Matematisk statistik
Stockholms universitet

Effekter av olika dödlighetsantaganden för premiepensionsutbetalningarna

Anna Lindberg

Examensarbete 2004:1

Postadress:

Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm
Sverige

Internet:

http://www.math.su.se/matstat

Examensarbete i Matematisk Statistik (20p)

Effekter av olika dödlighetsantaganden för premiepensionsutbetalningarna

Utfört av: Anna Lindberg (801020-0429)
Höstterminen 2003

SAMMANFATTNING

År 1999 infördes ett nytt pensionssystem i Sverige och i detta ingår premiepensionen, till vilken det varje år avsätts 2,5 % av bruttolönen. Från pensionering ska dessa pengar betalas ut livsvarigt till premiepensionsspararen. Då premiepensionens årliga storlek ska beräknas måste därför antaganden om den framtida dödligheten göras. Detta arbete visar effekter av olika dödlighetsantaganden för premiepensionsspararnas utbetalningar. Utgångspunkt har varit den dödlighetsprognos som Premiepensionsmyndigheten, PPM, använder idag. Den verkliga dödligheten (den dödlighet pensionärerna följer) antas följa Statistiska centralbyråns, SCB:s, senaste prognos om framtida dödlighet (*Sveriges framtida befolkning, befolkningsframskrivning för åren 2003-2053*). Om dessa två dödlighetsantaganden inte överensstämmer får det konsekvenser för premiepensionsutbetalningen, i form av en höjning eller sänkning. Det visar sig att dödlighetsantagandena överensstämmer olika bra för olika åldrar. I höga åldrar syns den största skillnaden, där PPM använder en dödlighet med hög säkerhet. Olika scenarier, i vilka den verkliga dödligheten varierats, har fått visa hur säker PPM:s prognos är och vilken hållbarhet den har (om verkliga dödligheten utvecklas enligt SCB:s prognos). En jämförelse med FOLO:s (Folksam-LO:s) avtalspension och den metod de arbetar enligt har också utförts.

ABSTRACT

In the year 1999 a new system of pension was introduced in Sweden. One part of this system is *Premiepension* to which 2,5 % of the gross income is deposed. These savings will be disbursed to the pensioner from the day of retirement until death. Therefore, when the size of the yearly *premiepension* is to be decided one needs to make assumptions of the future mortality. This essay shows the effects for the disbursement, when using different assumptions of mortality. The assumption of mortality that is in use by *Premiepensionsmyndigheten, PPM,* today is the assumption used in this essay. The real mortality (the mortality pensioners follow) is assumed to follow the latest report on future mortality made by *Statistiska centralbyrån, SCB* (*Sveriges framtida befolkning, befolkningsframskrivning för åren 2003-2053).* When there is a difference between these two assumptions it will have consequences on the disbursement, as an increase or decrease. It shows that the two assumptions differ depending on age. The largest difference is observed at old ages. This is due to the fact that PPM is uncertain of the future mortality in these ages. In different scenarios, the real mortality has been varied, to exam the forecast (and the effects of it) made by PPM. A comparison with *FOLO:s (Folksam-LO) avtalspension* and their method has also been made.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

1. INLEDNING

1.1 INTRODUKTION

Detta examensarbete är gjort för att ge en magisterexamen i Matematisk Statistik. Det kommer även att ge viss utredning till Premiepensionsmyndigheten, PPM, där den största delen av mitt arbete utförts. Arbetet är utfört mellan den 2 september 2003 och den 28 januari 2004, med handledning av Bengt von Bahr, chefaktuarie på PPM.
Excel-programmet som utför simuleringarna i det här arbetet har jag skrivit tillsammans med Anders Holm. Anders skriver sitt examensarbete om avtalspension på Folksam med Britt-Marie Persson som handledare. Handledare på Universitet har varit Anders Martin-Löf.

1.2 BAKGRUND

Från och med år 1999 har Sverige ett nytt pensionssystem och i detta ingår premiepensionen. Varje år avsätts 2,5% av bruttolönen till premiepension. Dessa pengar placeras i fonder hos PPM och ett inflöde pågår så länge man har en inkomst. Livsvarigt från pensionering ska PPM sen betala ut en årlig summa (som beror på individens tillgodohavande på kontot) till försäkringstagaren.
Hur stor denna summa är vid pensioneringen beror på tre huvudorsaker:

- Livsinkomst
- Vid vilken ålder man väljer att ta ut pension
- Värdeutvecklingen i fonderna man valt

Men det intressanta i det här arbetet kommer att bli hur stor del, av det totala beloppet premiepensionsspararen får del av innan han dör. Det beror bara på en sak, nämligen:

- Förväntad livslängd från 65år

1.3 SYFTE

För att kunna ge premiepensionsspararen en premiepensionsutbetalning varje månad måste PPM göra en prognos hur den förväntade livslängden från 65 års ålder kommer att se ut. Konkret gör PPM ett antagande om den framtida dödligheten $(\mu(x))$. Detta antagande görs utifrån SCB: s befolkningsframskrivningar. För stunden är det det bästa antagande man kan få, men hur väl stämmer det antagandet i framtiden? Är dödligheten lika stor om 30 år som den är idag? Troligtvis inte, men hur fel går det om PPM trots allt väljer att anta samma dödlighet i 30 år framåt? Vad händer med premiepensionsutbetalningar? Vad händer med utbetalningarna om befolkningen inte dör som man antagit i sin prognos? Accepterar försäkringstagaren att hans utbetalning minskar kraftigt från år till år? Dessa problem och några ytterligare vill jag simulera för att få en uppfattning av vad som kommer att hända med utbetalningarna i framtiden.
Syftet med detta arbete är att illustrera effekten olika dödlighetsantaganden får för de framtida premiepensionsutbetalningarna. Det kan också vara intressant att avgöra när man bör ”stoppa processen” och göra nya antaganden.
För PPM: s del blir arbetet en bra kontroll för hur väl PPM: s nuvarande prognos stämmer med SCB: s.

1.4 PREMIEPENSIONSMYNDIGHETEN, PPM

1.4.1 HUR SER PENSIONEN UT?

Den allmänna pensionen från staten består av tre delar:

- Inkomstpension
- Garantipension
- Premiepension

Inkomstpensionen grundar sig på livsinkomsten. Varje år tillgodoräknas 16 % av den pensionsgrundande lönen till inkomstpension. Den andra delen är garantipension, som är till för dem som har låg eller ingen inkomst alls. Premiepensionen är den tredje delen och den har en storlek på 2,5 % av den pensionsgrundande lönen. Skillnaden från inkomstpensionen och garantipensionen är att premiepension är fonderad, med det menas att de 2,5 % som tillgodoräknas varje år placeras i fonder.
Utöver den allmänna pensionen kan pensionären även få tjänste- eller avtalspension, vars storlek beror på vilken kollektivavtalsgrupp pensionären tillhör. Ett tredje alternativ för pensionsspararen är det privata pensionssparandet.

1.4.2 PREMIEPENSION

För att systemet med premiepension ska fungera har Premiepensionsmyndigheten bildats. Premiepensionsmyndigheten är en statlig myndighet vars främsta uppgifter är att
– ansvara för premiepensionskonton
– bokföra och genomföra alla köp eller försäljningar som försäkringstagaren vill göra
–besluta om utbetalning av premiepension
–informera om premiepensionen

Premiepensionsmyndigheten bildades då det nya pensionssystemet infördes. Anledningen till att ett nytt system infördes var att det blir fler pensionärer och färre som kan försörja dem. Skillnaden mellan det gamla systemet och det nya, är att i det gamla systemet gick pengarna direkt från dem som arbetade till pensionärerna (det gamla systemet kallas för fördelningssystem). Idag är premiepensionen ett s.k. Premiereservsystem (fonderat system). Det innebär att de pengar som avsätts till premiepension sparas för att användas då den enskilde själv går i pension

Varje år avsätts 2,5 % av bruttolönen till premiepension. Som premiepensionssparare väljer man fonder hos PPM där pengarna placeras (gör man inget val placeras pengarna i Premiesparfonden som förvaltas av 7: e AP-fonden). Pengarna växer sedan på ett premiepensionskonto tills den dagen premiepensionsspararen vill börja ta ut sin pension (tidigast vid 61 års ålder). Från den dagen får han en utbetalning varje månad tills han dör. Det går inte på förhand att säga hur stor premiepensionen blir, utan det beror på hur tillväxten i fonderna sett ut. I samband med pensioneringen får premiepensionsspararen göra ett val huruvida han vill låta sina pengar stå kvar i fonder eller om han väljer att flytta över kapitalet till Traditionell förvaltning. Traditionell förvaltning innebär att PPM säljer försäkringstagarens fondandelar och tar hand om förvaltningen av tillgodohavandet och betalar ut ett garanterat månadsbelopp till premiepensionsspararen livsvarigt.
Väljer premiepensionstagaren att låta sina pengar stå kvar i fonder lämnar PPM ingen garanti om ett lägsta belopp.
Fortsättningsvis kommer detta arbete att handla om premiepension som står kvar i fonder under utbetalningstiden.

2. LIVFÖRSÄKRINGSTEKNIK

2.1 BERÄKNINGSELEMENT

För att kunna genomföra olika beräkningar i samband med en försäkring måste vissa antagande om dödligheten göras. Eftersom avtalet innebär att bolaget ska förvalta försäkringstagarens pengar måste också prognoser göras för den ränta som kan erhållas på dessa. Likaså måste prognoser göras över kostnader för bolagets administration, s.k. driftskostnader. Vid försäkringstekniska beräkningar utgår man således från antaganden om

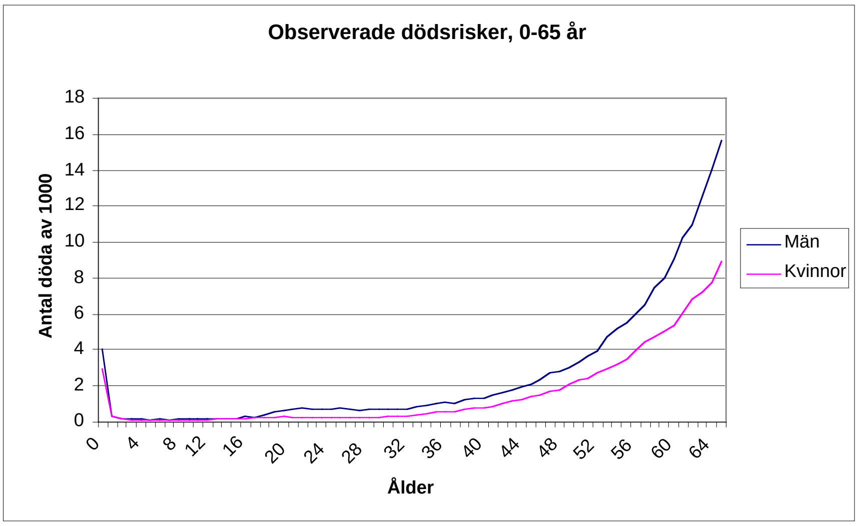
- den *dödlighet*, man kan förvänta sig,
- den *avkastning*, man kan förvänta sig,
- den *driftskostnad*, man kan förvänta sig.

Med hjälp av dessa tre antaganden kan försäkringsbolaget bl.a. räkna ut *arvsvinsten* och *delningstalen*.

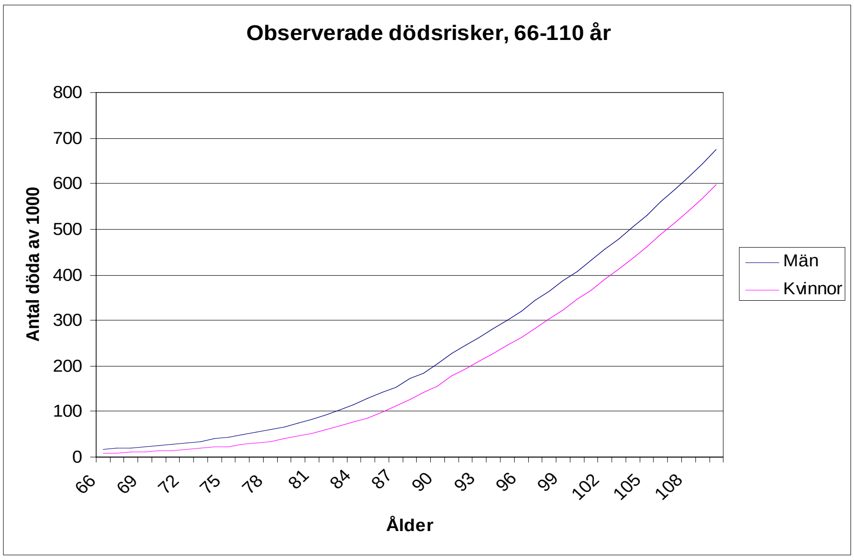
2.1.1 DÖDLIGHET

För livförsäkringsverksamhet är undersökningar över befolkningsdödligheten nödvändiga. Detta t.ex. för att kunna sätta rätt premie och se hur utbetalningarna ska fördelas under utbetalningsfasen. Statistiska undersökningar av den svenska befolkningens dödlighet påbörjades redan för mer än 200 år sedan. Idag utförs dessa undersökningar av Statistiska Centralbyrån (SCB) och redovisas i Statistisk Årsbok under huvudrubriken ”Livslängdstabeller”.
I sådana tabeller kan man avläsa *Observerade dödsrisker, Kvarlevande av 100 000 födda* och *Återstående livslängd*.

Figur 2.1. Sammanställning av observerade dödsrisker för män respektive kvinnor år 1997-2001 från 0-65 år



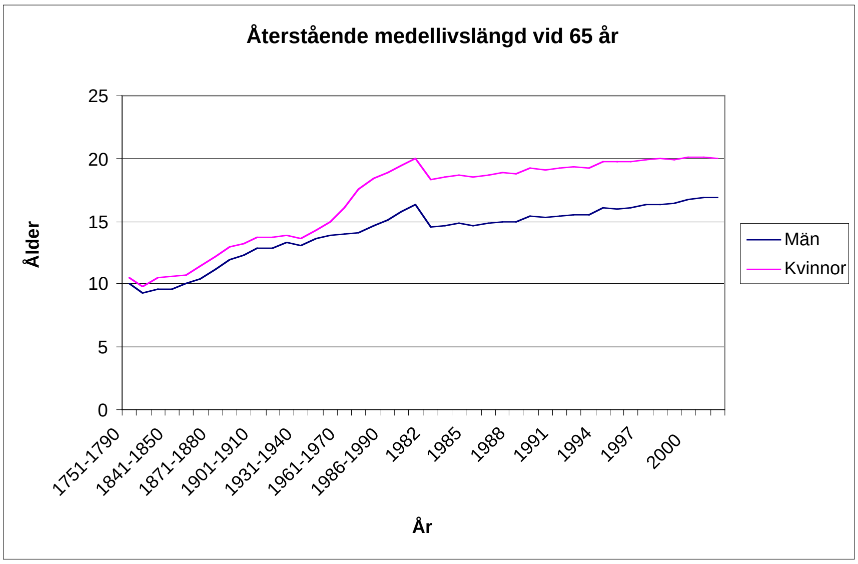
Figur 2.2. Sammanställning av observerade dödsrisker för män respektive kvinnor år 1997-2001 från 65år



Av figurerna 2.1 och 2.2 kan man t.ex. observera att dödligheten är större för män än för kvinnor, att dödligheten är hög under det första levnadsåret, och att dödligheten avtar markant efter första levnadsåret för att sen öka efter 55 års ålder.

När det ska göras ett dödlighetsantagande är det således mycket väsentligt att ta hänsyn till ålder. För att det ska bli så rättvist som möjligt borde bolaget även göra separata antaganden för män och för kvinnor. Trots det är PPM tvungna att göra könsneutrala dödlighetsantaganden p.g.a. lag om jämställdhet.

Figur 2.3. Återstående medellivslängd för män resp. kvinnor, år 1751-2002 från 65 år



Av detta diagram kan man främst se att medellivslängden blivit längre för varje år (d.v.s. dödligheten har sjunkit).

Orsaken till den sänkning av dödligheten som hittills skett, är säkerligen den sociala, ekonomiska, tekniska och kanske främst den medicinska utvecklingen. Men hur kommer då dödligheten se ut i framtiden? Kommer den fortsätta sjunka eller har vi nått ett minimum för dödligheten? Kommer dödligheten i framtiden t.o.m. att öka p.g.a. den livsstil många har idag? T.ex. har en viss ökning av dödligheten till följd av trafikolycksfall noterats, men den dödlighetsorsaken har hittills tämligen liten betydelse för den totala befolkningsdödligheten.

För att göra en rimlig dödlighetsprognos konstaterar jag att man måste ta hänsyn till både födelseår/ålder och kalenderår.

2.1.2 RÄNTA

Normalt förknippas ränta med bankränta. Anledning till att ränta är en väsentlig del i försäkringsbranschen är att en stor del av livförsäkringsbolagens verksamhet består av förvaltning av försäkringstagarnas medel.
(*r* i följande formler står för fondernas avkastning minus inflation och inte för ränta)

Ett kapital som förräntas årsvis med räntefoten r växer enligt formeln

$K(t) = K(0) \cdot (1+r)^t$ vanlig förräntning

$K(t) = K(0) \cdot e^{\delta t}$ kontinuerlig förräntning

$\delta = \ln(1+r)$ där δ kallas för ränteintensiteten.
Vid förräntning är det ursprungliga beloppet känt. Hur stort beloppet blir efter en viss tid beräknas genom räntetillväxten. Vid diskontering är förhållandet omvänt. Problemet blir då att beräkna dagsvärdet av pengar disponibla vid en senare tidpunkt, det s.k. nuvärdet.
Det löses genom att man bestämmer hur stort kapitalet måste vara idag, *K(0)*, för att det med förräntning i *t* år ska växa till *K(t)* efter t år. Alltså:

$$K(0) \cdot e^{\delta t} = K(t) \quad => K(0) = K(t) \cdot e^{-\delta t}$$

K(t) är nu diskonterat i t år och $e^{-\delta} = \dfrac{1}{(1+r)}$ kallas för diskonteringsfaktorn.

På PPM sätts *r*=3%. Den räntefot som sätts ska uppfylla antaganden om en avkastning med *a* % och en inflation på *i* %. *r* ska då sättas så att den reala ökningen i beloppet kan följa:

$$r = a - i = 3\%$$

2.1.3 DRIFTSKOSTNAD

Att fastställa lämpliga omkostnadsantaganden är i själva verket liktydigt med att på ett naturligt sätt fördela försäkringsbolagets totala omkostnader på de enskilda försäkringarna. En grundläggande frågeställning är hur dessa omkostnader ska spridas. Det kan göras proportionellt, t.ex. i procent av premien eller av det totala försäkringsbeloppet. Ett andra alternativ är att sprida omkostnaderna styckevis, d.v.s. med ett fast belopp per tecknad försäkring. Eftersom den grundläggande tanken i försäkring är utjämning mellan de enskilda försäkringstagarna användes det första alternativet, d.v.s. ett system med proportionella avgifter.

Ett annat problem är hur dessa avgifter ska fördelas i tiden. Det vanligaste är att försäkringstagaren betalar ett engångsbelopp vid tecknandet och sen årliga kostnader under försäkrings- och premiebetalningstiden.
PPM har bestämt att sätta en driftskostnadsavgift på 0.3% per år. Det innebär att varje år dras en avgift på 0.3% av det totala tillgodohavandet på premiepensionskontot. PPM tar inte ut någon engångsavgift vid starten utan när inkomsten överskrider 40,3 % av ett prisbasbelopp, d.v.s.15 556 kr/år avsätts pengar till premiepensionen.

2.1.4 ARVSVINST
Då en försäkrad dör finns det pengar kvar på hans premiepensionskonto. Dessa pengar ska fördelas ut till försäkringskollektivet. Det sker minst en gång per år och fördelningen sker proportionellt mot fondvärdet vid samma tillfälle och med hänsyn till ålder (Ju äldre den försäkrade är desto mer får han). Detta tillskott kallas arvsvinst. Arvsvinsten kan inte beräknas på förhand, då den framtida dödligheten är oviss.

2.1.5 DELNINGSTAL
För att komma fram till hur mycket som ska utbetalas varje månad används ett s.k. delningstal. Delningstalet speglar den beräknade återstående livslängden. Det är dock något lägre än den återstående livslängden eftersom man räknar med en tillväxt på 3 % per år. För att komma fram till vilket årsbelopp som ska utbetalas till försäkringstagaren så delas det totala tillgodohavandet på kontot med delningstalet. Ju längre den återstående livslängden är desto lägre blir utbetalningen. Lite felaktigt används samma delningstal för kvinnor och män. (Se figur 2.3, män och kvinnor har inte samma förväntade livslängd).

$$\text{Årsbelopp att utbetala} = \frac{K}{A}$$

där K= tillgodohavandet på kontot, A= delningstalet

(För att få fram utbetalningen per månad dividerar man årsbeloppet med 12)

2.1.6 ANVÄNDNING AV BERÄKNINGSELEMENT
Det beräkningselement som jag kommer att laborera med i det här arbetet blir dödligheten. I en utvidgning av mitt arbete skulle man också kunna ta hänsyn till olika ränteantaganden. Men jag väljer att koncentrera mig på dödligheten och antar därför att framtidens ränteantaganden stämmer med dem som används idag och att dessa är lika med verklighetens. Med andra ord är den räntetillväxt som antas i uträkning av delningstalen samma som den som används i förräntning av kapitalet på kontot.

3. MATEMATISK BESKRIVNING

3.1 LIVFÖRSÄKRINGENS SANNOLIKHETSTEORI

Det här arbetet handlar om premiepension som på *”livförsäkringsspråk”* definieras som *Uppskjuten livsvarig livränta*.

Definition: *En uppskjuten livsvarig livränta börjar utbetalas först efter en i avtalet angiven tid, naturligtvis under förutsättning att den försäkrade fortfarande lever och betalas sedan till den försäkrades död.*

En väsentlig del i Livförsäkringsmatematiken är den återstående livslängden för en försäkrad. Från födelsen betecknas denna med en icke-negativ stokastisk variabel *T*. Fördelningsfunktionen för *T* betecknas med *F*

$F(x) = P(T \leq x)$ = sannolikheten för en nyfödd dö före åldern *x*.

Täthetsfunktionen följer, enligt grundläggande sannolikhetsteori, av fördelningsfunktionen, genom

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

Intressant är också överlevelsefunktionen, *l(x)* (Sannolikheten att överleva åldern *x*).

$$l(x) = 1 - F(x) = P(T > x)$$

Det är vanligt att en livslängdsmodell specificeras genom att ange dödlighetsintensiteten, $\mu(x)$.

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

$\mu(x)$ definieras som *”dödsannolikheten per tidsenhet i åldern x”*. Sambandet mellan $\mu(x)$ och *l(x) ges av*

$\mu(x) = \dfrac{-l'(x)}{l(x)}$ eller tvärtom $l(x) = e^{-\int_0^x \mu(t)dt}$

För att beskriva dödlighetsintensiteten används Makehams formel som innebär att dödlighetsintensiteten växer exponentiellt med stigande ålder

$$\mu(x) = a + be^{cx}$$

I det här arbetet kommer det att bli intressant att arbeta med återstående livslängd från en viss ålder *x* (här: 65 år). Den betecknas med T_x . Sannolikheten att en person som är *x* år ska överleva tiden *t* ges av

$$P(T_x > t) = P(T > x+t \mid T > x) = \frac{l(x+t)}{l(x)}$$

Väsentlig del i det här arbetet kommer att vara den ettåriga dödsrisken *q(x)*, d.v.s. sannolikheten att en person i åldern *x* dör inom ett år.

$$q(x) = P(T_x \le 1) = 1 - \frac{l(x+1)}{l(x)}$$

Ett bra sätt att tolka en dödlighetsprognos är att se vad den gör för väntevärdet av den återstående livslängden.

$$E[T_x] = \int_0^\infty P(T_x > t)dt = \int_0^\infty \frac{l(x+t)}{l(x)}dt$$

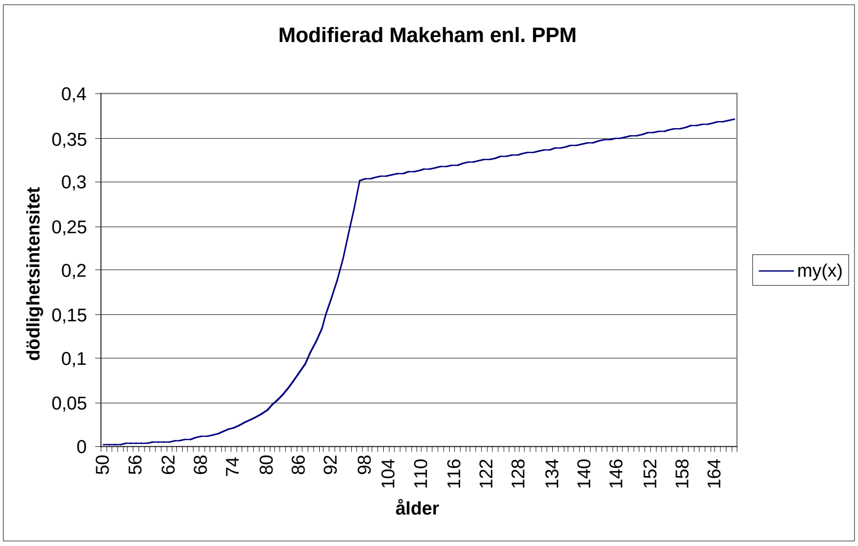
I det här arbetet kommer jag att arbeta i diskret tid, då kan väntevärdet av T_x approximeras med

$$E[T_x] \approx \sum_{y=x}^{z} \frac{l(y)}{l(x)}$$ där z antas vara en ändlig högsta levnadsålder.

3.2 BERÄKNING AV DELNINGSTALET

För att bestämma delningstalet måste det göras antaganden om dödligheten. På PPM har man skapat en modifierad Makeham, som ser ut som ”vanlig” Makeham fram till en hög ålder. Den höga åldern sätts till 97 år, det betyder att fram till 97 år ökar dödlighetsintensiteten exponentiellt, men efter 97 år antas en linjär ökning.
Anledningen till det här känns logisk. Har premiepensionsspararen t.ex. överlevt till 100 år känns det rimligt att anta att det är lika nästan stor risk för en 100-åring att avlida som för en 101 åring (Det finns även observerad dödlighet som visat indikationer på samma sak).

Figur 3.1. Dödlighetsintensiteten med PPM: s parametervärden



x= ålder
w= ålder då Makehamkurvan blir linjär
k= linjär koefficient

$$\mu(x)=\begin{cases} a+b\cdot e^{cx} & för\ x\le w \\ \mu(w)+k(x-w) & för\ x\ge w \end{cases}$$

Som Makeham modifierad med en rät linje för ålder över w år
Sambandet mellan $\mu(x)$ och $l(x)$ tecknas på följande sätt:

$$P(T>x)=l(x)=1-F(x)=e^{-H(x)}$$

där $H(x)=\int_0^x \mu(t)dt$

alltså

$$l(x)=e^{-\int_0^x \mu(t)dt}$$

H(x) uträknad:

$$H(x)=\begin{cases} \int_0^x (a+be^{ct})dt=[at+\frac{b}{c}e^{ct}]_0^x=ax+\frac{b}{c}(e^{cx}-1) & för\ x\le w \\ \int_0^w \mu(t)dt+\int_w^x [\mu(w)+k(t-w)]dt=H(w)+\mu(w)(x-w)+\frac{k}{2}(x-w)^2 & för\ x\ge w \end{cases}$$

För att kunna beräkna delningstalet tar man också hjälp av de s.k. Kommutationsfunktionerna, *N(x)* och *D(x)*.

D(x) definieras på följande sätt:

$D(x)=e^{-\delta x}\cdot l(x)$ där δ=belastad ränteintensitet
här δ=log(1+*r*)-*dk*, där *dk*= *driftskostnadsavgift*

alt.

$$D(x)=\frac{l(x)}{(1+r-dk)^x}$$

således, om det inte råder någon räntebelastning så är *D(x)=l(x)* .

N(x) definieras på följande sätt (Approximationen sker med Eulers summationsformel):

$$N(x)\overset{enl.def}{=}\int_x^\infty D(t)dt\approx\sum_{k=x}^{z}D(k)-D(x)\left[\frac{1}{2}+\frac{(\delta+\mu(x))}{12}\right]$$

I detta arbete sker händelserna i diskret tid så

$$N(x) = \sum_{k=x}^{z} D(k)$$

Härifrån följer att delningstalet blir $A(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$

3.3 BERÄKNING AV RESERVEN (eller hur förändras värdet på kontot under en tidsenhet?)

Värdet på konto i början av år x
– premieutbetalning
+ ränta
+ arvsvinst
– driftskostnadsavgift
=Värdet på kontot i början av år x+1

Ett exempel
En person som är 70 år har 50 000 kr på sitt premiepensionskonto i början av året. Detta belopp förändras på följande sätt:
(Uppskattat delningstal för en 70 åring är 12,89. För en 71 åring är det 12,41):

Värdet av tillgodohavandet (vid början av året)	50000
Avkastningen är 3 %	1500
Arvsvinsten (beror på dödsrisken, vid 70 år är den 1,33 %)	665
Årligt belopp att utbetala (50000/12,89)	-3879
Avgifter 0.3%	-150
Värdet av tillgodohavandet (vid slutet av året)	48136

Det årliga beloppet att utbetala nästa år blir nu 48136/12, 41=3879. Samma belopp som året innan.

I matematiska termer (med kontinuerlig utbetalning)
Vad händer med tillgodohavandet på kontot?
V(t)= värdet på kontot
L= belopp att utbetala
n= pensionsålder
x= ålder
t= år
z= död

r= ränta
dk= driftskostnadsavgift

Reserven beräknas allmänt som

$$V(t) = A(t) - B(t)$$

Där *A(t)*= kapitalvärdet av bolagets framtida förpliktelser enligt avtalet vid tiden *t* och *B(t)*= kapitalvärdet av försäkringstagarens framtida förpliktelser enligt avtalet vid tiden *t*.

Reserven är tillgodohavandet på kontot vid en viss tidpunkt, *t*. I det här arbetet är reserven intressant från utbetalningsfasen, försäkringstagaren har inte längre någon förpliktelse mot bolaget.

Reserven under utbetalning:

$Då\ t > n:$ $$V(t) = L \cdot \frac{N(x+t)}{D(x+t)}$$

För att se hur *V (t)* förändras under en tidsenhet deriverar man och kommer till slut fram till:

$$\boxed{V'(t) = -L + V(t)\cdot \mu(x+t) + \delta \cdot V(t)}$$ *(Thiele's differentialekvation)*

Reservens förändring:
1. δ·*V (t)*=ränteförändring
2. Utbetalning -*L*
3. Arvsvinst, $\mu(x+t)\cdot V(t)$

3.5 PENSIONSFÖRSÄKRINGSMATEMATIKENS HUVUDSATS (diskret tid)

Då vi gör rätt antagande om dödlighet och ränta får vi under utbetalningsfasen konstanta utbetalningar per individ. Varför?
Bevis: Antag att vi har n individer och varje individ har beloppet *k(t)* på sitt konto vid tiden *t*. Detta belopp förändras på tre sätt från tidpunkten *t* till *t+1*. En utbetalning *b(t)* sker, beloppet förräntas med räntan *r* och arvsvinst tillkommer. Alltså:

$$k(t+1) = (k(t) - b(t))(1+r)\frac{l(t)}{l(t+1)} \ \ där\ t = 0,1,2,....$$

Sista termen är arvsvinstfaktorn och den räknas fram såhär:

[Antal personer som överlevt tiden t till t+1] $= \frac{l(t+1)}{l(t)} \cdot n$

[Antal personer som ej överlevt tiden t till t+1] $= (1 - \frac{l(t+1)}{l(t)}) \cdot n$ och deras kapital är

$$= (1 - \frac{l(t+1)}{l(t)}) \cdot n \cdot k(t)$$

Pengarna från dem som ej överlevt ska fördelas proportionellt på dem som överlevt. Alltså delar vi de ej överlevandes kapital med antalet överlevande:

$$\frac{(1-\frac{l(t+1)}{l(t)})\cdot n\cdot k(t)}{\frac{l(t+1)}{l(t)}\cdot n}=\frac{(l(t)-l(t+1))\cdot k(t)}{l(t+1)}=\frac{l(t)\cdot k(t)}{l(t+1)}-k(t)$$. När denna faktor adderas med

kapitalet vid tiden *t*, *k(t)*, ser vi att arvsvinstfaktorn blir $\frac{l(t)}{l(t+1)}$.

Vidare är
A(t)= delningstal för åldern t. *A(t)* kan skrivas som

$$A(t)=\frac{N(t)}{D(t)}=\frac{D(t)+D(t+1)+..+D(z)}{D(t)}=1+\frac{D(t+1)+..+D(z)}{D(t)}=$$

$$=1+\frac{D(t+1)}{D(t)}(\frac{D(t+1)+..+D(z)}{D(t+1)})=1+\frac{D(t+1)}{D(t)}A(t+1) \text{ där } D(t)=\frac{l(t)}{(1+r)^t}$$

Nu återgår vi till att visa att $b(t+1)=b(t)$ under förutsättning att man gjort rätt antaganden.

$$b(t+1)=\frac{k(t+1)}{A(t+1)}=\frac{(k(t)-b(t))(1+r)(\frac{l(t)}{l(t+1)})}{A(t+1)}=\frac{(k(t)-\frac{k(t)}{A(t)})(1+r)\frac{l(t)}{l(t+1)}}{A(t+1)}=$$

$$=\frac{\frac{k(t)}{A(t)}(A(t)-1)(1+r)\frac{l(t)}{l(t+1)}}{A(t+1)}=b(t)\frac{A(t)-1}{A(t+1)}(1+r)\frac{l(t)}{l(t+1)}=b(t)\frac{D(t+1)}{D(t)}(1+r)\frac{l(t)}{l(t+1)}=$$

$$=b(t)\frac{\frac{l_{ant}(t+1)}{(1+r_{ant})^{t+1}}}{\frac{l_{ant}(t)}{(1+r_{ant})^t}}(1+r)\frac{l(t)}{l(t+1)}=b(t)\frac{l_{ant}(t+1)}{l_{ant}(t)}\frac{1}{(1+r_{ant})}(1+r)\frac{l(t)}{l(t+1)}=$$

=[om $l_{ant}=l$ och $r_{ant}=r$]=$b(t)$ v.s.v

4. JÄMFÖRELSE MELLAN FOLO OCH PPM

4.1 FÖRETAGEN

Premiepensionsmyndigheten, PPM är en statlig myndighet som ansvarar för premiepension. Premiepension är, som tidigare påpekats, den del av den allmänna pensionen som är fonderad. Riktlinjer för PPM sätts av staten och PPM är strikt bundna till dessa regler. Ett exempel på en sådan regel är könsneutrala dödlighetsprognoser. Premiepension tilldelas alla arbetstagare.

Folksam LO Fondförsäkringsaktiebolag är ett bolag inom Folksam koncernen, som ansvarar för avtalspensionsförsäkring. De aktiva arbetarna inom flera kollektivavtalsområden har möjlighet att välja att placera sin avtalspension hos FOLO. FOLO har som krav att inte sänka utbetalningarna i andelar under de fem första utbetalningsåren på grund av inkomstskattelagen. För PPM gäller inte denna restriktion.

Gemensamt för dessa två typer av försäkring är att man gör ett fondval och därmed tar en risk för den framtida avkastningen.

4.2 SKILLNADER

I PPM: s system delas all risksumma som frigörs vid dödsfall ut som arvsvinst. Detta betyder i teorin att

$$q_{verklig}(x) = q_{arv}(x) .$$

I FOLO: s system skattas istället $q_{arv}(x)$. En bra skattning bör överensstämma med den frigjorda risksumman.

I delningstalen skattar man den förväntade återstående livslängden med hjälp av $q_{del}(x)$. PPM och FOLO har olika skattningar på $q_{del}(x)$ och därmed olika delningstal. Denna skillnad beror t.ex. på att bestånden ser olika ut och på respektive aktuaries åsikt om den framtida dödligheten. PPM använder sig av diskonteringsränta då de räknar ut delningstalen. FOLO räknar utan ränteantagande.

För PPM har vi i praktiken

$$q_{verklig}(x) = q_{arv}(x) \neq q_{del}(x)$$

och för FOLO har vi i praktiken

$$q_{verklig}(x) \neq q_{arv}(x) = q_{del}(x)$$

Vad innebär nu dessa antaganden för bolaget respektive försäkringstagaren? Hos PPM betalas all frigjord risksumma ut som arvsvinst. Detta innebär att PPM inte kommer att göra någon dödlighetsvinst/förlust på de försäkrades bekostnad. Hos FOLO skattas arvsvinsten i förväg och i och med det kan eventuella dödlighetsvinster/förluster uppstå. FOLO gör en vinst då man antagit en lägre dödlighet i prognosen än den dödlighet verkligheten utvecklas enligt. FOLO avser då att i efterhand låta uppkommer överskott gå tillbaka till de försäkrade.

PPM: s tillvägagångssätt innebär att försäkringstagarnas utbetalningar kommer att variera så länge en perfekt prognos inte är satt (perfekt prognos innebär för både PPM och FOLO att $q_{verklig}(x) = q_{arv}(x) = q_{del}(x)$). Utbetalningarna kommer att höjas då för låg dödlighet antagits i delningstalen, eftersom det då lever kvar ett färre antal personer som delar på kohortens gemensamma kapital. Då en för hög dödlighet antas blir förhållandet omvänt. För FOLO: s försäkringstagare innebär det att utbetalningarna blir konstanta (i fondandelar).

I detta arbete använder vi oss av de ettåriga dödsriskerna, $q(x)$. I verkligheten arbetar FOLO och PPM med $\mu(x)$.

5. SIMULERING

5.1 VAD GÖR PROGRAMMET?

Tillsammans med Anders Holm som skriver sitt examensarbete på Folksam (FOLO) har jag skrivit ett program i Excel där de olika problem/scenarierna som beskrivs i Scenarier kan simuleras. Programmet är uppbyggt så att man ska kunna se vad olika dödlighetsantaganden gör för premiepensionsspararnas utbetalningar. (För Programuppbyggnad se Appendix A.1).

INDATA:

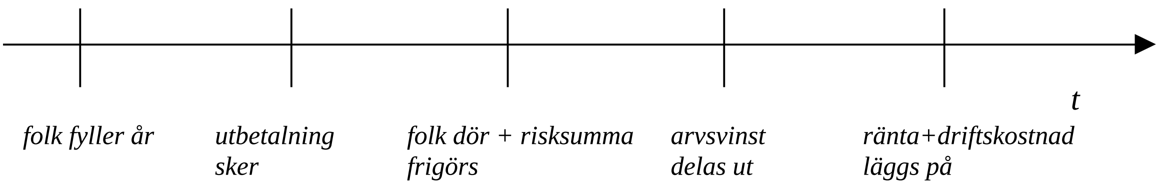
– Antal personer som går i pension varje år från 2003-2053
– Det gemensamma kapital varje kohort har på sitt konto vid pensionering

Not. Vi antar att varje person har lika mycket på sitt konto. För exakt indata, se Appendix A.3

UTDATA:

– Kapitalförändring över tid
– Antalsförändring över tid
– Utbetalning/år för hela kohorten
– Utbetalning/år per individ

Programmet är uppbyggt för att passa både till PPM: s och FOLO: s verksamhet. Därför räknas arvsvinster och frigjord risksumma ut trots PPM delar ut all frigjord risksumma som arvsvinst. Detta innebär att premiepensionsspararna tilldelas arvsvinster efter hur många i systemet som avlidit. Man garanterar inte spararna en årlig arvsvinst.
En skillnad från verkligheten är att PPM inte tar någon hänsyn till olika kohorter, i vårt program däremot räknas varje kohorts ekonomi för sig. T.ex. generationen som är född år 1938 tilldelas endast arvsvinster i form av frigjord risksumma från avlidna personer födda 1938.
En viktig sak att påpeka är att vi antar att alla börjar ta ut sin premiepension vid 65 års ålder, i verkligheten får man ta ut den från 61 års ålder.
Vi räknar också med att alla fyller år vid samma tidpunkt på året och alla dör vid samma tidpunkt på året.
Programmet är uppbyggt efter följande tidsaxel (varje år):



Programmet kommer att simulera fram olika scenarier, där PPM använder sig av de dödlighetsantaganden de använder i dag, och sen kommer verkligheten (den verkliga dödligheten) utvecklas enligt SCB: s prognos (eller en variant av den). Detta för att se vad som händer med utbetalningarna.

5.1.1 SCB: S DÖDLIGHETSPROGNOS

Jag har antagit att den verkliga dödligheten för de närmaste 50 åren kommer att följa SCB: s framskrivning (eller varianter av denna) av den framtida dödligheten. I denna prognos har SCB tagit hänsyn till både kalenderår och ålder. SCB skriver följande angående den framtida dödligheten:

”Dödlighet

Den hittillsvarande trenden med minskande dödlighet antas fortsätta, dock något långsammare för kvinnor. Bakgrunden är förbättrad livsstil och medicinska framsteg. Under de närmaste tio åren antas en årlig minskning av dödsrisken på ca 2 % för män och 1,5-2 % för kvinnor. I åldrarna över 80 år antas reduktionen i dödsriskerna bli lägre. På längre sikt antas takten i dödlighetsreduktionen bli något långsammare. Dödlighetsantagandet betyder att medellivslängden för män ökar från 77,7 år 2002 till 83,6 år 2050 och för kvinnor från 82,1 till 86,2.”

Enligt denna reduktion av dödlighetsantaganden (se Appendix A.2) så har jag räknat fram en dödsrisk $q(x)_{verk}$. Den ser ut som följer:

Tabell 5.1. SCB: s triangel med ettåriga dödsrisker

pensioneringsår/ålder	65	66	…	114	115
2003	q(65,2003)	q(66,2004)		q(114,2052)	q(115,2053)
2004	q(65,2004)	q(66,2005)		q(114,2053)	
…					
2052	q(65,2052)	q(66,2053)			
2053	q(65,2053)				

$q(x,t) = den\ ettåriga\ dödsrisken\ \ för\ ålder\ x,\ år\ t$

Två exempel på hur en dödsrisk räknas fram med procentreduktionen, *pr*:

$$q(66,2004) = q(66,2003) \cdot (1 - \frac{pr(66,2004)}{100})$$

$$q(67,2005) = q(67,2003) \cdot (1 - \frac{pr(67,2004)}{100}) \cdot (1 - \frac{pr(67,2005)}{100})$$

SCB: s prognos är gjord för 50 år framåt men jag är intresserad av en prognos för ytterligare 50 år framåt. Så lång prognos gör inte SCB därför har jag i framskrivningen av dödsriskerna antagit att procentreduktionerna per år för år efter 2050 följer samma procentsats som år 2039-2050. För en kvinna 65 år ser det alltså ut som följer:

Tabell 5.2. Procentreduktion för en 65-årig kvinnas dödsrisk

	2003	2004-2015	2019-2035	2039-2050	2050-
Kvinna 65	0,00783	-1, 4 %	-1, 05 %	-0, 70 %	-0, 70 %

Anm. Jag provade också att istället sätta 0 % för år efter 2050. Skillnaden mellan dessa båda alternativ blev mycket liten för de kohorter som kommer att bli mest intressanta att studera.

Jag valde det första alternativet p.g.a. förenkling i programmeringen. (Däremot för den kohort som påverkas mest, d.v.s. de som går i pension 2053 skiljer det ca 1 år i återstående livslängd för en 65-åring mellan de båda alternativen).

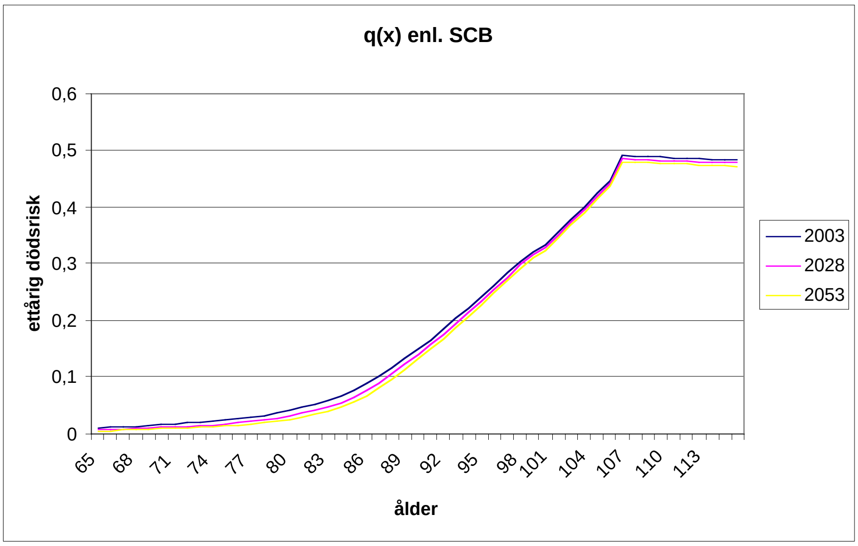
SCB har, som synes, räknat fram separata dödsrisker för män och för kvinnor. I det här arbetet vill jag arbeta med en könsneutral dödsrisk därför har jag viktat ihop dödsriskerna för män med dödsriskerna för kvinnor och fått fram detta $q(x)_{verk}$. Denna viktning är gjord med antagande om att det från början finns lika många män som kvinnor i systemet. Därefter görs viktningen enligt hur många män resp. kvinnor som finns kvar för varje år. Det betyder att vid senare åldrar finns det fler kvinnor än män p.g.a. att kvinnor har längre livslängd. Därför får kvinnors dödsrisk större vikt i högre åldrar.
Eftersom jag i det här arbetet är intresserad av dödligheten efter 65 år så är dödsrisker framtagna från 65 års ålder. SCB: s prognos säger följande om de återstående livslängderna:

Tabell 5.3 . Återstående livslängd från 65 år enl. SCB: s prognos

	Återstående livslängd från			
	65	75	85	95
2003	20,7	11,2	3,9	0,4
2028	22,4	12,8	4,8	0,5
2053	23,5	13,8	5,4	0,7

Med andra ord tror SCB att dödligheten kommer att minska i framtiden. Om t.ex. 50 år väntas 65 åringarna att leva nästan tre år längre än vad man tror idag.

Figur 5.1. SCB: s dödlighet



5.2 SCENARIER

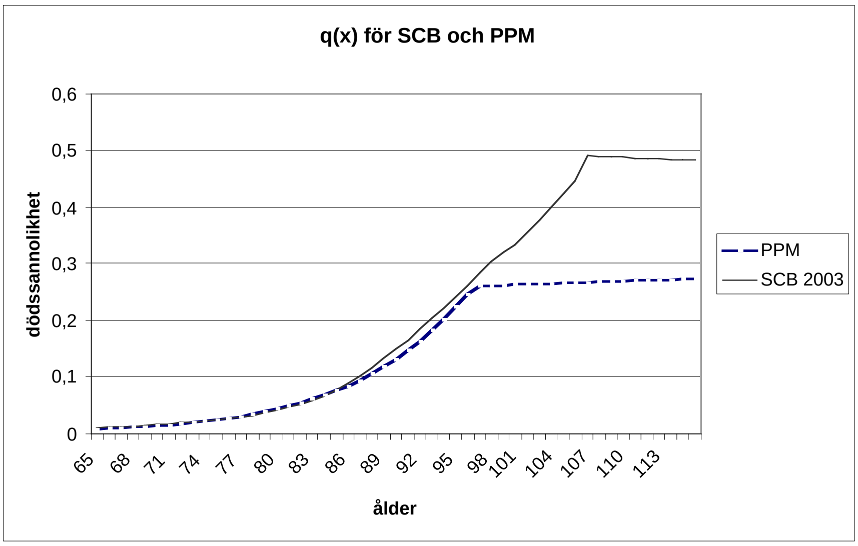
Förutsättning: Vi antar att vi har den verkliga dödligheten för år 2003-2103. Denna är tagen från SCB: s skrift om befolkningsframskrivning. Vårt program är uppbyggt så att vi kan ändra både den verkliga dödligheten och prognosdödligheten (d.v.s. den som används i delningstalen). I scenarierna (förutom scenario 1) kommer prognosdödligheten vara densamma, d.v.s. delningstalen kommer vara samma för alla år och beräknas på samma sätt som PPM gör idag. För att få ett mer överskådligt resultat har jag valt att titta på främst tre kohorter, de som går i pension år 2003, 2013 och 2023, med andra ord kohorter födda 1938, 1948 och 1958. Senare kohorter har lite för långt till pensionering för att deras utbetalningstid ska vara intressant idag.
PPM: s nuvarande värden:

$$\mu(x) = \begin{cases} a + b \cdot e^{cx} & \text{för } x \le w \\ \mu(w) + k(x - w) & \text{för } x \ge w \end{cases}$$

a= 0,0005
b= 0,00000355
c= 0,117
w= 97
k= 0,001

Denna prognos är gjord med hjälp av SCB: s förra dödlighetsprognos (2000). SCB utför tre prognoser, en hög, en medel och en låg. PPM tillämpar det sista alternativet som innebär en prognos som har den snabbast stigande förväntade återstående livslängden jämfört med de två andra. Anledningen till att låg-alternativet väljs är för att sannolikheten att premiepensionsspararens utbetalningar minskar ska bli så liten som möjligt. Från $\mu(x)$räknas $q(x)$ fram så att en jämförelse mellan PPM: s och SCB: s ettåriga dödsrisker kan göras.

Figur 5.2. Jämförelse med q(x) 2003 för SCB och för PPM



Tabell 5.4. Jämförelse av återstående livslängd för SCB och för PPM

	Återstående livslängd från			
	65	75	85	95
SCB 2003	20,7	11,2	3,9	0,4
SCB 2013	21,5	12,0	4,3	0,5
SCB 2023	22,1	12,6	4,6	0,5
PPM	21,2	13,4	7,4	4,0

Från denna tabell kan man se att PPM gör en väldigt försiktig prognos för höga åldrar. (Den största anledningen till denna säkerhet är att det finns mycket lite statistik om dödlighet i höga åldrar.)
Men hur säker och hur hållbar PPM: s dödlighetsprognos är kommer att visas i följande scenarier som jag valt att belysa:

1. PPM gör en perfekt dödlighetsprognos, $q_{verk} = q_{del}$

Kapitalet pensionsspararna har vid 65 års ålder kan portioneras ut genom konstanta utbetalningar livsvarigt. Att kunna göra en sådan prognos är PPM: s strävan.

2. Verklig dödlighet enligt SCB

Vi använder de dödlighetsantaganden som PPM använder idag för att sätta delningstalen. Samma delningstal används för alla generationer som går i pension mellan 2003 och 2053. Vi låter verkligheten utvecklas enligt SCB.
Hur bra stämmer PPM: s skattning för första kohorten? Om 10 år? Om 20 år? Vad händer med premiepensionsspararnas utbetalningar? Hur mycket kommer dessa att ändras? Accepterar spararna vilken förändring som helst? Om utbetalningarna exempelvis minskar med mer än 10 % från första utbetalningen måste något göras.

3. Verklig dödlighet enligt variant 1 av SCB

Vi använder de dödlighetsantaganden som PPM använder idag för att sätta delningstalen. Samma delningstal används för alla generationer som går i pension mellan 2003 och 2053. Vi låter verkligheten utvecklas enligt en variant av SCB: s prognos. SCB: s ettåriga risker multipliceras med ett α, samma α för alla åldrar, alla år. Med hjälp av detta kan vi visa vad som händer med utbetalningarna om dödsriskerna minskar, d.v.s. att den återstående medellivslängden blir längre.

Tabell 5.5. α-värden som ger ökad återstående livslängd

Ökning i återstående medellivslängd för en 65 åring 2003	α
1 år	0,88
3 år	0,68
5 år	0,54

α är satt utifrån den återstående livslängden för en person som går i pension 2003. Det innebär att en ökning med 3 år för en pensionär 2003 inte blir en ökning med 3 år för en pensionär i senare kohorter eftersom dem redan har längre återstående livslängd.

Hur fort går det snett? När blir utbetalningarna lägre än den första utbetalningen? Tiden tills utbetalningarna skiljer sig mer än t.ex. 10 % från första utbetalningen blir ju kortare ju mer den verkliga dödligheten skiljer från den skattade.
Vad har en ökning i livslängd för inverkan på PPM: s prognos? Hur många år förkortas prognosens hållbarhet då livslängden ökas med 1, 3 och 5 år? Vad betyder en ökning i återstående medellivslängden för det initiala kapitalet (kapitalet vid pensionering)?

4. Verklig dödlighet enligt variant 2 av SCB
Vi använder de dödlighetsantaganden som PPM använder idag för att sätta delningstalen. Samma delningstal används för alla generationer som går i pension mellan 2003 och 2053. Vi låter verkligheten utvecklas enligt en variant av SCB: s prognos. SCB: s ettåriga dödsrisker multipliceras med 3 olika γ för olika kalenderår.

Tabell 5.6.γ-värden som påverkar den återstående livslängden

Kalenderår	γ
2003-2012	γ_1
2013-2022	γ_2
2023-2103	γ_3

Meningen med det här scenariot är att visa att den förväntade återstående livslängden kan ökas på flera sätt. I scenario 3 ökade vi den genom att multiplicera hela *q(x)*-matrisen med samma α, här vill vi istället visa att den förväntade återstående livslängden kan ökas med ett år genom att man låter dödsrisken för olika kalenderår bli lägre.

Tabell 5.7 . γ-värden som ger en ökad förväntad återstående livslängd för dem som går i pension 2003

γ_1	1
γ_2	0,83
γ_3	0,83

Detta val av γ-värden kan motiveras med att om 10 år hittar man mediciner mot någon sjukdom som gör att SCB för år efter 2013 har satt dödsriskerna för höga och att de i själva verket blir lägre.
Jag väljer att titta på den generation som går i pension 2003, då jag vill kunna jämföra med scenario 3. Att den förväntade återstående medellivslängden ökar med ett år betyder det samma sak för utbetalningarna i det här scenariot som i scenario 3?

5. Anpassning av SCB:s *q(x)* till Makeham
I det här sista scenariot vill vi hitta en Makeham-anpassning till SCB: s ettåriga dödsrisker för den generation som går i pension år 2003. Detta för att det i scenario 2 visar sig att PPM: s *q(x)*-värden inte överensstämmer med SCB: s för höga åldrar.
För att göra detta måste vi transformera SCB: s *q(x)*-värden till $\mu(x)$. Detta gör vi med hjälp av teorin som följer i resultatet till detta scenario och med hjälp av Problemlösaren i Excel.

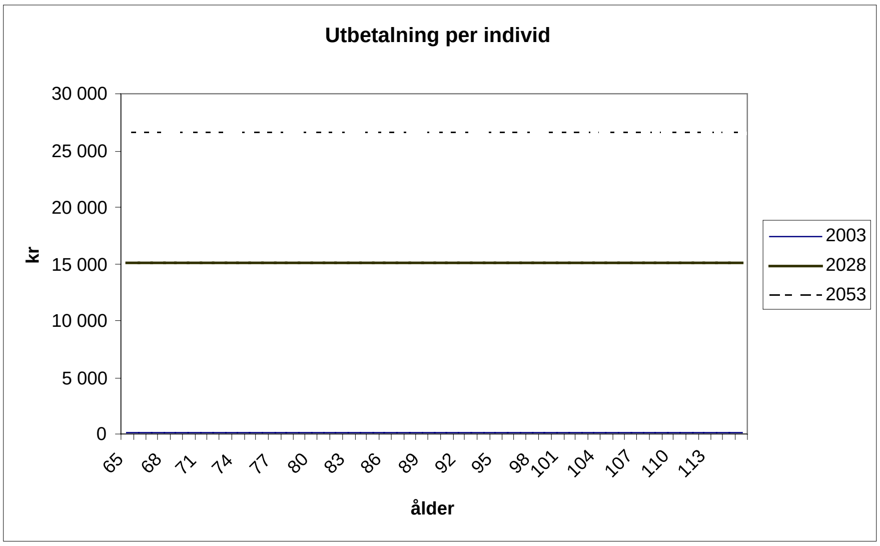
Vad skulle det betyda om PPM skulle använda de värden, som tas fram i det här scenariot, till att räkna ut delningstalen?

6. RESULTAT OCH SLUTSATSER

6.1 SCENARIO 1. PPM GÖR EN PERFEKT DÖDLIGHETSPROGNOS, $q_{verk} = q_{del}$

PPM har lyckats med en perfekt prognos. Man har i sin prognos räknat med samma dödlighet som sedan verkligheten utvecklats enligt (Med andra ord så har man lyckats sätta delningstalen så de stämmer precis med verkligheten). Både när det gäller dödlighet och avkastning.
Utbetalningarna ser då ut som följer:

Figur 6.1. Utbetalning per individ



Tabell 6.1. Utbetalning per individ för 5 utvalda kohorter

Utbetalning per individ och år	
Pensioneringsår	kr
2003	143
2013	4078
2023	9857
2028	15052
2053	28121

Utbetalningarna blir konstanta under hela utbetalningsfasen för alla 50 kohorterna. Utbetalningarna blir högre för senare kohorter eftersom dessa har varit längre tid i det nya systemet och hunnit samla på sig mer pengar. En perfekt prognos betyder också att alla pengar delas ut till varje kohort, d.v.s. att utan ränta och driftkostnadsavgift har, efter 50 år i systemet, pensionärerna som går i pension år 2003 fått ut sina 279 Mkr. (Med ränta och driftskostnadsavgift får kohorten som går i pension år 2003 372 Mkr)

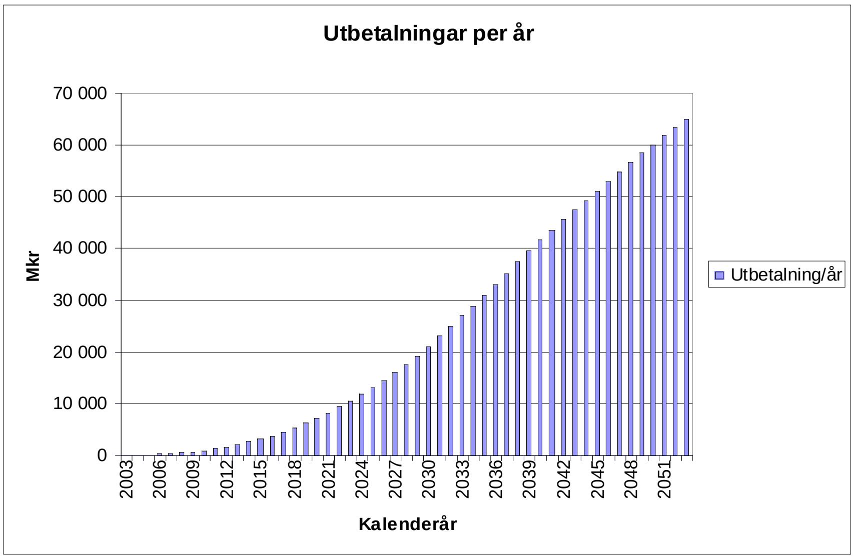
Slutsats: Kunde man förutspå framtiden skulle man kunna garantera sina premiepensionssparare konstanta utbetalningar.
För att få en uppfattning om vad en perfekt prognos innebär för PPM och kunna jämföra denna prognos med senare scenarier, så har jag räknat ut hur stora utbetalningar PPM bör göra varje år (ej kohortvis!). Se Figur 6.2. Anledningen till att utbetalningarna ökar för varje kalenderår beror på att det varje år kommer in ny kohort 65-åringar.
Ex. Första året görs endast en utbetalning, nästa år två utbetalningar o.s.v. Se tabell 6.2.

Tabell 6.2. Utbetalning per kalenderår

2003	2004	2005	o.s.v…
utb(65,2003)	utb(66,2003)	utb(67,2003)	…
	utb(65,2004)	utb(66,2004)	…
		utb(65,2005)	…

utb(x, k)= årlig utbetalning till hela kohorten k då de är x år.

Figur 6.2. Utbetalningar per år

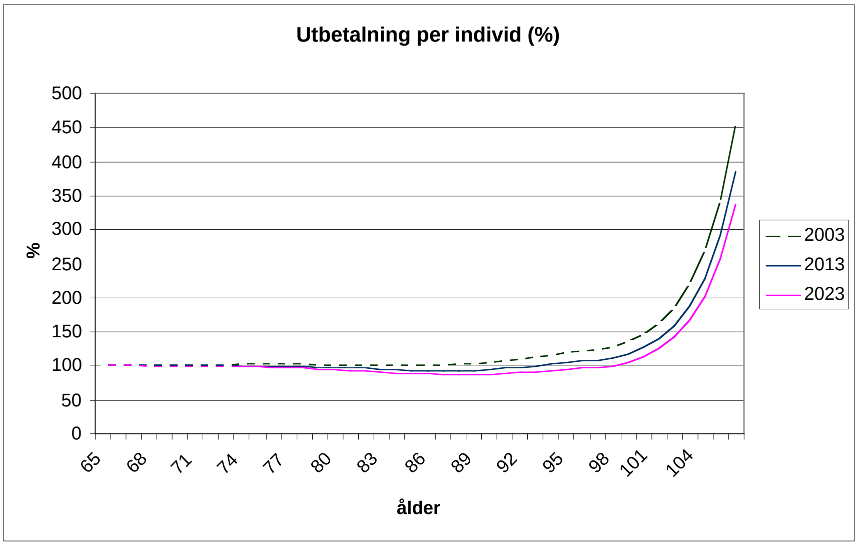


6.2 SCENARIO 2. VERKLIG DÖDLIGHET ENLIGT SCB

Delningstalen beräknas enligt PPM: s dödlighetsprognos för personer som går i pension åren 2003-2053, medan antal personer dör av enligt SCB: s prognos. Programmet räknar fram en individs årliga utbetalning. Figur 6.3 visar hur dessa ser ut för individer tillhörande tre kohorter, de som är födda -38, -48 och -58. (Senare generationers pensioneringstid ligger lite för långt fram i tiden för att de ska vara intressanta för PPM idag). Jag väljer, av grafiska själ, att visa utbetalningarna i procent då det blir lättare att se skillnad mellan de tre generationerna.
I Figur 5.2 kan man se att PPM: s ettåriga dödsrisk stämmer väl överens med SCB: s ettåriga dödsrisk (för år 2003) fram till åldrar runt 85 år. Därefter har PPM en dödsrisk som är lägre än SCB. Detta innebär att de första åren bör utbetalningarna se ganska bra ut, men ju äldre pensionären blir desto sämre stämmer PPM: s prognos. Med sämre menas att man antagit att fler personer ska leva kvar än de i verkligheten gör enligt SCB: s prognos. Dessa färre

personer i höga åldrar får med andra ord mer pengar att dela på och deras årliga utbetalningar höjs.

Figur 6.3. Utbetalning per individ



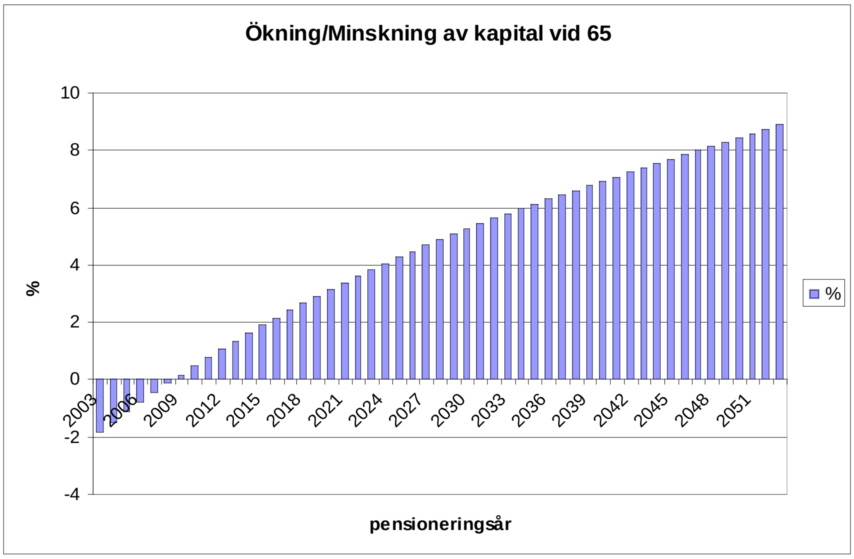
Tabell 6.3. Utbetalning i %

	Utbetalning vid 4 åldrar			
	65	75	85	95
2003	100	102	101	119
2013	100	99	94	104
2023	100	98	88	95

Från tabellen ovan går det att avläsa, att innan denna höjning av premiepensionen inträffar innebär PPM: s felaktiga prognos (i jämförelse med SCB) en sänkning av utbetalningarna. En utbetalningsminskning med 10 % borde vara skäl nog för PPM att ändra sina delningstal. För generationer som går i pension år 2003 och 2013 skulle PPM kunna ha kvar sina delningstal, men premiepensionsspararna som går i pension år 2023 får efter 20 år (d.v.s. år 2043) en utbetalningsminskning med 12 %. Accepteras detta? (PPM har inga krav på sig att de ej får sänka utbetalningarna. Trots det vill PPM göra en rättvis dödlighetsprognos gentemot spararna, därför kan en 10 % gräns vara ett bra mått på när prognosen inte längre håller.)

Ett annat bra mått för att se hur bra prognosen var, är att se hur mycket mer eller mindre kapital premiepensionsspararna behövt vid 65 år för att kunna hålla senare utbetalningar konstant lika med den första.

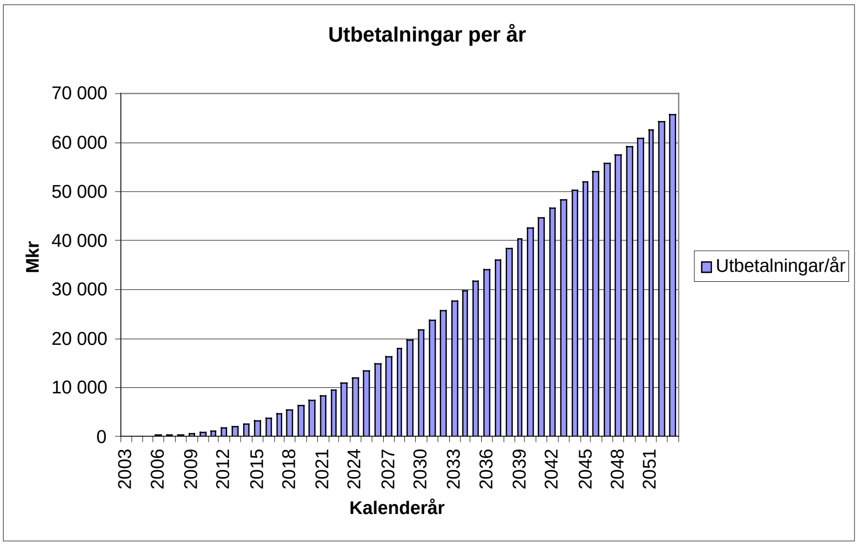
Figur 6.4. Alla kohorters ev. ökning eller minskning av initialt kapital



T.ex. för kohorten född 38 (som gick i pension 2003) hade det räckt med 2 % mindre initialt kapital för att kunna hålla senare utbetalningar konstant lika med den första. De födda 48 och 58 hade däremot behövt 1,5 % respektive 4 % mer. Det innebär att, för de första 6 generationerna (2003-2008)(som behövt ett lägre initialt kapital) hade man kunnat ge ut en högre initial pension. Det i sin tur innebär att PPM: s prognos är satt med en säkerhet som gör att för generationer som går i pension år 2003-2008 bildas det en orättvisa. Premiepensionssparare som dör tidigt får ut för lite pension.

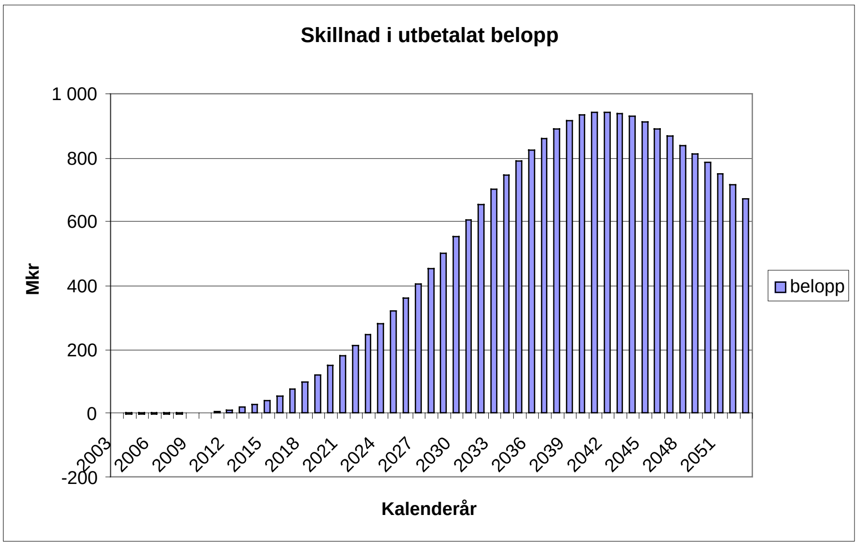
Slutsats: PPM: s nuvarande prognos är satt med sådan säkerhet att, i teorin skulle man kunna ha samma prognos/delningstal i nästan 30 år till, utan att premiepensionsspararna skulle få sänkta utbetalningar med mer än 10 %. (Den första generation som får en utbetalningssänkning större än 10 % är den som går i pension 2018 och de får den första minskningen efter 20 år som pensionärer, alltså år 2040). Däremot är PPM: s prognos redan idag orättvis för de tidiga generationerna då de som dör tidigt i dessa generationer får utbetalningar som är lägre än vad de borde få ut om PPM lyckats gör en perfekt prognos. Allt förutsatt att SCB gjort en prognos som stämmer för 50 år framåt.
Det belopp PPM betalar ut per år från 2003-2053 ser ut som följer:

Figur 6.5. Utbetalningar per år

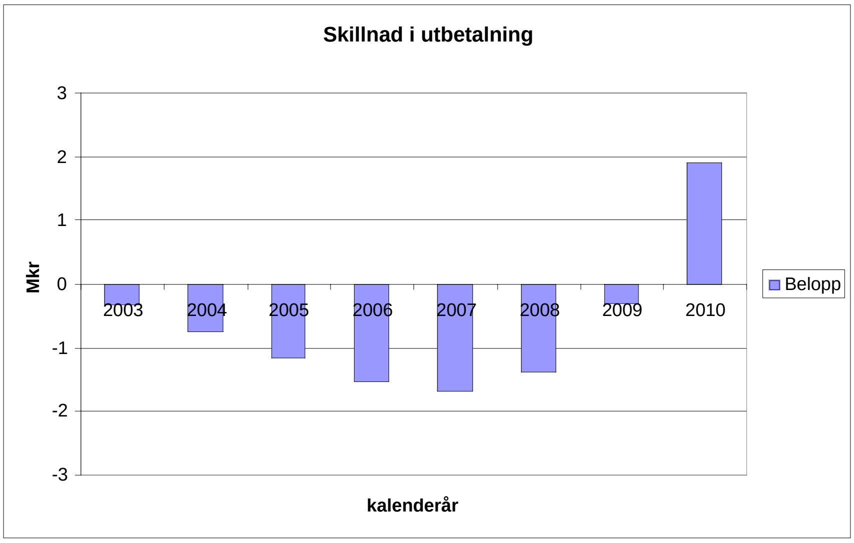


Jämför man dessa årliga belopp med de belopp som bör betalas ut då en perfekt prognos är gjord (Se Figur 6.2) så ser skillnaden ut som följer i Figur 6.6 och Figur 6.7.

Figur 6.6. Skillnad i utbetalt belopp per år, PPM: s nuvarande värden jämfört med en perfekt prognos, alla år.



Figur 6.7. Skillnad i utbetalt belopp/år, PPM: s nuvarande värden jämfört med en perfekt prognos, de första åtta åren.



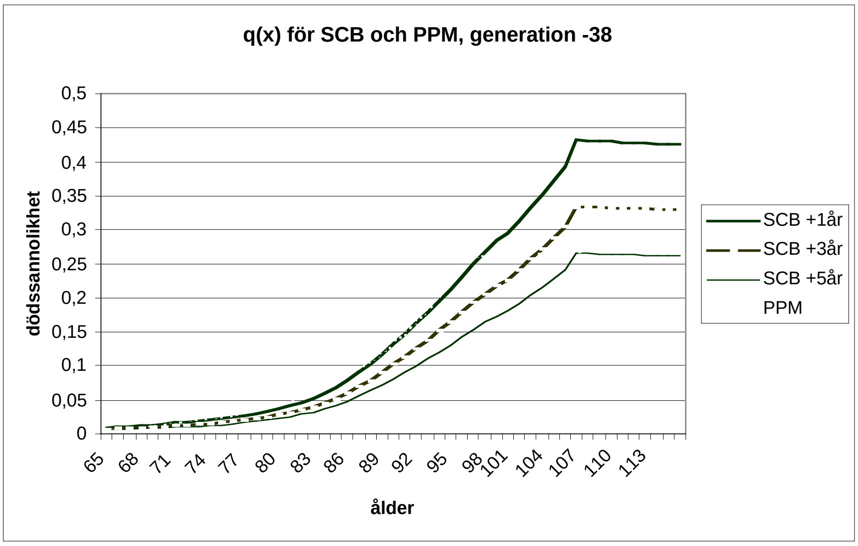
De första sju åren betalas det ut för lite, däremot för år efter 2009 betalas det ut för mycket varje år (eftersom man satt en så säker prognos för höga åldrar).
Sammanlagt betalas det ut 1 236 000 Mkr under dessa 50 år. Det kan jämföras med 1 212 966 Mkr som ska betalas ut då en perfekt prognos är satt.

6.3 SCENARIO 3. VERKLIG DÖDLIGHET ENLIGT VARIANT 1 AV SCB

Jag väljer åter igen att titta på generationerna som går i pension år 2003 och 2013. Generationen som går i pension år 2023 är däremot inte så intressant i det här scenariot eftersom jag i scenario 2 konstaterar att de får utbetalningsminskning större än 10 % utan att deras återstående livslängden ökas (Se tabell 6.3). Vad händer med en pensionärs utbetalningar om hans återstående medellivslängd ökar med 1, 3 och 5 år?

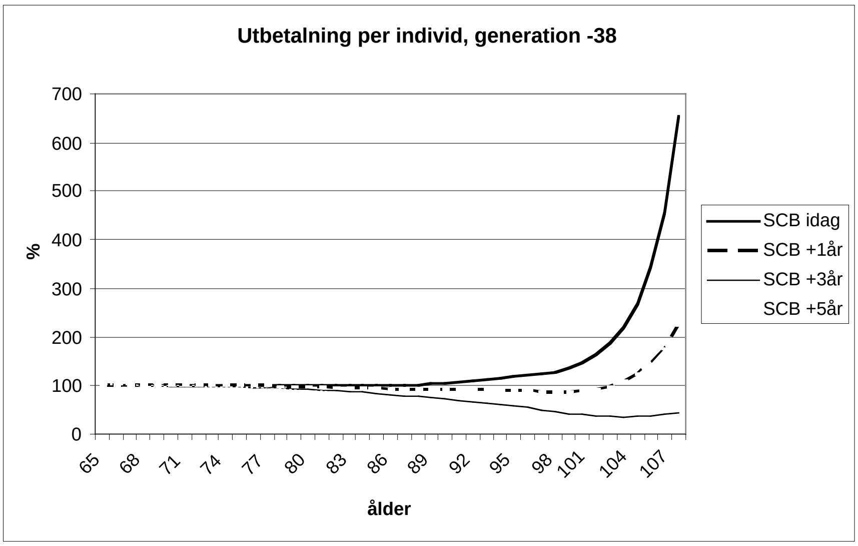
6.3.1 FÖR KOHORTEN SOM GÅR I PENSION ÅR 2003

Figur 6.8. Ettårig dödsrisk q(x), 4 olika fall



I figur 6.8 kan man se hur mycket den ettåriga dödsrisken förändras då den återstående medellivslängden för en 65-åring ökas med 1, 3 respektive 5 år. Bara genom att titta på figuren ser man att en ökad återstående livslängd med 3 respektive 5 år måste innebära utbetalningssänkningar för pensionärer då hela q(x)-kurvorna ligger under PPM: s q(x)-kurva.

Figur 6.9. Utbetalning per individ



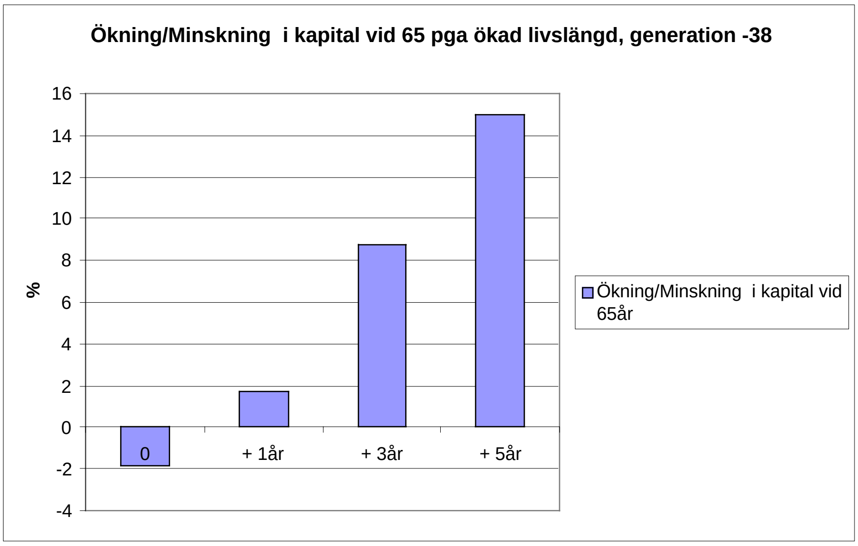
Det innebär att om SCB: s prognos är gjord i underkant och återstående medellivslängd för en 65-åring istället är x år längre (x=1, 3,5) så skulle utbetalningarna förändras på följande sätt:

Tabell 6.4. Utbetalning i % för person som går i pension år 2003

	Utbetalning vid 4 åldrar:			
	65	75	85	95
	100	102	101	119
+ 1år	100	100	94	90
+ 3år	100	97	83	57
+ 5år	100	95	77	42

För PPM: s del innebär det här, att om den återstående medellivslängden skulle öka med ett år behöver en ändring av delningstalen göras innan pensionärerna fyller 95 dvs. år 2033. Detta för att premiepensionsspararna ska slippa utbetalningsminskningar större än 10 %. En ökning i återstående medellivslängd med 3 respektive 5 år innebär på motsvarande sätt, att PPM behöver göra en ny prognos före år 2023. (Exakt betyder en ökning med 3 år att en ny prognos bör göras år 2023 och en ökning med 5 år betyder att en ny prognos bör göras innan 2018 så slipper premiepensionsspararna utbetalningsminskningar)
Man kan också se hur mycket mer initialt kapital pensionsspararna behövt vid 65 år för att kunna hålla utbetalningarna konstant lika med den första:

Figur 6.10. Ökning/Minskning i kapital vid 65

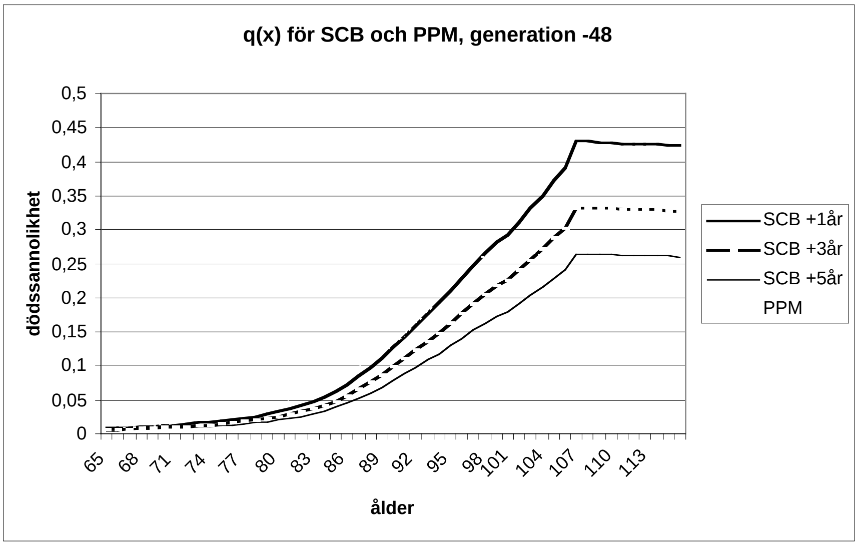


En ökning med 5 år innebär att premiepensionsspararna (som går i pension 2003) tillsammans hade behövt nästan 321Mkr (för att kunna hålla senare utbetalningar lika med den första) istället för de nu 279Mkr de hade tillsammans vid 65års ålder (15 % mer).En ökningen i återstående förväntad livslängd kan, med andra ord, mötas med en ökning i initialt kapital. Detta innebär att om SCB gjort sin prognos i underkant och i själva verket den återstående livslängden blir ännu längre (1, 3,5 år) skapas ingen orättvisa mellan de som dör tidigt och de som dör sent. Däremot blir PPM, som konstaterats ovan, tvungna att göra utbetalningssänkningar för att pengarna ska räcka till en längre återstående livslängd.

6.3.2 FÖR KOHORTEN SOM GÅR I PENSION ÅR 2013

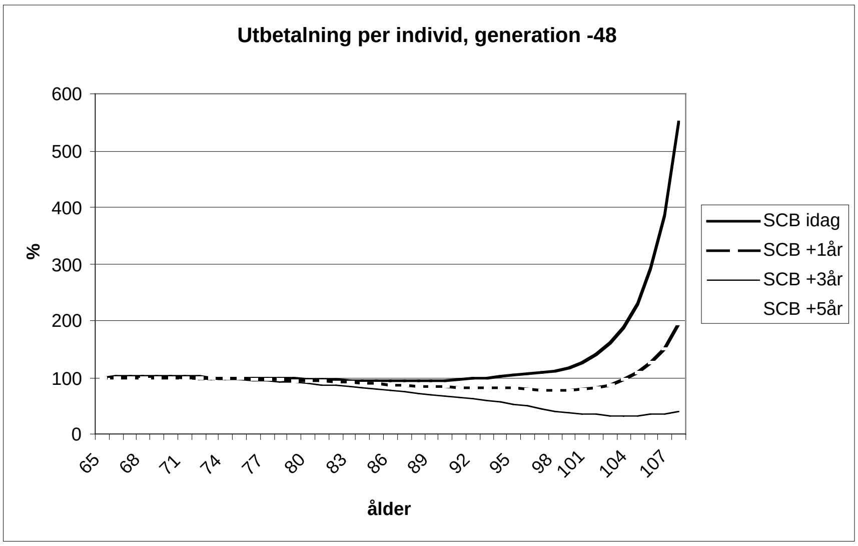
Jag tittar nu på kohorten som går i pension 10 år senare för att se hur deras utbetalningsperiod påverkas av att den återstående medellivslängden för en pensionär 2003 ökas med 1, 3 och 5 år.

Figur 6.11. Ettårig dödsrisk q(x), 4 olika fall



Liknande analys som gjordes av Figur 6.8 kan nu göras med Figur 6.11. Man ser att *q(x)*-kurvorna, då medellivslängden ökar, ligger under PPM: s *q(x)*-kurva, alltså kommer utbetalningsminskningar att behöva göras. PPM överskattar dödligheten och antar att folk lever kortare tid än vad de egentligen gör. Deras utbetalningar i % förändras enligt följande:

Figur 6.12. Utbetalning per individ

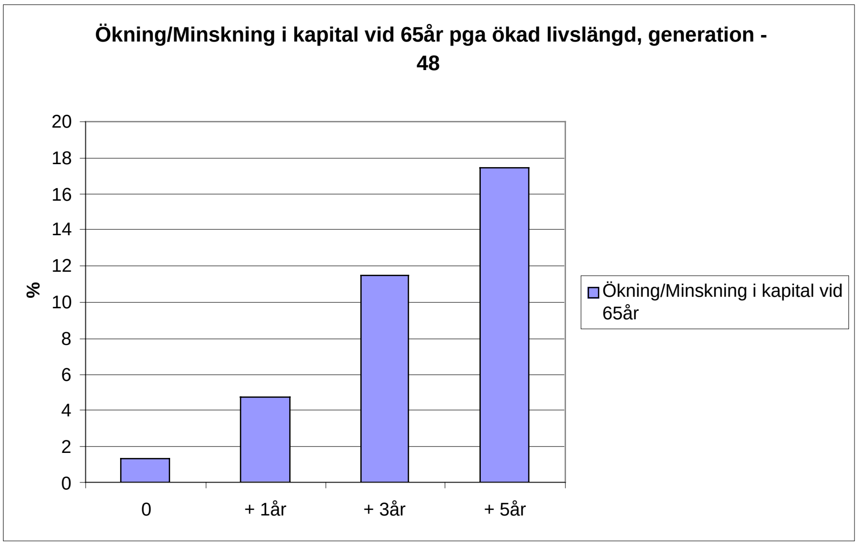


Tabell 6.5. Utbetalning i % för pensionär 2013

	Utbetalning vid 4 åldrar:			
	65	75	85	95
	100	99	94	104
+ 1år	100	98	88	80
+ 3år	100	95	79	53
+ 5år	100	93	74	39

Från denna tabell kan man avläsa att om den återstående livslängden skulle öka med ett år (för en som går i pension 2003) innebär det att PPM bör göra en ändring av sin prognos innan pensionären ska fylla 85 dvs. år 2033 (Exakt så är det år 2032 sparare får en utbetalningsminskning större än 10 %). Om den återstående livslängden ökar med 3 respektive 5 år behövs det, på samma sätt, göras en ny prognos innan 2033 (Exakt så sker första utbetalningsminskningen som är större än 10 % år 2028 respektive 2026). Här kan det också vara intressant att se hur mycket mer initialt kapital pensionärer behöver vid 65 år.

Figur 6.13. Ökning i kapital vid 65



En ökning med 5 år innebär att premiepensionsspararna (som går i pension 2013) tillsammans hade behövt nästan 8 663 Mkr (för att kunna hålla senare utbetalningar konstant lika med den första) istället för de nu 7 378 Mkr de hade tillsammans vid 65års ålder (17 % mer).

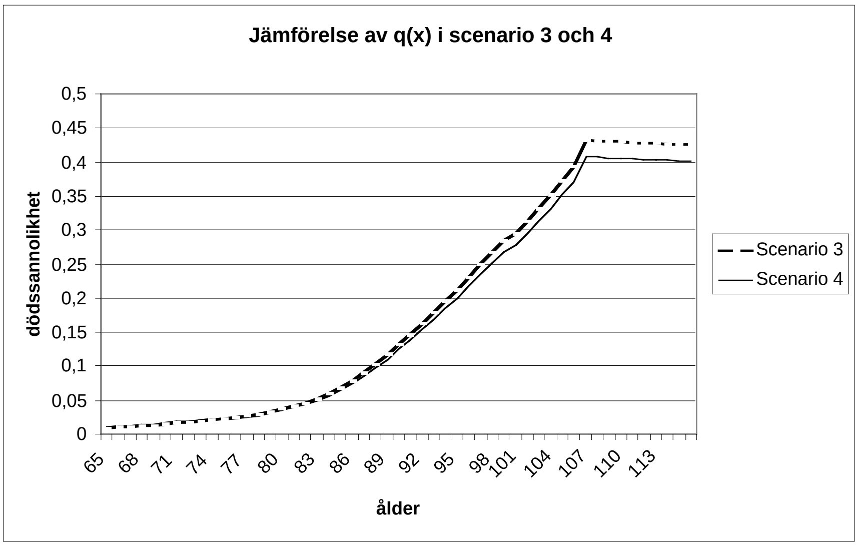
Slutsatser: PPM: s prognos har en sådan hållbarhet att för den generation som går i pension år 2003 skulle man klara en ökning i återstående livslängd med 1 år i 30 år. En ökning i återstående livslängd med 3 respektive 5 år skulle innebära, att man skulle kunna ha kvar denna prognos i 20 år.
Om man istället är intresserad av hållbarheten av PPM: s prognos för den senare generationen som går i pension 2013 så innebär en ökning med 1 år att prognosen är hållbar till 2032.

Ökning med 3 respektive 5 år ger första utbetalningsminskningen större än 10 % år 2028 respektive 2026.

6.4 SCENARIO 4. VERKLIG DÖDLIGHET ENLIGT VARIANT 2 AV SCB

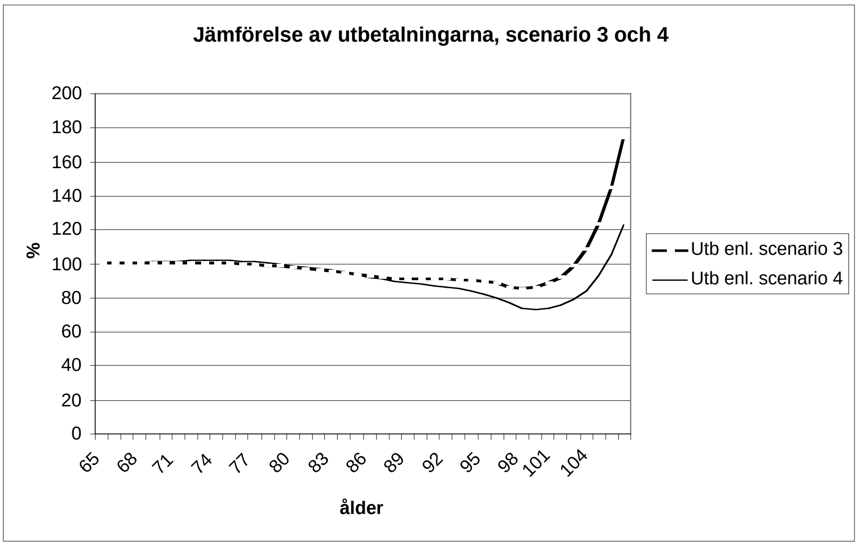
Jag väljer att bara titta på generationen som går i pension 2003 då jag vill jämföra med scenario 3. Vad händer med en pensionärs utbetalningar om hans förväntade återstående medellivslängd ökar med 1år?
Börjar först med att jämföra q(x)-kurvorna, i både scenarierna.

Figur 6.14. Jämförelse av q(x) i scenario 3 och scenario 4



Fram till 75 års ålder, går *q(x)* som togs fram i scenario 3 under den från scenario 4, efter 75 års ålder lägger sig *q(x)* från scenario 3 över. (Naturligt då jag i scenario 3 multiplicerar alla dödsrisker med 0,88 och i scenario 4 multipliceras dödsrisker efter 2013 (ålder 75 för en som går pension 2003) med 0,83). Nästa steg blir att jämföra utbetalningarna:

Figur 6.15. Jämförelse av utbetalningarna i scenario 3 och scenario 4



Tabell 6.6. Utbetalningarna i %

	Utbetalning vid 4 åldrar			
	65	75	85	95
2003 (Scenario 3)	100	100	94	90
2003 (Scenario 4)	100	102	93	83

Jag kan här konstatera att utbetalningarna skiljer sig åt. Skulle den förväntade återstående livslängden ökas med ett år enligt metoden i scenario 4 skulle PPM bli tvungna att ändra sin prognos före år 2026 (för att premiepensionsspararna ska slippa en utbetalningssänkning på mer än 10 %). Jämför detta med resultatet i scenario 3 då de behövde göra en ny prognos före år 2033.

Slutsats: Den återstående livslängden ökas med ett år i båda fallen, men i och med att ökningen görs på två olika sätt innebär det olika resultat för premiepensionsspararnas utbetalningar. Men gemensamt för båda dessa scenarier är att PPM: s prognos håller i minst 20 år, framöver om verkligheten utvecklas enligt SCB: s prognos.

6.5 SCENARIO 5. ANPASSNING AV SCB: S *Q(X)* TILL MAKEHAM

Vi vill anpassa en $\mu(x)$-kurva till SCB: s ettåriga dödsrisker *q(x)* för generationen som går i pension 2003. Detta för att visa att SCB: s ettåriga dödsrisker kan anpassas ungefärligt med en Makeham.

Allmän livförsäkringsmatematik säger att

$$q(x) = 1 - \frac{l(x+1)}{l(x)} = 1 - e^{-\int_x^{x+1} \mu(t)dt} = 1 - e^{-\int_0^1 \mu(x+t)dt} = 1 - e^{-(a + \frac{b}{c} e^{cx}(e^c - 1))} \qquad (1)$$

[sista likheten i formeln ovan fås från Makeham $\mu(x+\theta) = a + b \cdot e^{c(x+\theta)}$]

Enl. formel (3.3) s. 30 i kompendiet *Livförsäkringsmatematik* är

$$-\ln(1-q(x)) \cong \mu(x+\frac{1}{2})$$

Vi vill här försöka hitta en approximation som är bättre än denna. Vi vill hitta ett θ som uppfyller

$$-\ln(1-q(x)) \cong \mu(x+\theta)$$

Denna formel kan skrivas om som

$$q(x) = 1-e^{-\mu(x+\theta)} = 1-e^{-(a+b\cdot e^{c(x+\theta)})} \qquad (2)$$

[sista likheten i formeln ovan fås från Makeham $\mu(x+\theta) = a + b\cdot e^{c(x+\theta)}$]

Vi söker θ genom att sätta (1)=(2)

$$1-e^{-(a+\frac{b}{c}\cdot e^{cx}(e^{c}-1))} = 1-e^{-(a+b\cdot e^{c(x+\theta)})}$$

Detta ger

$$\theta = \frac{\ln(\frac{1}{c}(e^{c}-1))}{c}$$

Vi vill nu hitta a, b och c-värden som minimerar skillnaden i nedanstående likhet

$$\mu(x+\theta) = \ln\frac{1}{1-q(x)} \qquad \text{[omskrivning av (2)]}$$

Dessa a, b och c-värden ger då den bästa anpassningen av $q(x)$ till $\mu(x)$

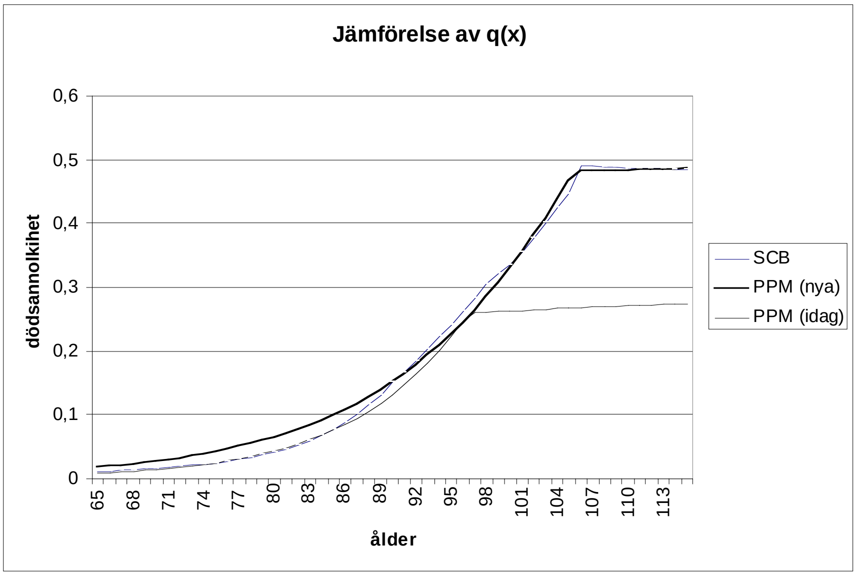
$\mu(x) = a + b\cdot e^{cx}$ där *x* = ålder

Värden som minimerade skillnaden blev:
a= 0
b= 0,0000476
c= 0,0899 ger θ *= 0,504*

Väljer också att använda den modifierade Makehammodellen med
w= 106
k= 0,001
(Anledningen till att w sätts lika med 106 är att för åldrar över 106 antar SCB samma dödsrisk)

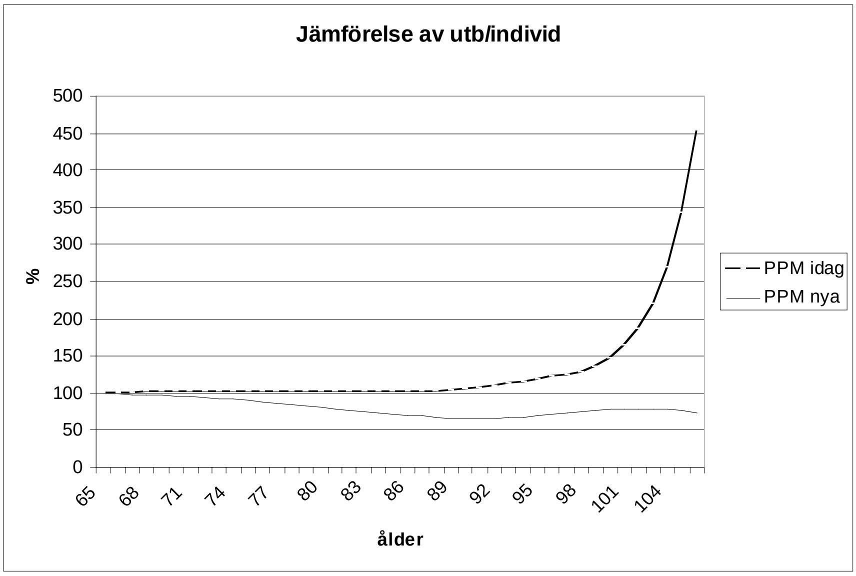
Från denna $\mu(x)$ räknas *q(x)* fram och en jämförelse mellan *q(x)* enligt SCB, *q(x)* enligt PPM:s värden idag och *q(x)* enligt dessa nya värden (PPM nya) görs (allt för den generationen som går i pension 2003). Se Figur 6.16.

Figur 6.16



Man ser från Figur 6.16 att den nya skattningen ger en *q(x)*-kurva som först ligger över SCB:s *q(x)* och sen efter ålder 90 lägger sig under. Det är svårt att, med hjälp av Makeham och minimering, ta fram en q(x)-kurva som stämmer överens, för alla åldrar, med SCB:s.
Den q(x)-kurvan som skapas med hjälp av de nya värdena ser ut att ligga närmare SCB:s q(x)-kurva än den som skapats med de gamla värdena. Betyder det att vi nu hittat en $\mu(x)$-kurva som ger bättre resultat för premiepensionsspararna?
Nästa steg blir då att titta på utbetalningarna då vi använder dessa värden i PPM:s dödlighetsprognos: (vid uträkning av delningstal). Utbetalningarna ser ut som följer:

Figur 6.17. Jämförelse av utbetalningarna enligt dagens värden och enligt de nya.



Tabell 6.7. Utbetalningarna i %

	Utbetalning vid 4 åldrar			
	65	75	85	95
PPM idag (2003)	100	102	101	119
PPM nya (2003)	100	90	72	69

Utbetalningarna enligt den nya Makeham ser enligt Figur. 6.16 ”konstantare” ut, men i tabell 6.7 visar det sig att om PPM skulle använda sig av de nya värden skulle de vara tvungna att göra en utbetalningssänkning större än 10% innan år 2013

Slutsats: Försöket att hitta en q(x)-kurva som stämmer bra överens (för alla åldrar) med SCB:s visade sig vara svårt. Vi hittade en kurva som ligger närmare SCB:s, men den ger inte bättre resultat för premiepensionsspararna då dessa får utbetalningssänkningar (större än 10 % från den första utbetalningen). Detta eftersom q(x)-kurvan ligger över SCB:s (för de åldrar då flest lever) och man antagit att fler dör än vad i verkligen gör. Fler människor ska dela på kohortens gemensamma kapital och därför måste utbetalningarna sänkas!

7. SAMMANSTÄLLNING AV RESULTAT OCH SLUTSATSER

Jag vill börja med att påpeka att PPM inte kan använda sig av slutsatserna som drogs i kapital 6 rakt av, då det system jag byggt är lite förenklat jämfört med hur det fungerar i verkligheten. Men det ger ändå indikationer om vad som kan komma att hända. Det är också viktigt att påpeka att alla resultat är grundade på att SCB:s prognos om den framtida dödligheten stämmer. SCB:s prognos är självklart inte felfri då ingen kan förutspå vad som kommer att ske med dödligheten i framtiden, men den och varianter av den får duga som mått på den framtida dödligheten.

Om man börjar med att titta på resultaten för de kohorter som går i pension den närmaste tiden så såg man att PPM:s *q(x)*-kurva stämmer bra för åldrar upp till 85 år. Skulle PPM välja anta de delningstal de använder idag för kommande år skulle detta att gå bra för de 15 första generationer, förutom att de som dör tidigt (i de första sju kohorterna) får ut för lite jämfört med vad de skulle fått ut om en perfekt prognos hade gjorts. Anledningen till att de får ut för lite är den stora säkerheten i PPM:s prognos för höga åldrar. Denna säkerhet antas då det finns lite statistik om dödligheten i höga åldrar.

PPM har en säkerhet i sin prognos som gör att man skulle klara en rimlig ökning i förväntad återstående livslängd. Ett års ökad förväntad livslängd (för en 65-åring 2003) kan antas som en rimlig ökning (Den ändring innebär att SCB:s dödlighetsprognos är för ”snäll”, den förväntade återstående livslängden är ett år längre än vad SCB förutspått). Skulle en sådan ökningen inträffa skulle PPM:s prognos hålla, i det avseendet att man inte skulle behöva göra någon utbetalningsminskning större än 10 %. Däremot om SCB har gjort större fel så att den förväntade återstående livslängden ökar med 3 eller 5 år så skulle premiepensionsspararna att drabbas av utbetalningssänkningar större än 10 % inom 20 år.

Att PPM skulle ha samma prognos i 20 år är inte rimligt att anta då det kommer ut ny statistik om den framtida dödligheten årligen och man i sin dödlighetsprognos bör ta hänsyn till denna. Men i teorin skulle PPM kunna ha samma prognos i minst 20 år, då inga utbetalningsminskningar (större än 10%) sker inom denna tidsram (inte ens om den förväntade återstående livslängden ökar med 5år).

Scenario 4 visade också att en ökning i förväntad återstående livslängd med ett år påverkar premiepensionsspararnas utbetalningar olika beroende på hur ökningen (i vilka åldrar) sker. I scenario 3 påverkades dödsrisken för alla åldrar (för generationen 2003) och i scenario 4 påverkades dödsrisken för åldrar från 75 år, ökningen blev densamma men inte resultatet för de framtida premiepensionsutbetalningarna.

Det sista scenariot (Scenario 5) väckte tankar om huruvida antagandet om Makeham är det bästa för att skatta dödligheten. Är det verkligen så att dödlighetsintensiteten ökar exponentiellt? Till åldrar runt 85 år går det att hitta en $\mu(x)$-kurva som stämmer bra. Se figur 5.2. Men vill man hitta en $\mu(x)$-kurva som stämmer bra i alla åldrar visar det sig svårt. I scenario 5 hade vi mycket svårt att minimera oss fram till en $\mu(x)$-kurva (enligt Makeham) som stämmer bra för alla åldrar. Minimeringen gav till slut en *q(x)* som ligger över SCB:s *q(x)* i åldrar fram till 85 därefter lägger sig den *q(x)* under.
En lösningen kan vara att ta fram två $\mu(x)$-skattningar en för åldrar mellan 65 och 85 och en för åldrar över 85. Men då uppstår istället problem när delningstalen ska bestämmas. Idag är det lätt att gå från $\mu(x) \Rightarrow l(x) \Rightarrow D(x) \Rightarrow A(x)$ (delningstalet). Men införs det två olika $\mu(x)$-kurvor innebär det komplikationer då delningstalen ska bestämmas. Här återkommer även samma problem angående dödligheten i höga åldrar. Bör man lägga stor vikt på att ta fram en bra skattning för dödligheten i höga åldrar då det finns så lite statistik för dessa? På PPM antar man efter ålder 97 en linjär ökning i dödlighetsintensiteten, det känns mer rimligt än en exponentiell ökning då det finns lite statistik om dödlighet i höga åldrar. Man ska också ta hänsyn till att det är viktigast att ta fram en $\mu(x)$ som stämmer bra för åldrar upp till 85 år då det är i dessa åldrar det finns flest människor och de har mycket pengar kvar på sina konton.

Slutligen kan också påpekas att premiepensionssystemet är ett system under uppbyggnad och att de människor som hittills är under utbetalningstid inte har så mycket pengar på sina konton(de har största delen av sina pensionspengar i det gamla systemet).

8. KÄLLFÖRTECKNING

Björn Ajne, Jan Ohlin: *Livförsäkringsmatematik*, Kompendium (1990)

Statistiska centralbyrån: *Sveriges framtida befolkning, befolkningsframskrivning för åren 2003-2050*, (2003)

Statistiska centralbyrån: *Statistisk Årsbok för Sverige 2003*, (2002)

Lars Bergelv: *Livförsäkringsteknik*, (1990)

A. APPENDIX

A.1 EXCEL-PROGRAMMETS UPPBYGGNAD

Programmet består av följande blad:
- Q(x)-matris, verklig
- Q(x)-matris, del
- Q(x)-matris, arv
- Antal försäkrade
- Försäkringstagarnas kapital
- FOLO:s kapital
- Frigjord risksumma
- Arvsvinst
- Delningstalet
- Utbetalning

BLAD 1:
Q(x)-matris-verklig

Här finns de ettåriga dödsriskerna från SCB:s prognoser om framtida dödlighet. Används för att räkna fram antal kvarvarande försäkrade och för att räkna ut årlig frigjord risksumma. I denna matris finns även 10 ändringsbara α -värden som beror på ålder, 10 ändringsbara β -värden som beror på kohortår och 3 ändringsbara γ -värden som beror på kalenderår.

α_1 för 65-69 år	β_1 för pensionsår 2003-2007	γ_1 för år 2003-2012
α_2 för 70-74 år	β_2 för pensionsår 2008-2012	γ_2 för år 2013-2022
…	…	γ_3 för år 2023-2103
α_{10} för 110-115 år	β_{10} för pensionsår 2048-2053	

Med hjälp av dessa parametrar kan vi variera SCB:s ettåriga dödsrisker, både för olika åldrar och för olika kalenderår.

q(x) verklig						
(Q)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	q(65,2003) α_1 β_1 γ_1	q(66,2004) α_1 β_1 γ_1			q(115,2053) α_{10} β_1 γ_3
2	2004	q(65,2004) α_1 β_1 γ_1	q(66,2005) α_1 β_1 γ_1			q(115,2054) α_{10} β_1 γ_3
..						
..						
50	2053	q(65,2053) α_1 β_{10} γ_3	q(66,2054) α_1 β_{10} γ_3			q(115,2103) α_{10} β_{10} γ_3

BLAD 2 och 3:
Q(x)-matris, del- och arv

Dödsriskerna i dessa matriser används vid uträkning av arvsvinster och delningstal.

För att få fram de ettåriga dödsriskerna, $q_{arv}(x)$, $q_{del}(x)$ räknar vi först ut , $\mu_{arv}(x)$, $\mu_{del}(x)$ och sedan $l_{arv}(x)$, $l_{del}(x)$.
Anm: För PPM är $q_{arv}(x) = q_{verklig}(x)$ och för Folksam $q_{arv}(x) = q_{del}(x)$. (Se jämförelse mellan jämförelse mellan PPM och Folksam)

Ändringsbara parametrar för $\mu(x)$:

a=
b=
c=
w=97 (PPM: ålder då makeham kurvan rätas ut, för Folksam sätts w=150)
k=0,001 (riktningskoefficient för utplanad makehamkurva)

Följande formler används:

$$\mu(x) = \begin{cases} a + b \cdot e^{cx} & \text{för } x \le w \\ \mu(w) + k(x-w) & \text{för } x \ge w \end{cases}$$

$$l(x) = e^{-H(x)}$$

$$H(x) = \begin{cases} ax + \frac{b}{c}\ (e^{cx} - 1) & \text{för } x \le w \\ H(w) + \mu(w)(x-w) + \frac{k}{2}(x-w)^2 & \text{för } x \ge w \end{cases}$$

$$q(x) = 1 - \frac{l(x+1)}{l(x)}$$

Nedanstående matris finns i två upplagor, Q_{arv} och $Q_{del.}$.
Exempelvis så är Q(1:1)= $q(65) = 1 - \frac{L(1:2)}{L(1:1)} = 1 - \frac{l(66)}{l(65)}$

q(x)						
(Q1)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	q(65)	q(66)			q(115)
2	2004	q(65)	q(66)			q(115)
..						
..						
50	2053	q(65)	q(66)			q(115)

l(x)						
(L)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	l(65)	l(66)			l(115)
2	2004	l(65)	l(66)			l(115)
..						
..						
50	2053	l(65)	l(66)			l(115)

my(x)						
(MY)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	$\mu(65)$	$\mu(66)$			$\mu(115)$
2	2004	$\mu(65)$	$\mu(66)$			$\mu(115)$
..						
..						
50	2053	$\mu(65)$	$\mu(66)$			$\mu(115)$

BLAD 4:
<u>Antal försäkrade</u>

Här behövs indata på antal försäkrade i varje årskull vid 65:
Antal = [ant38, ant39, ant40, ant41,……..,ant88]

= vektor bestående av antal försäkrade som är födda 1938,1939 o.s.v.

För att räkna ner antalet använder vi oss av den verkliga dödligheten tagen från SCB.

Antal försäkrade						
(A)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	ant38	A(1:1)*(1-Q(1:1))			A(1:49)*(1-Q(1:49))
2	2004	ant39	A(2:1)*(1-Q(2:1))			A(2:49)*(1-Q(2:49))
..						
..						
50	2053	ant88	A(50:1)*(1-Q(50:1))			A(50:49)*(1-Q(50:49))

BLAD 5:
<u>Försäkringstagarnas kapital</u>

Här behövs indata på kapitalet för varje årskull vid 65:

Kapital = [kap38, kap39,kap40, kap41,…….,kap88]

Ändringsbara parametrar:
Ränta(r)=
Driftskostnad(dk)=

Kapital						
(K)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	K(1:1)	K(1:2)			K(1:50)
2	2004	K(2:1)	K(2:2)			K(2:50)
..						
..						
50	2053	K(50:1)	K(50:2)			K(50:50)

K(1,1)= kap38
K(1,2)=(K(1:1)-U(1:1)-rsa(1:1)+arv(1:1))*(1+r-dk)
K(1,3)=(K(1,2)-U(1:2)-rsa(1:2)+arv(1:1))*(1+r-dk)
…
…
K(50,50)=(K(50:49)-U(50:49)-rsa(50:49)+arv(50:49))*(1+r-dk)

Det som händer under ett år är således följande:
Kapital i början av året
-utbetalning
-frigjord risksumma
+arvsvinster
+avkastning
-driftskostnad
= Kapital i slutet av året = Kapitalet i början av nästa år

BLAD 6:
FOLO:s kapital

Här ser vi hur bolagets kapital utvecklas med tiden.

FOLO:s kapital						
(FK)		1	2	..	..	50
	År/ålder	65	66			115
1	2003	FK(1:1)	FK(1:2)			FK(1:50)
2	2004	FK(2:1)	FK(2:2)			FK(2:50)
..						
..						
50	2053	FK(50:1)	FK(50:2)			FK(50:50)

FK(1:1)= (R(1:1)-Arv(1:1))*(1+r-dk)
FK(1:2)= (R(1:2)-Arv(1:2))*(1+r-dk)
…
FK(50:50)= (R(50:50)-Arv(50:50))*(1+r-dk)

Här redovisas förluster/vinster årsvis

Resultat årsvis						
	2003	2004	2005	.	.	2053
	FK(1:1)	FK(1:2)	FK(1:3)			FK(1:50)
	0	FK(2:1)	FK(2:2)			FK(2:50)
		0	FK(3:1)			FK(3:50)
	…	…	…	.	.	…
Summa:	FK(1:1)	FK(1:2)+FK(2:1)	FK(1:3)+FK(2:2)+FK(3:1)			FK(1:50)+..+FK(50:50)

BLAD 7:
Frigjord risksumma

Här tas kapitalet gånger den verkliga dödligheten för att få fram den årliga risksumman.

Risksumma						
(R)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	(K(1:1)-U(1:1))*Q(1:1)	(K(1:2)-U(1:2))*Q(1:2)			(K(1:50)-U(1:50))*Q(1:50)
2	2004	(K(2:1)-U(2:1))*Q(2:1)	(K(2:2)-U(2:2))*Q(2:2)			(K(2:50)-U(2:50))*Q(2:50)
..						
..						
50	2053	(K(50:1)-U(50:1))*Q(50:1)	(K(50:2)-U(50:2))*Q(50:2)			(K(50:50)-U(50:50))*Q(50:50)

BLAD 8:
Arvsvinst

Arvsvinsten räknas ut på samma sätt som för den frigjorda risksumman fast här multipliceras kapitalet med en skattad dödlighet, $\frac{q(x)}{1-q(x)}$

Arvsvinst						
(Arv)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	Arv(1:1)	Arv(1:2)			Arv(1:50)
2	2004	Arv(2:1)	Arv(2:2)			Arv(2:50)
..						
..						
50	2053	Arv(50:1)	Arv(50:2)			Arv(50:50)

Arv(1:1)= (K(1:1)-U(1:1)-R(1:1))*Q1(1:1)/(1-Q1(1:1))
Arv(1:2)= (K(1:2)-U(1:2)-R(1:2))*Q1(1:2)/(1-Q1(1:2))
…

Arv(50:50)= (K(50:50)-U(50:50)-R(50:50))*Q1(50:50)/(1-Q1(50:50)

BLAD 9:

<u>Delningstalet</u>

Delningstal $= \dfrac{N(x)}{D(x)}$ där $N(x) = \sum_{k=x}^{\omega} D(k)$

Med ränta: $D(x) = \dfrac{l(x)}{(1+r-dk)^x}$

Delningstal						
(Del)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	Del(1:1)	Del(1:2)			Del(1:50)
2	2004	Del(2:1)	Del(2:2)			Del(2:50)
..						
..						
50	2053	Del(50:1)	Del(50:2)			Del(50:50)

Del(1:1)= $\dfrac{D(1:1)+D(1:2)+...+D(1:50)}{D(1:1)}$

Del(1:2)= $\dfrac{D(1:2)+...+D(1:50)}{D(1:2)}$

D(x)						
(D)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	$L(1:1)$ /(1+r-dk)^65	$L(1:2)$ /(1+r-dk)^66			$L(1:50)$ /(1+r-dk)^115
2	2004	$L(2:1)$ /(1+r-dk)^65	$L(2:2)$ /(1+r-dk)^66			$L(2:50)$ /(1+r-dk)^115
..						
..						
50	2053	$L(50:1)$ /(1+r-dk)^65	$L(50:2)$ /(1+r-dk)^66			$L(50:50)$ /(1+r-dk)^115

BLAD 10:

<u>Utbetalning</u>

Här får vi fram utbetalat belopp per år.

Utbetalning $u_t = \dfrac{k_t}{d_t}$

Utbetalning						
(U)		1	2	..	..	50
	år/ålder	65	66			115
1	2003	K(1:1)/Del(1:1)	K(1:2)/Del(1:2)			K(1:50)/Del(1:50)
2	2004	K(2:1)/Del(2:1)	K(2:2)/Del(2:2)			K(2:50)/Del(2:50)
..						
..						
50	2053	K(50:1)/Del(50:1)	K(50:2)/Del(50:2)			K(50:50)/Del(50:50)

Utbetalning per individ

Vi delar utbetalat belopp på antal levande.

Utbetalning/individ						
(Ui)		1	2	..	..	50
	pensionsår/ålder	65	65			115
1	2003	U(1:1)/A(1:1)	U(1:2)/A(1:2)			U(1:50)/A(1:50)
2	2004	U(2:1)/A(2:1)	U(2:2)/A(2:2)			U(2:50)/A(2:50)
..						
..						
50	2053	U(50:1)/A(50:1)	U(50:2)/A(50:2)			U(50:50)/A(50:50)

A.2 SCB:S ÅRLIGA PROCENTREDUKTION AV DÖDSRISKER

Dödsrisker (per 1000) för år 2003 efter kön och ålder vid årets slut

Ålder	Kvinnor	Män
65	7,83	13,20
66	8,72	14,60
67	9,63	16,19
68	10,56	18,16
69	11,66	20,26
70	13,01	22,51
71	14,38	25,07
72	15,85	27,92
73	17,52	30,91
74	19,52	34,06
75	21,96	37,73
76	24,69	42,14
77	27,95	47,05
78	31,90	52,61
79	36,68	58,69
80	42,02	65,36
81	47,75	73,09
82	53,89	82,21
83	60,78	92,50
84	69,16	103,80
86	91,37	130,41
87	104,26	145,30
88	118,02	160,61
89	132,69	177,09
90	149,11	195,16
91	165,59	214,03
92	183,94	235,85
93	203,61	257,16
94	223,55	277,01
95	243,56	298,47
96	263,98	320,93
97	285,19	341,63
98	305,19	360,45
99	324,41	379,42
100	336,38	396,92
101	358,12	419,87
102	380,51	443,49
103	403,56	467,82
104	427,30	492,89
105	451,66	518,73
106+	499,50	558,44

Årlig reduktion av dödsriskerna. Procent

Ålder		Kvinnor			Män	
	2004-2015	2019-2035	2039-2050	2004-2015	2019-2035	2039-2050
65	-1,40	-1,05	-0,70	-2,25	-1,69	-1,13
66	-1,40	-1,05	-0,70	-2,20	-1,65	-1,10
67	-1,40	-1,05	-0,70	-2,15	-1,61	-1,08
68	-1,40	-1,05	-0,70	-2,10	-1,58	-1,05
69	-1,40	-1,05	-0,70	-2,05	-1,54	-1,03
70	-1,40	-1,05	-0,70	-2,00	-1,50	-1,00
71	-1,40	-1,05	-0,70	-2,00	-1,50	-1,00
72	-1,40	-1,05	-0,70	-2,00	-1,50	-1,00
73	-1,40	-1,05	-0,70	-2,00	-1,50	-1,00
74	-1,40	-1,05	-0,70	-2,00	-1,50	-1,00
75	-1,40	-1,05	-0,70	-2,00	-1,50	-1,00
76	-1,40	-1,05	-0,70	-2,00	-1,50	-1,00
77	-1,40	-1,05	-0,70	-2,00	-1,50	-1,00
78	-1,40	-1,05	-0,70	-2,00	-1,50	-1,00
79	-1,40	-1,05	-0,70	-2,00	-1,50	-1,00
80	-1,40	-1,05	-0,70	-1,86	-1,39	-0,93
81	-1,40	-1,05	-0,70	-1,72	-1,29	-0,86
82	-1,40	-1,05	-0,70	-1,57	-1,18	-0,79
83	-1,40	-1,05	-0,70	-1,43	-1,07	-0,72
84	-1,35	-1,01	-0,68	-1,29	-0,97	-0,65
85	-1,20	-0,90	-0,60	-1,15	-0,86	-0,57
86	-1,05	-0,79	-0,53	-1,01	-0,75	-0,50
87	-0,90	-0,68	-0,45	-0,86	-0,65	-0,43
88	-0,75	-0,56	-0,38	-0,72	-0,54	-0,36
89	-0,60	-0,45	-0,30	-0,58	-0,44	-0,29
90	-0,50	-0,38	-0,25	-0,44	-0,33	-0,22
91	-0,46	-0,35	-0,23	-0,39	-0,30	-0,20
92	-0,42	-0,32	-0,21	-0,35	-0,26	-0,18
93	-0,38	-0,29	-0,19	-0,31	-0,23	-0,15
94	-0,36	-0,27	-0,18	-0,26	-0,20	-0,13
95	-0,34	-0,26	-0,17	-0,22	-0,16	-0,11
96	-0,30	-0,23	-0,15	-0,17	-0,13	-0,09
97	-0,26	-0,20	-0,13	-0,13	-0,10	-0,07
98	-0,22	-0,17	-0,11	-0,10	-0,08	-0,05
99	-0,20	-0,15	-0,10	-0,10	-0,08	-0,05
100	-0,18	-0,14	-0,09	-0,10	-0,08	-0,05
101	-0,16	-0,12	-0,08	-0,10	-0,08	-0,05
102	-0,14	-0,11	-0,07	-0,10	-0,08	-0,05
103	-0,12	-0,09	-0,06	-0,10	-0,08	-0,05
104	-0,10	-0,08	-0,05	-0,10	-0,08	-0,05
105	-0,10	-0,08	-0,05	-0,10	-0,08	-0,05
106	-0,10	-0,08	-0,05	-0,10	-0,08	-0,05

Dödsriskerna för åren 2004–2015 fås genom att dödsriskerna årligen reduceras med den procent som anges i tabellen för respektive år. (kedje-multiplikation).Under övergångsåren 2015–2019 och 2035–2039 interpoleras reduktionstalen linjärt mellan 2015 och 2019 och 2035 och 2039.

A.3 INDATA

Pensioneringsår	65-åringarnas tillgodohavande (Mkr)	Antal 65-åringar (tusental)
2003	279	126
2004	486	126
2005	746	125
2006	1169	122
2007	1733	120
2008	2435	118
2009	3263	117
2010	4186	116
2011	5193	115
2012	6243	114
2013	7378	113
2014	8528	112
2015	9705	112
2016	10982	113
2017	12569	115
2018	14251	117
2019	16005	120
2020	17253	123
2021	18545	126
2022	19842	129
2023	21181	131
2024	22703	132
2025	24326	131
2026	26281	129
2027	28459	127
2028	30922	124
2029	33548	121
2030	35709	118
2031	37806	115
2032	39581	113
2033	41015	112
2034	42417	111
2035	44091	111
2036	45806	112
2037	47281	113
2038	48517	114
2039	49589	115
2040	50169	116
2041	50478	117
2042	50820	118
2043	51384	118
2044	52142	119
2045	53042	120
2046	54046	121
2047	55145	122
2048	56439	122
2049	58047	123
2050	59976	124
2051	59976	124
2052	59976	124
2053	59976	124