Matematisk statistik
Stockholms universitet

Asset and Liability Management för ett sakförsäkringsbolag

Niklas Svensson

Examensarbete 2003:2

Postadress:

Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm
Sverige

Internet:

http://www.math.su.se/matstat

Matematisk statistik
Stockholms universitet
Examensarbete **2003:2**,
http://www.math.su.se/matstat

Asset and Liability Management för ett sakförsäkringsbolag

Niklas Svensson*

Februari 2003

Abstract

We consider Asset and Liability Management (ALM) for a non-life insurance company. ALM is a tool for strategic allocation that aims to show how different allocations affect the result in the annual accounts. For this purpose we determine the probability distribution of the result and its percentiles at various levels. We consider two different procedures: simulation of the distribution and approximation with the normal distribution.

The methods are applied to data from the Swedish insurance company Länsförsäkringar Skåne. The calculations show that the company even in a worst case has good margins for its liabilities.

We also investigate the contribution of different factors to the the variance of the result. For Länsförsäkringar Skåne it is the capital return that contributes the most: the standard deviation for the return is more than three times larger than the standard deviation for the claims.

Sammanfattning

Detta arbete behandlar Asset and Liability Management (ALM) för ett sakförsäkringsbolag. ALM ar ett verktyg för strategisk allokering som syftar till att visa hur olika allokeringar påverkar resultatet i bokslutet. För detta ändamål vill man bestämma sannolikhetsfördelningen för resultatet och beräkna percentiler på olika nivåer. Vi utreder två olika tillvägagångssätt för detta: simulering av fördelningen respektive approximation med normalfördelningen.

Metoderna tillämpas på data från Länsförsäkringar Skåne. Beräkningarna visar att bolaget även i ett värsta fall har goda marginaler att klara sina försäkringsåtaganden (hög konsolideringsgrad).

Vi undersöker också de olika faktorernas bidrag till variabiliteten i resultatet. För Länsförsäkringar Skåne är det kapitalavkastningen som bidrar mest: standardavvikelsen för avkastningen är mer än tre gånger så stor som standardavvikelsen för ersättningskostnaden.

*E-post: nsv@spray.se. Handledare: Esbjörn Ohlsson.

Förord

Detta arbete utgör ett 20 poängs examensarbete i matematisk statistisk och har utförts på Länsförsäkringar Kapitalförvaltning AB (är numera avvecklat) i Stockholm.

Upptakten till arbetet var ett förslag från Andreas Hansen, då analytiker på LF Kapital-förvaltning AB, att som examensarbete vidareutveckla en befintlig modell för Asset and Liability Management för att kunna användas på de regionala länsförsäkringsbolagen.

Analysen i föreliggande arbete är att se som en pilotstudie och avser Länsförsäkringar Skåne. För att skydda Länsförsäkringars intressen har dock de numeriska värdena modi-fierats.

Stort tack till Andreas Hansen, min handledare på LF Kapitalförvaltning AB, som har gett mig möjligheten att utföra detta arbete. Stort tack även till Esbjörn Ohlsson, min handledare på matematiska institutionen vid Stockholms Universitet, som har hjälpt till i processen med detta arbete. Slutligen tack till Håkan Pramsten, aktuarie vid avdelning-en för Försäkringsekonomi på Länsförsäkringar Sak AB, som bidragit med nödvändiga datamaterial.

Innehåll

1 Inledning

1.1 Asset and Liability Management

Asset and Liability Management (ALM) är ett verktyg för *strategisk allokering* vid ett försäkringsbolag. Med strategisk allokering menas hur fördelningen av bolagets kapital skall göras mellan olika tillgångar. Grundläggande för ALM är att det är en framåtblickande process och i detta arbete är tidshorisonten satt till ett år.

Vilken allokering bolaget ska välja beror på flera saker. Vilka riskpreferenser har bolaget? Hur är försäkringsrörelsens stabilitet, ger den stora avvikande utfall från år till år? Hur riskfyllda är olika placeringstillgångar? Den strategiska allokeringen påverkar i hög grad nästa års *resultaträkning*, vilket i sin tur påverkar försäkringsrörelsen. En starkt resultaträkning ger utrymme för sänkningar av premierna medan en svag resultaträkning kan resultera i höjda premier.

ALM ska visa hur olika allokeringar påverkar resultaträkningen, och därigenom fungera som ”vägledning” för beslutsfattare vid försäkringsbolaget. ALM är tillämpbart både på livförsäkringsbolag och sakförsäkringsbolag, i detta arbete behandlas dock enbart ALM för sakförsäkringsbolag.

Något förenklat kan resultatet beräknas enligt

$$\textit{resultat} = \textit{premieintäkt} + \textit{kapitalavkastning} - \textit{ersättningskostnad} - \textit{driftskostnad} \quad (1.1)$$

och det är denna modell som kommer att tillämpas i denna studie. Premieintäkten är den del av premieinkomsten som avser räkenskapsåret. Premieinkomsten i sin tur är de premier försäkringstagarna betalar in under året. Kapitalavkastningen är den vinst/förlust som genereras i och med att värdet på tillgångarna förändras med tiden. Ersättningskostnaden är det belopp som bolaget betalar ut till sina kunder för de skador de drabbas av under räkenskapsåret inklusive avsättningar för okända respektive ej slutbetalda skador. Driftskostnaden, slutligen, är de kostnader bolaget har för administration, skadereglering m m.

1.2 Mål och metoder

Målet med detta arbete är att bestämma percentiler på olika nivåer för resultatet enligt (1.1). Av störst intresse är de lägre percentilerna som ger en bild av hur bolagets resultat kan komma att bli som sämst. För att få fram percentilerna måste sannolikhetsfördelningen för resultatet bestämmas. Sannolikhetsfördelningen för resultatet bestämms i sin tur av sannolikhetsfördelningarna för de bakomliggande variablerna: premieintäkt, kapitalavkastning, ersättningskostnad samt driftskostnad. I denna studie kommer dock endast kapitalavkastningen och ersättningskostnaden att betraktas som stokastiska variabler medan premieintäkten och driftskostnaden behandlas som deterministiska. Anledningen till att premieintäkten och driftskostnaden inte behandlas som stokastiska variabler är att de inte bedöms bidra lika mycket till osäkerheten som kapitalavkastningen och ersättningskostnaden.

Sannolikhetsfördelningarna för kapitalavkastningen och ersättningskostnaden bestäms analytiskt. Beroende på hur fördelningarna för dessa ser ut bestäms i sin tur sannolikhetsfördelningen för resultatet både analytiskt och genom simulering.

1.3 Data

Kapitalavkastningen har beräknats med hjälp av data för veckoslutkurser mellan 1999-01-08 och 2002-01-31 på de fonder som Länsförsäkringar fondförvaltning AB tillhandahåller.

För att skatta parametrarna i sannolikhetsfördelningen för ersättningskostnaden har två datamaterial används. Det ena materialet består av ersättningskostnader för enskilda skador uppdelade på de skadegrenar för vilka Länsförsäkringar Skåne ställer ut kontrakt. En observation är den bruttokostnad som träffar bolaget. Det betyder att för varje enskild ersättningskostnad är självrisken avdragen men kostnader som överstiger självbehållen medtagna. I de fall där skador inte är slutreglerade har uppskattade värden använts. Det andra materialet består av antalet kända skador som inrapporterats till bolaget. Båda datamaterialen täcker riskåren 1991-2000.

För premieintäkten och driftskostnaden används de senast kända värdena, i detta fall värdena vid bokslutet år 2001.

2 Ersättningskostnad

Den totala ersättningskostnaden kan delas upp på olika *skadegrenar* beroende på vilken slags egendom ersättningen gäller för. De skadegrenar som kommer att behandlas i detta arbete är: hem, villa, villahem, fritidshus, fastighet, lantbruk, paket, företag, affär, kombinerad, småföretag, kommun, båt, olycksfall och motorkasko. Motorkasko innefattar både delkasko och vagnskada. Då LF Skåne ej har koncession på trafikförsäkring finns sådan inte med.

Fördelningarna för skadegrenarna kommer att bestämmas var för sig. Under antagandet att grenarna är oberoende av varandra så kommer sedan fördelningen för den totala ersättningskostnaden att bestämmas. Om inget annat sägs så betraktas fortsättningsvis en godtycklig skadegren.

Den modell som kommer att användas benämns inom sakförsäkring *den kollektiva modellen* och i den bortser man från vilka försäkringstagare som drabbas av skador och betraktar endast följden av skador som drabbar skadegrenen. Om N betecknar det totala antalet skador som inträffar och X_i det ersättningsbelopp man betalar ut för skada i, så kommer ersättningen för skadegrenen att bli

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{2.1}$$

S sägs ha en *sammansatt fördelning* eftersom det är fördelningen för summan av ett stokastiskt antal stokastiska variabler.

Genomgående antar vi att $\{X_k\}$ är oberoende, likafördelade stokastiska variabler och att dessa är oberoende av den stokastiska variabeln N. Giltigheten i detta kan naturligtvis diskuteras. Oberoendet mellan N och $\{X_k\}$ känns intuitivt, hur många skador som träffar skadegrenen skall rimligen inte påverka hur stort belopp som betalas ut för en enskild skada eller vice versa. Antagandet om oberoende variabler $\{X_k\}$ kan ibland vara svårare att motivera, exempelvis vid naturkatastrofer.

De sannolikhetsfördelningar som kommer att användas i detta kapitel finns beskrivna i appendix A.1.

2.1 Fördelningar för antalet skador

De sannolikhetsfördelningar som ofta används för antalet inträffade skador, N ovan, är Poissonfördelningen och den negativa binomialfördelningen. Eftersom skador ofta inträffar en och en (undantaget naturkatastrofer) och antalet skador som inträffar under en tidsperiod inte påverkar antalet skador som inträffar under en annan tidsperiod så är villkoren för en Poissonprocess för det mesta uppfyllda. Poissonfördelningen är därför en rimlig fördelning att använda.

Det är inte ovanligt att det finns bakomliggande faktorer som påverkar intensiteten med vilken skador inträffar. Genom att betrakta parametern i Poissonfördelningen som en stokastisk variabel kan man ta hand om fluktuationer i intensiteten. Den negativa binomialfördelningen fås då man antar att parametern har en gammafördelning. Av erfarenhet har det visat sig att gammafördelningen är rimlig att använda.

2.1.1 Parameterskattningar

Som nämndes i inledningen täcker datamaterialet riskåren 1991-2000. För antalet skador betyder det att det finns tio observationer för varje skadegren. En komplikation är dock att *riskexponeringen* skiftar mellan åren, d.v.s. antalet kontrakt som försäkringsbolaget tagit på sig att täcka kostnaderna för skiftar från år till år. När parametrarna i Poissonfördelningen och den negativa binomialfördelningen skattas måste detta beaktas. Genom att skatta parametrarna då riskexponeringen är lika med ett, då endast ett kontrakt är gällande, och sedan multiplicera skattningarna med den förväntade riskexponeringen för det kommande räkenskapsåret så fås en riktig skattning av parametrarna. Som skattning på den förväntade riskexponeringen har det senast kända värdet använts, i detta fall värdet för år 2000.

Som vi skall se i nästa avdelning har parameterskattningarna för de fördelningar som kommer att behandlas där gjorts med nollskadorna bortplockade från datamaterialet. För att inte få missvisande värden på ersättningskostnaden måste nollskadorna tas bort även då parametrarna skattas här.

Låt l beteckna parametern i Poissonfördelningen. Om m betecknar parametern då exponeringen är lika med ett och w betecknar den förväntade riskexponeringen, det vill säga antalet kontrakt, så gäller det att $l = mw$. För Poissonfördelningen gäller det att maximum-likelihood-skattningen av m är (se Blom [2] sid. 72)

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{\sum_{i=1}^{10} w_i} = \frac{\bar{x}}{\bar{w}}, \qquad (2.2)$$

där x_i och w_i betecknar antalet skador respektive riskexponeringen för år i.

Låt nu a och b beteckna parametrarna i den negativa binomialfördelningen. Parametriseringen följer den som beskrivs i Johansson [4] och det gäller att $a \in R^{+}$. Om a_0 och b_0 betecknar respektive parameter då riskexponeringen är lika med ett så gäller det att $a = a_0 w$ och $b = b_0$. Att bara a_0 multipliceras med w och inte b_0 beror på att den senare är en formparameter medan den tidigare är en skalparameter. Maximum-likelihood-skattningen av a_0 fås som den numeriska lösningen till ekvationen (se appendix A.2)

$$\sum_{i=1}^{10} w_i \sum_{k=0}^{x_i - 1} \frac{1}{a_0 w_i + k} = \log\left(1 + \frac{\overline{x}}{a_0 \overline{w}}\right) \sum_{i=1}^{10} w_i \tag{2.3}$$

och maximum-likelihood-skattningen av b_0 blir därefter $\hat{b}_0 = \dfrac{\hat{a}_0 \overline{w}}{\overline{x}}$.

2.1.2 Beräknade skattningar och statistikor

Nedan redovisas två tabeller, den första för Poissonfördelningen och den andra för den negativa binomialfördelningen, med förväntad riskexponering, beräkningar av ovanstående parameterskattningar samt beräkningar av väntevärde, standardavvikelse och empirisk standardavvikelse för respektive skadegren.

Skadegren	Förväntad exponering	$\hat{l}$	Väntevärde	Standard-avvikelse	Empirisk standardavvikelse
Hem 01	65 513	6117.06	6 117	78	531
Villa 02	6 431	404.79	405	20	134
Villahem 03	41 494	6274.64	6 275	79	1193
Fritidshus 04	9 020	417.27	417	20	135
Fastighet 05	2 476	307.15	307	18	80
Lantbruk 06	14 036	2056.42	2 056	45	1152
Paket 07	1 502	199.67	200	14	23
Företag 08	2 183	63.05	63	8	26
Företag 09	770	30.75	31	6	20
Affär 11	1 336	166.38	166	13	34
Kombinerad 12	5 683	733.35	733	27	127
Småföretag 13	2 025	109.33	109	10	23
Kommun 14	83	261.54	262	16	406
Båt 20	1 716	84.30	84	9	19
Olycksfall 30	36 911	1382.54	1 383	37	64
Motor 40	129 161	10506.91	10 507	103	3727

Tabell 2.1 *Förväntad riskexponering, parameterskattning samt väntevärde, standardavvikelse och empirisk standardavvikelse för respektive skadegren under Poissonfördelningen.*

Skadegren	Förväntad exponering	$\hat{a}$	$\hat{b}$	Väntevärde	Standard-avvikelse	Empirisk standardavvikelse
Hem 01	65 513	161.989	0.026	6 117	487	531
Villa 02	6 431	14.522	0.036	405	108	134
Villahem 03	41 494	37.428	0.006	6 275	1 029	1193
Fritidshus 04	9 020	14.475	0.035	417	112	135
Fastighet 05	2 476	22.123	0.072	307	68	80
Lantbruk 06	14 036	5.588	0.003	2 056	871	1152
Paket 07	1 502	158.753	0.795	200	21	23
Företag 08	2 183	8.062	0.128	63	24	26
Företag 09	770	3.429	0.111	31	18	20
Affär 11	1 336	31.139	0.187	166	32	34
Kombinerad 12	5 683	36.990	0.050	733	124	127
Småföretag 13	2 025	31.784	0.291	109	22	23
Kommun 14	83	0.636	0.002	262	328	406
Båt 20	1 716	28.878	0.343	84	18	19
Olycksfall 30	36 911	832.193	0.602	1 383	61	64
Motor 40	129 161	3.374	0.000	10 507	5 721	3727

Tabell 2.2 *Förväntad riskexponering, parameterskattningar samt väntevärde, standardavvikelse och empirisk standardavvikelse för respektive skadegren under den negativa binomialfördelningen.*

2.1.3 Val av modell

Tittar man på tabellerna ovan så ser man att väntevärdena är lika medan standardavvikelserna skiljer sig åt. Den negativa binomialfördelningen har högre standardavvikelse än Poissonfördelningen för samtliga skadegrenar. Då standardavvikelsen i den negativa binomialfördelningen stämmer bättre överens med den empiriska standardavvikelsen anses den negativa binomialfördelningen mest rimlig och kommer i fortsättningen uteslutande att användas.

2.2 Fördelningar för enskilda ersättningsbelopp

Det finns en rad föreslagna sannolikhetsfördelningar för att beskriva de enskilda ersättningsbeloppens storlek. I detta arbete har tre fördelningar jämförts för varje skadegren: Paretofördelningen, lognormalfördelningen samt den inversa normalfördelningen.

För att avgöra vilken parametrisk fördelning som passar bäst har fördelningsfunktionerna för dessa jämförts med den empiriska fördelningsfunktionen med avsikten att välja den parametriska fördelning vars funktionsgraf bäst stämmer överens med den empiriska fördelningens graf. Det är inte ovanligt att en parametrisk fördelning passar bra i ett intervall och en annan fördelning i ett annat intervall. I de flesta fall har då en samlad bedömning gjorts över samtliga intervall. I några fall har det varit svårt att avgöra om någon av fördelningarna är självklart bättre än de andra. Anpassningen i de högre intervallen har då blivit utslagsgivande med tanke på att skador med stora ersättningsbelopp ibland kan stå för en stor del av en skadegrens totala ersättningskostnad varför god anpassning i de högre intervallen är viktig.

I appendix A.3 redovisas graferna för samtliga skadegrenar, uppdelade på olika intervall som framgår av figurerna. För alla skadegrenar utom en har antingen Paretofördelningen eller lognormalfördelningen ansetts ha bäst anpassning. Paretofördelningen har valts för skadegrenarna: villahem, lantbruk, paket, företag, kombinerad, småföretag samt olycksfall. Lognormalfördelningen har använts för skadegrenarna: hem, villa, fritidshus, fastighet, företag, affär, båt samt motor. Avslutningsvis har den inversa normalfördelningen valts för skadegrenen kommun.

2.2.1 Parameterskattningar

Under 1998 införlivades försäkringsbolaget Wasa i Länsförsäkringar vilket medförde att sammansättningen av försäkringsbeståndet förändrades för vissa skadegrenar. På grund av detta har endast data för riskåren 1999-2000 använts för att skatta parametrarna. Vidare är datamaterialet korrigerat vad gäller inflation.

Många av skadorna i datamaterialet är s k nollskador, av någon anledning har inte någon ersättning betalats ut i dessa fall. För samtliga sannolikhetsfördelningar ovan gäller att de inte är definierade i origo, d.v.s. de har ingen sannolikhet för utfallet $x \leq 0$. Nollskadorna plockas därför bort och parametrarna skattas på det reducerade materialet.

För samtliga fördelningar har maximum-likelihood-metoden använts för att skatta parametrarna. I appendix A.1 beskrivs hur skattningarna har beräknats.

2.2.2 Modifiering

Varje observation i datamaterialet är den bruttokostnad som bolaget betalar, d.v.s. ersättningar som överstiger självbehållen i avgiven återförsäkring är medtagna. I detta arbete är dock endast nettokostnaden av intresse. För att inte få fel uppskattning av väntevärde, standardavvikelse och skevhet måste en viss modifiering till.

Låt F beteckna fördelningsfunktionen för någon av de ovanstående fördelningarna. Nettokostnaden som bolaget betalar är $\min(c, x)$, där c betecknar excesspunkten. Fördelningsfunktionen för nettokostnaden kan nu uttryckas som

$$G(x) = \begin{cases} F(x) & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases} \tag{2.4}$$

det vill säga som fördelningen för bruttokostnaden men nu trunkerad i excesspunkten. Det ska dock förtydligas att parameterskattningarna har gjorts på det otrunkerade datamaterialet. Momenten kring origo kan generellt beräknas som

$$E\left(\min(c, X)^k\right) = \int_0^c x^k f(x) dx + c^k \left(1 - F(c)\right), \tag{2.5}$$

vilka sedan kombineras för att beräkna väntevärde, standardavvikelse samt skevhet. I appendix A.4 redovisas närmare beräkningar av momenten för varje fördelning.

2.2.3 Beräknade skattningar och statistikor

I följande tabell presenteras, för varje skadegren, antalet observationer som parameterskattningarna har baserats på, vilken fördelning som bäst anses beskriva de enskilda ersättningsbeloppens storlek, värden på parameterskattningarna samt beräkningar av väntevärde och standardavvikelse.

Skadegren	Antal observationer	Anpassad fördelning	Param. 1	Param. 2	Väntevärde	Standard-avvikelse
Hem 01	11 626	LogNormal	8.159	1.201	7 184	12 909
Villa 02	975	LogNormal	8.993	1.283	18 323	37 451
Villahem 03	19 722	Pareto	6 918	1.732	9 402	43 965
Fritidshus 04	1 354	LogNormal	8.798	1.270	14 819	29 686
Fastighet 05	850	LogNormal	9.684	1.355	40 177	91 622
Lantbruk 06	7 625	Pareto	14 427	1.107	67 953	392 363
Paket 07	572	Pareto	28 964	1.591	47 461	189 028
Företag 08	126	LogNormal	9.672	1.274	35 740	71 981
Företag 09	105	Pareto	5 009	0.853	70 168	511 859
Affär 11	323	LogNormal	9.433	1.241	27 006	51 712
Kombinerad 12	1 739	Pareto	35 623	1.674	51 680	186 668
Småföretag 13	142	Pareto	31 286	1.995	31 350	92 330
Kommun 14	2 028	InvNormal	18 897	0.031	18 897	107 644
Båt 20	157	LogNormal	9.018	1.463	24 041	65 274
Olycksfall 30	2 710	Pareto	8 026	2.407	5 702	13 221
Motor 40	31 510	LogNormal	7.771	1.412	6 430	16 201

Tabell 2.3 *Resultat för enskilda ersättningsbelopp för respektive skadegren: antal observationer skattningarna baseras på, anpassad fördelning, parameterskattningar samt väntevärde och standardavvikelse.*

2.3 Fördelning för den totala ersättningskostnaden

Det går rent teoretiskt att bestämma den sammansatta fördelningen för ersättningen S i (2.1) exakt men praktiskt blir beräkningarna ofta tidskrävande. Då det finns bra approximativa modeller att tillgå är det inte mödan värt att utföra de mer tidskrävande beräkningarna. Den approximativa modell som kommer att användas i detta arbete går under benämningen *NP-approximation* (Normal Power).

NP-approximationen bygger på normalfördelningen, men då den sammansatta fördelningen oftast är skev och normalfördelningen är helt symmetrisk måste den senare justeras något. Om $Z \in N(0,1)$ söker man en transformation $v(Z)$ så att fördelningen för denna liknar fördelningen för den standardiserade variabeln S. I NP-approximationen är funktionen v polynomet (se Johansson [4] sid. 99)

$$v(x) = x + \frac{g}{6}(x^2 - 1), \tag{2.6}$$

där g betecknar skevheten. Fördelningsfunktionen för S blir nu

$$\begin{aligned} G(x) &= P(S \le x) \\ &= P\left(\frac{S-m}{s} \le \frac{x-m}{s}\right) \approx P\left(v(Z) \le \frac{x-m}{s}\right) = P\left(Z \le v^{-1}\left(\frac{x-m}{s}\right)\right) \\ &= \Phi\left(v^{-1}\left(\frac{x-m}{s}\right)\right) = \Phi\left(\sqrt{\frac{9}{g^2} + \frac{6(x-m)}{gs} + 1} - \frac{3}{g}\right) \end{aligned} \tag{2.7}$$

En tumregel enligt Daykin [3] är att noggrannheten hos NP-approximationen är godtagbar om $g < 1.2$.

För att bestämma parametrarna i NP-approximationen måste väntevärdet, variansen samt skevheten för S bestämmas. Under antagandet att N är oberoende av variablerna $\{X_k\}$ samt att dessa i sin tur är oberoende och likafördelade så gäller det att (se Johansson [4] sid. 72)

$$m := E(S) = E(N)E(X) \tag{2.8}$$

$$s^2 := Var(S) = Var(N)E(X)^2 + E(N)Var(X) \tag{2.9}$$

$$g := Skevhet(S) = \frac{Skevhet(N)E(X)^3 + 3Var(N)Var(X)E(X) + E(N)Skevhet(X)}{\left(Var(N)E(X)^2 + E(N)Var(X)\right)^{3/2}} \tag{2.10}$$

Låt nu S_i, $i = 1,\ldots,16$, beteckna ersättningskostnaden för skadegren i. Den totala ersättningskostnaden som efterfrågas i (1.1) i det inledande kapitlet beräknas nu enligt

$$S_{tot} = \sum_{i=1}^{16} S_i$$

Under antagandet att ersättningskostnaderna för skadegrenarna är oberoende av varandra kan NP-approximationen användas även för den totala ersättningskostnaden S_{tot}. Parametrarna blir

$$m_{tot} := E(S_{tot}) = \sum_{i=1}^{16} E(S_i) \tag{2.11}$$

$$s_{tot}^{2} := Var(S_{tot}) = \sum_{i=1}^{16} Var(S_i) \tag{2.12}$$

$$g_{tot} := Skevhet(S_{tot}) = \frac{k_3^1 + k_3^2 + \ldots + k_3^{16}}{\left(k_2^1 + k_2^2 + \ldots + k_2^{16}\right)^{3/2}} \tag{2.13}$$

där k_2^i och k_3^i betecknar andra respektive tredje centralmomentet för skadegren i. För härledning av g_{tot} se appendix A.5.

2.3.1 Beräknade statistikor

I tabell 2.4 nedan redovisas beräkningarna av väntevärde, standardavvikelse och skevhet enligt (2.8) – (2.10) ovan för samtliga skadegrenar samt beräkningarna av dito storheter för den totala ersättningskostnaden enligt (2.11) – (2.13).

Skadegren	Väntevärde	Standard-avvikelse	Skevhet
Hem 01	43 946 509	3 641 089	0.018
Villa 02	7 417 230	2 119 469	0.095
Villahem 03	58 994 372	10 279 616	0.053
Fritidshus 04	6 183 636	1 760 953	0.089
Fastighet 05	12 340 406	3 155 598	0.147
Lantbruk 06	139 740 723	61 813 421	0.101
Paket 07	9 476 481	2 854 814	0.099
Företag 08	2 253 571	1 018 424	0.293
Företag 09	2 157 886	3 093 015	0.571
Affär 11	4 493 326	1 102 114	0.171
Kombinerad 12	37 899 849	8 145 205	0.153
Småföretag 13	3 427 546	1 187 051	0.233
Kommun 14	4 942 224	6 442 433	0.265
Båt 20	2 026 672	741 710	0.249
Olycksfall 30	7 883 023	601 067	0.051
Motor 40	67 557 371	36 824 891	0.003
Totalt	**410 740 824**	**73 780 681**	**0.060**

Tabell 2.4 *Statistikor för ersättningskostnaden för respektive skadegren och för samtliga skadegrenar totalt.*

Notera att samtliga skevheter är mindre än 1.2, vilket var Daykins [3] tumregel på att noggrannheten hos NP-approximationen är godtagbar.

3 Kapitalavkastning

Kapitalvkastningen är förändringen av värdet på bolagets samlade tillgångar, *portföljen*, över en viss tidsperiod. Tillgångarna som LF Skåne placerar sina pengar i delas upp i områdena: svenska aktier, europeiska aktier, asiatiska aktier exklusive japanska aktier, japanska aktier, nordamerikanska aktier, aktier i Länsförsäkringar AB (LFAB), fastigheter, obligationer samt likvida medel.

Av intresse är att bestämma fördelningen för kapitalavkastningen för att i nästa kapitel kunna bestämma fördelningen för resultatet enligt (1.1). Vi kommer här att bestämma fördelningen för avkastningen indirekt via fördelningen för det bakomliggande värdet på portföljen. Två modeller för värdeutvecklingen på en enskild tillgång kommer att undersökas varav den ena senare kommer att användas. Båda modellerna finns beskrivna i Luenberger [5] och gäller i diskret tid.

Om $A_i(T)$, $i = 1,\dots,9$, betecknar värdet på en enhet av tillgång i vid utgången av räkenskapsåret så blir värdet på portföljen vid utgången av året

$$V(T) = \sum_{i=1}^{9} h_i A_i(T) \tag{3.1}$$

där h_i betecknar antalet enheter av tillgång i. Oftast arbetar man dock med de relativa vikterna, allokeringen, $w_i = h_i A_i(0)/V(0)$, d.v.s. den andel av det totala värdet som placeras i tillgång i. $A_i(0)$ och $V(0)$ är värdena vid ingången av året och betraktas som kända. Uttryckt i w_i blir värdet på portföljen

$$V(T) = V(0)\sum_{i=1}^{9} w_i \frac{A_i(T)}{A_i(0)} \tag{3.2}$$

För resultaträkningen i nästa kapitel är den förväntade avkastningen och dess standardavvikelse av intresse. Vi återkommer med beräkningarna av dessa längre fram i detta kapitel efter det att fördelningen för värdet på portföljen bestämts.

3.1 Modeller för värdeutveckling

3.1.1 Additiv modell

I den additiva modellen utvecklas värdet på tillgång i enligt

$$A_i(k+1) = A_i(k) + u_i(k) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, T-1 \tag{3.3}$$

det vill säga värdet vid den nya tidpunkten, $k+1$, beror endast av värdet vid den senaste tidpunkten samt en variabel u_i som betraktas som stokastisk. Dessa variabler, $\{u_i(k), k = 0, 1, 2, \ldots, T-1\}$, antas vara oberoende och likafördelade med väntevärde m_i och varians s_i^2. Genom att rekursivt utveckla (3.3) erhålls

$$A_i(T) = A_i(0) + u_i(0) + u_i(1) + u_i(2) + \ldots + u_i(T-1) \tag{3.4}$$

Av centrala gränsvärdessatsen följer nu att $A_i(T)$ är approximativt normalfördelad med parametrarna, tillika väntevärde och varians, $A_i(0) + m_i T$ och $s_i^2 T$. För värdet på portföljen, $V(T)$, gäller nu att det är approximativt normalfördelat eftersom en linjärkombination av approximativt normalfördelade stokastiska variabler också är approximativt normalfördelad.

Om r_{ij} betecknar korrelationskoefficienten mellan tillgångarna i och j, så fås med hjälp av (3.2) och nyss nämnda väntevärde och varians att väntevärdet och variansen för värdet på portföljen är

$$E(V(T)) = V(0)\sum_{i=1}^{9} w_i \frac{E(A_i(T))}{A_i(0)} = V(0)\sum_{i=1}^{9} w_i \left(1 + \frac{\mu_i T}{A_i(0)}\right) \tag{3.5}$$

$$Var(V(T)) = V(0)^2 \left(\sum_{i=1}^{9} w_i^2 \frac{Var(A_i(T))}{A_i(0)^2} + 2\sum\sum_{i<j} w_i w_j \frac{Cov(A_i(T), A_j(T))}{A_i(0)A_j(0)} \right)$$

$$= V(0)^2 \left(\sum_{i=1}^{9} w_i^2 \frac{\sigma_i^2 T}{A_i(0)^2} + 2\sum\sum_{i<j} w_i w_j \frac{\rho_{ij}\sqrt{Var(A_i(T))Var(A_j(T))}}{A_i(0)A_j(0)} \right)$$

$$= V(0)^2 \left(\sum_{i=1}^{9} w_i^2 \frac{\sigma_i^2 T}{A_i(0)^2} + 2\sum\sum_{i<j} w_i w_j \frac{\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j T}{A_i(0)A_j(0)} \right) \tag{3.6}$$

3.1.2 Multiplikativ modell

I den multiplikativa modellen utvecklas värdet på tillgång i enligt

$$A_i(k+1) = v_i(k)A_i(k) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, T-1 \tag{3.7}$$

där v_i betraktas som en stokastisk variabel som driver utvecklingen. Genom att logaritmera (3.7) erhålls

$$\ln A_i(k+1) = \ln A_i(k) + \ln v_i(k) \tag{3.8}$$

det vill säga den multiplikativa modellen har fått den additiva strukturen (3.3), men istället för en modell för själva värdet på tillgången erhålls en modell för det logaritmerade värdet. Låt nu $\ln v_i$ vara lika med u_i. Precis som i den additiva modellen antas variablerna $\{u_i(k), k = 0, 1, 2, \ldots, T-1\}$ vara oberoende och likafördelade med väntevärde m_i och varians s_i^2. Rekursiv utveckling av (3.8) ger att

$$\ln A_i(T) = \ln A_i(0) + u_i(0) + u_i(1) + u_i(2) + \ldots + u_i(T-1) \tag{3.9}$$

Av centrala gränsvärdessatsen följer nu att $\ln A_i(T)$ är approximativt normalfördelad med parametrarna $\ln A_i(0) + m_i T$ och $s_i^2 T$. Det betyder i sin tur att $A_i(T)$ är approximativt lognormalfördelad med samma parametrar. Väntevärdet och variansen för $A_i(T)$ kan erhållas via den momentgenererande funktionen för normalfördelningen. Om $X \in N(m, s^2)$ så är den momentgenererande funktionen (se Johansson [4] sid. 35)

$$M_X(t) := E\left(e^{tX}\right) = e^{mt + \frac{1}{2}s^2 t^2} \tag{3.10}$$

Momenten för $A_i(T)$ är nu

$$E\left(A_i(T)^k\right) = E\left(\left(e^{\ln A_i(T)}\right)^k\right) = E\left(e^{k \ln A_i(T)}\right)$$

$$= \exp\left\{(\ln A_i(0) + \mu_i T)k + \tfrac{1}{2}\sigma_i^2 T k^2\right\} = A_i(0)^k \exp\left\{\left(\mu_i k + \tfrac{1}{2}\sigma_i^2 k^2\right)T\right\} \tag{3.11}$$

och väntevärdet och variansen blir

$$E(A_i(T)) = E\left(A_i(T)^1\right) = A_i(0)e^{\left(m_i + \frac{1}{2}s_i^2\right)T} \tag{3.12}$$

$$Var(A_i(T)) = E\left(A_i(T)^2\right) - E(A_i(T))^2$$

$$= A_i(0)^2 e^{\left(2m_i + 2s_i^2\right)T} - A_i(0)^2 e^{\left(2m_i + s_i^2\right)T} = A_i(0)^2 e^{\left(2m_i + s_i^2\right)T}\left(e^{s_i^2 T} - 1\right) \tag{3.13}$$

Om r_{ij} betecknar korrelationskoefficienten mellan tillgångarna i och j, så fås med hjälp av (3.2), (3.12) och (3.13) att väntevärdet och variansen för värdet på portföljen är

$$E(V(T)) = V(0)\sum_{i=1}^{9} w_i \frac{E(A_i(T))}{A_i(0)} = V(0)\sum_{i=1}^{9} w_i e^{(\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2)T} \tag{3.14}$$

$$Var(V(T)) = V(0)^2 \left(\sum_{i=1}^{9} w_i^2 \frac{Var(A_i(T))}{A_i(0)^2} + 2\sum\sum_{i<j} w_i w_j \frac{Cov(A_i(T), A_j(T))}{A_i(0)A_j(0)} \right)$$

$$= V(0)^2 \left(\sum_{i=1}^{9} w_i^2 e^{(2m_i + s_i^2)T} \left(e^{s_i^2 T} - 1\right) \right.$$
$$\left. + 2\sum\sum_{i<j} w_i w_j \frac{\rho_{ij}\sqrt{Var(A_i(T))Var(A_j(T))}}{A_i(0)A_j(0)} \right)$$

$$= V(0)^2 \left(\sum_{i=1}^{9} w_i^2 e^{(2m_i + s_i^2)T} \left(e^{s_i^2 T} - 1\right) \right.$$
$$\left. + 2\sum\sum_{i<j} w_i w_j r_{ij} e^{\left(m_i + m_j + \frac{1}{2}s_i^2 + \frac{1}{2}s_j^2\right)T} \left(e^{s_i^2 T} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(e^{s_j^2 T} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \right) \tag{3.15}$$

Under den multiplikativa modellen gäller att värdet på portföljen $V(T)$ således är en linjärkombination av approximativt lognormalfördelade stokastiska variabler med väntevärde som i (3.14) och varians som i (3.15). Att finna ett analytiskt uttryck på fördelningen för denna linjärkombination är dock svårt.

I Abu-Dayya [1] finns en metod beskriven som går under namnet Wilkinson's metod, där summan av ett antal lognormalfördelade stokastiska variabler approximeras med en variabel som också är lognormalfördelad. Parametrarna i den approximerande lognormalfördelningen fås sedan genom att matcha de två första teoretiska momenten med de två första momenten för summan av de lognormalfördelade variablerna. I artikeln har metoden använts inom telekommunikation och jämförts med en simulerad fördelning. Överensstämmelsen mellan det approximerade resultatet och det simulerade är riktigt bra. Wikefeldt [7] har använt metoden för värdet på en portfölj av tillgångar och jämfört med ett simulerat resultat. Även här är överenstämmelsen god.

Vi ska begagna oss av denna metod här, d v s vi approximerar fördelningen för värdet på portföljen med lognormalfördelningen. Låt m_Z och s_Z^2 beteckna de sökta parametrarna i den approximerande lognormalfördelningen. Om m_1 och m_2 betecknar första respektive andra momentet för linjärkombinationen av de approximativt lognormalfördelade stokastiska variablerna ovan så är m_1 lika med $E(V(T))$ enligt (3.14) och m_2 lika med $Var(V(T)) + E(V(T))^2$ enligt (3.14) och (3.15). Sätter vi nu de teoretiska momenten lika med m_1 respektive m_2 så får vi ur (3.10) att

$$\begin{cases} m_1 = e^{\mu_Z + \frac{1}{2}\sigma_Z^2} \\ m_2 = e^{2\mu_Z + 2\sigma_Z^2} \end{cases} \tag{3.16}$$

och löser vi nu ut m_Z och s_Z^2 erhålls slutligen (se Abu-Dayya [1])

$$\begin{cases} m_Z = 2\ln m_1 - \frac{1}{2}\ln m_2 \\ s_Z^2 = \ln m_2 - 2\ln m_1 \end{cases} \tag{3.17}$$

3.1.3 Val av modell

Den additiva modellen har två nackdelar som gör den mindre rimlig som modell för värdeutvecklingen på en tillgång över en längre tidsperiod. För det första är standardavvikelsen densamma oavsett vad värdet är på tillgången. Mer rimligt är det om standardavvikelsen är proportionell mot värdet på tillgången som i den multiplikativa modellen. För det andra kan normalfördelade variabler anta negativa värden vilket innebär att värdet på tillgången i teorin kan bli negativt. I verkligheten blir värdet aldrig mindre än noll.

Över korta tidsperioder, några få månader, kan den additiva modellen vara rimlig att använda men i detta arbete där tidsperioden är ett år kommer i fortsättningen den multiplikativa modellen att användas.

3.2 Parameterskattningar

De parametrar som måste skattas är väntevärdet m_i och variansen s_i^2 för den stokastiska variabeln u_i i den multiplikativa modellen samt korrelationskoefficienten r_{ij} mellan varje par av tillgångar.

För tillgång i finns historiska observationer på A_i mellan 1999-01-08 och 2002-01-31 för varje vecka. Låt $a_{i1},\ldots a_{in}$ beteckna värdena på dessa observationer. Genom att bilda variablerna $g_{ik} = \ln a_{ik} - \ln a_{i(k-1)}$, $k = 1,2,\ldots,n$, erhålls observationer på u_i. Skattningarna av m_i och s_i^2 blir nu (se Blom [2] sid. 60) medelvärdet respektive stickprovsvariansen för $\{g_i\}$, det vill säga

$$\hat{m}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g_{ik}\ , \qquad \hat{s}_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(g_{ik} - \bar{g}_i\right)^2 \tag{3.17}$$

Korrelationskoefficienten mellan tillgångarna i och j skattas med (se Blom [2] sid. 167)

$$\hat{r}_{ij} = \frac{s_{ij}}{\sqrt{\hat{s}_i^2 \hat{s}_j^2}} \tag{3.18}$$

där $s_{ij} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left((g_{ik} - \hat{m}_i)(g_{jk} - \hat{m}_j)\right)$.

Då det inte finns några marknadsnoteringar för värdena på aktierna i LFAB har det antagits att LFAB har samma parameterskattningar som svenska aktier. Av samma anledning har det antagits att likvida medel har samma parameterskattningar som obligationer. I tabell 3.1 som följer redovisas samtliga parameterskattningar.

			Korrelationskoefficienter								
Tillgång	$\hat{m}$	$\hat{s}$	Ak LF	Ak Sv	Fastigh	Ak Na	Ak Eu	Ak Ja	Ak As	Obl	Lik med
Aktier LFAB	0.0007	0.0333	1.000	0.700	0.410	0.638	0.880	0.265	0.553	-0.028	-0.028
Aktier Sverige	0.0007	0.0333		1.000	0.410	0.638	0.880	0.265	0.553	-0.028	-0.028
Fastigheter	0.0040	0.0195			1.000	0.386	0.411	0.074	0.262	-0.049	-0.049
Aktier Nordamerika	0.0003	0.0304				1.000	0.703	0.383	0.634	-0.016	-0.016
Aktier Europa	0.0001	0.0279					1.000	0.297	0.606	-0.009	-0.009
Aktier Japan	0.0001	0.0364						1.000	0.417	-0.034	-0.034
Aktier Asien	0.0012	0.0359							1.000	-0.132	-0.132
Obligationer	0.0006	0.0043								1.000	0.300
Likvida medel	0.0006	0.0043									1.000

Tabell 3.1 *Skattningar av väntevärdet och variansen för den stokastiska variabeln u samt skattningar av korrelationskoefficienten mellan varje par av tillgångar. För korrelationskoefficienten mellan LFAB och svenska aktier samt mellan obligationer och likvida medel är värdena tagna.*

Det måste dock nämnas att skattningarna av väntevärdena ovan är behäftade med stor osäkerhet. Man kan visa, se Luenberger [5], att för att få en någorlunda god skattning behövs historiska värden på veckodata flera decennier tillbaka i tiden. Om man mot förmodan skulle få tag på så mycket data är det normalt orimligt att anta konstant värde under så lång tid.

Skattningarna av standardavvikelserna är däremot inte lika osäkra. För att få goda skattningar behövs historiska värden på veckodata några enstaka år tillbaka i tiden.

3.3 Förväntad kapitalavkastning

Som nämdes i början av detta kapitel är kapitalavkastningen den förändring som sker med värdet på portföljen över en viss tidsperiod. Med beteckningarna i detta kapitel är kapitalavkastningen för perioden $[0, T]$

$$R_p(0,T) = V(T) - V(0) \tag{3.19}$$

Vanligare är dock att man uttrycker avkastningen på den relativa formen

$$R_p(0,T) = \left(V(T) - V(0)\right) / V(0) \tag{3.20}$$

För resultaträkningen är endast (3.19) intressant men (3.20) är bra då avkastningen ska jämföras t ex med tidigare år. Det är även lättare att ha en känsla för de relativa värdena. Den förväntade avkastningen och dess standardavvikelse beräknas lätt med hjälp av väntevärdet och variansen för värdet på portföljen under den multiplikativa modellen, (3.14) och (3.15).

Det är även intressant att undersöka avkastningarna för de enskilda tillgångarna för att få en inbördes jämförelse; vilken tillgång har högst avkastning, vilken bidrar mest till risken o s v. För tillgång i är avkastningen för perioden $[0, T]$

$$R_i(0,T) = h_i\left(A_i(T) - A_i(0)\right) \tag{3.21}$$

och den relativa formen är

$$R_i(0,T) = \left(A_i(T) - A_i(0)\right) / A_i(0) \tag{3.22}$$

Den förväntade avkastningen och dess standardavvikelsen beräknas nu med hjälp av (3.12) och (3.13).

I tabellen nedan redovisas beräkningarna av de förväntade avkastningarna och deras standardavvikelser, värdena inom parentes är avkastningarna med den relativa formen uttryckta i procent. Vidare redovisas vilken allokering som har använts samt belopp på ingångsvärdena för respektive tillgång. Det ska även nämnas att eftersom tidshorisonten är ett år och parameterskattningarna baseras på veckodata så är $T = 52$.

Tillgång	Allokering (%)	Ingånsvärde	Förväntad avkastning		Standardavvikelse	
Aktier LFAB	26.1	489 897 000	32 947 818	(6.7)	127 436 291	(26.0)
Aktier Sverige	14.2	266 534 000	17 925 633	(6.7)	69 333 155	(26.0)
Fastigheter	20.6	386 662 000	94 637 455	(24.5)	68 134 179	(17.6)
Aktier Nordamerika	5.7	106 989 000	4 300 664	(4.0)	24 665 806	(23.1)
Aktier Europa	4.5	84 465 000	2 202 033	(2.6)	17 636 090	(20.9)
Aktier Japan	3.3	61 941 000	2 511 363	(4.1)	17 217 832	(27.8)
Aktier Asien	1.4	26 278 000	2 654 068	(10.1)	7 606 810	(28.9)
Obligationer	20.2	379 154 000	12 486 429	(3.3)	12 226 847	(3.2)
Likvida medel	4.0	75 080 000	2 472 560	(3.3)	2 421 158	(3.2)
Totalt	**100.0**	**1 877 000 000**	**172 138 023**	**(9.2)**	**265 100 691**	**(14.1)**

Tabell 3.2 *Resultat för avkastningen under den multiplikativa modellen: allokering, ingångsvärde, förväntad avkastning samt standardavvikelse.*

Mest uppseendeväckande med dessa värden är att avkastningen för fastigheter är så hög. Denna brukar sällan överstiga avkastningarna för aktierna. Vidare är avkastningarna för några av aktieslagen ovanligt låga. Värdena på standardavvikelserna ser däremot rimliga ut.

4 Resultaträkning

Nedan presenteras en förenklad resultaträkning med de för detta arbete mest intressanta storheterna. Två termer dyker upp som inte diskuterats tidigare: konsolideringskapital och konsolideringsgrad. Konsoliderigskapitalet är summan av eget kapital, latent skatteskuld i obeskattade reserver och övervärden/undervärden i totala tillgångar. Konsolideringsgraden (uttryckt i procent) är konsolideringskapitalet i förhållande till premieinkomsten och är ett mått på hur bolaget klarar av sina försäkringsåtaganden. En konsolideringsgrad på 100% betyder att bolaget skulle kunna bedriva försäkringsverksamhet under ett helt år utan några nya premieinkomster. Samtliga värden i detta kapitel är i tusentals kronor.

Försäkringsrörelsens tekniska resultat	**Not**		**Standardavvikelse**
Premieintäkt	1	613 200	
Förväntad försäkringsersättning (enl. tab. 2.4)		-410 741	73 781
Driftskostnad	1	-194 000	
Förväntat tekniskt resultat (exkl kapitalavkastning)		**8 459**	**73 781**
Kapitalavkastning			
Förväntad kapitalavkastning (enl. tab. 3.2)		172 138	265 101
Förväntat tekniskt resultat		8 459	73 781
Förväntat resultat		**180 597**	**275 176**
Konsolidering			
Konsolideringskapital	1	1 236 300	
Förväntat resultat		180 597	275 176
Förväntat konsolideringskapital		**1 416 897**	**275 176**
Premieinkomst	1	654 600	
Förväntad konsolideringsgrad (%)	2	**216**	**42**

Noter:

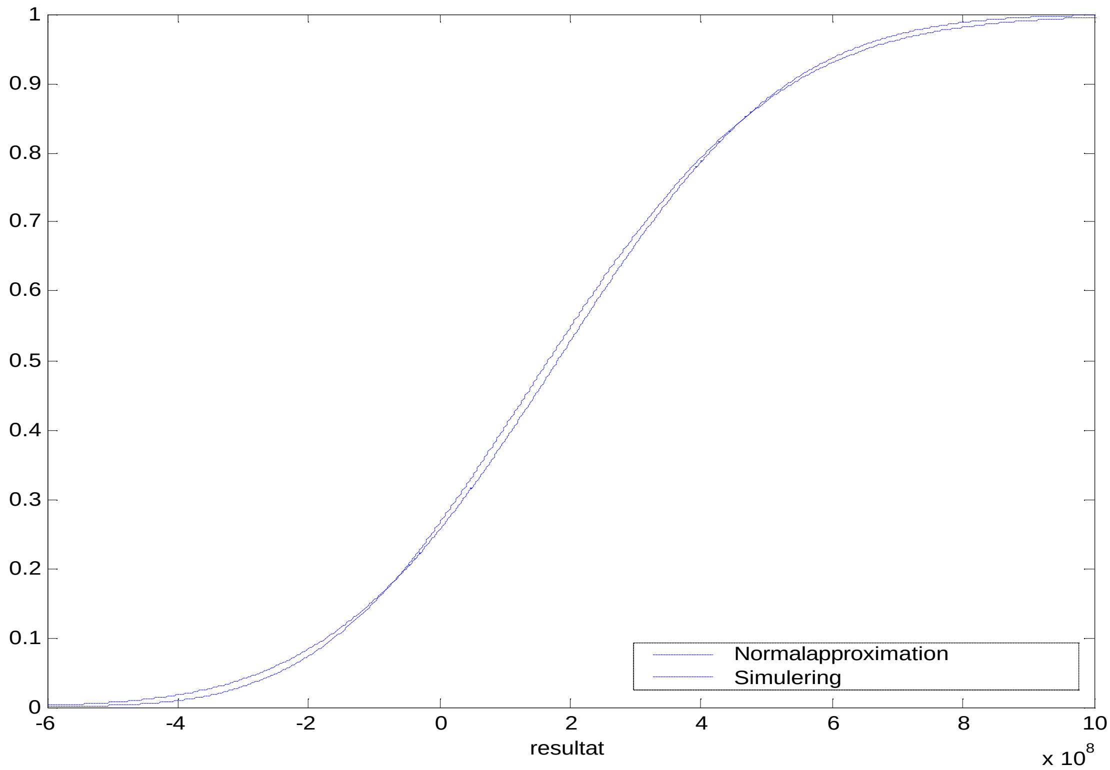
1) Värdena hämtade från årsredovisningen 2001.
2) Kvoten mellan förväntat konsolideringskapital och premieinkomst. Standardavvikelsen är beräknad som kvoten mellan standardavvikelsen för konsolideringskapitalet och premieinkomsten.

4.1 Fördelningar för resultatet

Hitintills har fördelningarna för ersättningskostnaden och värdet på portföljen av tillgångar bestämts. Fördelningen för ersättningskostnaden approximerades med en transformerad normalfördelning som tog hand om skevheten och värdet på portföljen approximerades under den multiplikativa modellen med en lognormalfördelning. För att kunna beräkna percentilerna måste fördelningen för resultatet (1.1) bestämmas.

Att finna ett analytiskt uttryck på fördelningsfunktionen för resultatet då det består av differensen mellan en lognormalfördelad variabel och en normalfördelad variabel är troligen svårt, och vi har därför valt två andra tillvägagångssätt: dels har fördelningen för resultatet simulerats, dels har den approximerats med en normalfördelning. Som parametrar i normalfördelningen har använts det förväntade resultatet och dess standardavvikelse.

I följande figur har fördelningsfunktionerna för resultatet plottats, dels då fördelningen simulerats, dels då den approximerats med normalfördelningen. Överensstämmelsen är riktigt bra, dock överskattar normalapproximationen, i jämförelse med den simulerade fördelningen, de lägre värdena och underskattar de högre värdena.



Figur 4.1 *Jämförelse av fördelningsfunktionerna för resultatet, dels då fördelningen simulerats, dels då den approximerats med normalfördelningen.*

4.1.1 Percentiler

Den $k:te$ percentilen x_k för en fördelning talar om att k % av värdena är mindre än denna. Det kan uttryckas som att det är k % sannolikhet att få ett värde som är mindre än x_k. Allmänt erhålls den $k:te$ percentilen för en fördelning med fördelningsfunktion F som $x_k = F^{-1}(k)$.

Nedan följer nu percentilerna för det tekniska resultatet, resultatet, konsolideringskapitalet samt konsolideringsgraden. Den första tabellen visar percentilerna då fördelningen för resultatet simulerats och den andra då fördelningen approximerats med normalfördelningen.

Percentil	**Tekniskt resultat**	**Resultat**	**Konsolideringskapital**	**Konsolideringsgrad (%)**
5%	-111 634	-244 056	992 244	152
10%	-85 618	-159 502	1 076 798	164
25%	-41 709	-11 801	1 224 499	187
50%	7 718	166 322	1 402 622	214
75%	57 819	358 029	1 594 329	244
90%	103 489	541 006	1 777 306	272
95%	131 082	654 753	1 891 053	289

Tabell 4.2 *Percentiler för det tekniska resultatet, resultatet, konsolideringskapitalet samt konsolideringsgraden då fördelningen simulerats.*

Percentil	**Tekniskt resultat**	**Resultat**	**Konsolideringskapital**	**Konsolideringsgrad (%)**
5%	-111 634	-272 027	964 273	147
10%	-85 618	-172 055	1 064 245	163
25%	-41 709	-5 006	1 231 294	188
50%	7 718	180 597	1 416 897	216
75%	57 819	366 201	1 602 501	245
90%	103 489	533 250	1 769 550	270
95%	131 082	633 222	1 869 522	286

Tabell 4.3 *Percentiler för det tekniska resultatet, resultatet, konsolideringskapitalet samt konsolideringsgraden då fördelningen approximerats med Normalfördelningen.*

Den lägsta percentilen (5%) är mest intressant här då den kan utläsas som ett värsta tänkbara scenario för det kommande året, liknande begreppet ”Value at Risk” (VaR). Här handlar det dock om vad resultatet kommer bli som sämst, i VaR handlar det om det största belopp man riskerar förlora.

Med 5% sannolikhet hamnar vi under en konsolideringsgrad på 152 respektive 147 procent. Det betyder att LF Skåne har goda marginaler även i ett värsta scenario.

5 Sammanfattning och kommentarer

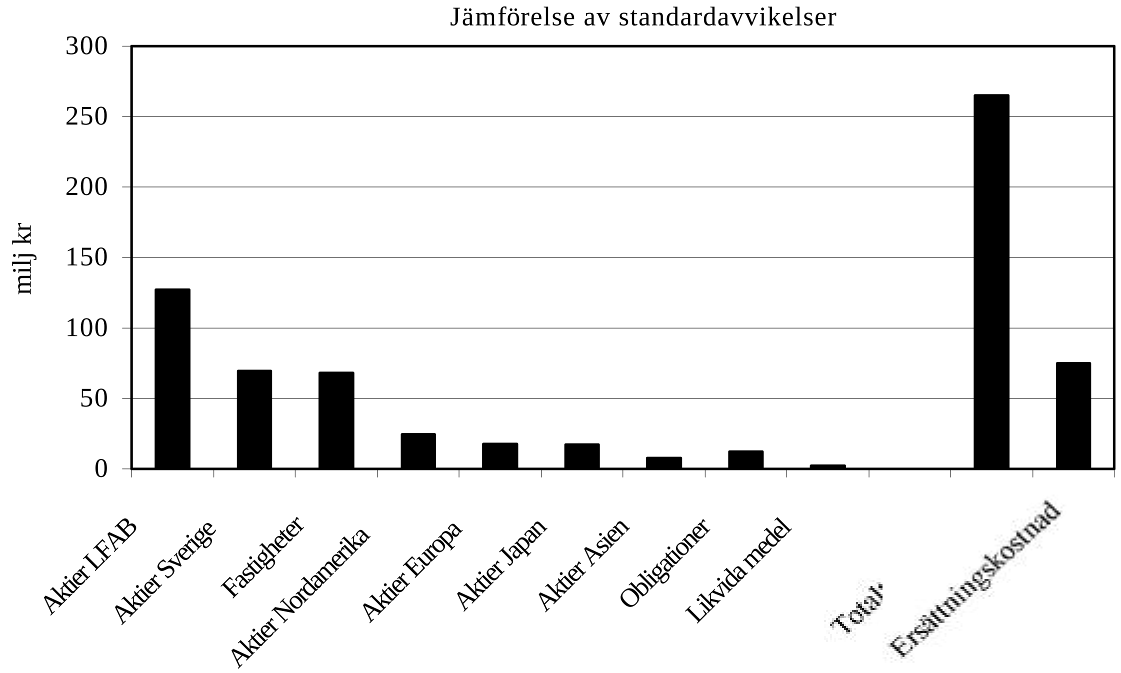
Målet med detta arbete var att bestämma percentilerna för resultatet givet en viss allokering. För att kunna beräkna dessa bestämdes fördelningen för resultatet i kapitel 4. Två olika tillvägagångssätt användes och jämfördes, dels simulerades fördelningen, dels användes normalapproximation. Av percentilerna är de lägre av störst intresse då de kan utläsas som ett värsta scenario. För konsolideringsgraden, som är ett mått på hur bolaget klarar av sina försäkringsåtaganden, är värdet på 5%-percentilen 152%, då fördelningen för resultatet simulerats. För att dra störst nytta av arbetet ska percentilerna för olika allokeringar jämföras så att beslutsfattarna vid bolaget har alternativ att välja mellan.

Som en intressant jämförelse har percentilerna för resutatet beräknats då bolagets totala kapital investerats till riskfri ränta på 3.3%, d.v.s. då den förväntade avkastningen betraktats som konstant. Följande tabell redovisar percentilerna för resultatet och konsolideringsgraden.

Percentil	**Resultat, tkr**	**Konsolideringsgrad**
5%	-52 138	181
10%	-24 916	185
25%	20 469	192
50%	70 931	200
75%	120 399	207
90%	164 308	214
95%	189 925	218

Medianen har minskat i jämförelse med percentilerna i tabellerna 4.2 och 4.3 och spridningen har naturligtvis också minskat.

Utöver percentilerna visar studien att för det behandlade bolaget råder stor skillnad mellan risken i försäkringsverksamheten och risken i kapitalförvaltningen. Standardavvikelsen för kapitalavkastningen på tillgångsportföljen är över tre ggr så stor som standardavvikelsen för ersättningskostnaden. I figuren nedan är en grafisk jämförelse mellan standardavvikelserna för de enskilda tillgångarna, portföljen samt ersättningskostnaden gjord. Noterbart är att standardavvikelsen för aktier i LFAB ensamt är betydligt större än standardavvikelsen för ersättningskostnaden och att både svenska aktier och fastigheter var för sig har ungefär lika stor risk som ersättningskostnaden.



Arbetet skulle kunna utvecklas på några områden. För ersättningskostnaden bör man särgranska skador uppkommna på grund av naturkatastrofer och för LF Skåne särskilt stormskador. Detta är viktigt men det är samtidigt svårt att få säkra skattningar då datamaterialet är tunnt. För resultatet saknas också en post för avvecklingsresultatet, d.v.s. förändringen av reserverna, som skulle behöva modelleras.

6 Referenser

[1] Abu-Dayya, A.A, Beaulieu, N.C. (1994): *Outage Probabilities in the Presence of Correlated Lognormal Interferers*. IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol. 43, No. 1, 164-173.

[2] Blom, G, Holmquist, B. (1998): *Statistikteori med tillämpningar*. Studentlitteratur.

[3] Daykin, C.D, Pentikäinen, T. & Pesonen, M. (1994): *Practical Risk Theory for Actuaries*. Chapman & Hall.

[4] Johansson, B. (1997): *Matematiska modeller inom sakförsäkring*. Kompendium, Matematisk Statistik, Stockholms Universitet.

[5] Luenberger, D.G. (1998): *Investment Science*. Oxford University Press.

[6] ter Berg, P. (1994): *Deductibles and the Inverse Gaussian Distribution*. Astin Bulletin, Vol. 24, No. 2, 319-323.

[7] Wikefeldt, F. (1999): *Optimal portfolios and time horizons*. Master Thesis, Division of Mathematical Statistics, Royal Institute of Technology, Stockholm.

A Appendix

A.1 Sannolikhetsfördelningar

Nedan presenteras de sannolikhetsfördelningar som har använts i kapitel 2. För utförligare beräkningar se Johansson [4]. För den inversa normalfördelningen se även ter Berg [6].

A.1.1 Poissonfördelningen, $\boldsymbol{X}$ Î $\boldsymbol{Po(l)}$

Sannolikhetsfunktion

$$P(X = k) = e^{-l}\frac{l^{k}}{k!}, \quad k = 0,1,2,\dots, \quad l > 0$$

Väntevärde, varians och skevhet

$$E(X) = l\ , \quad Var(X) = l\ , \quad Skevhet(X) = \frac{1}{\sqrt{l}}$$

A.1.2 Negativa binomialfördelningen, $\boldsymbol{X}$ Î $\boldsymbol{NegBin(a, b)}$

Sannolikhetsfunktion

$$P(X = k) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)k!}\left(\frac{b}{b+1}\right)^{a}\left(\frac{1}{b+1}\right)^{k}, \quad k = 0,1,2,\dots, \quad a, b > 0$$

Väntevärde, varians och skevhet

$$E(X) = \frac{a}{b}, \quad Var(X) = \frac{a(b+1)}{b^{2}}, \quad Skevhet(X) = \frac{b+2}{\sqrt{a(b+1)}}$$

A.1.3 Paretofördelningen, $\boldsymbol{X}$ Î $\boldsymbol{Pa}(a, g)$

Täthets- och fördelningsfunktion

$$f(x) = \frac{ga^g}{(a+x)^{g+1}}, \qquad F(x) = 1 - \left(\frac{a}{a+x}\right)^g, \qquad x > 0$$

Väntevärde, varians och skevhet

$$E(X) = \frac{a}{g-1}, \ \ g > 1 \qquad Var(X) = \frac{ga^2}{(g-1)^2(g-2)}, \ \ g > 2$$

$$Skevhet(X) = \frac{2\sqrt{g-2}}{g^{3/2}(g-3)}\left(3(g-1)^2 - 3(g-1)(g-3) + (g-2)(g-3)\right), \ \ g > 3$$

Parameterskattningar med maximum-likelihood-metoden

$\hat{a}$ är lösningen till ekvationen $\dfrac{1}{a(a)} + b(a) = 1$, där $a(a) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{a}{a+x_k}$ och $b(a) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log\left(\dfrac{a}{a+x_k}\right)$,

$$\hat{g} = \frac{a(\hat{a})}{(1 - a(\hat{a}))}$$

A.1.4 Lognormalfördelningen, $\boldsymbol{X}$ Î $\boldsymbol{LogN}(m, s)$

Täthets- och fördelningsfunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}\, sx} \exp\left\{-\frac{(\log x - m)^2}{2s^2}\right\}, \qquad F(x) = \Phi\left(\frac{\log x - m}{s}\right), \qquad x > 0$$

Väntevärde, varians och skevhet

$$E(X) = e^{m + \frac{1}{2}s^2}, \qquad Var(X) = e^{2m + s^2}\left(e^{s^2} - 1\right), \qquad Skevhet(X) = \frac{e^{\frac{9}{2}\sigma^2} - 3e^{\frac{5}{2}\sigma^2} + 2e^{\frac{3}{2}\sigma^2}}{\left(e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)\right)^{3/2}}$$

Parameterskattningar med maximum-likelihood-metoden

$$\hat{m} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log x_k, \qquad \hat{s} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\log x_k)^2 - \hat{m}^2$$

A.1.5 Inversa normalfördelningen, $\boldsymbol{X}$ Î $\boldsymbol{InvN}(m, f)$

Täthets- och fördelningsfunktion

$$f(x) = \sqrt{\frac{mf}{2px^3}} \exp\left\{-\frac{f(x-m)^2}{2mx}\right\}, \quad F(x) = \Phi\left(\frac{(x-m)\sqrt{f}}{\sqrt{mx}}\right) + e^{2f}\Phi\left(-\frac{(x+m)\sqrt{f}}{\sqrt{mx}}\right), \; x > 0$$

Väntevärde, varians och skevhet

$$E(X) = m, \quad Var(X) = \frac{m^2}{f}, \quad Skevhet(X) = \frac{3}{\sqrt{f}}$$

Parameterskattningar med maximum-likelihood-metoden

$$\hat{m} = \bar{x}, \quad \hat{f} = \frac{1}{\bar{x}\tilde{x} - 1}, \quad \text{där } \tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}$$

A.1.6 Empiriska fördelningen

Antag att utfallen $x_1, \ldots, x_n$ är n observationer på de oberoende stokastiska variablerna $X_1, \ldots, X_n$, alla med fördelningsfunktion F. Den empiriska fördelningsfuntionen fås som

$$\hat{F}(x) = \sum_{k: x_k \leq x} \frac{1}{n}$$

d.v.s. som andelen observationer som är mindre än eller lika med x.

A.2 ML-skattningarna för parametrarna i den negativa binomialfördelningen

$X_i \in NegBin(a_0 w_i, b_0), \quad i = 1, \dots, 10$

Den logaritmerade likelihood-funktionen, baserad på observationerna $x_1, \dots, x_{10}$, är

$$l(a_0, b_0) = \log\left(\prod_{i=1}^{10} p_{X_i}(x_i)\right) = \sum_{i=1}^{10} \log p_{X_i}(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{10} \log\left(\frac{\Gamma(a_0 w_i + x_i)}{\Gamma(a_0 w_i) x_i!}\left(\frac{b_0}{b_0+1}\right)^{a_0 w_i}\left(\frac{1}{b_0+1}\right)^{x_i}\right)$$

$$= \{\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1),\ \textit{för reella } p > 1\}$$

$$= \sum_{i=1}^{10} \log\left(\frac{1}{x_i!}\prod_{k=0}^{x_i-1}(a_0 w_i + k)\left(\frac{b_0}{b_0+1}\right)^{a_0 w_i}\left(\frac{1}{b_0+1}\right)^{x_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{10}\left(\sum_{k=0}^{x_i-1} \log(a_0 w_i + k) - \log(x_i!) + a_0 w_i(\log b_0 - \log(b_0+1)) - x_i \log(b_0+1)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{10}\sum_{k=0}^{x_i-1} \log(a_0 w_i + k) + a_0(\log b_0 - \log(b_0+1))\sum_{i=1}^{10} w_i - \log(b_0+1)\sum_{i=1}^{10} x_i$$

$$- \sum_{i=1}^{10} \log(x_i!)$$

De partiella derivatorna blir

$$\frac{\partial l}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^{10}\sum_{k=0}^{x_i-1} \frac{w_i}{a_0 w_i + k} + (\log b_0 - \log(b_0+1))\sum_{i=1}^{10} w_i$$

$$= \sum_{i=1}^{10} w_i \sum_{k=0}^{x_i-1} \frac{1}{a_0 w_i + k} + \log\left(\frac{b_0}{b_0+1}\right)\sum_{i=1}^{10} w_i$$

$$\frac{\partial l}{\partial b_0} = a_0\left(\frac{1}{b_0} - \frac{1}{b_0+1}\right)\sum_{i=1}^{10} w_i - \frac{1}{b_0+1}\sum_{i=1}^{10} x_i$$

$$= \frac{a_0}{b_0(b_0+1)}\sum_{i=1}^{10} w_i - \frac{1}{b_0+1}\sum_{i=1}^{10} x_i$$

Vi sätter $\frac{\partial l}{\partial a_0} = 0$ och $\frac{\partial l}{\partial b_0} = 0$ och får ML-ekvationerna

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{10} w_i \sum_{k=0}^{x_i - 1} \frac{1}{a_0 w_i + k} = \log\left(\frac{b_0 + 1}{b_0}\right) \sum_{i=1}^{10} w_i \\ b_0 = \frac{a_0 \overline{w}}{\overline{x}} \end{cases}$$

Genom att ta uttrycket för b_0 i den andra ekvationen och stoppa in i den första ekvationen så erhålls följande ekvation för a_0

$$\sum_{i=1}^{10} w_i \sum_{k=0}^{x_i - 1} \frac{1}{a_0 w_i + k} = \log\left(1 + \frac{\overline{x}}{a_0 \overline{w}}\right) \sum_{i=1}^{10} w_i$$

Den numeriska lösningen till denna ekvation är ML-skattningen av a_0. ML-skattningen av b_0 fås därefter som

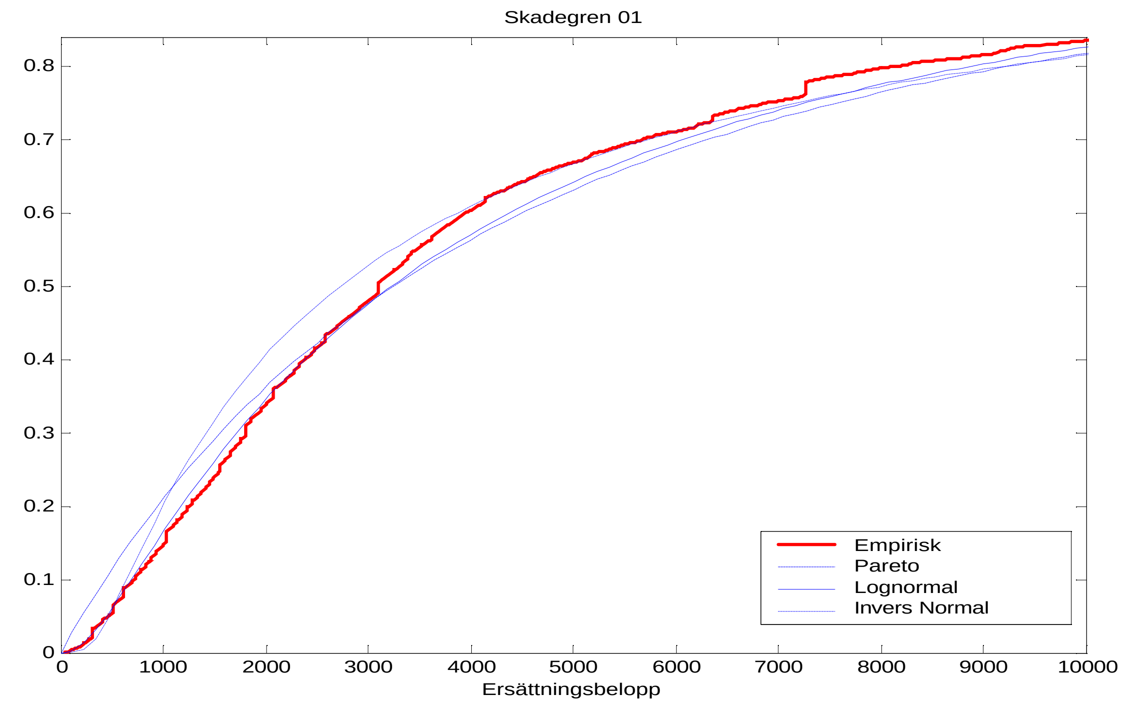
$$\hat{b}_0 = \frac{\hat{a}_0 \overline{w}}{\overline{x}}$$

Notera att eftersom väntevärdet i den negativa binomialfördelningen är a/b blir det skattade väntevärdet $\overline{x}/\overline{w}$, vilket är detsamma som i Poissonfallet.

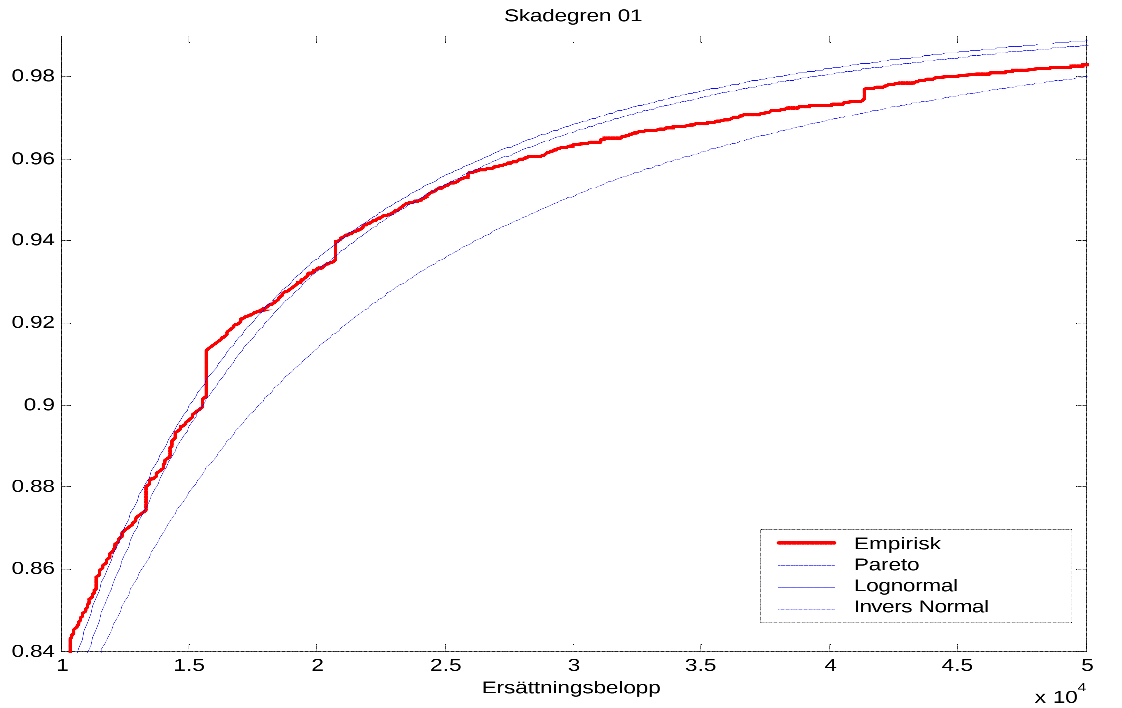
A.3 Jämförelse av fördelningsfunktioner

A.3.1 Skadegren Hem 01

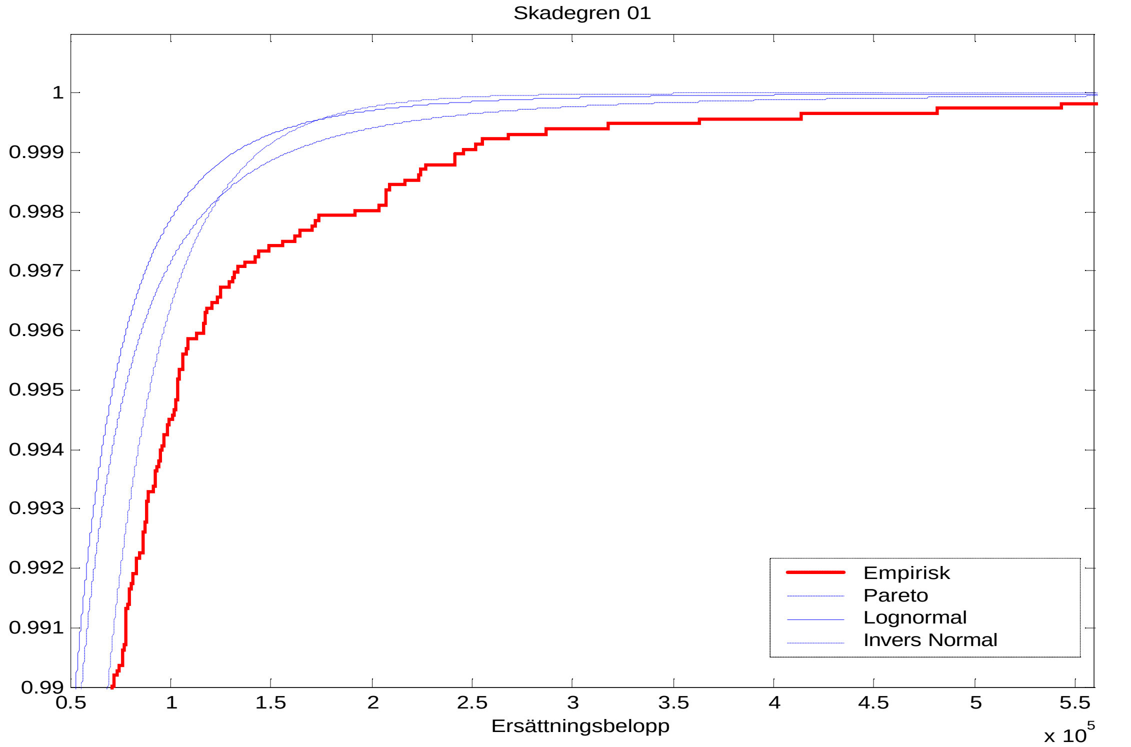
Vald fördelning: lognormal.



Figur 1a *Intervall 0 – 10 000.*



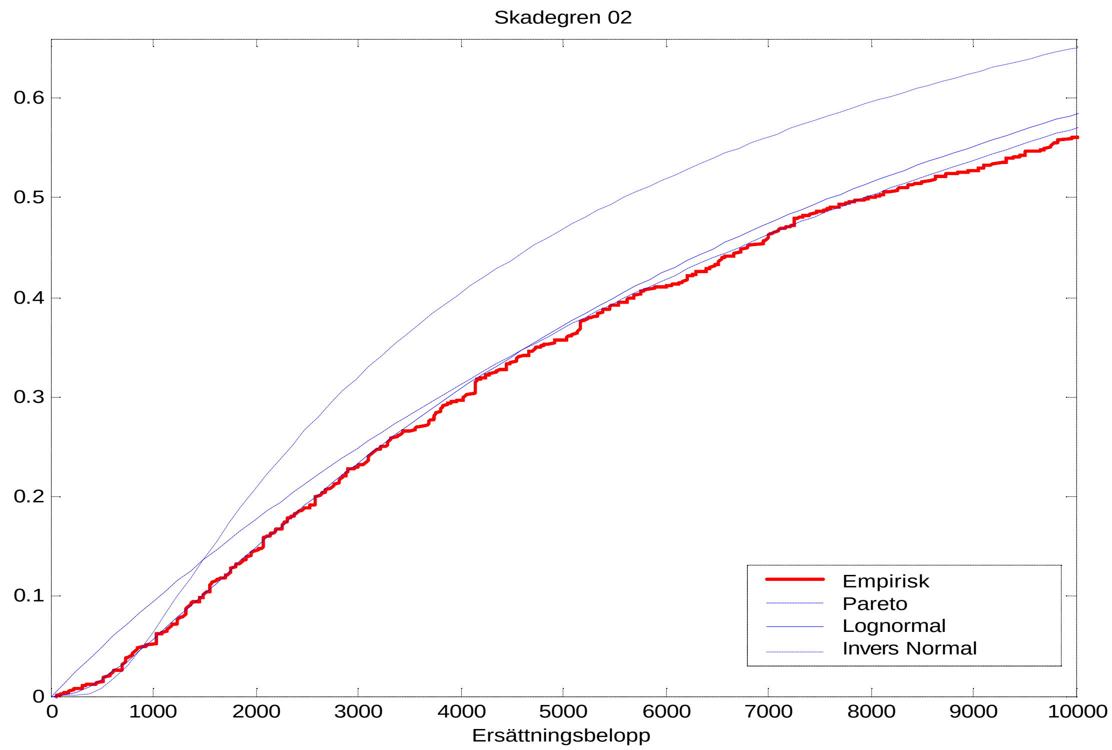
Figur 1b *Intervall 10 000 – 50 000.*



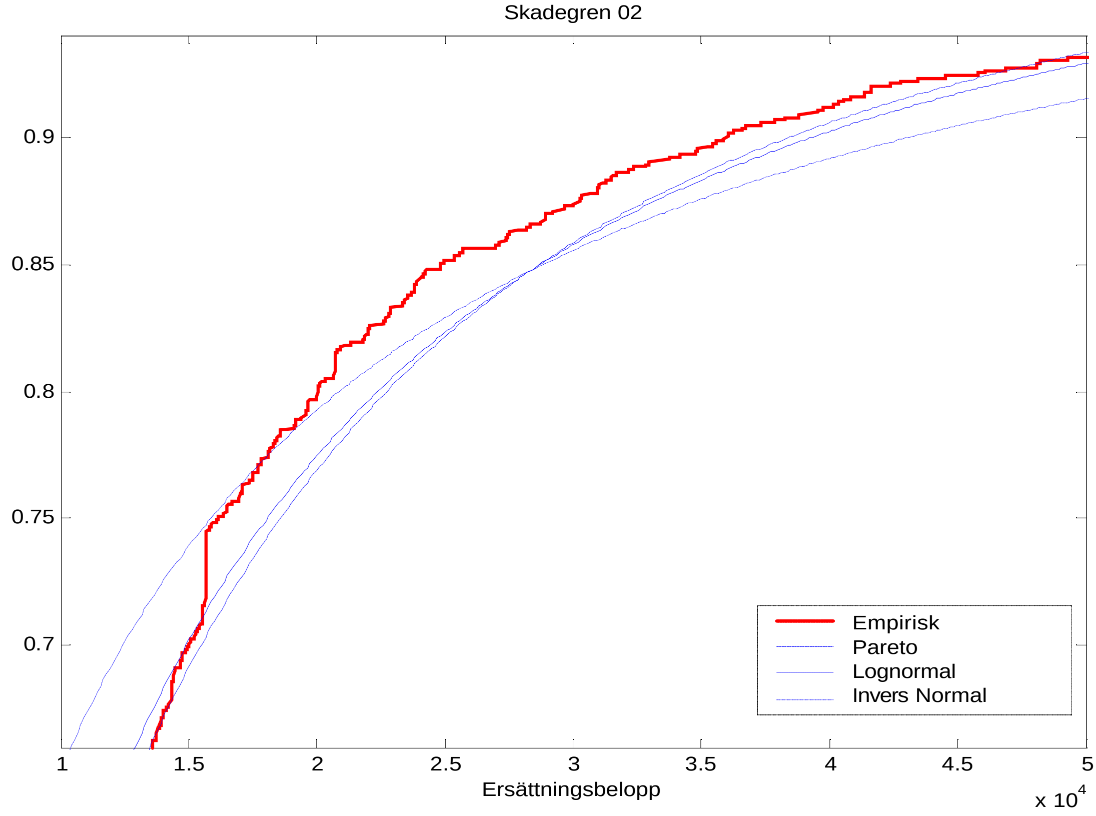
Figur 1c *Intervall 50 000 – största observation.*

A.3.2 Skadegren Villa 02

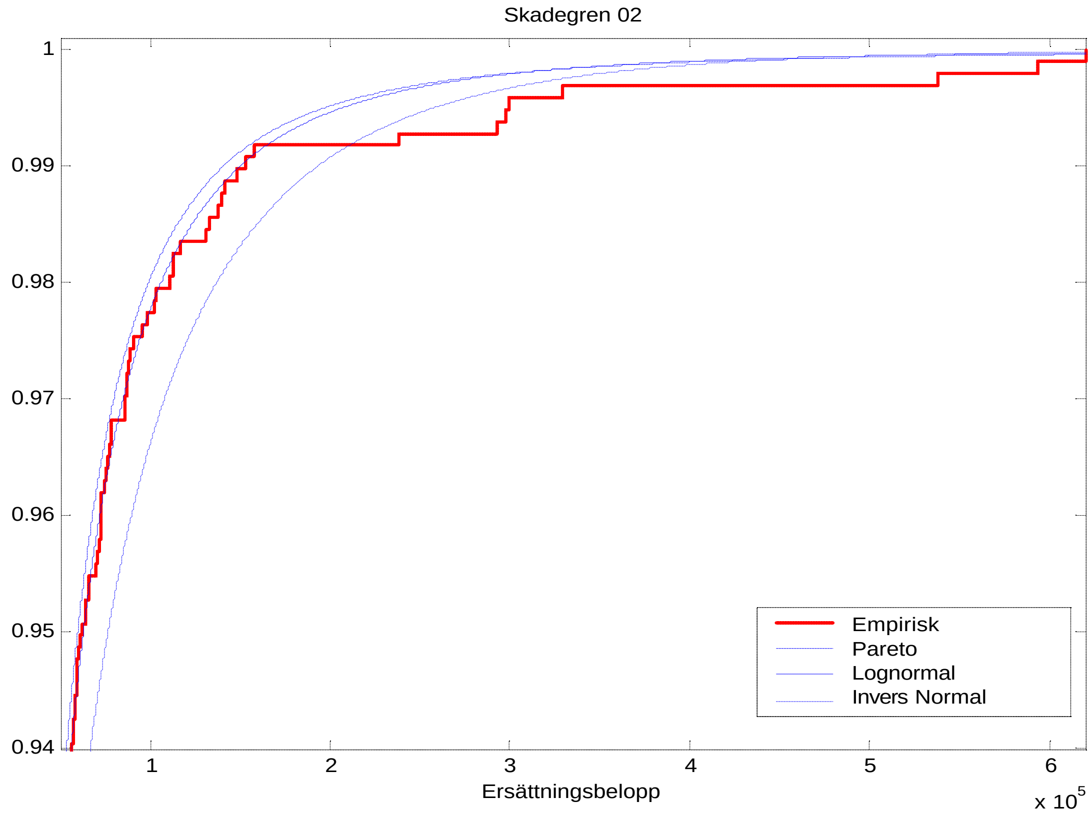
Vald fördelning: lognormal.



Figur 2a *Intervall 0 – 10 000.*



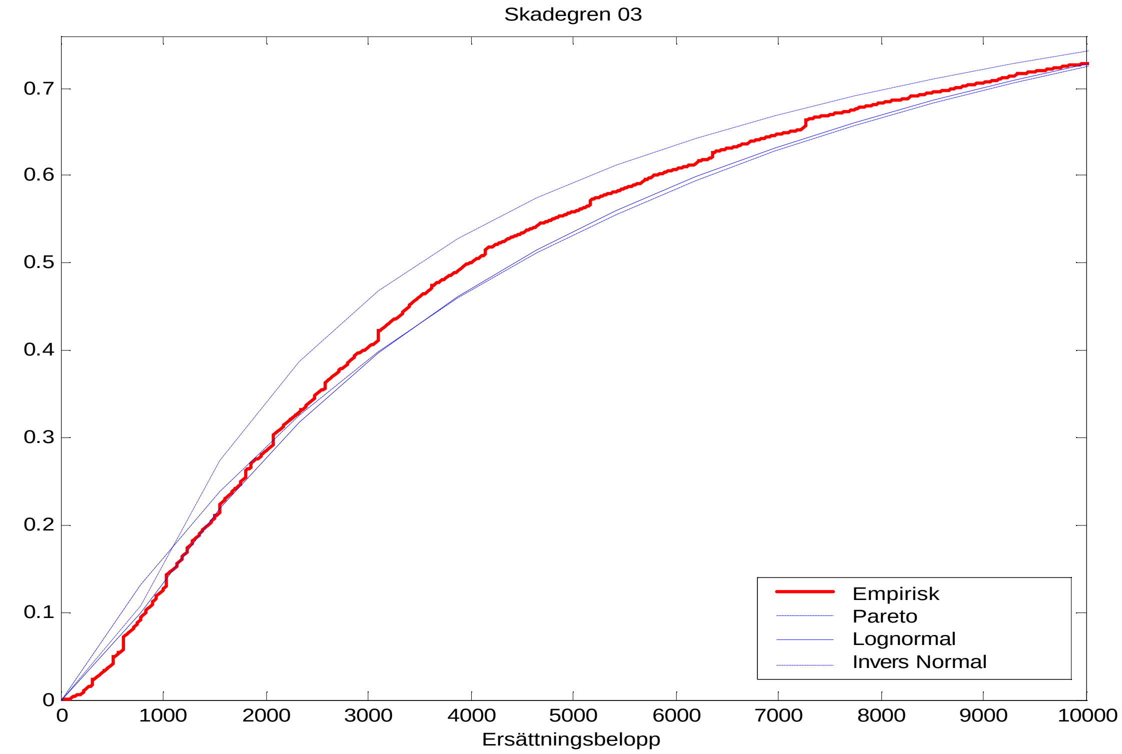
Figur 2b *Intervall 10 000 – 50 000.*



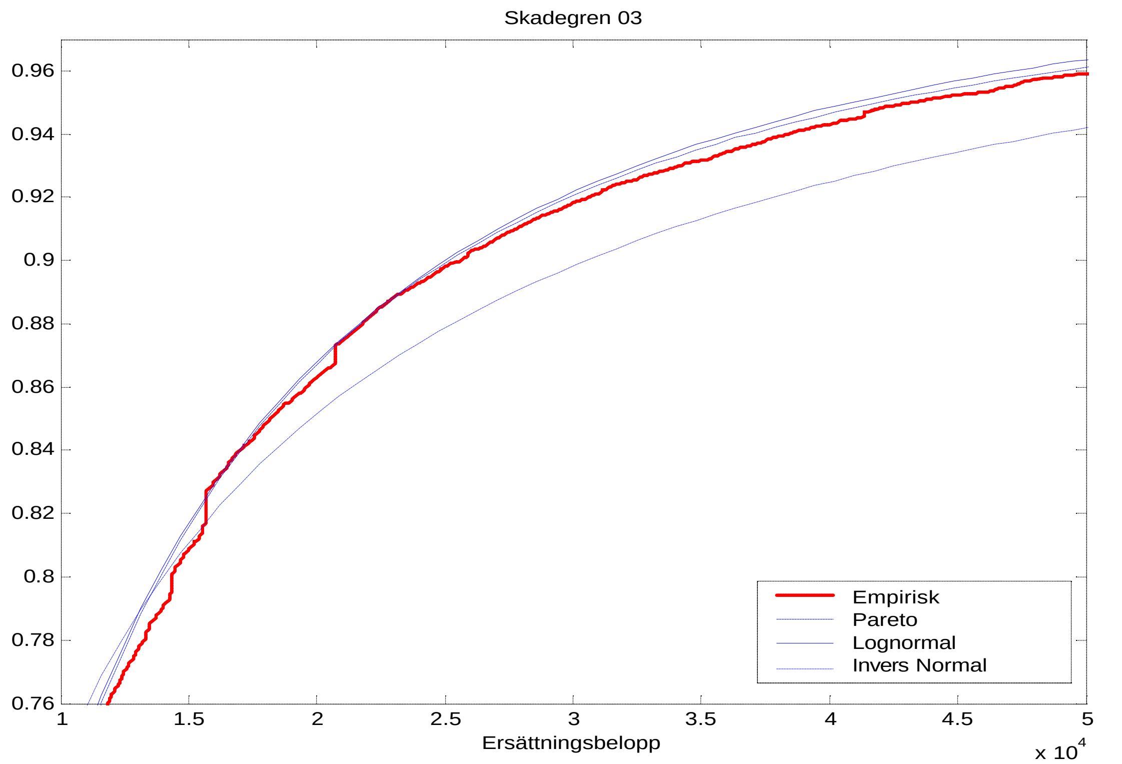
Figur 2c *Intervall 50 000 – största observation.*

A.3.3 Skadegren Villahem 03

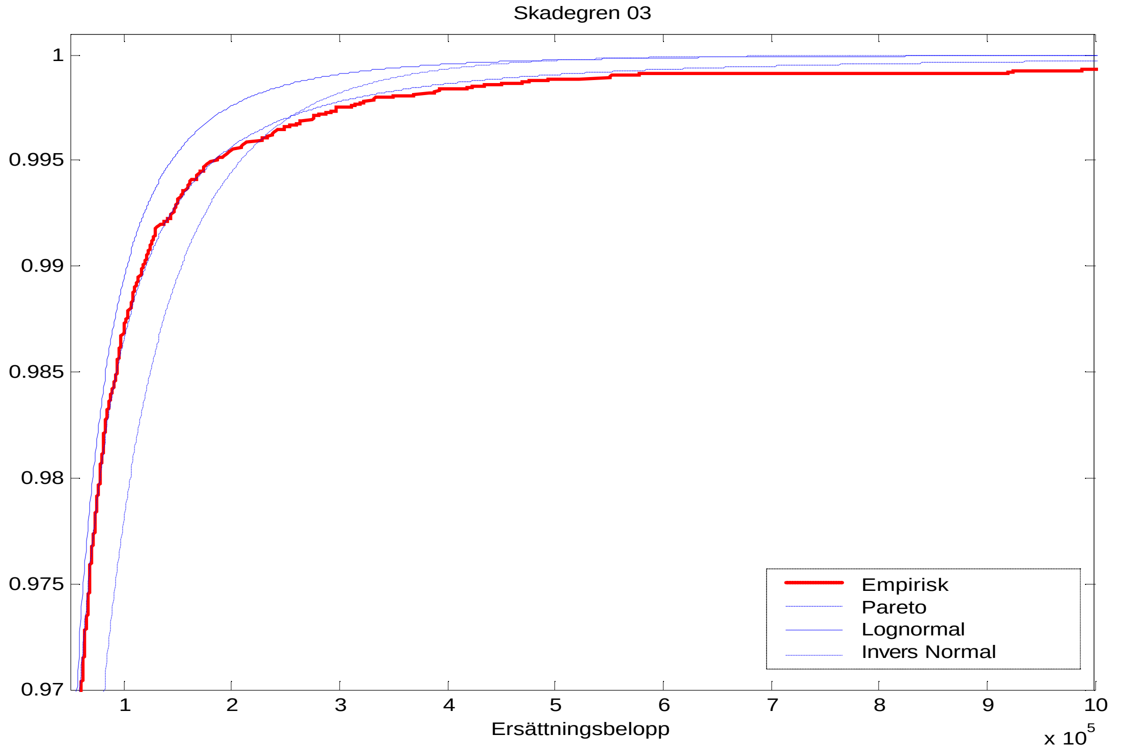
Vald fördelning: Pareto.



Figur 3a *Intervall 0 – 10 000.*



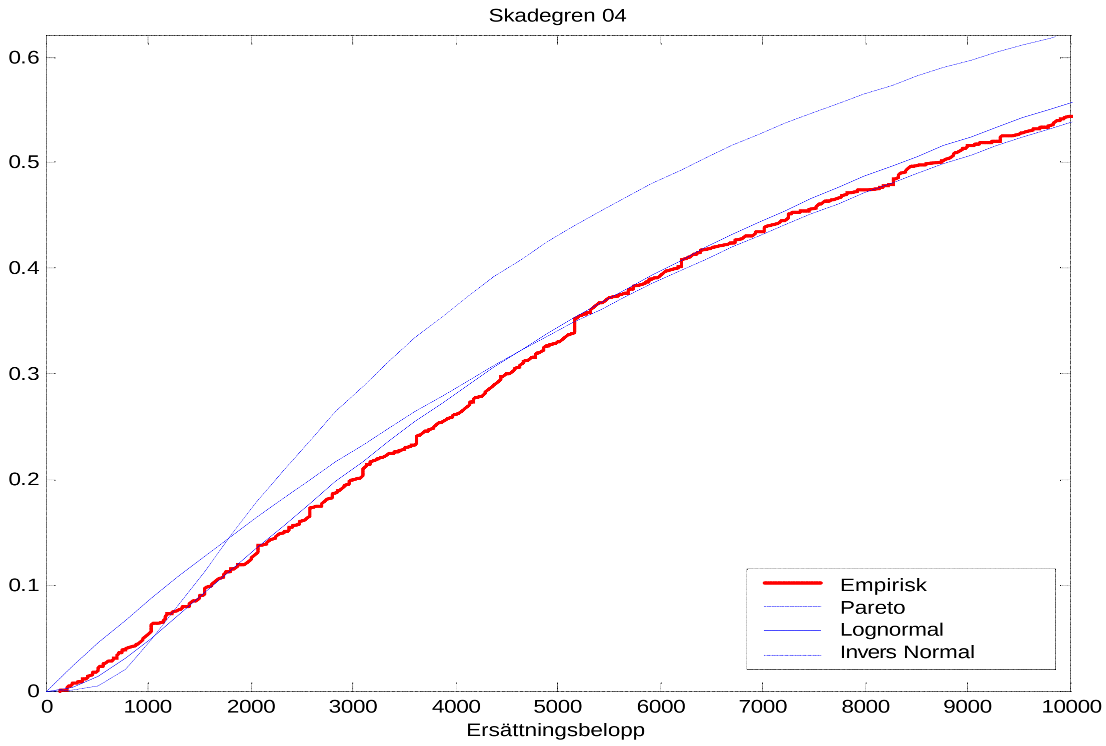
Figur 3b *Intervall 10 000 – 50 000.*



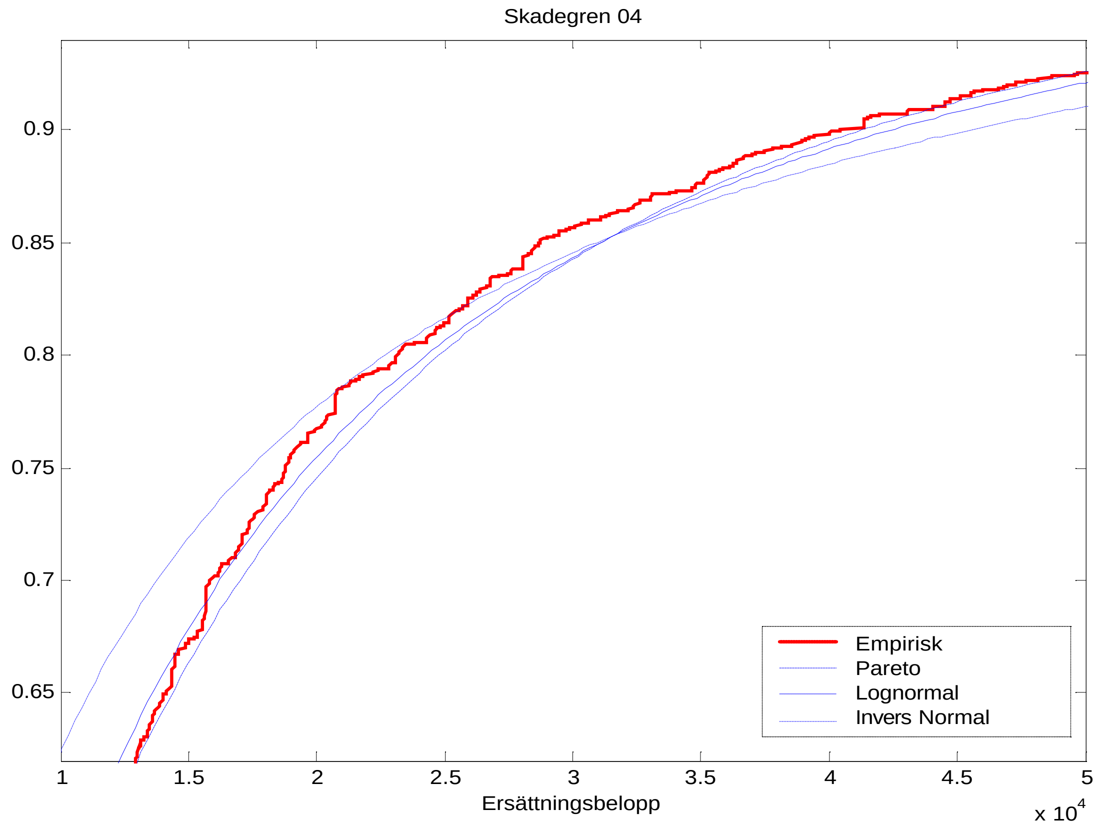
Figur 3c *Intervall 50 000 – 1 000 000.*

A.3.4 Skadegren Fritidshus 04

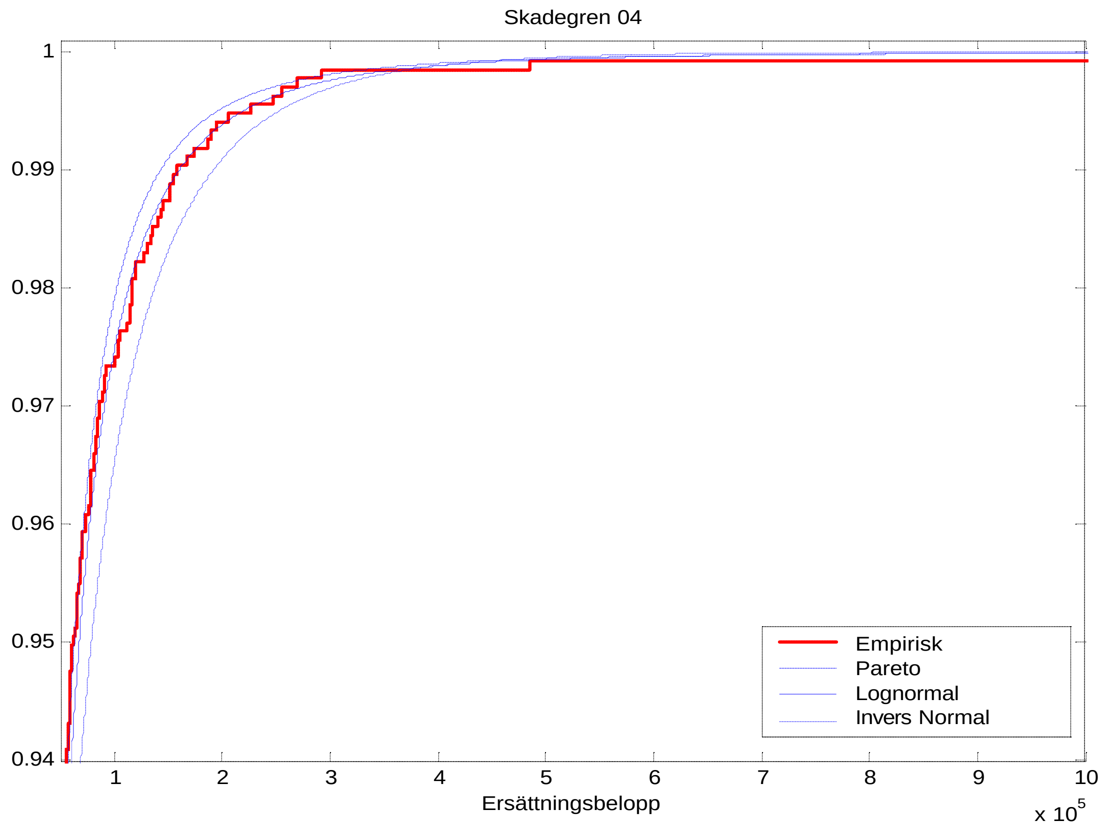
Vald fördelning: lognormal.



Figur 4a *Intervall 0 – 10 000.*



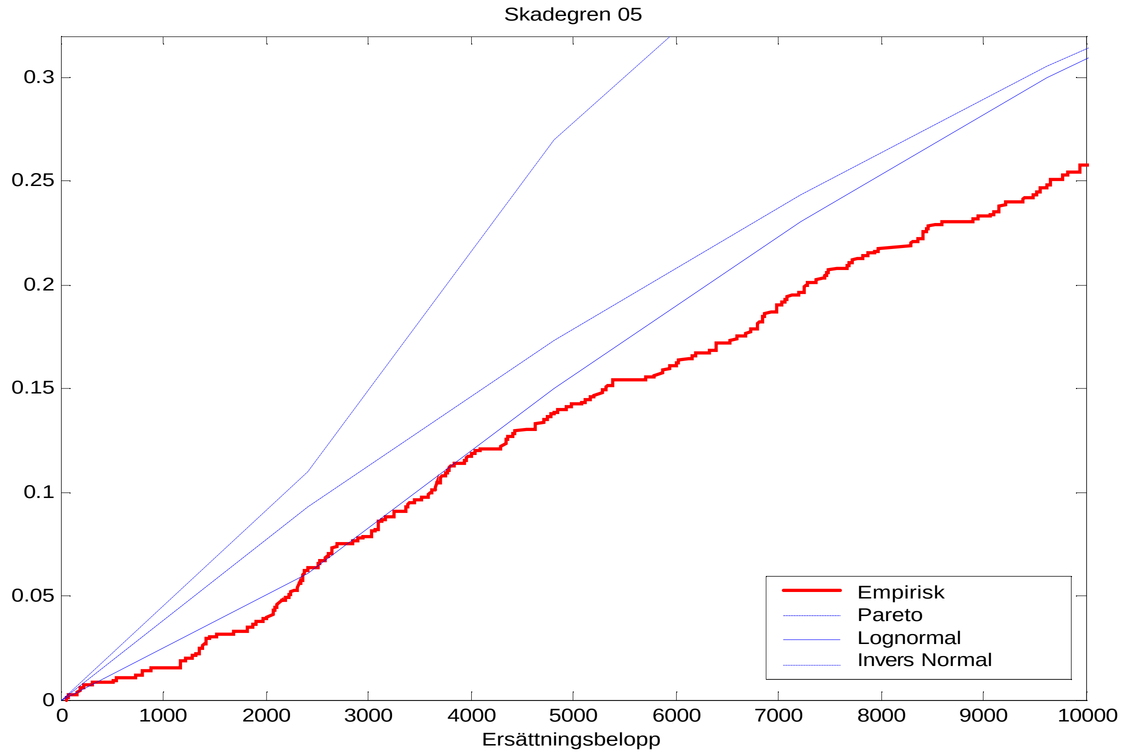
Figur 4b *Intervall 10 000- 50 000.*



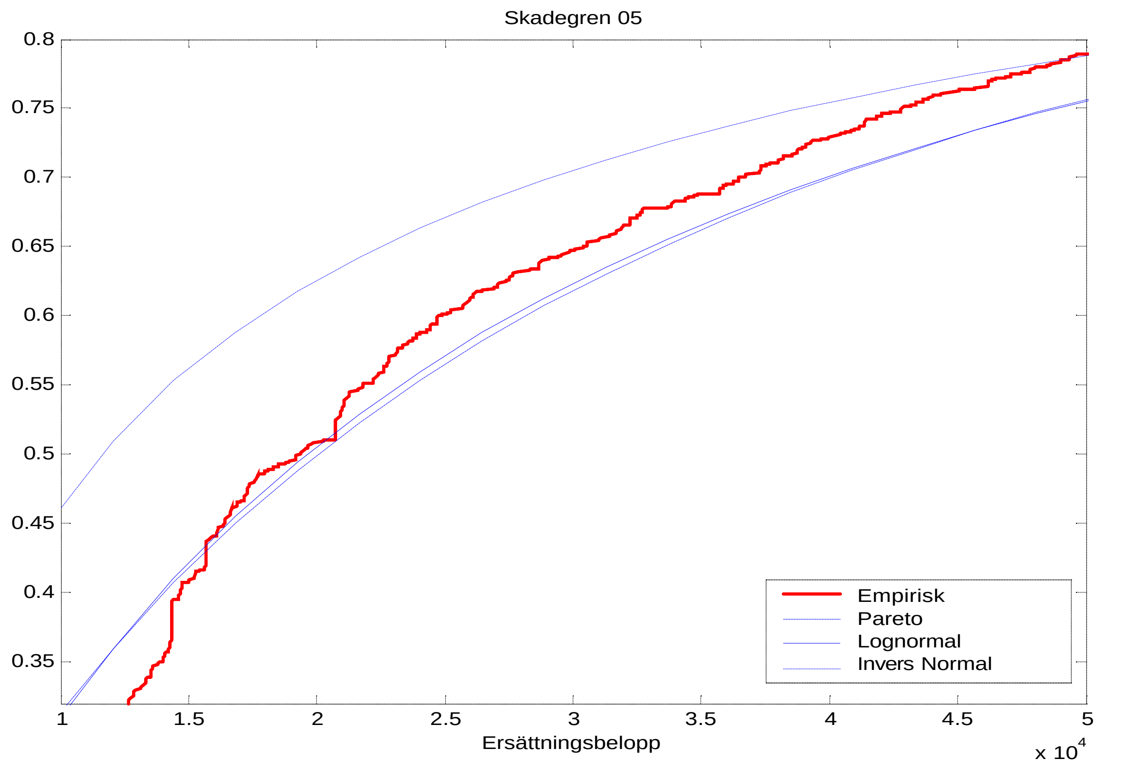
Figur 4c *Intervall 50 000 – 1 000 000.*

A.3.5 Skadegren Fastighet 05

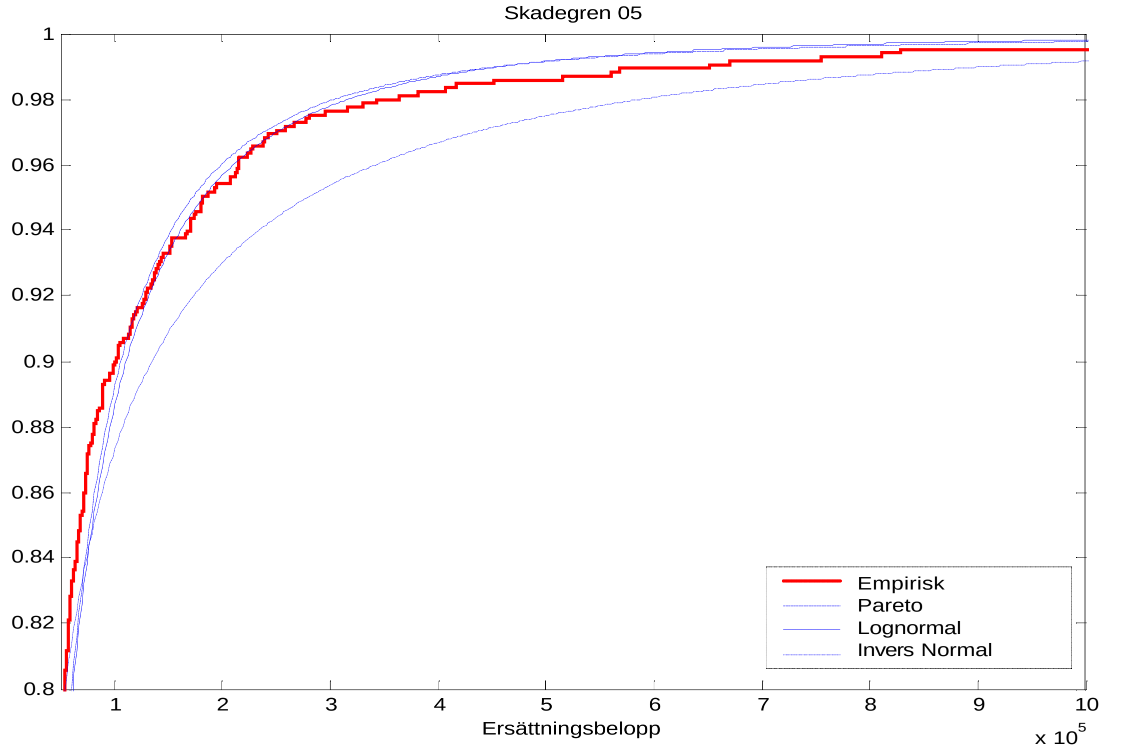
Vald fördelning: lognormal.



Figur 5a *Intervall 0 – 10 000.*



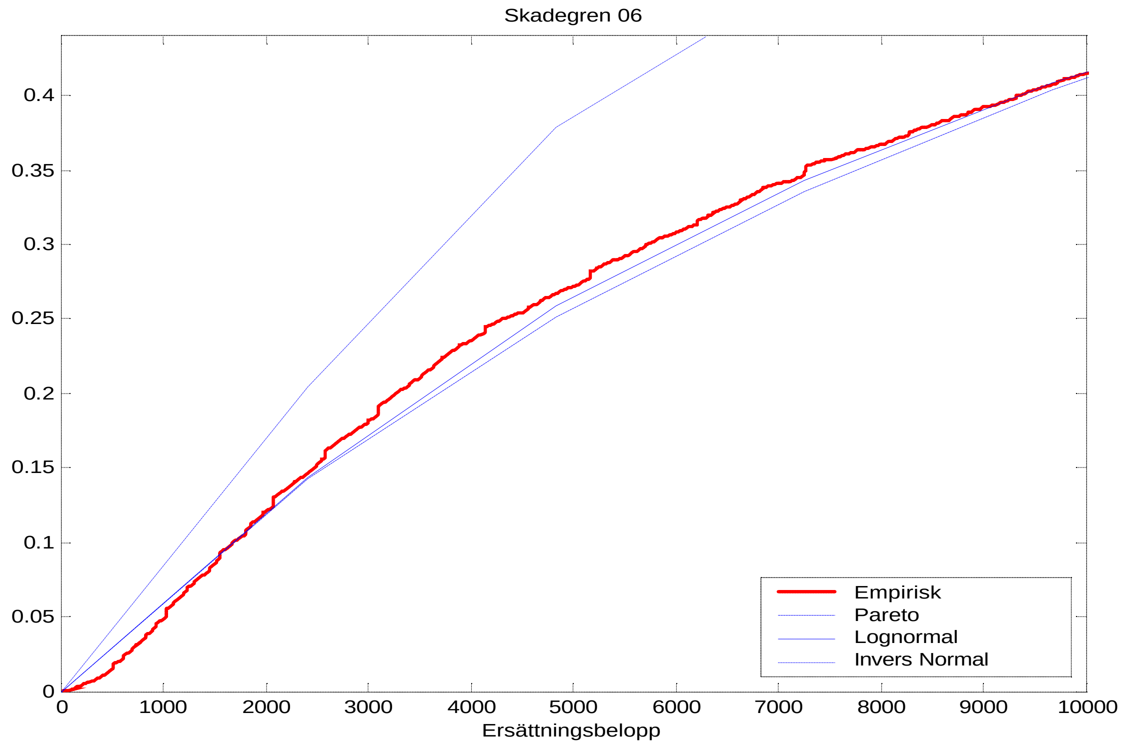
Figur 5b *Intervall 10 000 – 50 000.*



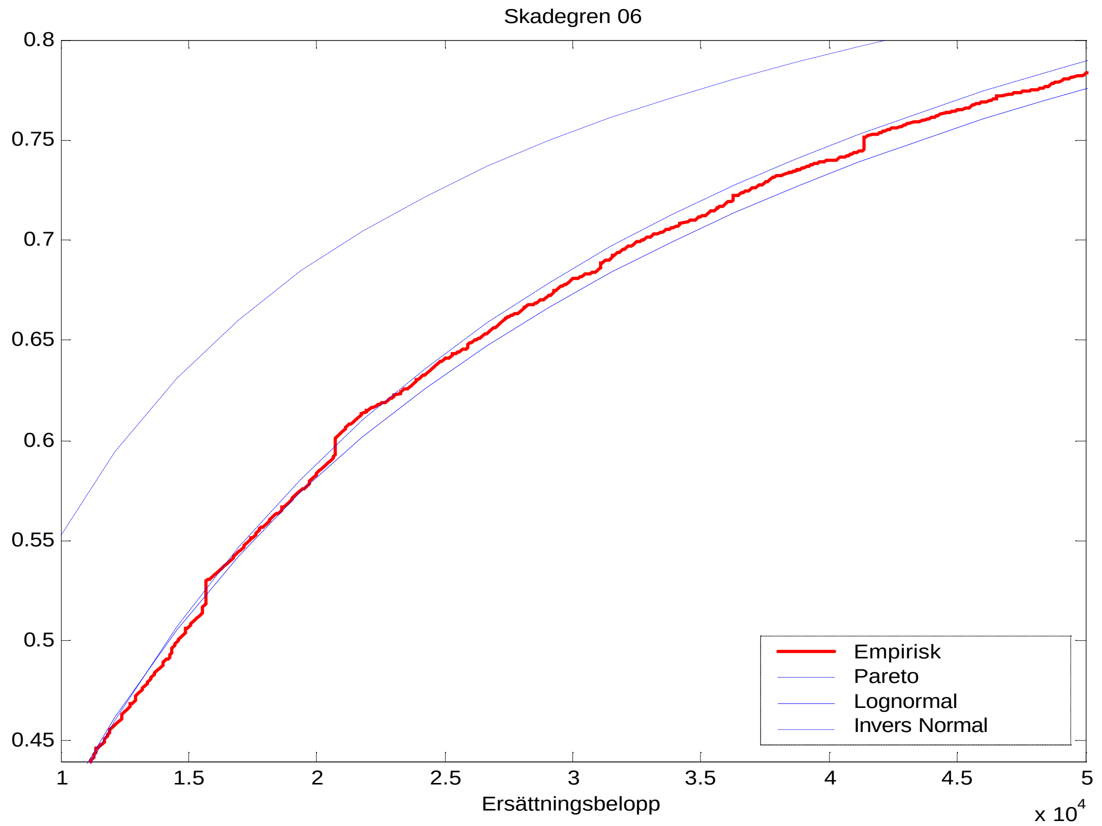
Figur 5c *Intervall 50 000 – 1 000 000.*

A.3.6 Skadegren Lantbruk 06

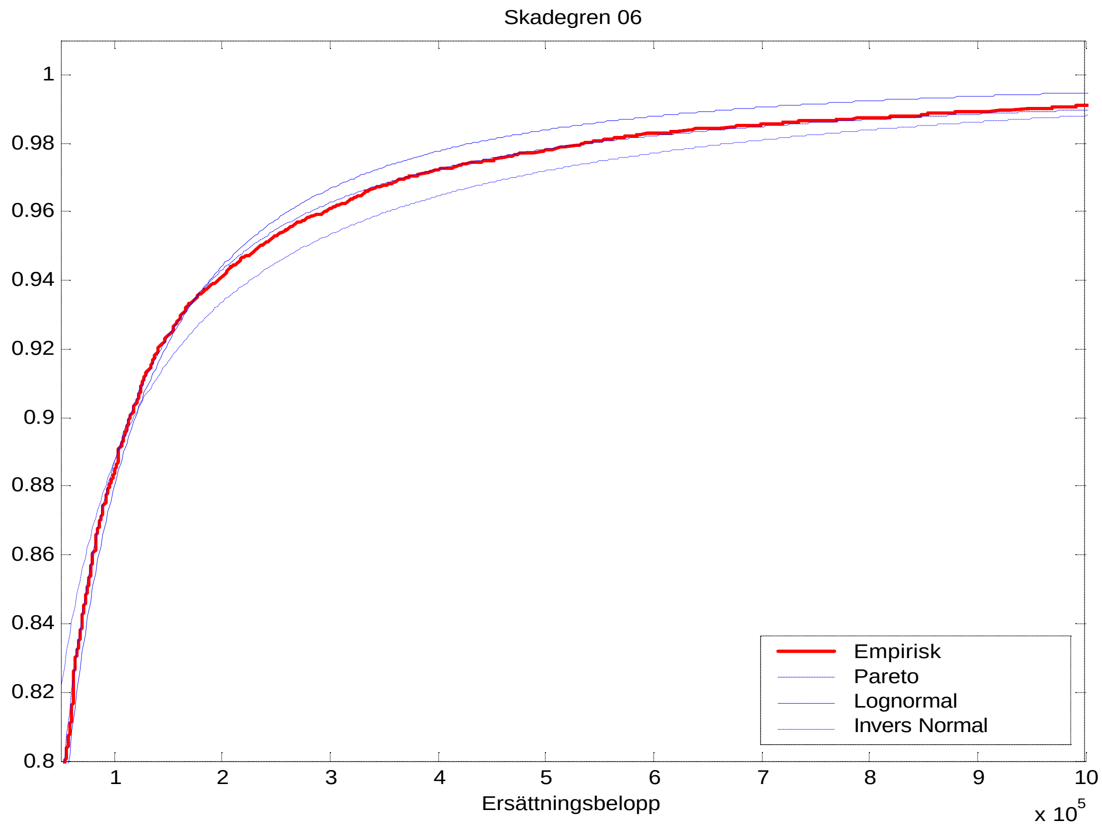
Vald fördelning: Pareto.



Figur 6a *Intervall 0 – 10 000.*



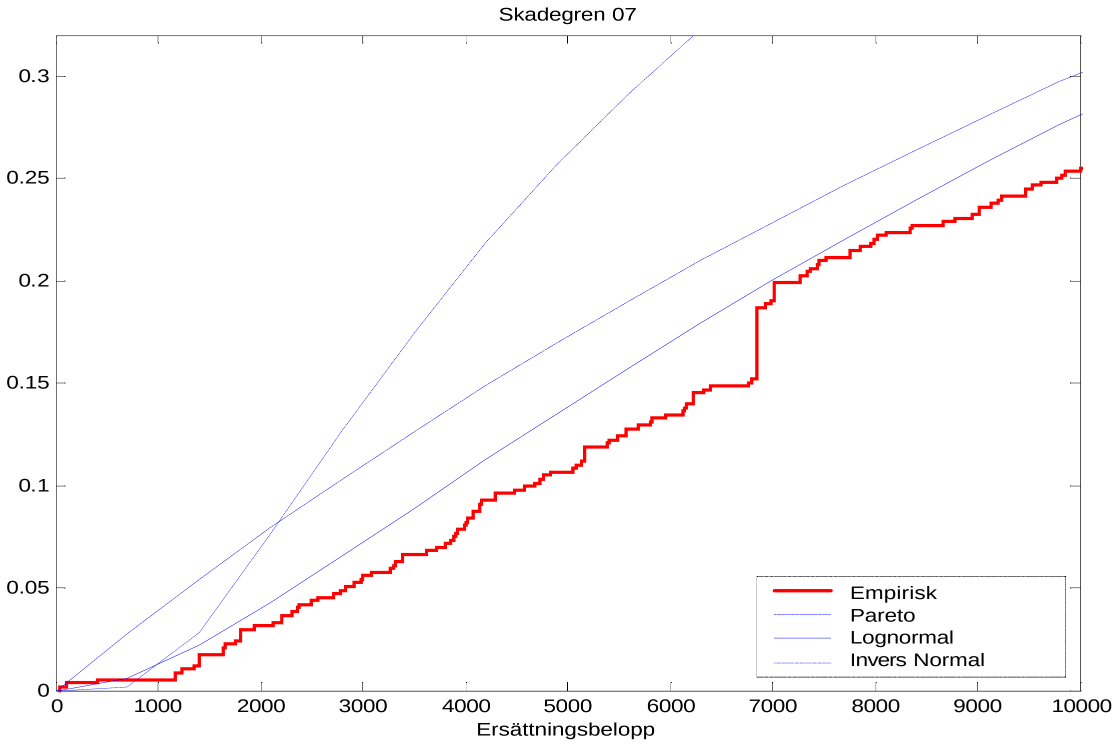
Figur 6b *Intervall 10 000 – 50 000.*



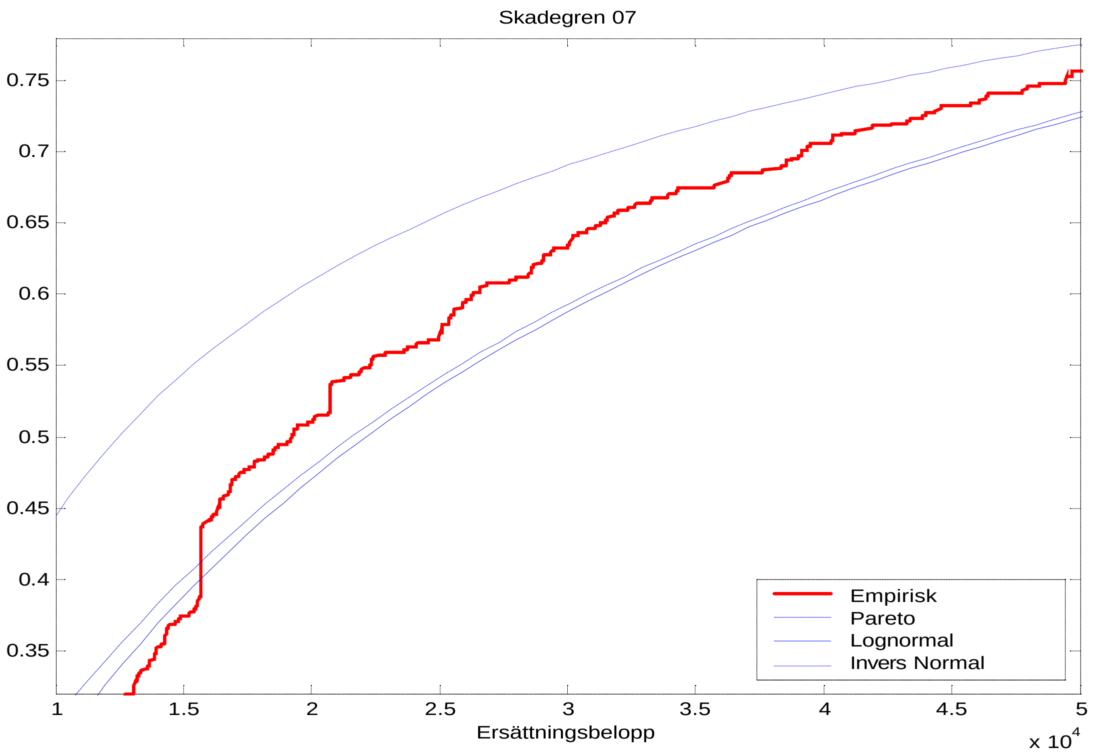
Figur 6c *Intervall 50 000 – 1 000 000.*

A.3.7 Skadegren Paket 07

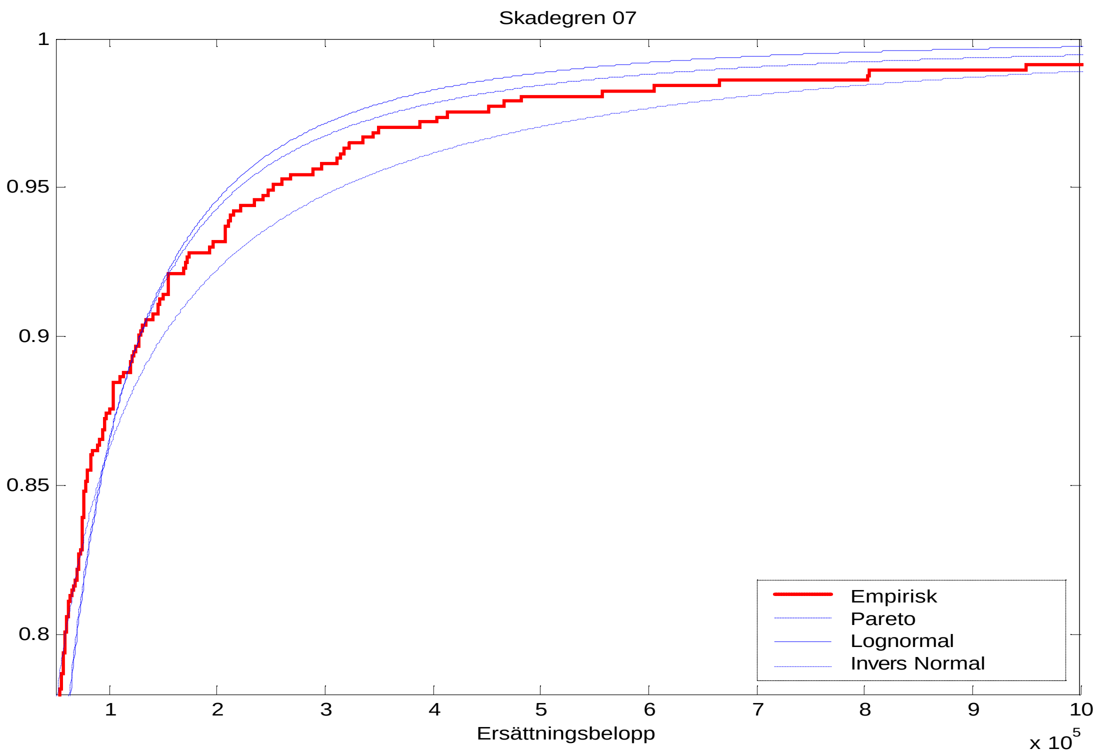
Vald fördelning: Pareto.



Figur 7a *Intervall 0 – 10 000.*



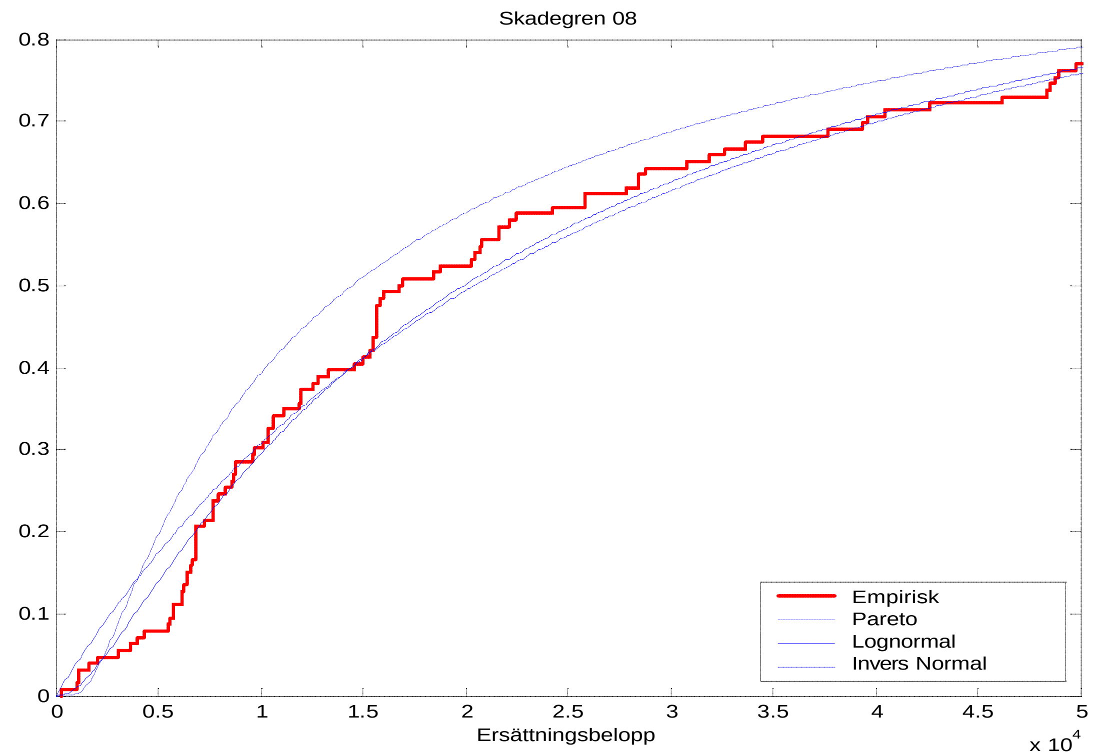
Figur 7b *Intervall 10 000 – 50 000.*



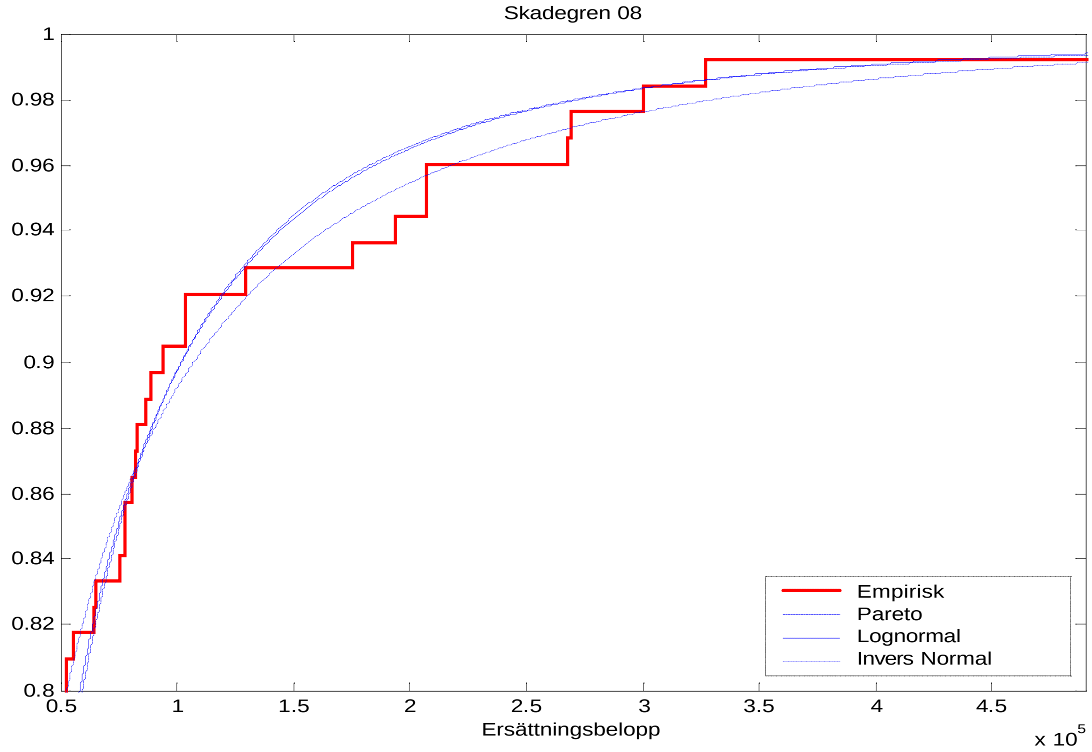
Figur 7c *Intervall 50 000 – 1 000 000.*

A.3.8 Skadegren Företag 08

Vald fördelning: lognormal.



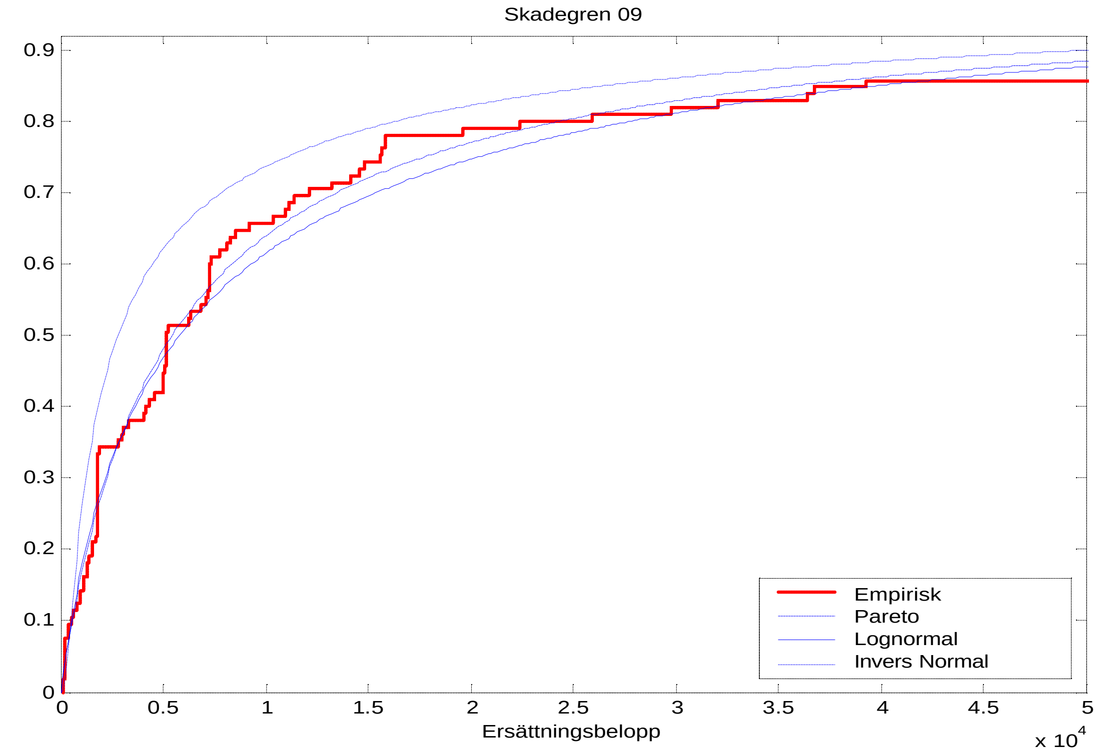
Figur 8a *Intervall 0 – 50 000.*



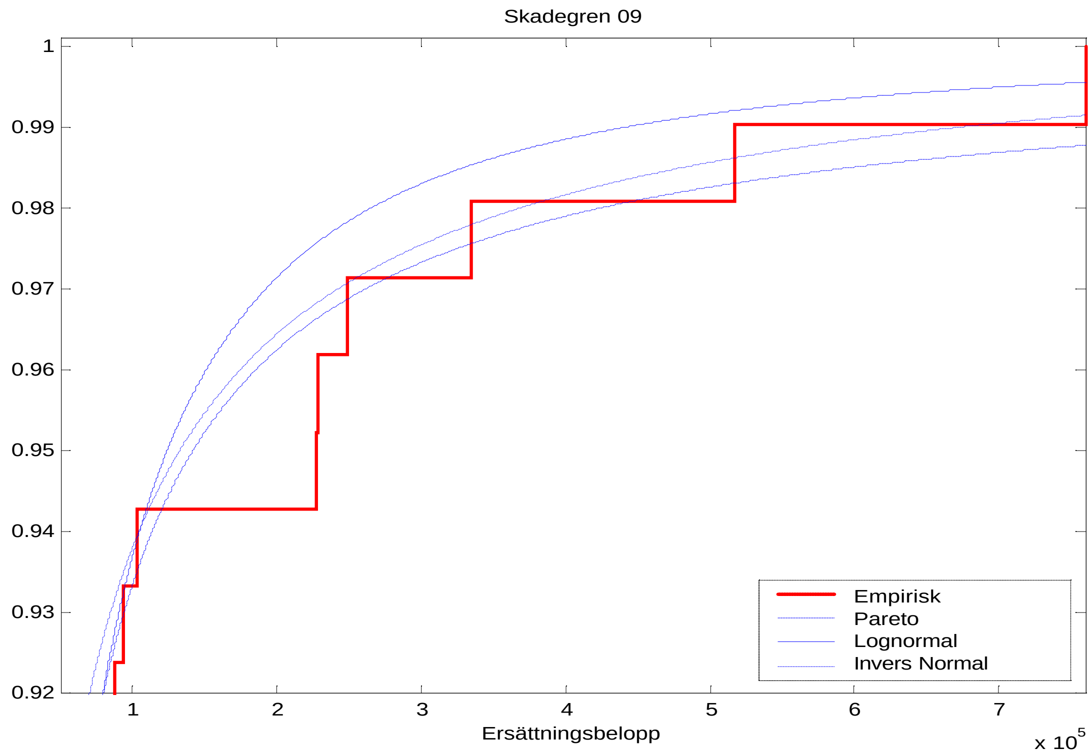
Figur 8b *Intervall 50 000 – största observation.*

A.3.9 Skadegren Företag 09

Vald fördelning: Pareto.



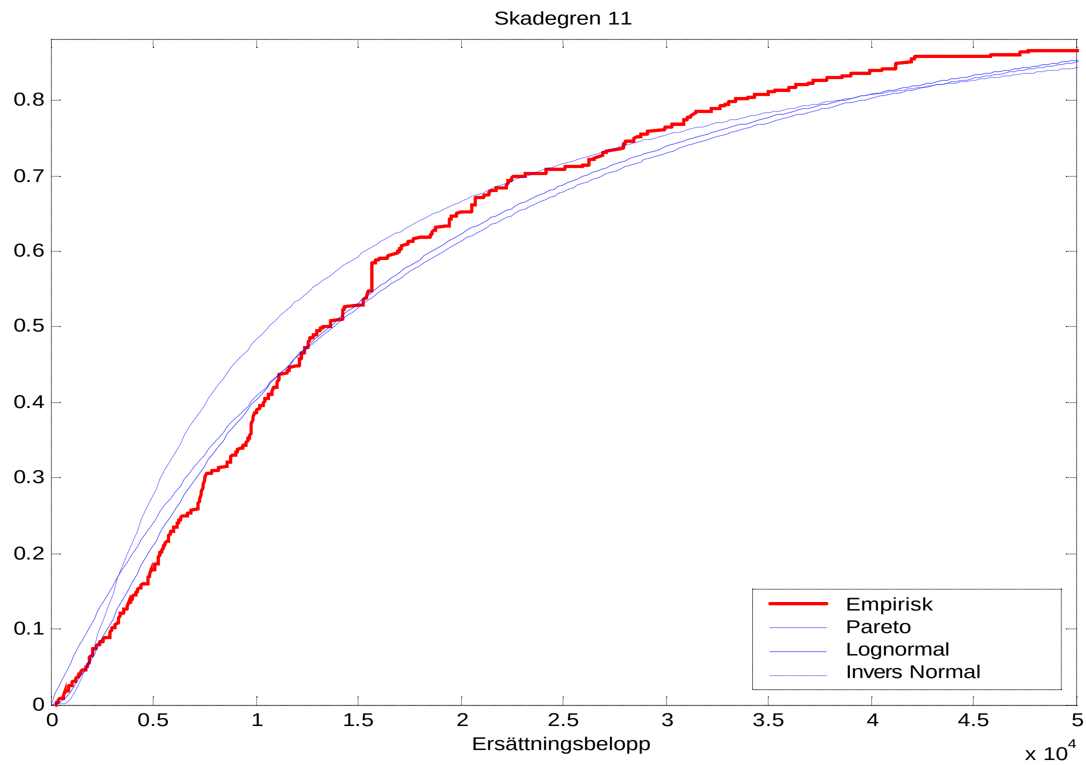
Figur 9a *Intervall 0 – 50 000.*



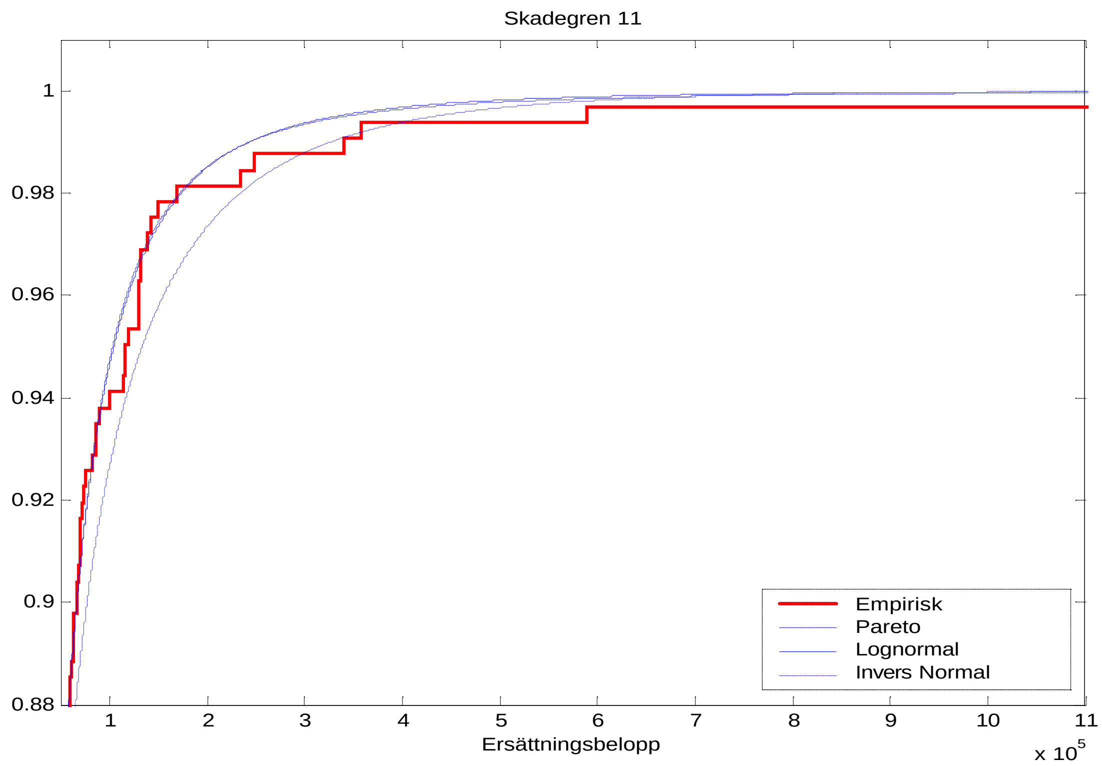
Figur 9b *Intervall 50 000 – största observation.*

A.3.10 Skadegren Affär 11

Vald fördelning: lognormal.



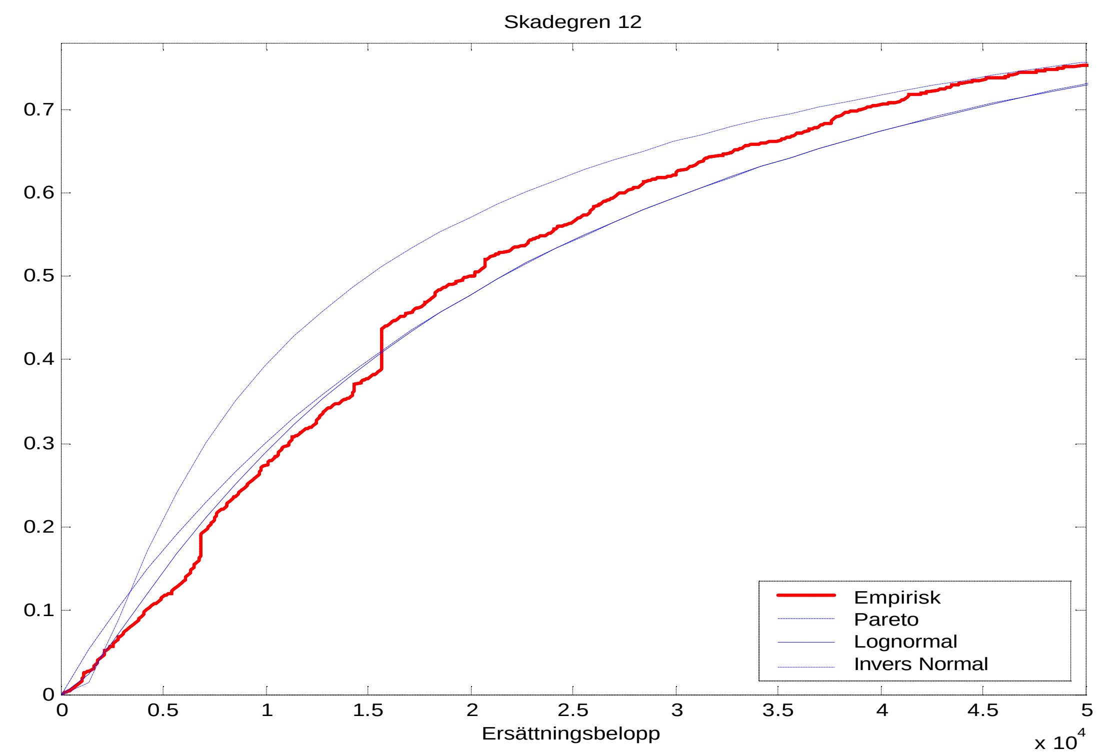
Figur 10a *Intervall 0 – 50 000.*



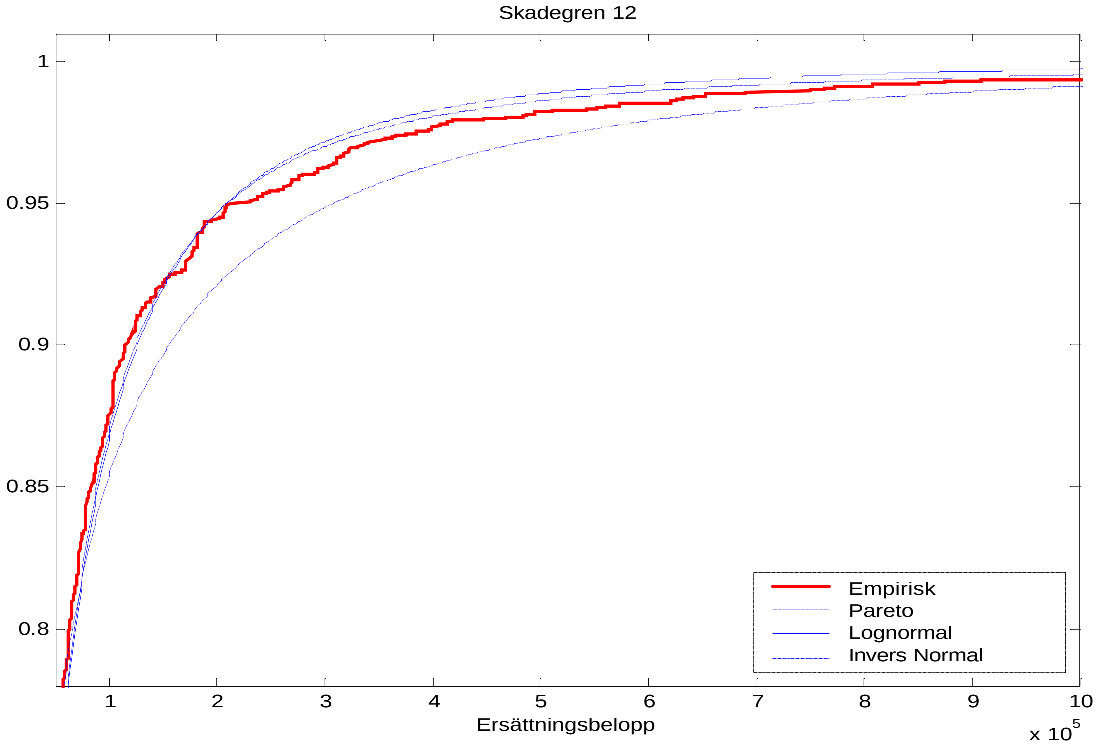
Figur 10b *Intervall 50 000 – största observation.*

A.3.11 Skadegren Kombinerad 12

Vald fördelning: Pareto.



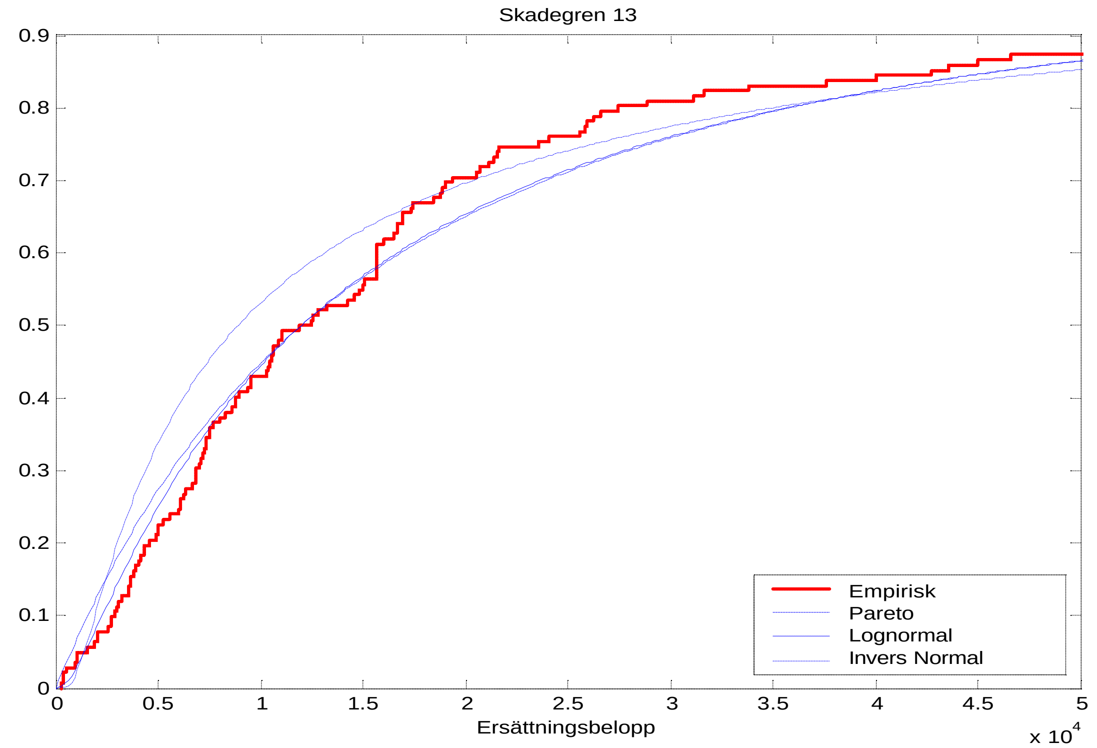
Figur 11a *Intervall 0 – 50 000.*



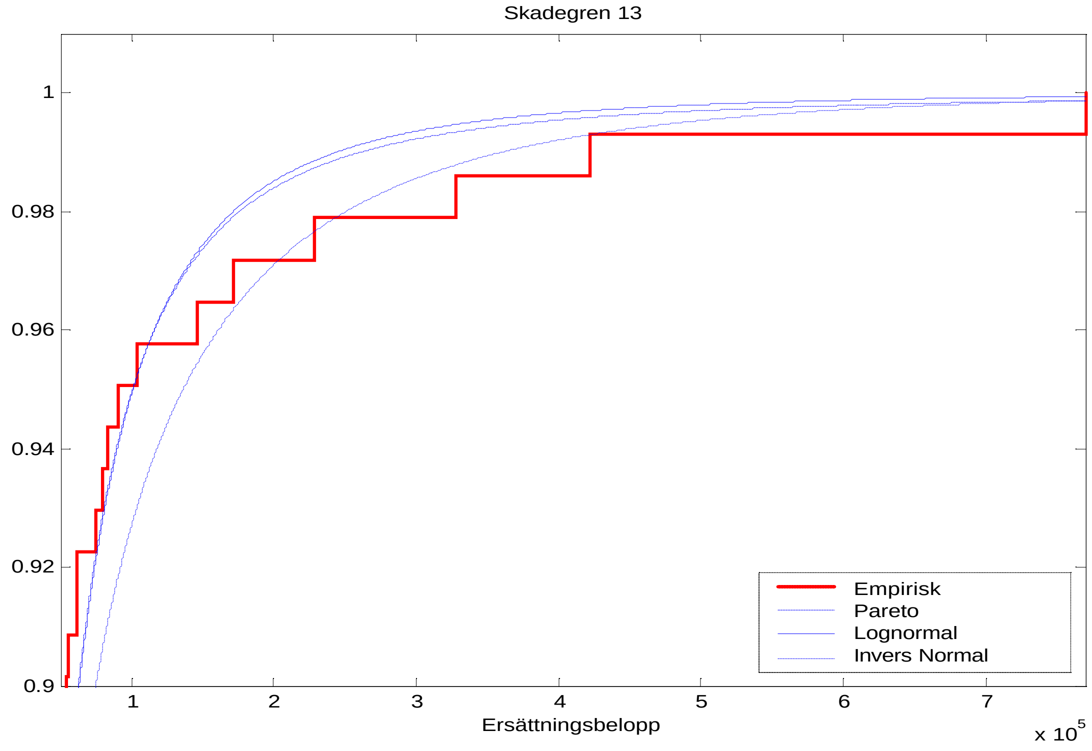
Figur 11b *Intervall 50 000 – 1 000 000.*

A.3.12 Skadegren Småföretag 13

Vald fördelning: Pareto.



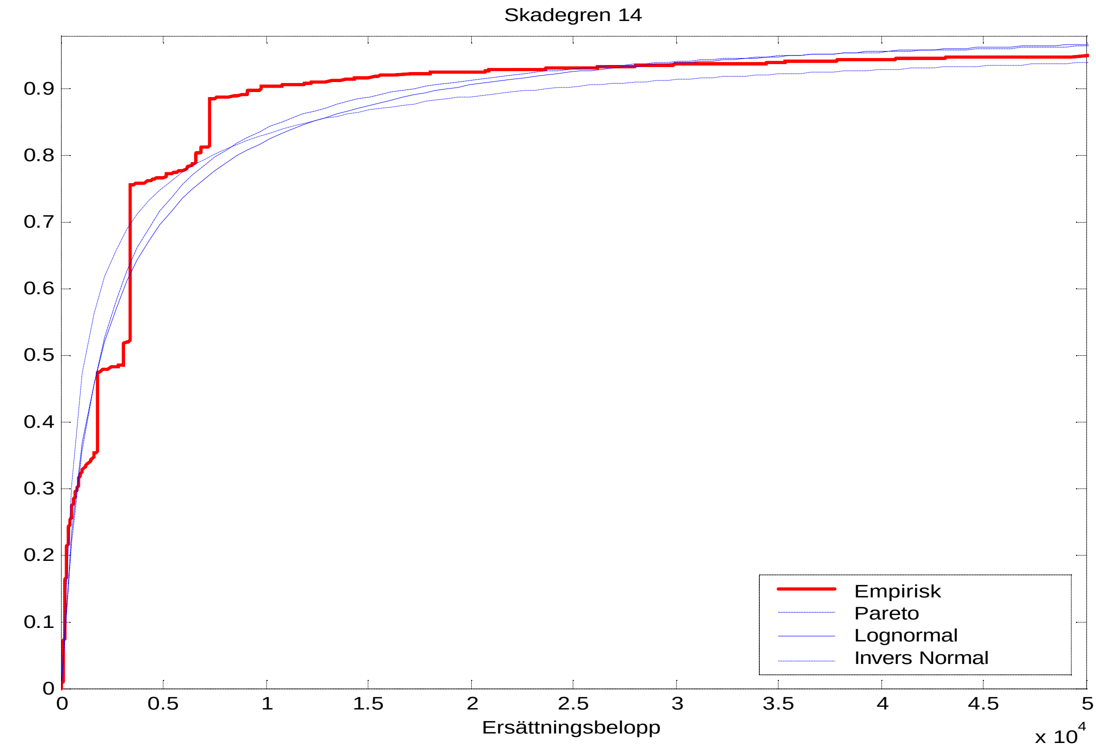
Figur 12a *Intervall 0 – 50 000.*



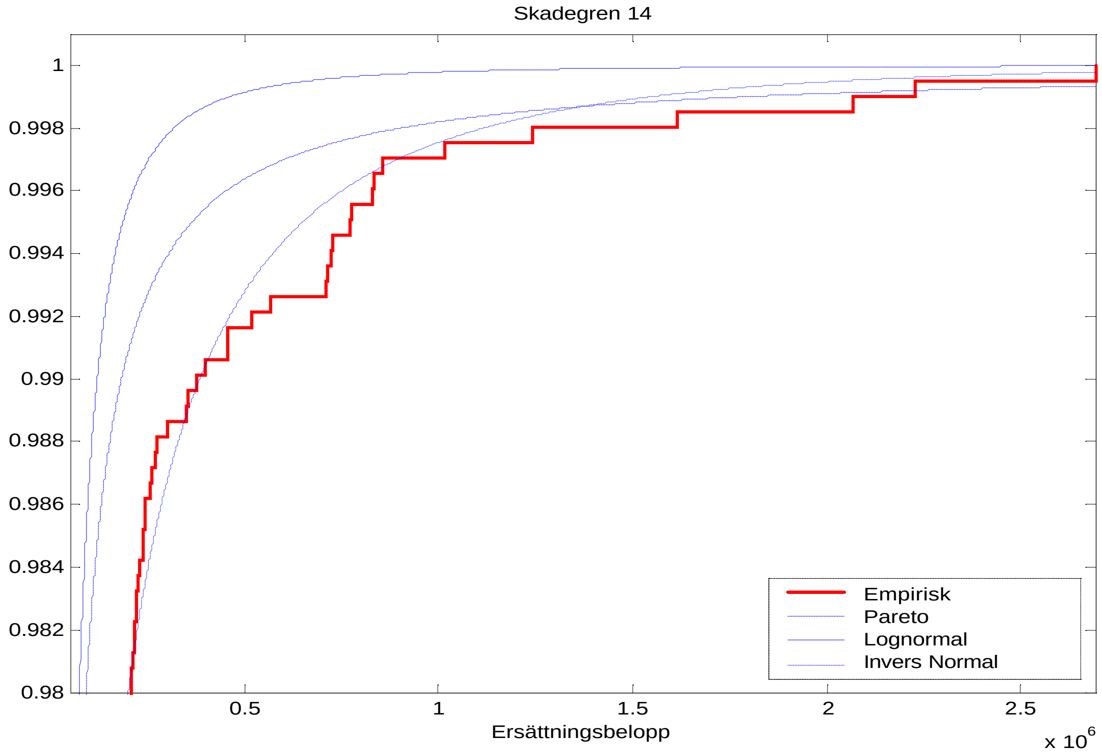
Figur 12b *Intervall 50 000 – största observation.*

A.3.13 Skadegren Kommun 14

Vald fördelning: invers normal.



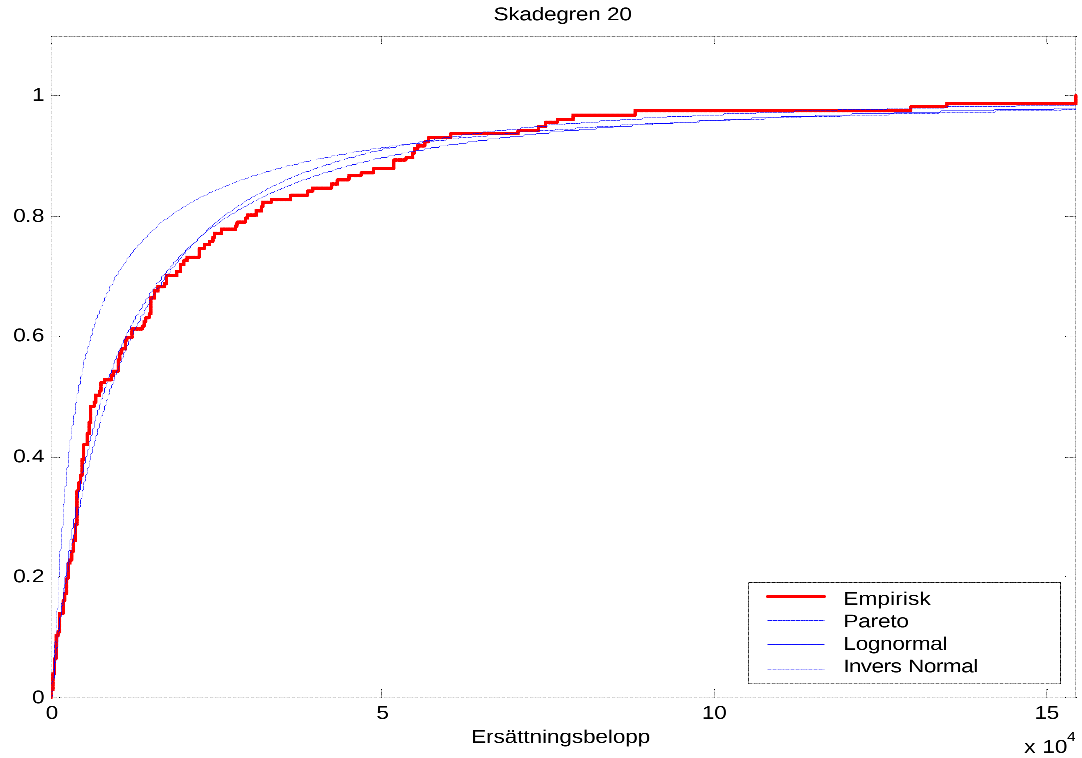
Figur 13a *Intervall 0 – 50 000.*



Figur 13b *Intervall 50 000 – största observation.*

A.3.14 Skadegren Båt 20

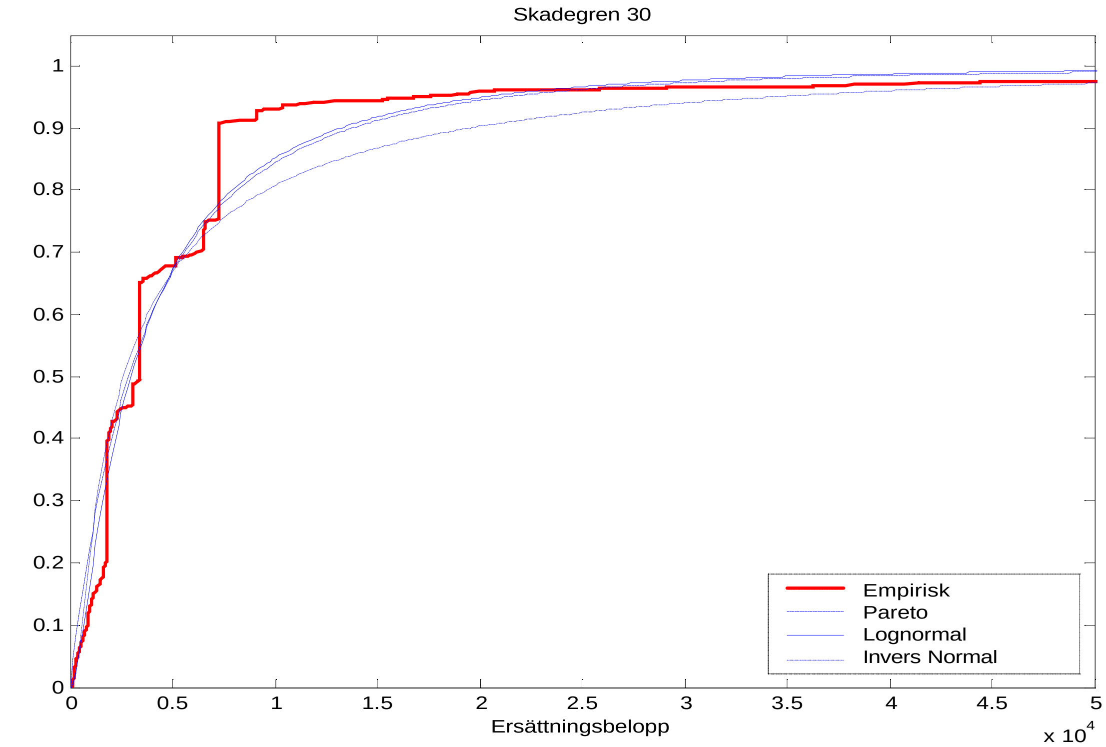
Vald fördelning: lognormal.



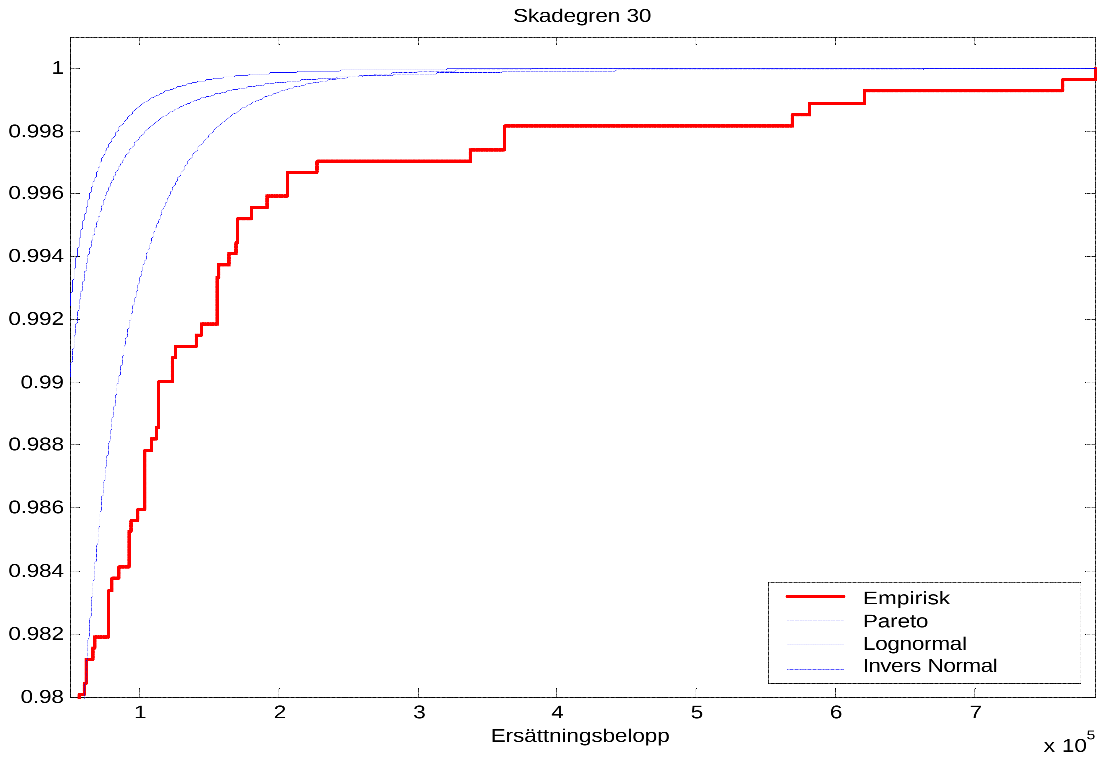
Figur 14 *Intervall 0 – största observation.*

A.3.15 Skadegren Olycksfall 30

Vald fördelning: Pareto.



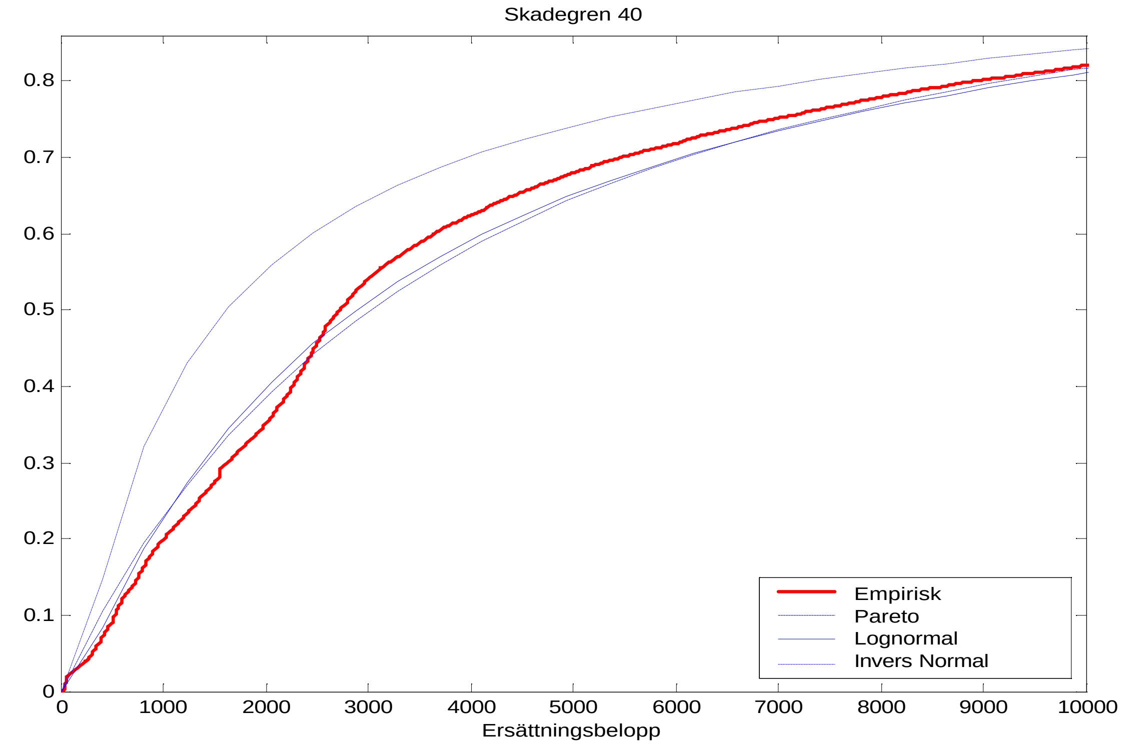
Figur 15a *Intervall 0 – 50 000.*



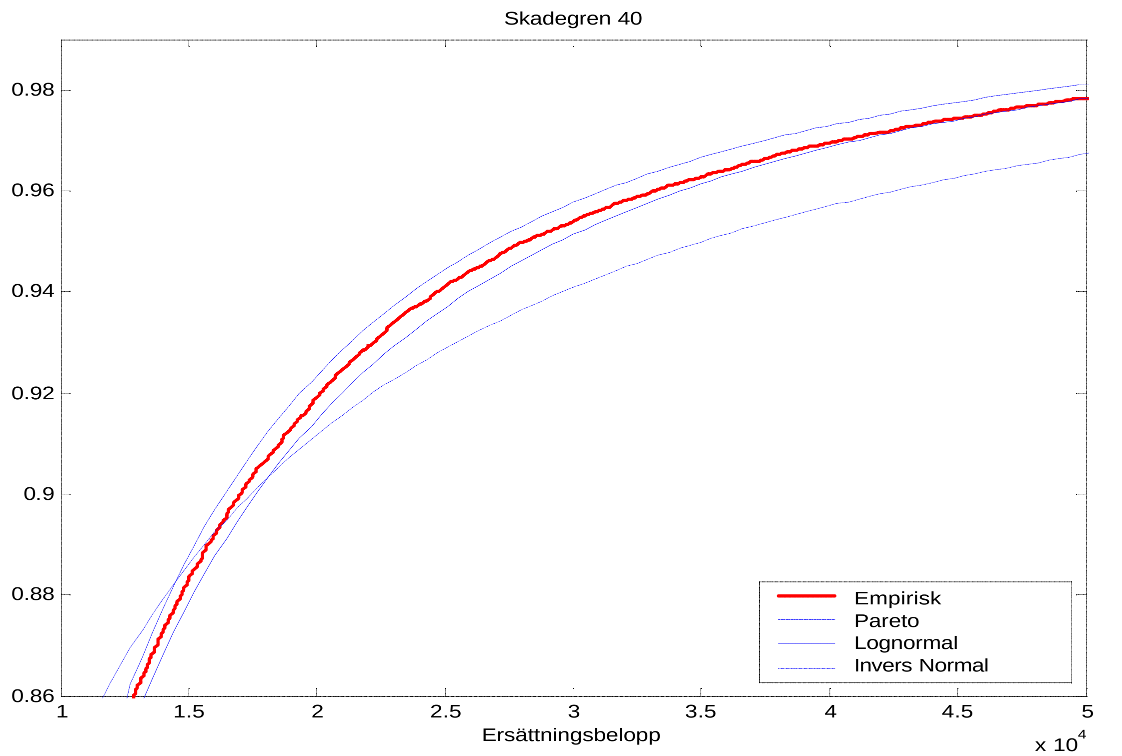
Figur 15b *Intervall 50 000 – största observation.*

A.3.16 Skadegren Motor 40

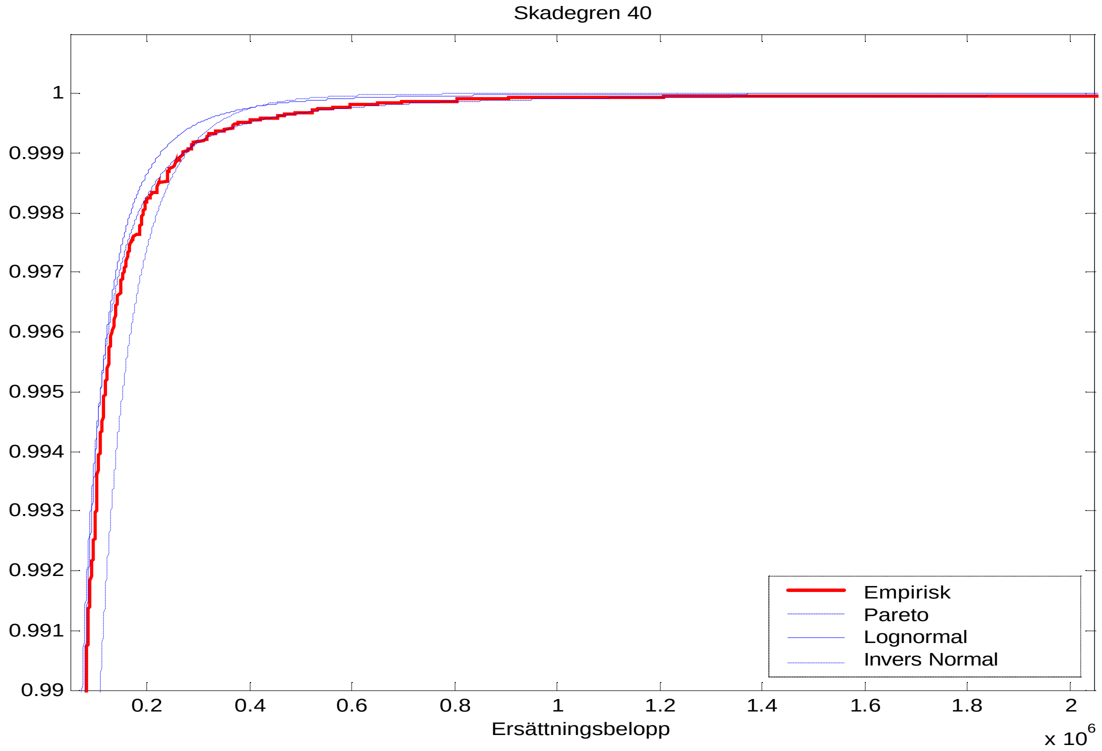
Vald fördelning: lognormal.



Figur 16a *Intervall 0 – 10 000.*



Figur 16b *Intervall 10 000 – 50 000.*



Figur 16c *Intervall 50 000 – största observation.*

A.4 Modifierade statistikor

Genom att beräkna momenten $E\left(\min(c,X)^k\right)=\int_0^c x^k f(x)dx + c^k\left(1-F(c)\right)$ för $k=1,2,3$ kan statistikorna allmänt beräknas enligt

$$E\left(\min(c,X)\right)=E\left(\min(c,X)^1\right)$$

$$Var\left(\min(c,X)\right)=E\left(\min(c,X)^2\right)-E\left(\min(c,X)\right)^2$$

$$Skevhet\left(\min(c,X)\right)=\frac{E\left(\min(c,X)^3\right)-3E\left(\min(c,X)^2\right)E\left(\min(c,X)\right)+2E\left(\min(c,X)\right)^3}{Var\left(\min(c,X)\right)^{3/2}}$$

A.4.1 Paretofördelningen

$$E\left(\min(c,X)\right)=\int_0^c xf(x)dx + c\left(1-F(c)\right)$$

$$=\int_0^c x\frac{ga^g}{(a+x)^{g+1}}dx + c\left(1-\left(1-\left(\frac{a^g}{(a+c)^g}\right)\right)\right)$$

$$=\left[-\frac{xa^g}{(a+x)^g}\right]_0^c+\int_0^c\frac{a^g}{(a+x)^g}dx+\frac{ca^g}{(a+c)^g}$$

$$=-\frac{ca^g}{(a+c)^g}+\left[-\frac{a^g}{(g-1)(a+x)^{g-1}}\right]_0^c+\frac{ca^g}{(a+c)^g}$$

$$=-\frac{a^g}{(g-1)(a+c)^{g-1}}+\frac{a^g}{(g-1)a^{g-1}}$$

$$=\frac{a}{g-1}\left(1-\left(\frac{a}{a+c}\right)^{g-1}\right)$$

$$E\left(\min(c,X)^2\right)=\int_0^c x^2\frac{ga^g}{(a+x)^{g+1}}dx+\frac{c^2a^g}{(a+c)^g}$$

$$=\ldots\{\text{upprepad partialintegration}\}\ldots$$

$$= -\frac{c^2 a^g}{(a+c)^g} - \frac{2ca^g}{(g-1)(a+c)^{g-1}} - \frac{2a^g}{(g-1)(g-2)(a+c)^{g-2}}$$

$$+ \frac{2a^g}{(g-1)(g-2)a^{g-2}} + \frac{c^2 a^g}{(a+c)^g}$$

$$= \frac{2a^2}{(g-1)(g-2)}\left(1 - \left(\frac{a}{a+c}\right)^{g-2}\right) - \frac{2ca^g}{(g-1)(a+c)g-1}$$

$$E\left(\min(c,X)^3\right) = \int_0^c x^3 \frac{ga^g}{(a+x)^{g+1}}\,dx + \frac{c^3 a^g}{(a+c)^g}$$

$$= \ldots\{\text{upprepad partialintegration}\}\ldots$$

$$= -\frac{c^3 a^g}{(a+c)^g} - \frac{3c^2 a^g}{(g-1)(a+c)^{g-1}} - \frac{6ca^g}{(g-1)(g-2)(a+c)^{g-2}}$$

$$- \frac{6a^g}{(g-1)(g-2)(g-3)(a+c)^{g-3}} + \frac{6a^g}{(g-1)(g-2)(g-3)a^{g-3}} + \frac{c^3 a^g}{(a+c)^g}$$

$$= \frac{6a^3}{(g-1)(g-2)(g-3)}\left(1 - \left(\frac{a}{a+c}\right)^{g-3}\right) - \frac{3ca^g}{(g-1)(a+c)^{g-2}}\left(\frac{c}{a+c} + \frac{2}{(g-2)}\right)$$

A.4.2 LogNormalfördelningen

$$E\left(\min(c,X)^k\right) = \int_0^c x^k f(x)\,dx + c^k\left(1 - F(c)\right)$$

Första termen i högerledet blir

$$\int_0^c x^k f(x)\,dx = \int_0^c x^k \frac{1}{\sqrt{2p}\,sx}\exp\left\{-\frac{(\log x - m)^2}{2s^2}\right\}dx$$

$$= \left\{u = \log x,\ \ du = \frac{1}{x}dx\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\log c} e^{uk} \frac{1}{\sqrt{2p}\,s}\exp\left\{-\frac{(u-m)^2}{2s^2}\right\}du$$

$$= \int_{-\infty}^{\log c} \frac{1}{\sqrt{2p}\,s} \exp\left\{-\frac{\left((u-m)^2 - 2uks^2\right)}{2s^2}\right\} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\log c} \frac{1}{\sqrt{2p}\,s} \exp\left\{-\frac{\left(\left(u-(m+ks^2)\right)^2 - 2kms^2 - k^2s^4\right)}{2s^2}\right\} du$$

$$= e^{km+\frac{1}{2}k^2s^2} \int_{-\infty}^{\log c} \frac{1}{\sqrt{2p}\,s} \exp\left\{-\frac{\left(u-(m+ks^2)\right)^2}{2s^2}\right\} du$$

$$= \left\{ v = \frac{(u-(m+s^2))}{s},\;\; dv = \frac{1}{s} du \right\}$$

$$= e^{km+\frac{1}{2}k^2s^2} \int_{-\infty}^{\left(\log c-(m+ks^2)\right)/s} \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\} dv$$

$$= e^{km+\frac{1}{2}k^2s^2} \Phi\left(\frac{\log c - m - ks^2}{s}\right)$$

Tillsammans med andra termen i högerledet ovan blir det $k:te$ momentet

$$E\left(\min(c,X)^k\right) = e^{km+\frac{1}{2}k^2s^2} \Phi\left(\frac{\log c - m - ks^2}{s}\right) + c^k\left(1-\Phi\left(\frac{\log c - m}{s}\right)\right)$$

A.4.3 Inversa Normalfördelningen

Resultaten i denna avdelning är till stora delar hämtade från ter Berg [6].

Den momentgenererande funktionen för $\min(c,X)$ för den inversa Normalfördelningen har utseendet

$$M(t) = e^{ct}\left(1 - F(c \mid m, f)\right) + e^{f-h} F(c \mid m, h)$$

där $m = \dfrac{mf}{h}$ och $h = \left(f^2 - 2tmf\right)^{1/2}$ är hjälpvariabler som beror på t. Det gäller att

$$e^{ct} f(c \mid m, f) = e^{f-h} f(c \mid m, h)\,.$$

Genom att beräkna de tre första derivatorna för den momentgenererande funktionen ovan m a p t och sedan sätta $t = 0$ fås de tre första momenten för $\min(c,X)$. Följande hjälpderivator kommer att komma till användning

$$dm/dt = m^2/h$$
$$dh/dt = -m$$
$$de^{f-h}/dt = me^{f-h}$$
$$dF(c \mid m,h)/dt = 2m\left\{\Phi\left((c-m)\sqrt{h}/\sqrt{mc}\right) - F(c \mid m,h)\right\}$$
$$d\Phi\left((c-m)\sqrt{h}/\sqrt{mc}\right)/dt = -c^2 f(c \mid m,h)/h$$
$$df(c \mid m,h)/dt = (c-m) f(c \mid m,h)$$

Nu fås att

$$M'(t) = ce^{ct}\left(1 - F(c \mid m,f)\right) + me^{f-h}F(c \mid m,h) + 2me^{f-h}\left\{\Phi\left((c-m)\sqrt{h}/\sqrt{mc}\right) - F(c \mid m,h)\right\}$$

$$= ce^{ct}\left(1 - F(c \mid m,f)\right) + me^{f-h}\left\{2\Phi\left((c-m)\sqrt{h}/\sqrt{mc}\right) - F(c \mid m,h)\right\}$$

$$M''(t) = c^2e^{ct}\left(1 - F(c \mid m,f)\right) + \frac{m^2}{h}e^{f-h}\left\{2\Phi\left((c-m)\sqrt{h}/\sqrt{mc}\right) - F(c \mid m,h)\right\}$$

$$+ me^{f-h}\left\{2\left(-c^2 f(c \mid m,h)/h\right) - 2m\left(\Phi\left((c-m)\sqrt{h}/\sqrt{mc}\right) - F(c \mid m,h)\right)\right\}$$

$$= c^2e^{ct}\left(1 - F(c \mid m,f)\right)$$

$$+ \frac{m}{h}e^{f-h}\left\{2m\Phi\left((c-m)\sqrt{h}/\sqrt{mc}\right) + m(h-1)F(c \mid m,h) - 2c^2 f(c \mid m,h)\right\}$$

$$M'''(t) = c^3e^{ct}\left(1 - F(c \mid m,f)\right)$$

$$+ \frac{2m^2}{h^2}e^{f-h}\left\{2m\Phi\left((c-m)\sqrt{h}/\sqrt{mc}\right) + m(h-1)F(c \mid m,h) - 2c^2 f(c \mid m,h)\right\}$$

$$+ \frac{m^2}{h}e^{f-h}\left\{2m\Phi\left((c-m)\sqrt{h}/\sqrt{mc}\right) + m(h-1)F(c \mid m,h) - 2c^2 f(c \mid m,h)\right\}$$

$$+ \frac{m}{h}e^{f-h}\left\{(2m/h)\left(m\Phi\left((c-m)\sqrt{h}/\sqrt{mc}\right) - c^2 f(c \mid m,h)\right)\right.$$

$$+ 2m^2\left((1 - 1/2h - h)F(c \mid m,h) + (h-1)\Phi\left((c-m)\sqrt{h}/\sqrt{mc}\right)\right)$$

$$\left. - 2c^2(c-m) f(c \mid m,h)\right\}$$

$$= c^3e^{ct}\left(1 - F(c \mid m,f)\right)$$

$$+\frac{m}{h^2}e^{f-h}\left\{2m^2\left(3+h^2\right)\Phi\left((c-m)\sqrt{h}/\sqrt{mc}\right)+m^2\left(3h-h^2-3\right)F(c\mid m,h)\right.$$

$$\left.-c^2\left(2ch+h+4m\right)f(c\mid m,h)\right\}$$

Momenten kring origo blir nu

$$E\left(\min(c,X)\right)=M'(0)$$

$$=c\left(1-F(c\mid m,f)\right)+2m\Phi\left(\frac{(c-m)\sqrt{f}}{\sqrt{mc}}\right)-mF(c\mid m,f)$$

$$E\left(\min(c,X)^2\right)=M''(0)$$

$$=c^2\left(1-F(c\mid m,f)\right)+\frac{2m^2}{f}\Phi\left(\frac{(c-m)\sqrt{f}}{\sqrt{mc}}\right)+m^2\left(1-\frac{1}{f}\right)F(c\mid m,f)$$

$$-\frac{2c^2m}{f}f(c\mid m,f)$$

$$E\left(\min(c,X)^3\right)=M'''(0)$$

$$=c^3\left(1-F(c\mid m,f)\right)+2m^3\left(1+\frac{3}{f^2}\right)\Phi\left(\frac{(c-m)\sqrt{f}}{\sqrt{mc}}\right)$$

$$+m^3\left(\frac{3}{f}-\frac{3}{f^2}-1\right)F(c\mid m,f)-c^2m\left(\frac{2c}{f}+\frac{1}{f}+\frac{4m}{f^2}\right)f(c\mid m,f)$$

A.5 Skevheten för summan av oberoende stokastiska variabler

Låt $\{X_i\ ; i = 1,2,3,\ldots\}$ vara en mängd av oberoende stokastiska variabler och låt k_2^i och k_3^i beteckna andra respektive tredje centralmomentet för X_i. Skevheten definieras som tredje centralmomentet dividerat med andra centralmomentet upphöjt till 3/2. Skevheten för summan blir nu

$$Skevhet\left(\sum_i X_i\right) = \frac{E\left(\left(\sum_i X_i - E\left(\sum_i X_i\right)\right)^3\right)}{E\left(\left(\sum_i X_i - E\left(\sum_i X_i\right)\right)^2\right)^{3/2}}$$

Utveckling av täljaren

$$E\left(\left(\sum_i X_i - E\left(\sum_i X_i\right)\right)^3\right) = E\left(\left(\sum_i \left(X_i - E(X_i)\right)\right)^3\right) = \left\{X_i^* = X_i - E(X_i)\right\}$$

$$= E\left(\sum_i \left(X_i^*\right)^3 + 3\sum\sum\nolimits_{i\neq j} \left(X_i^*\right)^2 X_j^* + \sum\sum\sum\nolimits_{i\neq j\neq k} X_i^* X_j^* X_k^*\right)$$

$$= \sum_i E\left(\left(X_i^*\right)^3\right) + 3\sum\sum\nolimits_{i\neq j} E\left(\left(X_i^*\right)^2\right)E\left(X_j^*\right) + \sum\sum\sum\nolimits_{i\neq j\neq k} E\left(X_i^*\right)E\left(X_j^*\right)E\left(X_k^*\right)$$

$$= \sum_i E\left(\left(X_i^*\right)^3\right) = \sum_i k_3^i$$

ty $E\left(X_i^*\right) = E\left(X_i - E(X_i)\right) = E(X_i) - E(X_i) = 0$

För nämnaren är utvecklingen känd

$$E\left(\left(\sum_i X_i - E\left(\sum_i X_i\right)\right)^2\right)^{3/2} = \left(\sum_i k_2^i\right)^{3/2}$$

Skevheten för summan av oberoende stokastiska variabler får alltså utseendet

$$Skevhet\left(\sum_i X_i\right) = \frac{\sum_i k_3^i}{\left(\sum_i k_2^i\right)^{3/2}}$$