pension år 2003 är ett år i båda fallen men dödligheten har ändrats på olika sätt.



Figur 4.19 q(x)-kurvor för scenario 3 och scenario 4 då förväntad återstående livslängd ökar med ett år för en 65-åring som går i pension år 2003.

I scenario 3 multipliceras hela $q(x)$-matrisen med ett α och i scenario 4 multipliceras $q(x)$-matrisen med ett γ från år 2013 och med detta vill jag visa att den förväntade återstående livslängden kan varieras på olika sätt. Resultatet för bolaget utvecklar sig på olika sätt beroende på hur dödligheten utvecklar sig. Nedan visas resultatet för pensionskohort 2003 för varje ålder i de båda fallen.



Figur 4.20 Resultat per ålder för de båda fallen

4.5 Scenario 5. Bolaget gör en könsbaserad dödlighetsprognos

I detta scenario har jag separerat männen och kvinnorna. Jag börjar med att visa q(x)-kurvorna för man respektive kvinna år 2003.

Figur 4.21 q(x)-kurvor för man respektive kvinna, pensionsår 2003

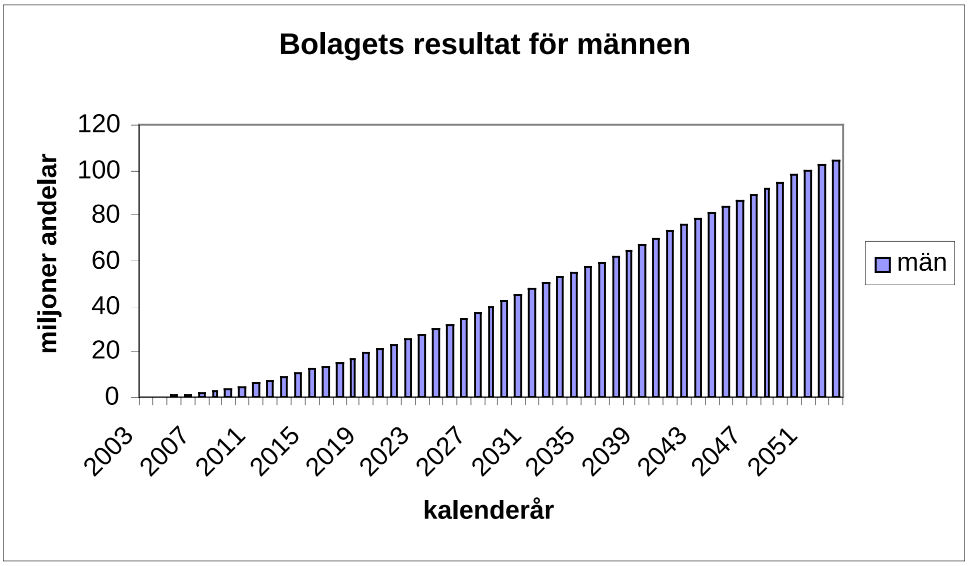
Männen dör enligt en $q_{man}(x)$-kurva och kvinnorna dör enligt en $q_{kvinna}(x)$ -kurva.

Jag börjar med att titta på männen. Vi ser att de försäkringstagare som går i pension år 2003 endast får ut 79,3 % av sitt kapital. För de som går i pension år 2038 utbetalas drygt 90 %.

pensions- år	kapital per kohort milj.and	utbetalt per kohort milj.and	utbetalt kapital i %	årlig utbetalning per person i and	optimal årlig utb/person and
2003	15,5	12,3	79,3	1139	1436
2013	368,9	307,7	83,4	4436	5318
2023	823,8	713,7	86,6	7919	9141
2038	1562,3	1409,0	90,2	13708	15199

Tabell 4.8 Resultat kohortvis för män

I diagrammet nedan visas hur bolagets kapital utvecklar sig för männen.



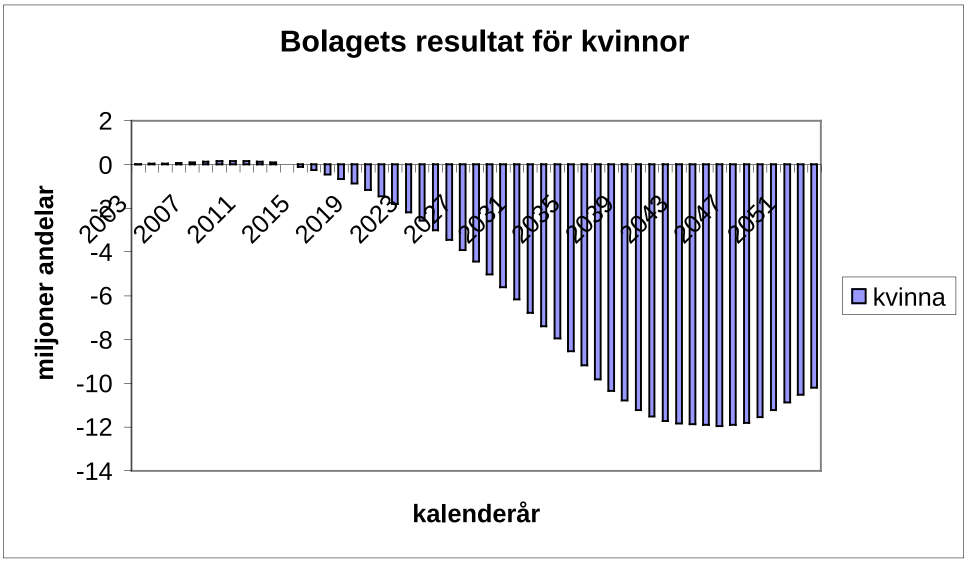
Figur 4.22 Bolagets årsvisa resultat för männen 50 år framåt

Om vi tittar på kvinnorna får vi följande resultat.

pensions- år	kapital per kohort milj.and	utbetalt per kohort milj.and	utbetalt kapital i %	årlig utbetalning per person i and	optimal årlig utb/person kr
2003	6,9	6,3	92,0	1047	1137
2013	157,0	148,7	94,8	4260	4496
2023	370,6	359,2	96,9	7708	7953
2038	745,5	741,2	99,4	13285	13361

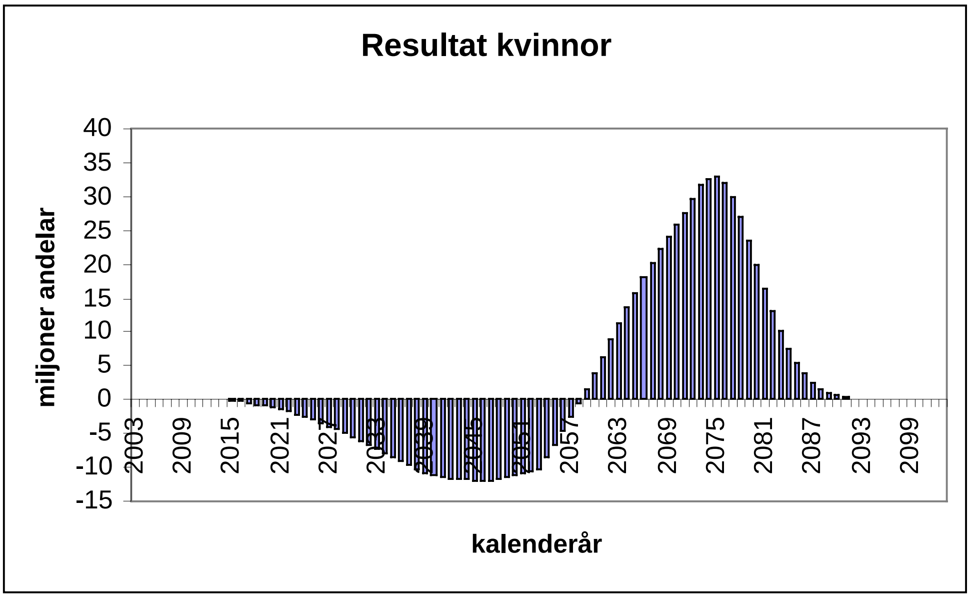
Tabell 4.9 Resultat kohortvis för kvinnor

I diagrammet nedan visas hur bolagets kapital utvecklar sig för kvinnorna



Figur 4.23 Bolagets resultat för kvinnorna 50 år framåt

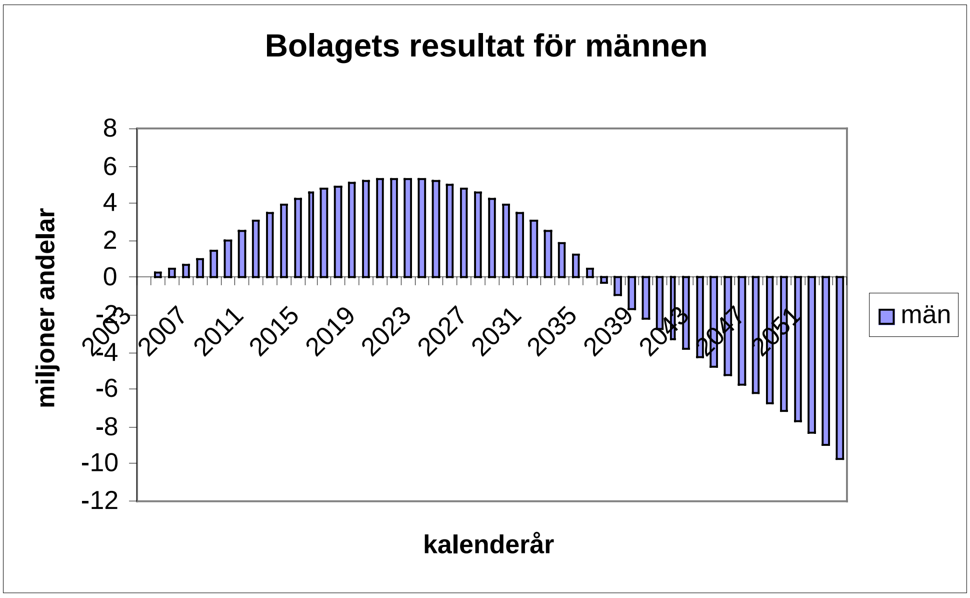
Anm. Om man kör fram kvinnornas resultat i 100 år kommer det negativa resultatet att övergå till en slutlig vinst år 2103. Kvinnornas resultat utvecklar sig på följande sätt:



Figur 4.24 Bolagets årsvisa resultat i andelar för kvinnor 100 år framåt

Vad händer om männen tar ut sin pension på 10 år?
Eftersom männen har en erkänt kortare livslängd än kvinnorna missgynnas de av dagens system. Männen får ett högre delningstal än vad de skulle ha vid en könsbaserad dödlighet. Tar männen ut sin pension livsvarigt så hjälper de till att betala kvinnornas pension i höga åldrar. Men väljer en man att ta ut sina pengar på 10 år så får han ut mer än om han tar ut pensionen livsvarigt. Delningstalen är ju satta efter en könsneutral dödlighet.

Antag att en man har 100.000 andelar på sitt konto vid 65 års dagen år 2003. Tar han ut sin pension livsvarigt och lever medellivslångt får han ut 79.300 andelar av sina 100.000 från början. Väljer han istället att ta ut sin pension på tio år får han istället ut 104.120 andelar förutsatt att han inte avlider under utbetalningstiden. Bolagets resultat för männen utvecklar sig istället såhär:

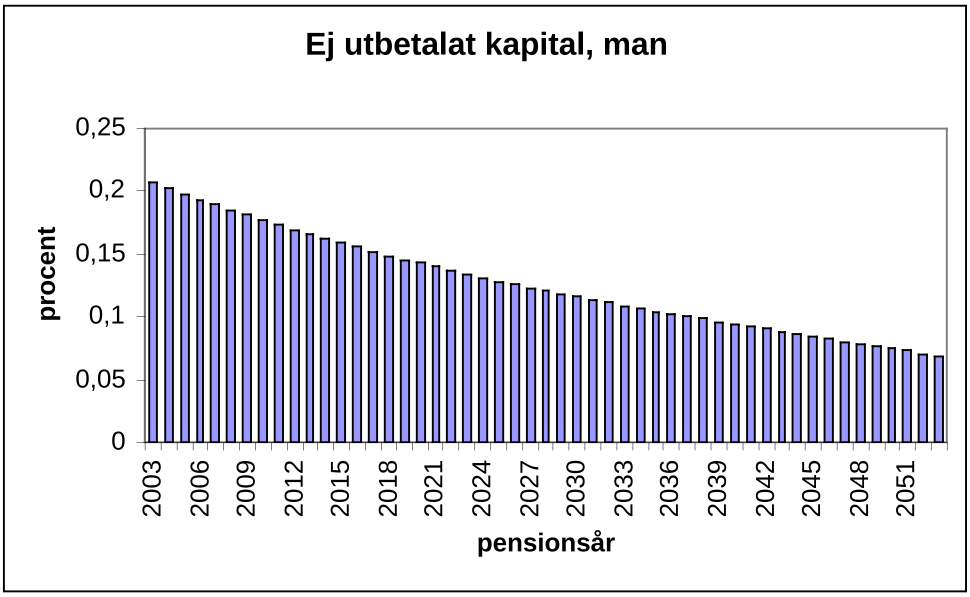


Figur 4.25 Bolagets årsvisa resultat om alla män tar ut sin pension på 10 år

pensions- år	kapital per kohort milj. and.	utbetalt per kohort miljoner andelar	utbetalt kapital i %	årlig utb. per person i andelar	optimal årlig utb/person and.
2003	15,5	15,1	97,5	2860	2932
2013	368,9	363,9	98,7	11138	11290
2023	823,8	818,9	99,4	19883	20003
2038	1562,3	1565,8	100,2	34419	34341

Tabell 4.10 Resultat kohortvis för män då de tar ut sin pension på 10 år

Det kan vara intressant att se skillnaden i dessa två fall. Vi börjar med att se hur mycket kapital som finns kvar då männen tar ut sin pension livslångt.

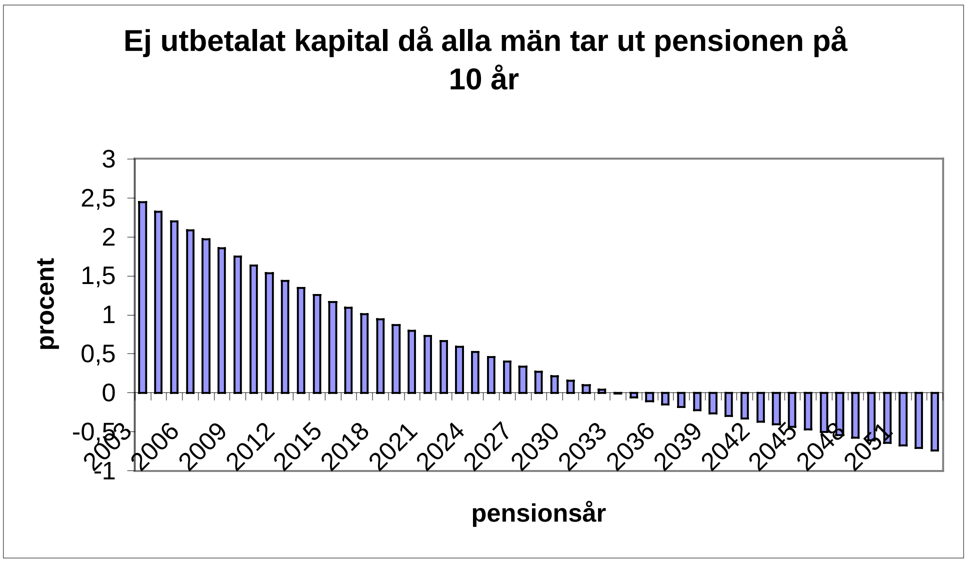


Figur 4.26 Ej utbetalt kapital per pensionskohort

Vi ser att bolaget gör stora dödlighetsvinster på männen.
Slutligt kapital i form av dödlighetsvinster/förluster:

År 2053: 2226 miljoner andelar
År 2103: 5341 miljoner andelar

Om istället alla män tar ut sin pension på 10 år blir resultatet följande:



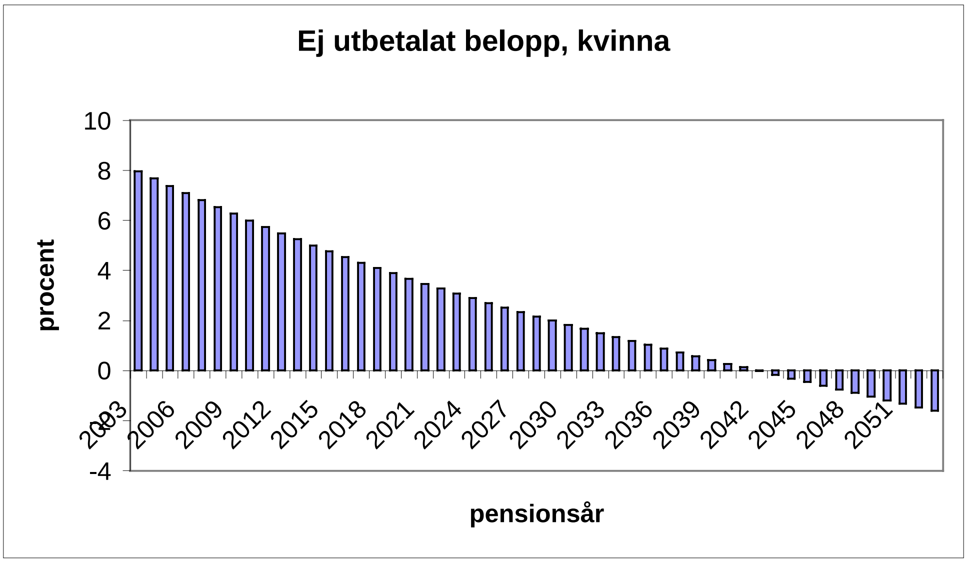
Figur 4.27 Ej utbetalat kapital kohortvis då männen tar ut sin pension på 10 år

Slutligt kapital i form av dödlighetsvinst/förlust:

År 2053: 19 miljoner andelar
År 2103: -13 miljoner andelar

Anm: Observera att varje pensionskohort har olika kapital från början. Senare pensionskohorter har mer kapital och detta bör man ha i åtanke då man studerar diagrammet ovan.

Om vi slutligen ser på kvinnorna så ser det ej utbetalade kapitalet ut så här:



Figur 4.28 Ej utbetalat kapital kohortvis för kvinnorna

Slutligt kapital i form av dödlighetsvinst/förlust:

År 2053: -273 miljoner andelar
År 2103: 225 miljoner andelar

Vi har nu två fall med olika resultat för bolaget.

1. Alla kunder tar ut sin pension livsvarigt. Resultat:
   År 2053: 1876 miljoner andelar
   År 2103: 5365 miljoner andelar

2. Kvinnorna tar ut sin pension livsvarigt och männen tar ut sin pension på 10 år. Resultat:
   År 2053: -254 miljoner andelar
   År 2103: 212 miljoner andelar

4.6 Scenario 6. Anpassning av SCB:s q(x) till Makeham

Teori:

Jag vill anpassa en $\mu(x)$-kurva till SCB: s ettåriga dödsrisker *q(x)* för generationen som går i pension 2003. Detta för att visa att SCB: s ettåriga dödsrisker kan anpassas ungefärligt med en Makeham.

Allmän livförsäkringsmatematik säger att

$$q(x) = 1 - \frac{l(x+1)}{l(x)} = 1 - e^{-\int_x^{x+1} \mu(t)dt} = 1 - e^{-\int_0^1 \mu(x+t)dt} = 1 - e^{-(a + \frac{b}{c} \cdot e^{cx}(e^c - 1))} \qquad (1)$$

[sista likheten i formeln ovan fås från Makeham $\mu(x+\theta) = a + b \cdot e^{c(x+\theta)}$]

Enl. formel (3.3) s. 30 i kompendiet *Livförsäkringsmatematik* är

$$-\ln(1 - q(x)) \cong \mu(x + \frac{1}{2})$$

Jag vill här försöka hitta en approximation som är bättre än denna. Jag vill hitta ett θ som uppfyller

$$-\ln(1 - q(x)) \cong \mu(x + \theta)$$

Denna formel kan skrivas om som

$$q(x) = 1 - e^{-\mu(x+\theta)} = 1 - e^{-(a + b \cdot e^{c(x+\theta)})} \qquad (2)$$

[sista likheten i formeln ovan fås från Makeham $\mu(x+\theta) = a + b \cdot e^{c(x+\theta)}$]

Söker θ genom att sätta (1) = (2)

$$1 - e^{-(a + \frac{b}{c} \cdot e^{cx}(e^c - 1))} = 1 - e^{-(a + b \cdot e^{c(x+\theta)})}$$

Detta ger

$$\theta = \frac{\ln(\frac{1}{c}(e^c - 1))}{c}$$

Jag vill nu hitta a, b och c-värden som minimerar skillnaden i nedanstående likhet

$$\mu(x+\theta) = \ln\frac{1}{1-q(x)} \qquad \text{[omskrivning av (2)]}$$

Dessa a, b och c-värden ger då den bästa anpassningen av $q(x)$ till $\mu(x)$

$\mu(x) = a + b \cdot e^{cx}$ där x = ålder

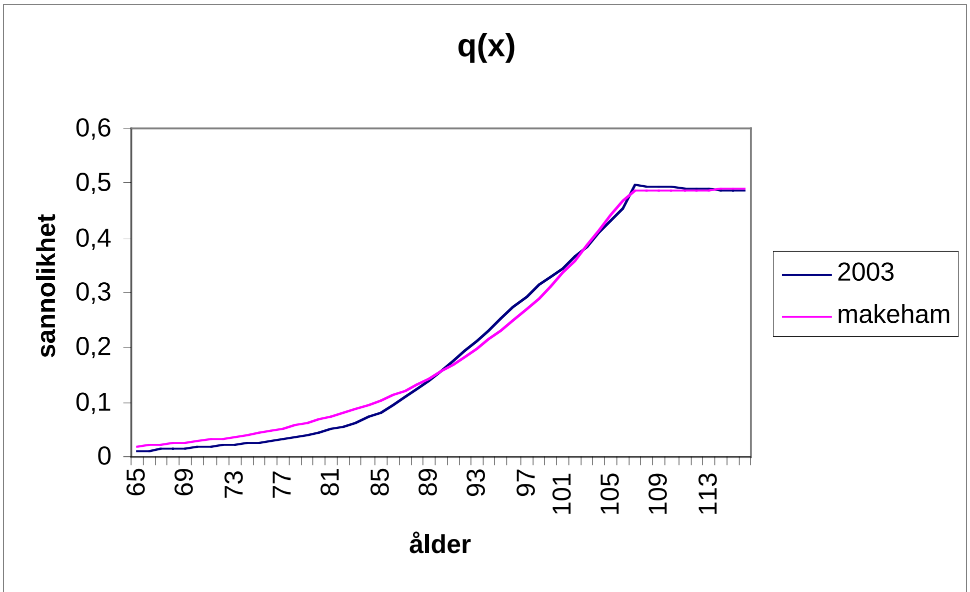
Värden som minimerade skillnaden blev:

a= 0
b= 0,0000596
c= 0,0879 ger $\theta = 0{,}504$

w=106

Att w sätts till 106 innebär att vi har en utjämnad Makeham. SCB:s prognos går bara till 106 års ålder. Samma $q(x)$ tillämpas på åldrar över 106 år.

Jag vill nu prova att använda dessa värden för att se hur bra de stämmer. Jag börjar med att plotta q(x)- kurvan för pensionskohort år 2003 samt den skattade Makeham.



Figur 4.28 q(x)-kurvor för pensionskohort år 2003 samt den skattade Makeham

Genom att titta på grafen ser man att den skattade Makeham-kurvan ligger över SCB:s prognos fram till 90 års ålder. Detta är inte bra ur bolagssynpunkt då förluster kommer att göras de första 25 utbetalningsåren. Resultatet för pensionskohort år 2003 visas nedan.

pensions- år	kapital miljoner andelar	utbetalt miljoner andelar	utbetalt kapital i %	årlig utb/person andelar	optimal årlig utb/person and.
2003	22,4	26,1	117	1551	1331

Tabell 4.11 Resultat för pensionskohort år 2003 med min skattade Makeham

5 Slutsatser

Alla mina resultat i detta arbete bygger på att den verkliga dödligheten utvecklar sig enligt SCB och att FOLO håller fast vid sitt dödlighetsantagande under hela simuleringen. Dessutom är min modell förenklad jämfört med verkligheten och detta bör man ha i åtanke då man läser mina resultat. Vad jag hoppas på i detta arbete är att kunna se vissa trender och eventuella mönster i bolagets resultat. Jag hoppas också kunna visa vilka svårigheter som kan uppstå vid livsvarig utbetalning av fondförsäkring.

Scenario 1 Bolaget gör en perfekt dödlighetsprognos
Det bästa för bolaget skulle vara att ha en dödlighetsskattning som exakt följer verkligheten. Det är bra både för bolaget och för bolagets kunder. Men detta är endast möjligt i teorin eftersom man inte kan förutspå framtiden. Att sträva efter detta är ur bolagets synvinkel en tuff strategi. Vad händer om bolaget gör en felprognos ett år och gör förluster? Det kan vara farligt att försöka ligga så nära verkligheten som möjligt eftersom det då är lätt att hamna på minus.

Scenario 2 Verklig dödlighet enligt SCB
Enligt min analys är FOLO:s dödlighetsantagande för lågt. FOLO:s Makeham kurva ligger idag under den verkliga dödligheten för alla åldrar. FOLO måste ändra sitt dödlighetsantagande, speciellt för höga åldrar (över 80 år). I dagsläget är delningstalen för höga och det innebär att bolaget kommer att göra dödlighetsvinster på de försäkrades bekostnad om dagens dödlighetsantagande kvarhålls och vinsterna blir som störst i höga åldrar.

Idag är det inte någon större fara då få försäkringar är under utbetalning. Men för varje år som går kommer utbetalningarna att öka i och med att fler försäkringar hamnar under utbetalning och de som kommer in i systemet har samlat på sig mer kapital.

FOLO:s dödlighetsantagande stämmer bra för åldrar under uppskovstid (fram till 65 år) och i dagsläget finns större delen av FOLO:s bestånd där. Kanske kan FOLO använda den nuvarande dödligheten fram till pensionering och därefter tillämpa en annan dödlighet under utbetalning som bättre följer verkligheten.

Scenario 3 Verkligheten följer inte SCB:s prognos, variant 1
När jag ökar den förväntade återstående livslängden för en 65-åring som går i pension år 2003 ser jag att bolaget till en början klarar ”sig bra”. Bolaget klarar fall 1 bra sedan får bolaget problem. Någonstans mellan ett och tre års ökad återstående livslängd för en 65-åring som går i pension år 2003 kommer att göra att bolaget går med förlust.

Scenario 4 Verkligheten följer inte SCB:s prognos, variant 2
Det jag vill visa i detta scenario är att dödligheten kan ändras på olika sätt och det kommer att påverka bolaget. Detta påverkar inte försäkringstagarna då de får ut en konstant mängd andelar varje månad. I mitt exempel ser man att dödlighetsvinsterna per ålder blir olika för pensionskohort år 2003 trots att den förväntade återstående livslängden i båda fallen ökats med ett år. I mitt exempel är detta inte något större problem för bolaget eftersom bolagets dödlighetsskattning är satt med hög marginal. Skillnaden blir mer påtaglig då bolaget har en

dödlighetsskattning som visar sig ligga närmare verkligheten. Då skulle resultatet kunna pendla mellan plus och minus beroende på vilken variant dödligheten utvecklas enligt.

Jag kan i min q(x)-matris ändra på SCB:s dödlighet åldersvis, kohortvis samt kalenderårsvis. I detta scenario har jag valt att endast redovisa ovanstående problem men verkligheten kan utvecklas på många olika sätt. Detta kan vara bra att ha i åtanke då bolaget gör sina dödlighetsantaganden.

Scenario 5 Bolaget gör en könsbaserad dödlighetsprognos
Mina resultat visar att männen förlorar på de könsneutrala dödlighetsantagandena. Det räcker att jämföra *q(x)*-kurvorna för man respektive kvinna för att inse detta. Vad kan då en man göra åt detta? Ett exempel som jag visade på är att ta ut sina pensionspengar på 10 år och därefter förvalta dem på något annat sätt. Delningstalen är satta efter en sammanslagen dödlighet och detta betyder att männens delningstal är för höga. Männen förväntas ju enligt det könsneutrala dödlighetsantagandet att leva längre än de i snitt gör. Ett högt delningstal leder till en lägre utbetalning.

Tar en man ut sina pengar på tio år får han ett delningstal som istället gynnar honom. Eftersom en man förväntas leva längre än han i snitt gör så kommer han i detta fall att få ett lägre delningstal som gynnar honom. Detta betyder att männen får ut mer pengar än vad de hade från början givet att han överlever utbetalningsperioden (10 år). Hur ska bolaget agera om männen blir medvetna om detta och börjar göra strategiska val? Slutsatsen av detta är att männen tjänar på att ta ut sina pengar snabbt.

Min analys visar att bolaget kommer att få svårt om alla män skulle ta ut sina pengar på 10 år. Som det ser ut nu så görs nästan all dödlighetsvinst på männen. FOLO är idag styrda av jämställdhetskrav och därför tvungna att tillämpa en könsneutral dödlighet. Även EU trycker på och förespråkar könsneutrala dödlighetsskattningar inom livförsäkring. En fråga man kan ställa sig är varför dessa krav finns och varför människor propagerar för att behålla dem.

Könsneutrala dödlighetsantaganden skulle i framtiden kunna leda till spekulationer både från försäkringstagarna och från försäkringsbolaget.

Scenario 6 Anpassning av SCB:s q(x) till Makeham
Det visar sig i detta scenario vara svårt att hitta en Makeham skattning som stämmer bra med SCB:s prognos för alla åldrar. Då jag söker den ”bästa” skattningen som ska ligga så nära verkligheten som möjligt kommer min skattning att pendla över och under SCB:s kurva. Detta är inte bra ur bolagssynpunkt. Det optimala vore istället att hitta en kurva som ligger under verkligheten för alla åldrar. Detta för att bolaget inte ska göra dödlighetsförluster i vissa åldrar. Dessa förluster är svåra att kompensera. Det är enklare med måttliga dödlighetsvinster i och med att detta överskott alltid kan ges tillbaks i form av återbäring.

Då jag använder den ”nya” skattningen för pensionskohort år 2003 ser jag att det i slutändan betalats ut 117 % av det kapital som fanns från början. Detta kan jämföras med scenario 2 då 83,5 % av kapitalet betalats ut.

Ett alternativ som jag påpekade i scenario 2 kan vara att ha olika Makeham-kurvor för olika åldrar. På detta sätt är det enklare att anpassa en kurva som följer verkligheten. T.ex. kan man ha en Makeham-kurva för åldrar mellan 65-80 år. Och när en försäkrad uppnår denna ålder hamnar denne i ett nytt system med en ny Makeham-kurva. Teoretiskt sett tror jag detta skulle vara ett bra alternativ, att ha olika system för olika åldrar. T.ex. ett system under inbetalningstid och ett annat (eller flera) under utbetalningstid.

Det viktigaste ur bolagssynpunkt är att ha en bra dödlighetsskattning upp till 85 års ålder. Det är där som stora antal försäkringstagare kommer att finnas och därför är det viktigt att inte göra förluster i dessa åldrar. För höga åldrar finns få försäkringstagare och därmed mindre pengar i omlopp och för höga åldrar stämmer Makeham inte heller så bra. Det finns dåligt med statistik för höga åldrar och dödsriskerna växer inte exponentiellt. Därför är det nödvändigt att bolaget gör något åt detta, och ett alternativ kan vara att ha en utjämnad Makeham från en viss ålder. Med detta menar jag att efter en bestämd ålder ökar den ettåriga dödsrisken linjärt istället för exponentiellt.

Kanske är Makeham ett dåligt alternativ till att skatta dödligheten? Men Makeham gör beräkningen av delningstalen enkel i och med att det är enkelt att ta fram D(x) från l(x) från $\mu(x)$.

Blandade kommentarer
Ett problem är att FOLO:s Makeham kurva stämmer olika bra för olika åldrar. Hur uppfattar man t.ex. i scenario 5 förlusterna för kvinnorna som bolaget kommer att göra under de första 50 åren? Om bolaget helt lugnt väntar ut tiden så kommer ju dessa förluster att vändas till vinster. Men det tar å andra sidan många år om man ska vänta ut en hel pensionskohort tills den dött bort.

Att ha en felaktigt skattad Makeham kurva är inte bra för bolaget. Det är inte bra att göra förluster för vissa åldrar och sedan stora vinster för andra. Det kan vara svårt för bolaget att tolka förluster/vinster. Vad ger det för signaler? Bolaget kan luras och dra felaktiga slutsatser. Idag kan man som kund inte flytta sina pengar mellan olika bolag under utbetalningstid. En del människor förespråkar flytträtt även under utbetalning och vad skulle hända om en sådan lag blev gällande? Är kunderna då medvetna kan de börja spekulera mot bolaget. För FOLO:s del så skulle deras medvetna kunder flytta sina pengar till ett annat bolag någon gång vid 80 års ålder när deras pensionskohort har fått ut för mycket pengar. Hur ska då bolaget kompensera dessa förluster om kunderna man räknar med att göra dödlighetsvinst på försvinner till andra bolag? Det skulle bli förödande för bolaget.

Det bästa för bolaget skulle vara att ha en Makeham kurva som exakt följer verkligheten men i scenario 1 och 6 ser vi att verkligheten inte följer en Makeham-kurva.

Bolagets policy säger bl a att ”*tillämpade dödlighetsantaganden för livsfallsförsäkring bör under utbetalningstid inte långsiktigt bidra till bolagets vinst*”. Det är viktigt att ge ut eventuell återbäring kontinuerligt (exempelvis årsvis) ur rättvisesynpunkt. Detta för att de kortlivade ska få ut den del de har rätt till.

Ett bra alternativ kan vara att medvetet ha en Makeham-kurva med låg dödlighet och sedan dela ut överskottet i slutet av varje år. För höga åldrar bör man ha en utjämnad Makeham eftersom dödligheten inte växer exponentiellt. Detta kan medföra att återbäringen blir olika från år till år och man kommer inte att kunna garantera konstanta utbetalningar. En fråga är också hur återbäringen ska fördelas? Ska man betala ut återbäringen kohortvis eller ska man ha en annan gruppindelning? Vad man kan garantera är konstanta utbetalningar i form av fondandelar och sedan återbäring en gång om året då dödlighetsvinsterna delas ut. Återbäringens storlek skulle variera från år till år.

Vad mina resultat visar är att de största vinsterna gör bolaget i höga åldrar och FOLO har idag inga kunder i dessa åldrar. Men bolaget måste ändå börja att fundera på en förändring.

6 Teori

I det här kapitlet tänkte jag börja med att beskriva teori som är vanlig inom livförsäkrings-matematiken och som jag använder i mitt arbete. Därefter visas teori för fördelningsreserven och för arvsvinstfaktorn. Slutligen visas hur jag skrivit fram kapitalet.

6.1 Livförsäkringens sannolikhetsteori

Vi kan börja med att se på den återstående livslängden för en person. Återstående livslängd i år för en försäkrad person, som är x år gammal, är en icke-negativ stokastisk variabel T_x . Livslängden i år för en nyfödd försäkrad är en icke negativ stokastisk variabel T .

Om vi betecknar fördelningsfunktionen för T med F så får vi $F(x,t) = P(T_x \leq t),\ \ t \geq 0$.

Fördelningsfunktionen för T är $F(x) = P(T \leq x)$

Nedan visas täthetsfunktionen för livslängden. Eftersom den stokastiska variabeln T är kontinuerlig med täthetsfunktion f gäller att

$$P(T \leq t) = F(t) = \int_0^t f(u)du\ ,\ \ t \geq 0 \quad F(0) = 0 \ \ F(\infty) = 1$$

$$F'(t) = f(t)$$

Det kan vara praktiskt att studera överlevelsefunktionen l där $l(x)$ är sannolikheten att överleva åldern x.

$l(x)$ är definierad som ett minus fördelningsfunktionen.

$$l(x) = 1 - F(x) = P(T > x)$$

Sannolikheten för en x-åring att överleva i t år ges av

$$P(T_x > t) = \frac{l(x+t)}{l(x)} \quad för\ t \geq 0$$

Fördelningsfunktionen för T_x kan skrivas som

$$P(T_x \leq t) = 1 - P(T_x > t) = 1 - \frac{l(x+t)}{l(x)}$$

I mitt arbete är jag intresserad av den förväntade återstående livslängden från 65-års ålder.

$$E[T_x] = \int_0^{\infty} P(T > t)dt = \int_0^{\infty} \frac{l(x+t)}{l(x)} dt$$

I det här arbetet har jag räknat i diskret tid, då kan väntevärdet av T_x approximeras med

$E[T_x] \approx \frac{\sum_{y=x}^{z} l(y)}{l(x)}$ där z antas vara en ändligt högsta levnadsålder.

Det finns också något som kallas den ettåriga dödsrisken som betecknas $q(x)$ där x är åldern. $q(x)$ är sannolikheten att en x-åring dör inom ett år. $q(x)$ ökar med åldern och definieras såhär:

$$q(x) = P(T_x \leq 1) = 1 - \frac{l(x+1)}{l(x)}$$

Vi ska också betrakta dödlighetsintensiteten $\mu(x)$. Hur stor är sannolikheten att en x-årig försäkrad dör inom de närmaste dt åren där dt är litet?

$\mu(x)dt =$ P(att dö nästa intervall [x,x+dt]_ lever vid x) =

$P(T_x \leq dt) = P(x < T < x + dt \mid T > x) = \frac{f(x)dt}{l(x)}$ enligt ovan är $l(x) = 1 - F(x)$

Vi definierar nu dödlighetsintensiteten $\mu(x)$ som:

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \quad \text{för } x \geq 0$$

μ(x) är alltså dödssannolikhet per tidsenhet i åldern x.

Vi har ett samband mellan överlevelsefunktionen $l(x)$ och dödlighetsintensiteten $\mu(x)$ enligt

$l(x,t) = \exp(-\int_x^{x+t} \mu(u)du)$ eller $l(x) = \exp(-\int_0^{x} \mu(u)du)$

Dödlighetsintensiteten, μ, beskrivs ofta mha Makehams formel:

$$\mu(x) = a + b * e^{cx}$$

där a, b och c är konstanter och x är åldern.

Makehams formel används av FOLO för att skatta dödlighetsintensiteten.

6.2 Fördelningsreserven (delningstalet)

För att veta hur mycket pengar bolaget ska betala ut till en person i en viss ålder delas personens kapital med ett delningstal. Delningstalet är den förväntade återstående livslängden för en viss ålder. Pensionsutbetalningarna som ska komma till stånd ligger i framtiden. Dessa utbetalningar är stokastiska variabler som beror på försäkringstagarnas återstående livslängder.

Sannolikheten att avlida under beräkningsåret är

$$q(x) = 1 - e^{-a+b(e^{cx}(1-e^{c})/c}$$

a, b och c är konstanter

När man räknar ut delningstalen är det lämpligt att införa två hjälpfunktioner. Dessa kallas kommutationsfunktioner och definieras såhär:

$D(x) = l(x) * e^{-\delta x}$ där $l(x) = e^{-\int_0^x \mu(t)dt}$

$$N(x) = \int_x^\infty D(t)dt$$

För FOLO sätts räntan till 0 och då har vi att $D(x) = l(x)$. Dessa funktioner går mot noll då x går mot oändligheten.

I praktiken räknas $N(x) = \sum_x^w D(x)$ där w =150

Delningstalet räknas ut genom $A(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$

$$A(x) = (D_x + D_{x+1} + ... + D_{SLUT}) / D_x$$

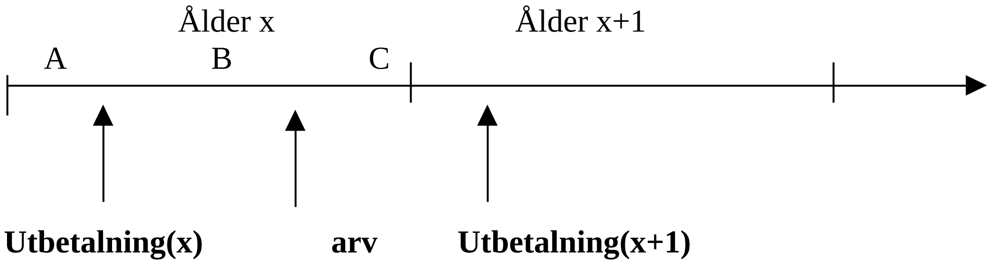
$$D(x) = e^{-ax-b(e^{cx}-1)/c}$$

6.3 Arvsvinstfaktorn

För att få fram hur stor arvsvinsten ska vara för en viss ålder x multipliceras försäkringstagarens kapital vid ålder x med $\frac{q_{arv}(x)}{1-q_{arv}(x)}$. Med andra ord

$arv_x = kap_x * \frac{q_{arv}(x)}{1-q_{arv}(x)}$.

Varför det blir så visas nedan:



V= Värde (andelar)
F= Fördelningsreserv

Vi utgår från att utbetalning år x = utbetalning år x+1

$$\frac{V_A}{F_x} = \frac{V_C}{F_{x+1}} \qquad (1)$$

$$V_c = V_B(1+arv_x) \qquad (2)$$

$$V_B = V_A - U = V_A - \frac{V_A}{F_x} = V_A\left(1-\frac{1}{F_x}\right) = V_A\frac{F_x-1}{F_x} \qquad (3)$$

Enligt (2) och (3) är

$$V_C = V_B(1+arv_x) = V_A\frac{F_x-1}{F_x}(1+arv_x) \qquad (4)$$

(1) och (4) ger

$$V_A\frac{F_{x+1}}{F_x} = V_A\frac{F_x-1}{F_x}(1+arv_x) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{F_{x+1}}{F_x-1} = (1+arv_x) \qquad (5)$$

$$VL = \frac{\dfrac{(D_{x+1}+D_{x+2}+\ldots+D_{SLUT})}{D_{x+1}}}{\dfrac{(D_x+D_{x+1}+\ldots+D_{SLUT})}{D_x}-1} = \frac{D_x}{D_{x+1}} = \frac{e^{-ax-b(e^{cx}-1)/c}}{e^{-ax-a-b(e^{cx}e^{c}-1)/c}} = \frac{1}{e^{-a+be^{cx}(1-e^{c})}} = \frac{1}{1-q(x)}$$

Vi får att

$$\frac{1}{1-q(x)} = 1 + arv_x \quad \Rightarrow \quad arv_X = \frac{q(x)}{1-q(x)} \qquad \text{V.S.V}$$

6.4 Framskrivning av kapital

För att underlätta framskrivningen har jag bortsett från dödligheten under inbetalningstid. Jag antar här att dödligheten fram till 65-års ålder är försumbar.

Jag gör en framskrivning av kapitalet för årgångar fram till år 1970, för dessa årgångar har jag bra data. 1 % värdeökning och årlig inbetald premie 7300 kr. För att skriva fram kapitalet för en årskull har jag använt följande formel:

$Värde_{i+1} = Värde_i * 1{,}01 + P$ **,** $P =$ Premieinbetalning för hela årskullen

$$Värde_{i+2} = Värde_{i+1} * 1{,}01 + P = (Värde_i * 1{,}01 + P) * 1{,}01 + P = Värde_i * 1{,}01^2 + 1{,}01 * P + P$$

Totala värdet vid 65 års ålder blir:

$$Värde_{65} = Värde_{ingång} * 1{,}01^{år\ till\ 65} + \sum_{i=0}^{år\ till\ 65-1} P * 1{,}01^i = Värde_{ingång} * 1{,}01^{år\ till\ 65} + P * \frac{1-1{,}01^{årtill 65}}{1-1{,}01}$$

Genom att titta på antalsvektorn så ser man en kraftig minskning i antalet för personer födda efter 1970. Därför kommer mina framskrivningar att bli osäkra för årgångar födda efter 1970. I dagsläget finns det endast enstaka försäkringar för personer födda på 80-talet. Man kan anta att detta antal kommer att öka då fler unga människor börjar jobba.

För åldersgrupperna 1971-1988 har jag skattat antalet försäkringstagare i FOLO med hjälp av SCB:s befolkningsstatistik och FOLO:s nuvarande bestånd. Jag undersöker hur stor del av befolkningen som finns i FOLO. Skattningen gör jag under en 10 års period för födelseår 1961-1970.

$$Andel\ i\ FOLO = \frac{Antal\ levande,\ födda\ 1961-1970}{Antal\ i\ FOLO,\ födda\ 1961-1970}$$

Jag delar antalet försäkringar från denna period med befolkningsantalet för de aktuella åldrarna och får fram ett procenttal (5,8%). Därefter räknar jag ut väntevärdet av hur mycket pengar en försäkringstagare betalat in under sitt arbetsliv. Jag antar då att en arbetare kommer att börja betala in pensionen från 25 års ålder. Den första årgången som varit i systemet från 25 års ålder är de som är födda år 1973. Jag kommer då fram till 327.000 kr.

$$Antal(x) = Andel\ i\ FOLO * Antal\ levande\ (x) \qquad där \quad x = 1971, 1972, ..., 1988$$

För 1971 och 1972 har jag tagit det nya skattade antalet och multiplicerat med vad en försäkringstagare betalat in vid 65 års ålder.

Årgång 1973 är första årgången som har betalat in full pension, d v s i 40 år. För 1973 har jag multiplicerat det nya antalet med inbetalt belopp för denna årgång.

För 1974-1988 har jag räknat upp det inbetalade kapitalet 1973 med 1% och multiplicerat med nya antalet.

Jag har också räknat fram kapitalet för män respektive kvinnor på samma sätt. Då jag skattat antalet för årgångar 1971-1988 har jag räknat med att FOLO även i fortsättningen kommer att bestå av 67% män och 33% kvinnor fram till 65 års ålder, det vill säga att jag bortser från dödligheten.

Nu har jag en framskrivning av kapitalet för försäkringstagare födda år 1938-1970. Därefter har jag skattat kapitalframskrivningen för år 1971-1988 med hjälp av data från 1961-1970 och jag har nu mina startvektorer klara.

7 Källförteckning

Björn Ajne, Jan Ohlin: Livförsäkringsmatematik, Kompendium (1990)

Statistiska centralbyrån: Sveriges framtida befolkning, Befolkningsframskrivning för åren 2003-2050 (2003)

Statistiska centralbyrån: Statistisk årsbok för Sverige 2003 (2002)

Appendix

A. Excel-programmets uppbyggnad

Programmet består av följande blad:

- Q(x)-matris-verklig
- Q(x)-matris, del
- Q(x)-matris, arv
- Antal försäkrade
- Försäkringstagarnas kapital
- FOLO:s kapital
- Frigjord risksumma
- Arvsvinst
- Delningstalet
- Utbetalning

BLAD 1:
Q(x)-matris-verklig

Här finns de ettåriga dödsriskerna från SCB:s prognoser om framtida dödlighet. Används för att räkna fram antal kvarvarande försäkrade och för att räkna ut årlig frigjord risksumma. I denna matris finns även 10 ändringsbara α -värden som beror på ålder, 10 ändringsbara β -värden som beror på kohortår och 3 ändringsbara γ -värden som beror på kalenderår.

α_1 för 65-69 år	β_1 för pensionsår 2003-2007	γ_1 för år 2003-2012
α_2 för 70-74 år	β_2 för pensionsår 2008-2012	γ_2 för år 2013-2022
…	…	γ_3 för år 2023-2103
α_{10} för 110-115 år	β_{10} för pensionsår 2048-2053	

Med hjälp av dessa parametrar kan vi variera SCB:s ettåriga dödsrisker, både för olika åldrar och för olika kalenderår.

q(x) verklig						
(Q)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	q(65,2003) α_1 β_1 γ_1	q(66,2004) α_1 β_1 γ_1			q(115,2053) α_{10} $\beta_1\gamma_3$
2	2004	q(65,2004) α_1 β_1 γ_1	q(66,2005) α_1 β_1 γ_1			q(115,2054) α_{10} $\beta_1\gamma_3$
..						
..						
50	2053	q(65,2053) α_1 $\beta_{10}\gamma_3$	q(66,2054) α_1 $\beta_{10}\gamma_3$			q(115,2103) α_{10} $\beta_{10}\gamma_3$

BLAD 2 och 3:
Q(x)-matris, del- och arv

Dödsriskerna i dessa matriser används vid uträkning av arvsvinster och delningstal.

För att få fram de ettåriga dödsriskerna, $q_{arv}(x)$, $q_{del}(x)$ räknar vi först ut , $\mu_{arv}(x)$, $\mu_{del}(x)$ och sedan $l_{arv}(x)$, $l_{del}(x)$.
Anm: För PPM är $q_{arv}(x) = q_{verklig}(x)$ och för Folksam $q_{arv}(x) = q_{del}(x)$. (Se jämförelse mellan PPM och Folksam)

Ändringsbara parametrar för $\mu(x)$:

a=
b=
c=
w=97 (PPM: ålder då makeham kurvan rätas ut, för Folksam sätts w=150)
k=0,001 (riktningskoefficient för utplanad makehamkurva)

Följande formler används:

$$\mu(x) = \begin{cases} a + b \cdot e^{cx} & \text{\textit{för} } x \le w \\ \mu(w) + k(x - w) & \text{\textit{för} } x \ge w \end{cases}$$

$$l(x) = e^{-H(x)}$$

$$H(x) = \begin{cases} ax + \dfrac{b}{c}\left(e^{cx} - 1\right) & \text{\textit{för} } x \le w \\ H(w) + \mu(w)(x - w) + \dfrac{k}{2}(x - w)^2 & \text{\textit{för} } x \ge w \end{cases}$$

$$q(x) = 1 - \frac{l(x+1)}{l(x)}$$

Nedanstående matris finns i två upplagor, Q_{arv} och Q_{del}..
Exempelvis så är Q(1:1)= $q(65) = 1 - \dfrac{L(1:2)}{L(1:1)} = 1 - \dfrac{l(66)}{l(65)}$

q(x)						
(Q1)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	q(65)	q(66)			q(115)
2	2004	q(65)	q(66)			q(115)
..						
..						
50	2053	q(65)	q(66)			q(115)

l(x)						
(L)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	l(65)	l(66)			l(115)
2	2004	l(65)	l(66)			l(115)
..						
..						
50	2053	l(65)	l(66)			l(115)

my(x)						
(MY)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	$\mu(65)$	$\mu(66)$			$\mu(115)$
2	2004	$\mu(65)$	$\mu(66)$			$\mu(115)$
..						
..						
50	2053	$\mu(65)$	$\mu(66)$			$\mu(115)$

BLAD 4:
Antal försäkrade

Här behövs indata på antal försäkrade i varje årskull vid 65:
Antal = [ant38, ant39, ant40, ant41,……..,ant88]

= vektor bestående av antal försäkrade som är födda 1938,1939 o.s.v.

För att räkna ner antalet använder vi oss av den verkliga dödligheten tagen från SCB.

Antal försäkrade						
(A)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	ant38	A(1:1)*(1-Q(1:1))			A(1:49)*(1-Q(1:49))
2	2004	ant39	A(2:1)*(1-Q(2:1))			A(2:49)*(1-Q(2:49))
..						
..						
50	2053	ant88	A(50:1)*(1-Q(50:1))			A(50:49)*(1-Q(50:49))

BLAD 5:
Försäkringstagarnas kapital

Här behövs indata på kapitalet för varje årskull vid 65:

Kapital = [kap38, kap39,kap40, kap41,…….,kap88]

Ändringsbara parametrar:

Ränta(r)=
Driftskostnad(dk)=

Kapital						
(K)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	K(1:1)	K(1:2)			K(1:50)
2	2004	K(2:1)	K(2:2)			K(2:50)
..						
..						
50	2053	K(50:1)	K(50:2)			K(50:50)

K(1,1)= kap38
K(1,2)=(K(1:1)-U(1:1)-rsa(1:1)+arv(1:1))*(1+r-dk)
K(1,3)=(K(1,2)-U(1:2)-rsa(1:2)+arv(1:1))*(1+r-dk)
…
…
K(50,50)=(K(50:49)-U(50:49)-rsa(50:49)+arv(50:49))*(1+r-dk)

Det som händer under ett år är således följande:
Kapital i början av året
-utbetalning
-frigjord risksumma
+arvsvinster
+avkastning
-driftskostnad
= Kapital i slutet av året = Kapitalet i början av nästa år

BLAD 6:
<u>FOLO:s kapital</u>

Här ser vi hur bolagets kapital utvecklas med tiden.

FOLO:s kapital						
(FK)		1	2	..	..	50
	År/ålder	65	66			115
1	2003	FK(1:1)	FK(1:2)			FK(1:50)
2	2004	FK(2:1)	FK(2:2)			FK(2:50)
..						
..						
50	2053	FK(50:1)	FK(50:2)			FK(50:50)

FK(1:1)= (R(1:1)-Arv(1:1))*(1+r-dk)
FK(1:2)= (R(1:2)-Arv(1:2))*(1+r-dk)
…
FK(50:50)= (R(50:50)-Arv(50:50))*(1+r-dk)
Här redovisas förluster/vinster årsvis

Resultat årsvis						
	2003	2004	2005	.	.	2053
	FK(1:1)	FK(1:2)	FK(1:3)			FK(1:50)
	0	FK(2:1)	FK(2:2)			FK(2:50)
		0	FK(3:1)			FK(3:50)
	…	…	…	.	.	…
Summa:	FK(1:1)	FK(1:2)+FK(2:1)	FK(1:3)+FK(2:2)+FK(3:1)			FK(1:50)+..+FK(50:50)

BLAD 7:
Frigjord risksumma

Här tas kapitalet gånger den verkliga dödligheten för att få fram den årliga risksumman.

Risksumma						
(R)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	(K(1:1)-U(1:1))*Q(1:1)	(K(1:2)-U(1:2))*Q(1:2)			(K(1:50)-U(1:50))*Q(1:50)
2	2004	(K(2:1)-U(2:1))*Q(2:1)	(K(2:2)-U(2:2))*Q(2:2)			(K(2:50)-U(2:50))*Q(2:50)
..						
..						
50	2053	(K(50:1)-U(50:1))*Q(50:1)	(K(50:2)-U(50:2))*Q(50:2)			(K(50:50)-U(50:50))*Q(50:50)

BLAD 8:
Arvsvinst

Arvsvinsten räknas ut på samma sätt som för den frigjorda risksumman fast här multipliceras kapitalet med en skattad dödlighet, $\frac{q(x)}{1-q(x)}$

Arvsvinst						
(Arv)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	Arv(1:1)	Arv(1:2)			Arv(1:50)
2	2004	Arv(2:1)	Arv(2:2)			Arv(2:50)
..						
..						
50	2053	Arv(50:1)	Arv(50:2)			Arv(50:50)

Arv(1:1)= (K(1:1)-U(1:1)-R(1:1))*Q1(1:1)/(1-Q1(1:1))
Arv(1:2)= (K(1:2)-U(1:2)-R(1:2))*Q1(1:2)/(1-Q1(1:2))

…

Arv(50:50)= (K(50:50)-U(50:50)-R(50:50))*Q1(50:50)/(1-Q1(50:50)

BLAD 9:

Delningstalet

Delningstal $= \dfrac{N(x)}{D(x)}$ där $N(x) = \sum_{k=x}^{\omega} D(k)$

Med ränta: $D(x) = \dfrac{l(x)}{(1+r-dk)^x}$

Delningstal						
(Del)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	Del(1:1)	Del(1:2)			Del(1:50)
2	2004	Del(2:1)	Del(2:2)			Del(2:50)
..						
..						
50	2053	Del(50:1)	Del(50:2)			Del(50:50)

Del(1:1)= $\dfrac{D(1:1)+D(1:2)+...+D(1:50)}{D(1:1)}$

Del(1:2)= $\dfrac{D(1:2)+...+D(1:50)}{D(1:2)}$

D(x)						
(D)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	$L(1:1)$ /(1+r-dk)^65	$L(1:2)$ /(1+r-dk)^66			$L(1:50)$ /(1+r-dk)^115
2	2004	$L(2:1)$ /(1+r-dk)^65	$L(2:2)$ /(1+r-dk)^66			$L(2:50)$ /(1+r-dk)^115
..						
..						
50	2053	$L(50:1)$ /(1+r-dk)^65	$L(50:2)$ /(1+r-dk)^66			$L(50:50)$ /(1+r-dk)^115

BLAD 10:

Utbetalning

Här får vi fram utbetalat belopp per år.

Utbetalning $u_t = \dfrac{k_t}{d_t}$

Utbetalning						
(U)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	K(1:1)/Del(1:1)	K(1:2)/Del(1:2)			K(1:50)/Del(1:50)
2	2004	K(2:1)/Del(2:1)	K(2:2)/Del(2:2)			K(2:50)/Del(2:50)
..						
..						
50	2053	K(50:1)/Del(50:1)	K(50:2)/Del(50:2)			K(50:50)/Del(50:50)

Utbetalning per individ

Vi delar utbetalat belopp på antal levande.

Utbetalning/individ						
(Ui)		1	2	..	..	50
	pensionsår/ålder	65	65			115
1	2003	U(1:1)/A(1:1)	U(1:2)/A(1:2)			U(1:50)/A(1:50)
2	2004	U(2:1)/A(2:1)	U(2:2)/A(2:2)			U(2:50)/A(2:50)
..						
..						
50	2053	U(50:1)/A(50:1)	U(50:2)/A(50:2)			U(50:50)/A(50:50)

B. SCB:s årliga dödsrisker samt procentreduktion

Dödsrisker

Dödsrisker (per 1000) för år 2003 efter kön och ålder vid årets slut

Ålder	Kvinnor	Män
65	7,83	13,20
66	8,72	14,60
67	9,63	16,19
68	10,56	18,16
69	11,66	20,26
70	13,01	22,51
71	14,38	25,07
72	15,85	27,92
73	17,52	30,91
74	19,52	34,06
75	21,96	37,73
76	24,69	42,14
77	27,95	47,05
78	31,90	52,61
79	36,68	58,69
80	42,02	65,36
81	47,75	73,09
82	53,89	82,21
83	60,78	92,50
84	69,16	103,80
86	91,37	130,41
87	104,26	145,30
88	118,02	160,61
89	132,69	177,09
90	149,11	195,16
91	165,59	214,03
92	183,94	235,85
93	203,61	257,16
94	223,55	277,01
95	243,56	298,47
96	263,98	320,93
97	285,19	341,63
98	305,19	360,45
99	324,41	379,42
100	336,38	396,92
101	358,12	419,87
102	380,51	443,49
103	403,56	467,82
104	427,30	492,89
105	451,66	518,73
106+	499,50	558,44

Årlig reduktion av dödsriskerna. Procent

Ålder		Kvinnor			Män	
	2004-2015	2019-2035	2039-2050	2004-2015	2019-2035	2039-2050
65	-1,40	-1,05	-0,70	-2,25	-1,69	-1,13
66	-1,40	-1,05	-0,70	-2,20	-1,65	-1,10
67	-1,40	-1,05	-0,70	-2,15	-1,61	-1,08
68	-1,40	-1,05	-0,70	-2,10	-1,58	-1,05
69	-1,40	-1,05	-0,70	-2,05	-1,54	-1,03
70	-1,40	-1,05	-0,70	-2,00	-1,50	-1,00
71	-1,40	-1,05	-0,70	-2,00	-1,50	-1,00
72	-1,40	-1,05	-0,70	-2,00	-1,50	-1,00
73	-1,40	-1,05	-0,70	-2,00	-1,50	-1,00
74	-1,40	-1,05	-0,70	-2,00	-1,50	-1,00
75	-1,40	-1,05	-0,70	-2,00	-1,50	-1,00
76	-1,40	-1,05	-0,70	-2,00	-1,50	-1,00
77	-1,40	-1,05	-0,70	-2,00	-1,50	-1,00
78	-1,40	-1,05	-0,70	-2,00	-1,50	-1,00
79	-1,40	-1,05	-0,70	-2,00	-1,50	-1,00
80	-1,40	-1,05	-0,70	-1,86	-1,39	-0,93
81	-1,40	-1,05	-0,70	-1,72	-1,29	-0,86
82	-1,40	-1,05	-0,70	-1,57	-1,18	-0,79
83	-1,40	-1,05	-0,70	-1,43	-1,07	-0,72
84	-1,35	-1,01	-0,68	-1,29	-0,97	-0,65
85	-1,20	-0,90	-0,60	-1,15	-0,86	-0,57
86	-1,05	-0,79	-0,53	-1,01	-0,75	-0,50
87	-0,90	-0,68	-0,45	-0,86	-0,65	-0,43
88	-0,75	-0,56	-0,38	-0,72	-0,54	-0,36
89	-0,60	-0,45	-0,30	-0,58	-0,44	-0,29
90	-0,50	-0,38	-0,25	-0,44	-0,33	-0,22
91	-0,46	-0,35	-0,23	-0,39	-0,30	-0,20
92	-0,42	-0,32	-0,21	-0,35	-0,26	-0,18
93	-0,38	-0,29	-0,19	-0,31	-0,23	-0,15
94	-0,36	-0,27	-0,18	-0,26	-0,20	-0,13
95	-0,34	-0,26	-0,17	-0,22	-0,16	-0,11
96	-0,30	-0,23	-0,15	-0,17	-0,13	-0,09
97	-0,26	-0,20	-0,13	-0,13	-0,10	-0,07
98	-0,22	-0,17	-0,11	-0,10	-0,08	-0,05
99	-0,20	-0,15	-0,10	-0,10	-0,08	-0,05
100	-0,18	-0,14	-0,09	-0,10	-0,08	-0,05
101	-0,16	-0,12	-0,08	-0,10	-0,08	-0,05
102	-0,14	-0,11	-0,07	-0,10	-0,08	-0,05
103	-0,12	-0,09	-0,06	-0,10	-0,08	-0,05
104	-0,10	-0,08	-0,05	-0,10	-0,08	-0,05
105	-0,10	-0,08	-0,05	-0,10	-0,08	-0,05
106	-0,10	-0,08	-0,05	-0,10	-0,08	-0,05

Dödsriskerna för åren 2004–2015 fås genom att dödsriskerna årligen reduceras med den procent som anges i tabellen för respektive år (kedjemultiplikation).Under övergångsåren 2015–2019 och 2035–2039 interpoleras reduktionstalen linjärt mellan 2015 och 2019 och 2035 och 2039.

C. Startvektorer

Hela beståndet

födelseår	antal	miljoner andelar
1938	836	22,4
1939	1485	53,6
1940	1980	82,9
1941	2397	118,1
1942	3015	172,0
1943	3460	223,2
1944	3974	289,7
1945	4495	363,2
1946	4820	427,0
1947	4903	476,7
1948	4976	525,8
1949	5049	574,4
1950	5265	643,2
1951	5188	676,8
1952	5384	750,0
1953	5777	855,8
1954	5788	896,6
1955	6052	987,0
1956	6246	1073,2
1957	6481	1168,8
1958	6308	1194,5
1959	6599	1307,8
1960	6404	1327,0
1961	6661	1442,4
1962	6732	1519,1
1963	7253	1703,7
1964	7950	1945,4
1965	7777	1976,5
1966	7548	1992,3
1967	7702	2107,6
1968	7225	2045,5
1969	6896	2022,7
1970	7004	2112,0
1971	6941	2146,2
1972	7136	2266,4
1973	7053	2307,8
1974	6905	2281,9
1975	6939	2316,1
1976	6569	2214,5
1977	6228	2120,6
1978	6058	2083,3
1979	5860	2035,4
1980	6008	2107,6
1981	6084	2155,6
1982	5896	2109,9
1983	5861	2118,4
1984	5801	2117,6
1985	5925	2184,5
1986	6169	2297,2
1987	6351	2388,7
1988	6472	2458,5

Startvektorer män/kvinnor

Man			**Kvinna**		
födelseår	antal	milj. andelar	födelseår	antal	milj. andelar
1938	564	15,5	1938	272	6,9
1939	1014	37,9	1939	471	15,7
1940	1395	59,4	1940	585	23,5
1941	1695	84,7	1941	702	33,4
1942	2096	120,8	1942	919	51,2
1943	2401	157,9	1943	1059	65,4
1944	2776	205,7	1944	1198	83,9
1945	3118	255,9	1945	1377	107,3
1946	3320	298,4	1946	1500	128,6
1947	3438	338,4	1947	1465	138,3
1948	3448	368,9	1948	1528	157,0
1949	3481	400,4	1949	1568	174,0
1950	3657	452,6	1950	1608	190,7
1951	3597	473,5	1951	1591	203,3
1952	3766	528,9	1952	1618	221,1
1953	3948	590,3	1953	1829	265,6
1954	3977	620,3	1954	1811	276,3
1955	4094	672,4	1955	1958	314,6
1956	4267	737,8	1956	1979	335,4
1957	4391	797,7	1957	2090	371,1
1958	4314	823,8	1958	1994	370,6
1959	4574	912,1	1959	2025	395,8
1960	4328	904,8	1960	2076	422,2
1961	4564	995,5	1961	2097	446,9
1962	4622	1051,2	1962	2110	467,9
1963	4950	1173,0	1963	2303	530,7
1964	5386	1329,3	1964	2564	616,2
1965	5304	1359,9	1965	2473	616,6
1966	5266	1401,7	1966	2282	590,6
1967	5269	1455,0	1967	2433	652,6
1968	4902	1400,8	1968	2323	644,7
1969	4746	1405,2	1969	2150	617,5
1970	4862	1479,3	1970	2142	632,7
1971	4650	1449,9	1971	2291	696,2
1972	4781	1532,2	1972	2355	734,2
1973	4726	1562,3	1973	2327	745,5
1974	4626	1544,5	1974	2279	737,4
1975	4649	1567,7	1975	2290	748,4
1976	4401	1498,9	1976	2168	715,6
1977	4173	1435,5	1977	2055	685,1
1978	4059	1410,2	1978	1999	673,1
1979	3926	1377,7	1979	1934	657,7
1980	4025	1426,5	1980	1983	681,1
1981	4076	1459,0	1981	2008	696,6
1982	3950	1428,1	1982	1946	681,8
1983	3927	1434,0	1983	1934	684,4
1984	3887	1433,5	1984	1914	684,1
1985	3970	1478,8	1985	1955	705,7
1986	4133	1554,9	1986	2036	742,3
1987	4255	1616,8	1987	2096	771,8
1988	4336	1664,1	1988	2136	794,4