



Stockholms  
universitet

# En undersökning av implementering av olika reservsättningsmetoder med inriktning på hur modellerna passar för kort- respektive långsvansat skade- data

Jenny Areskog

Masteruppsats 2011:12  
Matematisk statistik  
November 2011

[www.math.su.se](http://www.math.su.se)

Matematisk statistik  
Matematiska institutionen  
Stockholms universitet  
106 91 Stockholm



Stockholm  
University

Mathematical Statistics  
Stockholm University  
Master Thesis **2011:12**  
<http://www.math.su.se>

# En undersökning av implementering av olika reservsättningsmetoder med inriktning på hur modellerna passar för kort- respektive långsvansat skadedata

Jenny Areskog<sup>\*</sup>

November 2011

## Abstract

På ett försäkringsbolag består en aktuariers uppgifter huvudsakligen av reservsättning, prissättning och kapitalmodellering. Vid reservsättning försöker aktuarien prediktera den totala skadekostnaden och därmed även hur mycket reserver försäkringsbolaget måste hålla för att kunna betala sina försäkringstagare i framtiden för inträffade skador. I denna uppsats undersöker vi de två olika reservsättningsmetoderna Brosius minstakvadratmetod och Munich Chain Ladder samt jämför dem med den idag vanligaste reservsättningsmetoden Chain Ladder. Syftet är att utreda om de kan ge ett stabilare och bättre estimat av total skadekostnad än Chain Ladder när vi ställs inför problem så som säsongeffekter i skadedata och när skadedata har mycket sen utveckling. Undersökningen utförs på två olika sorters skadedata från Trygg-Hansa som har just dessa egenskaper, hemförsäkringsprodukten och sjuk- och olycksfallsprodukten för barn. Vi ser indikatorer på att Munich Chain Ladder ger ett mycket bättre estimat när vi använder skadedata bestående av betalt och endast ett lite bättre estimat när skadedata bestående av taxation används. Prediktionsfelet för Munich Chain Ladder och Chain Ladder beräknas och det visar sig att Chain Ladder baserat på taxation ger lägst reservvolatilitet. Munich Chain Ladder bör implementeras och undersökas mer för alternativ användning, t.ex. för att beräkna ett mer rättvisande mönster för "cash flow". Brosius minstakvadratmetod verkar bidra med ett mer stabilt reservestimater för det senaste skadekvartalet för sjuk- och olycksfallsprodukten. Däremot verkar metoden inte bidra med mer insikt för hemförsäkringsprodukten. Metoden bör implementeras och undersökas närmre när vi har sen utveckling i skadedata.

---

<sup>\*</sup>Postal address: Mathematical Statistics, Stockholm University, SE-106 91, Sweden. E-mail: [jenny.areskog@hotmail.com](mailto:jenny.areskog@hotmail.com). Supervisor: Erland Ekheden.

## **Abstract**

In a non-life insurance company the main task for an actuary is reserving, pricing and capital modeling. In reserving the actuary predicts the total reserve that the insurance company must hold for future liabilities. This essay investigates two different methods for reserving, Brosius least squares method and Munich Chain Ladder. A comparison versus the most common method today, Chain Ladder, is made. The purpose is to investigate if these two methods can provide us with a better and more stable prediction of the reserves than Chain Ladder when the claims data have seasonality and/or late development. We have access to two different types of claims data, the home insurance product with some seasonality and the personal accident product for children with late development. We found out that Munich Chain Ladder seems to contribute with a much better estimate when paid claims data is used and a little better estimate with incurred claims. The prediction error for Munich Chain Ladder and Chain Ladder is calculated and we can see that it is smaller for Chain Ladder based on incurred. Munich Chain Ladder should be implemented and investigated for alternative application such as calculating a more correct pattern for cash flow. Brosius least squares seems to contribute to a more stable reserve estimate for the latest accident quarter for the personal accident product but not for the home insurance product. The method should be implemented and more investigated when we have late development in data.

## Förord och tack

Detta arbete utgör en masteruppsats i försäkringsmatematik om 30 högskolepoäng vid Stockholms Universitet. Arbetet har utförts i samarbete med försäkringsbolaget Trygg-Hansa.

Ett stort tack riktas till min chef Lars Klingberg, chefsaktuarie på Trygg-Hansa, och till min handledare Erland Ekheden, doktorand i matematisk statistik och försäkringsmatematik på Stockholms Universitet. Deras vägledning, goda idéer och erfarenhet har varit av största vikt under arbetets gång. Ett stort tack riktas även till professor Richard Verrall vars förtydliganden om proceduren bootstrapping hjälpte mig mycket. Jag vill även rikta ett tack till mina kollegor Patricia Benner och Ieva Gediminaitė vars uppmuntran samt förståelse för försäkringsbranschen och knepiga förfaranden inom bootstrappingtekniken har hjälpt mig genom arbetets gång. Slutligen vill jag tacka min familj och pojkvän som har stöttat och uppmuntrat mig genom arbetet med denna uppsats.

## Innehåll

Sammanfattning.....	2
Abstract .....	3
Förord och tack.....	4
1. Introduktion.....	6
2. Syfte och metod.....	6
3. Resersättningsmetoder.....	8
3.1 Brosius minstakvadratmetod .....	8
3.2 Munich Chain Ladder.....	11
4. Reservvolatilitet.....	15
4.1 Bootstrapping Munich Chain Ladder .....	15
5. Skadedata.....	20
6. Tillämpning av resersättningsmetoderna på data .....	21
6.1 Brosius minstakvadratmetod .....	21
6.1.1 Kortsvansat data .....	21
6.1.2 Långsvansat data .....	26
6.2 Munich Chain Ladder.....	30
6.2.1 Kortsvansat data .....	30
6.2.2 Långsvansat data .....	38
7. Undersökning av reservvolatilitet.....	43
7.1 Bootstrapping: Munich Chain Ladder och Chain Ladder .....	43
7.1.1 Kortsvansat data .....	43
7.1.2 Långsvansat data .....	46
8. Diskussion och slutsatser.....	48
8.1 Brosius minstakvadratmetod .....	49
8.2 Munich Chain Ladder.....	49
9. Referenser.....	52
A. Appendix .....	53
A.1 Illustration av skadetrianglar .....	53
A.2 Chain Ladder .....	53
A.3 Budget Loss Ratio Metoden .....	55
A.4 Bornhuetter & Ferguson .....	55
A.5 Bootstrapping Chain Ladder.....	56
A.6 Munich Chain Ladder: Grafer .....	58
A.7 Bootstrapping Munich Chain Ladder: Grafer och tabeller .....	59

# 1. Introduktion

På ett försäkringsbolag består en aktuariers uppgifter huvudsakligen av reservsättning, prissättning och kapitalmodellering. Vid reservsättning försöker aktuarien prediktera den totala skadekostnaden och därmed även hur mycket reserver försäkringsbolaget måste hålla för att kunna betala sina försäkringstagare i framtiden för inträffade skador. Reservsättningen har en betydande inverkan på försäkringsbolagets resultat och det är av stor vikt att reserven är rätt uppskattad.

Med hjälp av ett bra reservestimat kan vi göra ett kvalificerat antagande om försäkringsbolagets totala skadekostnad. Detta är viktig information som används vid både prissättning och kapitalmodellering. Om vårt reservestimat till exempel skulle vara för lågt kommer prissättningen baseras på denna optimistiska syn av försäkringsbolagets framtida åtaganden och det finns då en risk för att premien blir för låg. Därmed skulle den premie som försäkringsbolaget får in, inte kunna täcka de risker som försäkringsbolaget har. Den estimerade reserven ingår även i försäkringsbolagets balansräkning genom att den tas upp som en post under ”Skulder”. En över- eller underestimering av reserven kommer att ge en falsk bild av försäkringsbolagets resultat och kan leda till direkta konsekvenser för bolaget. Att bolaget har ett realistiskt estimat av total skadekostnad, och därmed även reserven, är alltså av mycket stor vikt för bolaget både internt, vid till exempel prissättning, och externt, till exempel vid redovisning av balansräkningen.

Denna uppsats är skriven i samarbete med Trygg-Hansa. Trygg-Hansa är ett av de största försäkringsbolagen i Sverige och har ett brett produktsortiment utifrån vilket flera olika försäkringsklasser definieras. Som reservsättningsaktuarie är den huvudsakliga uppgiften att ta fram sitt bästa estimat av den totala skadekostnaden per skadekvartal. För att göra detta måste aktuarien välja den modell som kommer att ge ett så realistiskt resultat som möjligt. Vilken modell som är den bästa beror oftast på vilken typ av skadekostnad vi ska estimerar. Skador som sker på olika typer av försäkringsklasser betes sig ofta olika, till exempel finns det kort- och långsvansade klasser.

Hemförsäkring är en kortsvansad försäkringsklass som karakteriseras av att skadorna rapporteras in, reservsätts av skadereglerarna och betalas ut till försäkringstagaren relativt fort efter att de har inträffat. Sjuk- och olycksfall är en långsvansad försäkringsklass som karakteriseras av att tiden mellan det att skadorna rapporteras in och betalas ut till försäkringstagaren är väldigt lång, i vissa fall kan det ta upp till 19 år innan skadorna stängs. Generellt kan det även förekomma sen rapportering för långsvansade klasser, dvs. att tiden mellan att skadan inträffar och försäkringstagaren upptäcker skadan och anmäler den till försäkringsbolaget är lång. För vissa försäkringsklasser kan det även förekomma att man misstänker att det finns systematiska trender i skadedata, till exempel säsongeffekter där det finns en fördröjning i rapportering under en viss period varje år. En modell som passar bra för en viss typ av skadedata passar inte nödvändigtvis bra för en annan typ av skadedata.

## 2. Syfte och metod

Syftet med denna uppsats är att undersöka alternativa reservsättningsmetoder och om de kan uppskatta total skadekostnad och därmed även total reserv, bättre än de metoder som vanligen används vid reservsättning idag. Vi kommer dels att undersöka två olika reservsättningsmetoder i relation till den vanligaste reservsättningsmetoden idag och dels undersöka om de metoderna bör implementeras. Vi kommer även att utreda om en viss metod passar bättre för en kortsvansad försäkringsklass (Trygg-Hansas hemförsäkringsprodukt, se avsnitt 5) med säsongeffekter respektive en långsvansad försäkringsklass (Trygg-Hansas sjuk- och olycksfallsprodukt, se avsnitt 5). Slutligen kommer vi att analysera resultaten, diskutera vad som är en bra reservsättningsmetod och möjlig fortsättning på detta arbete.

De mest kända och oftast använda reservsättningsmetoderna idag är Chain Ladder och Bornhuetter & Ferguson (BF), se appendix A.2 respektive A.4. Chain Ladder baseras på att vi antar att skador nu och i framtiden kommer att utvecklas som skador för tidigare år. Detta gör att Chain Ladder inte fungerar speciellt bra om det historiska utvecklingsmönstret är ostabilt eller inte längre är representativt på grund av förändringar i produkt och/eller lagstiftning. Chain Ladder kan även vara svår att använda om det finns systematiska trender i data eftersom de första utvecklingsfaktorerna då kan vara systematiskt högre för en viss period varje år. Dessutom är det ofta som Chain Ladder ger olika reservestimat beroende på om vi använder skadetrianglar för betalningar eller skadetrianglar för taxerat (se definitioner för betalt och taxerat under kapitel 3, samt genomgång av skadetrianglar i appendix A.1).

BF bygger på exponering. Metoden tar hänsyn till när i tiden skadorna rapporteras eller betalas genom att den bygger på en vägning mellan Chain Ladder estimatet och ett aprioriestimat för skadegraden. Då BF baseras på bland annat utvecklingsmönstret som vi tar fram i Chain Ladder medför det att även denna metod kan ifrågasättas om det historiska utvecklingsmönstret är ostabilt och/eller om det finns systematiska trender i data. Dessutom krävs det att aktuarien har tillgång till eller kan ta fram ett rättvisande estimat av skadegraden, som används i BF. Med detta som bakgrund finns det ett stort intresse för att undersöka alternativa reservsättningsmetoder.

I denna uppsats vill vi undersöka de två olika reservsättningsmetoderna Brosius minstakvadratmetod och Munich Chain Ladder.

Vi kommer att använda oss av två olika sorters skadedata från Trygg-Hansa, det ena kommer från en hemförsäkringsprodukt och det andra från en sjuk- och olycksfallsprodukt för barn. Hemförsäkringsprodukten är kortsvansad och har säsongseffekter där det kan vara svårt att prediktera de första utvecklingsfaktorerna med Chain Ladder. Sjuk- och olycksfallsprodukten är långsvansad och är en svår försäkringsklass att prediktera. Det behövs mycket historiskt data för att kunna prediktera skadedata som har lång utveckling och ofta har man för lite eller ofullständigt historiskt data.

Bakgrunden till att Trygg-Hansa vill undersöka alternativa reservsättningsmetoder är för att utreda om det finns reservsättningsmetoder som kan lösa ovan nämnda problem. Vi har valt att undersöka Brosius minstakvadratmetod och Munich Chain Ladder för att utreda om de kan ge ett stabilare och bättre estimat av total skadekostnad än Chain Ladder när vi ställs inför en del av de problem vi diskuterade ovan. Brosius minstakvadratmetod kan lösa problemet med systematiska trender i skadedata eftersom den använder sig av minstakvadrattaxeringar för parametrarna och har en extra parameter som höjer prediktionen när den rapporterade taxationen är extremt låg. Munich Chain Ladder är utformad för att analys på betalningar och taxerat ska ge samma resultat av estimerad total skadekostnad. Munich Chain Ladder använder på så sätt mer information än vad Chain Ladder gör vilket kan leda till att den metoden bättre kan prediktera långsvansad skadedata där det finns lite historik.

Det är viktigt att en reservsättningsmodell ger stabila estimat av den totala reserven. För att undersöka den volatilitet som finns i modellen och i framtida utveckling av skadorna kommer vi att utföra bootstrapping av Munich Chain Ladder (se avsnitt 4.1) och Chain Ladder (se appendix A.5). Bootstrapping är en metod som har blivit mycket populär inom reservsättning på senare år. Genom att utföra bootstrapping på en reservsättningsmetod kan vi ta fram den estimerade reservens prediktionsfel och den prediktiva fördelningen för den estimerade totala reserven. Prediktionsfelet är ett mått på hur stor osäkerhet vi har i våra reservestimat och kan vägleda oss i vårt beslut om metoden bör implementeras eller ej.



### 3. Reservsättningsmetoder

I detta kapitel kommer vi att gå igenom teorin för Brosius minstakvadratmetod och Munich Chain Ladder.

För att få en bättre förståelse för modellerna och termer som används, går vi först igenom en del reservsättningsterminologi som används genom denna uppsats. Vi antar att det har skett en skada och att försäkringstagaren har anmält den till försäkringsbolaget, då gäller följande:

- **Betalt:** är det belopp som försäkringsbolaget hittills har betalat för skadan. Medan skadan fortfarande är öppen kan detta belopp variera med utvecklingskvartal men när skadan är stängd är detta belopp konstant. I kommande formler använder vi benämningen  $P$  för betalt, detta kommer från engelskans *Paid*.
- **Reserv:** är det belopp som skaderegleraren har satt undan för skadan. Denna reserv kommer att betalas ut till försäkringstagaren när skadan är slutreglerad. Medan skadan fortfarande är öppen minskar reserven med utvecklingskvartal allt eftersom pengar betalas ut till försäkringstagaren. Skaderegleraren kan också öka reserven om han misstänker att skadan kommer att kosta mer än det som redan är avsatt. När skadan är slutreglerad och stängd är reserven 0.
- **Taxerat:** är det belopp som utgörs av  $betalt + reserv$ , dvs. den uppskattade kostnaden för kända skador. I kommande formler använder vi benämningen  $I$  för taxation, detta kommer från engelskans *Incurred*.
- **Estimerad total skadekostnad:** är det belopp som aktuarien estimerar att total skadekostnad kommer att bli. Detta belopp estimeras med hjälp av en modell för reservsättning och sker på försäkringsklassnivå (inte på individuell skadenivå).
- **Estimerad total reserv:** är det belopp som vi estimerar att vi måste sätta undan för totalt inträffade antal skador. Detta belopp beräknas som *Estimerad total skadekostnad – Betalt*.
- **IBNR:** står för *Incurred but Not Reported*. IBNR beräknas av aktuarien och är det belopp som avsätts för skador som har inträffats men ännu inte har rapporterats in till försäkringsbolaget samt för skador som inte är fullt utvecklade och stängda än. Detta belopp beräknas som *Estimerad total reserv – Reserv*.

#### 3.1 Brosius minstakvadratmetod

Brosius minstakvadratmetod utvecklades år 1993 av E. Brosius, se *Loss Development Using Credibility* (1993). Han beskriver att det som regel finns både slumpmässiga fluktuationer och systematiska trender i skadedata som gör att vi inte har tillgång till ett jämt och stabilt utvecklingsmönster. Detta medför att vanliga metoderna, så som Chain Ladder, inte blir lika stabil som om vi hade haft tillgång till ett sådant utvecklingsmönster. Brosius minstakvadratmetod använder kredibilitet på Chain Ladder och Budget Loss Ratio metoden (se appendix A.3) för att estimerar total skadekostnad.

Metoden är uppbyggd på följande sätt:

Antag att vi, för ett visst antal skadeår  $i=1,2,\dots,n$ , har en följd av observerad taxation  $x_i$  efter 12 månader och observerad taxation  $y_i$  efter 24 månader. Antag även att inträffad skadekostnad för skadeår  $i$  är lika med  $y_i$ , dvs. att efter 24 månader är total skadekostnad rapporterad. Brosius ansats är

att:  $y_i = L(x) = a + bx_i$ , för de skadeåren som vi har en observation  $x_i$  men ännu inte en observation  $y_i$ . Koefficienterna  $a$  och  $b$  i modellen bestäms enligt minstakvadratmetoden:

$$(3.1.1) \quad b = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad \text{och} \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

Minstakvadratmetoden är tillräckligt flexibel för att kunna anpassas till specialfall av data då det är fördelaktigt att använda sig av Chain Ladder eller Budget Loss Ratio metoden. Budget Loss Ratio metoden antar att  $x_i$  och  $y_i$  är okorrelerade. I detta fall sätter vi  $b$  till noll, eftersom vi inte vill basera en prediktion av  $y_i$  på  $x_i$ , och predikterar  $y_i$  oberoende av  $x_i$  (till exempel genom ett medelvärde av tidigare observationer av  $y_i$ ). Chain Ladder är en fördelaktig modell om de observerade utvecklingsfaktorerna är lika för alla skadeår. I detta fall sätter vi  $a$  till noll.

Kredibilitetsformeln är ett analytiskt redskap som guidar oss när vi tar beslut om vilken metod vi ska använda: Budget Loss Ratio, BF, Chain Ladder eller Minstakvadratmetoden. Den kan ge förståelse när vi stöter på problem och behöver göra justeringar. Dock är det viktigt att aktuarien har en stor förståelse för försäkringsklassen och hur affären fungerar för att kunna göra korrekta justeringar.

Svårigheten är att bestämma vilken metod som man ska använda vid en given situation. Hugh Whites fråga (se E. Brosius, 1993, sid 4) framställer de frågor vi ställer oss när vi stöter på problem:

Antag att vi försöker estimerar reserven för en viss försäkringsklass och att den rapporterade proportionen av skador för innevarande skadeperiod är till exempel 8 % högre än vad den förväntas vara. Vad gör vi?

1. Budget Loss Ratio metoden: Vi minskar vårt estimat av IBNR reserven med motsvarande belopp eftersom vi tror att det har skett en ökning i rapporteringstakten.
2. BF: Vi håller fast vid vårt estimat av IBNR reserven eftersom vi tror att det handlar om slumpmässiga fluktuationer, t.ex. en större skada.
3. Chain Ladder: Vi ökar vårt estimat av IBNR reserven i proportion till ökningen i faktisk rapporterade över förväntat rapporterade eftersom vi tror att det har skett en ökning i faktiskt antal skador.

Inget av dessa svar är helt korrekt utan vidare utredning om varför vi ser 8 % mer än vanligt. Dock är alla dessa svar rimliga tillvägagångssätt.

Då vi arbetar oss fram mot att svara på Hugh Whites fråga är vi inte villiga att anta en fördelning för skadekostnad etc. Vi gör därför ett linjärt estimat som baseras på Baysiansk kredibilitet. Baysiansk kredibilitet enligt Bühlmann använder inte själva estimatet utan den bästa linjära approximationen av det. Antag att  $Y$  står för den skadekostnad som inträffar varje år och att den stokastiska variabeln  $X$  står för den skadekostnad som är rapporterad vid årets slut. Vi låter  $Q(x)$  vara det Baysianska estimatet av totalt skadekostnad och vi låter  $L$  vara den bästa linjära approximationen av  $Q$ , dvs.  $L$  är den linjära funktion som minimerar ekvationen  $E_X([Q(X) - L(X)]^2)$ . Om  $L(x) = a + bx$  måste vi minimera

$$E_X([Q(X) - a - bX]^2)$$

Enligt ett välkänt statistiskt resultat får vi följande:

Utvecklingsformel 1:

Givet en stokastisk variabel  $Y$  som beskriver total kostnad och en stokastisk variabel  $X$  som beskriver rapporterad kostnad, låt då  $Q(x) = E(Y|X=x)$ . Den bästa linjära approximationen av  $Q$  ges då av följande funktion:

$$L(x) = (x - E(X)) \cdot \frac{Cov(X, Y)}{Var(X)} + E(Y)$$

Denna ekvation stämmer med våra förväntningar, dvs. om  $x = E(X)$  får vi att  $L(x) = E(Y)$ , men om  $x$  skiljer sig från  $E(X)$  så skiljer sig också vårt estimat proportionerligt. Om vi nöjer oss med en linjär approximation så kan vi nu besvara Hugh Whites fråga:

1. Om  $\text{Cov}(X, Y) < \text{Var}(X)$ , borde vi minska reserven då vi ser ett stort rapporterat värde.
2. Om  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Var}(X)$ , borde vi inte låta en förändring i rapporterat värde påverka reserven.
3. Om  $\text{Cov}(X, Y) > \text{Var}(X)$ , borde vi öka reserven då vi ser ett stort rapporterat värde.

Om vi är villiga att anta att vi har flera år av gemensamma  $Y_i$  respektive gemensamma  $X_i$  så kan vi estimerade väntevärdena, varianserna och kovarianserna från data. På ett enkelt sätt estimerar vi  $\text{Cov}(X_i, Y_i)$  med  $\overline{XY} - \bar{X}\bar{Y}$ ,  $\text{Var}(X_i)$  med  $\overline{X^2} - \bar{X}^2$ ,  $E(X_i)$  med  $\bar{X}$  och  $E(Y_i)$  med  $\bar{Y}$ . Detta ger oss följande estimat av den bästa linjära approximationen av  $Q$ :

$$L(x) = (x - \bar{X}) \cdot \frac{\overline{XY} - \bar{X}\bar{Y}}{\overline{X^2} - \bar{X}^2} + \bar{Y}$$

Genom att följa Bühlmann vill vi uttrycka  $L(x)$  i form av:

$E_Y(\text{Var}(X|Y)) = \text{Förväntat värde av variansen av rapporteringsprocessen (EVPV)}$

$\text{Var}_Y(E(X|Y)) = \text{Variansen av det hypotetiska väntevärdet (VHM)}$

Utvecklingsformel 2:

Antag att det finns tal  $d \neq 0$  sådant att  $E(X|Y=y) = dy$  för alla  $y$ . Då ges den bästa linjära approximationen av  $Q$  av funktionen:

$$L(x) = \frac{x - E(X)}{d} \cdot \frac{VHM}{VHM + EVPV} + E(Y) = Z \cdot \frac{x}{d} + (1 - Z) \cdot E(Y)$$

där 
$$Z = \frac{VHM}{VHM + EVPV}$$

Denna formel uttrycker  $L$  som en kredibilitetsvägning mellan Chain Ladder estimatet  $x/d$  och Budget Loss Ratio estimatet  $E(Y)$ . Om  $EVPV=0$  ger vi full kredibilitet till Chain Ladder estimatet. Om  $VHM=0$  får vi  $L(x)=E(Y)$ . När vi har en osäkerhet i rapporteringsmönstret och om tidigare estimat av den totala kostnaden så använder vi ett viktat genomsnitt, där vikterna ges av  $EVPV$  och  $VHM$ .

Dock antar vi i denna formel att förväntat antal rapporterade skador är proportionerligt mot antal inträffade skador. Detta kan ses som en brist i modellen eftersom en skada har högre sannolikhet att rapporteras i tid då trycket på skaderegleringen är lågt.

Utvecklingsformel 3:

Antag att det finns ett reellt tal  $d \neq 0$  och  $x_0$  sådana att  $E(X|Y = y) = dy + x_0$  för alla  $y$ . Då ges den bästa linjära approximationen av  $Q$  av funktionen:

$$L(x) = Z \cdot \frac{x - x_0}{d} + (1 - Z) \cdot E(Y)$$

där 
$$Z = \frac{VHM}{VHM + EVPV}$$

Här kan vi dra slutsatsen att minstakvadratmetoden kan användas även i de fall där utvecklingsfaktorerna varierar med trycket på skadereglering. Det kan vara omöjligt att bestämma värden på  $d$  och  $x_0$  men vi behöver inte dessa värden för att använda minstakvadratmetoden.

Den estimerade totala skadekostnaden för respektive skadeår är det vägda medelvärdet av ett Chain Ladder estimat och ett Budget Loss Ratio estimat. Vi har  $c = \bar{y}/\bar{x}$  vilket ger Chain Ladder estimatet  $y_i = cx_i$ . För Budget Loss Ratio metoden använder vi oss av estimatet  $y_i = \bar{y}$ . Kredibiliteten som vi ger till link ratio metoden är  $Z = b/c$  och vi får ett estimat för Minstakvadratmetoden som  $y_i = Z \cdot cx_i + (1 - Z) \cdot \bar{y}$ . Detta estimat ger exakt samma resultat som minstakvadratmetoden:

$$\begin{aligned} y_i &= Z \cdot cx_i + (1 - Z) \cdot \bar{y} = b/c \cdot cx_i + (1 - b/c) \cdot \bar{y} = \\ &= b \cdot x_i + \left(1 - \frac{b\bar{x}}{\bar{y}}\right) \cdot \bar{y} = a + bx_i \end{aligned}$$

När vi vill estimerar den inträffade skadekostnaden  $Y$  för respektive skadeår använder i formeln ovan. Den rapporterade skadekostnaden  $X$  för respektive skadeår estimeras av den senaste diagonalen i skadetringeln. Ovan beräknas  $\bar{y}$  som medelvärdet av skadekostnaden för det senaste utvecklingsåret  $n$ , dvs.  $\bar{y}$  baseras endast på ett värde när parametrarna skattas för skadeår  $n-1$  eftersom skadeår  $n$  är det enda skadeår som har utvecklats i  $n$  år. När parametrarna skattas för skadeår  $n-2$  baseras  $\bar{y}$  på två värden, det observerade för skadeår  $n$  och det predikerade för skadeår  $n-1$  osv. Notera att vi i detta fall antar att skadekostnaden är fullt utvecklad efter  $n$  utvecklingsår. Variabeln  $x_i$  står för observerad skadekostnad för respektive skadeår i den senaste diagonalen i skadetringeln. I parameterskattningarna beräknas  $\bar{x}$  som medelvärdet av skadekostnaden över alla skadeår för respektive utvecklingsår.

När vi använder Brosius minstakvadratmetod på relativt gamla skadeår som är långt utvecklade, är det endast en liten proportion av variansen i  $X$  som härstammar från rapporteringsprocessen. Det är faktiskt inte helt ovanligt att faktorn  $a$  blir negativ i denna del av triangeln, vilket leder till att om  $x$  är 0 kommer metoden att ge ett negativt estimat för total skadekostnad. När detta händer sätter vi  $Z=1$  och använder ett enkelt Chain Ladder estimat:

$$(3.1.2) \quad y = cx$$

På så sätt ignorerar vi Budget Loss Ratio estimatet. På samma sätt sätter vi  $Z=0$  om faktorn  $b$  blir negativ. Då använder vi endast ett enkelt Budget Loss Ratio estimat.

$$y = \bar{y}$$

## 3.2 Munich Chain Ladder

Munich Chain Ladder utvecklades år 2004 av G. Quarg och T. Mack, se *Munich Chain Ladder: A Reserving Method that Reduces the Gap between IBNR Projections Based on Paid Losses and IBNR Projections Based on Incurred Losses* (2004). De beskriver att ett problem som reservsättningsaktuarien ofta ställs inför är att man får olika resultat när man använder Chain Ladder på trianglar bestående av betalt (paid) och taxation (incurred). Det kan till och med vara så att Chain Ladder tillämpad på triangeln med utbetalt ger ett högre estimat för total skadekostnad för ett visst skadeår och metoden tillämpad på triangeln med taxerat ger ett högre estimat för nästa skadeår. Detta syns tydligt om vi tittar på förhållandet mellan utbetalt och taxation, dvs. förhållandet  $P/I$ . Om vi utvecklar både triangeln för utbetalt och triangeln för taxation med Chain Ladder och sedan undersöker förhållandet  $P/I$  kommer vi tydligt se att för vissa skadeår är estimatet baserat på utbetalt signifikant lägre än estimatet baserat på taxation och tvärtom för andra skadeår.

Munich Chain Ladder är utvecklad för att lösa detta problem.

Låt

$$(P/I)_{i,t} := \frac{P_{i,t}}{I_{i,t}}$$

för skadeår  $i$  och utvecklingsår  $t$ . Om  $c_i := n + 1 - i$  är nuvarande utvecklingsår för skadeår  $i$  så är  $P_{i,t}$  och  $I_{i,t}$  givna för  $1 \leq t \leq c_i$  och estimerade för  $c_i < t \leq n$ , där  $n \in \mathbb{N}$  är antal skadeår och  $t \in T$  är antal utvecklingsperioder.  $T = \{1, \dots, m\}$  och oftast är  $m = n$ . De genomsnittliga skattade utvecklingsfaktorerna för taxerat och utbetalt ges av:

$$\hat{f}_{s \rightarrow s+1}^I := \frac{\sum_{j=1}^{n-s} I_{j,s+1}}{\sum_{j=1}^{n-s} I_{j,s}}$$

$$\hat{f}_{s \rightarrow s+1}^P := \frac{\sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s+1}}{\sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s}}$$

Framtida  $(P/I)_{i,t}$  ges av

$$(P/I)_{i,t} = \frac{P_{i,t}}{I_{i,t}} = \frac{P_{i,c_i} \cdot \hat{f}_{c_i \rightarrow c_i+1}^P \cdots \hat{f}_{t-1 \rightarrow t}^P}{I_{i,c_i} \cdot \hat{f}_{c_i \rightarrow c_i+1}^I \cdots \hat{f}_{t-1 \rightarrow t}^I}, t > c_i$$

För utvecklingsfaktorerna för utbetalt härleder vi följande ekvation

$$\begin{aligned} \hat{f}_{s \rightarrow s+1}^P \cdot \sum_{j=1}^n P_{j,s} &= \hat{f}_{s \rightarrow s+1}^P \cdot \left( \sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s} + \sum_{j=n-s+1}^n P_{j,s} \right) = \frac{\sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s+1}}{\sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s}} \cdot \sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s} + \sum_{j=n-s+1}^n \hat{f}_{s \rightarrow s+1}^P \cdot P_{j,s} \\ &= \sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s+1} + \sum_{j=n-s+1}^n P_{j,s+1} \\ &= \sum_{j=1}^n P_{j,s+1} \end{aligned}$$

Detta ger relationen

$$\hat{f}_{s \rightarrow s+1}^P := \frac{\sum_{j=1}^n P_{j,s+1}}{\sum_{j=1}^n P_{j,s}}$$

På samma sätt får vi relationen för utvecklingsfaktorerna för taxation

$$\hat{f}_{s \rightarrow s+1}^I := \frac{\sum_{j=1}^n I_{j,s+1}}{\sum_{j=1}^n I_{j,s}}$$

Vi sätter in dessa relationer i ekvationen för framtida  $(P/I)_{i,t}$  och får slutligen följande resultat för  $t > c_i$ :

$$(3.2.1) \quad \frac{(P/I)_{i,t}}{(P/I)_t} = \frac{(P/I)_{i,c_i}}{(P/I)_{c_i}}$$

I ekvationen definieras  $(P/I)_t$  och  $(P/I)_{c_i}$  som genomsnittet av  $(P/I)_{i,t}$  respektive  $(P/I)_{i,c_i}$  då  $i$  varierar över alla skadeår. Vi tolkar ekvation (3.2.1) som att för varje skadeår är förhållandet mellan

det estimerade  $P/I$  och motsvarande genomsnitt lika med förhållandet mellan det nuvarande  $P/I$  och motsvarande genomsnitt. Detta är en systematisk svaghet hos Chain Ladder eftersom ett skadeår med ett  $P/I$  som ligger över eller under motsvarande genomsnitt kommer att ha en över- eller underestimerad  $P/I$  vid utvecklingsår  $n$ . Långt utvecklade skadeår har ett förhållande  $P/I$  som konvergerar mot 1, medan  $P/I$  för mindre utvecklade skadeår inte nödvändigtvis går mot 1 för Chain Ladder. Detta kallar vi för Chain Ladder metodens  $P/I$  problem.

För att lösa problemet som uppstår när Chain Ladder tillämpas på utbetalt och taxation använder G. Quarg och T. Mack (2004) sig av följande regel:

*Om den nuvarande relationen  $P/I$  är över eller under motsvarande genomsnitt ska vi använda en utvecklingsfaktor som ligger över eller under genomsnittet för utbetalt respektive taxation. Dock kan vi fråga oss hur omfattande justeringen av utvecklingsfaktorerna ska vara, samt om vi ska justera mer på utvecklingsfaktorerna för utbetalt eller taxation.*

Munich Chain Ladder antar att det finns ett linjärt samband mellan utvecklingsfaktorerna för utbetalt och relationen  $P/I$  samt ett linjärt samband mellan utvecklingsfaktorerna för taxation och relationen  $I/P$ . För att ta hänsyn till de individuella utvecklingsfaktorerna samt relationerna  $P/I$  och  $I/P$  för alla utvecklingsperioder så är det nödvändigt att standardisera dem. Detta görs genom att övergå till residualerna av dessa värden.

Låt

$$Q_{i,t} := \frac{P_{i,t}}{I_{i,t}} \quad \Rightarrow \quad Q_i := \frac{P_i}{I_i} = \left( \frac{P_{i,t}}{I_{i,t}} \right)_{t \in T}$$

Följande modellantaganden görs:

**PQ:** Det existerar en konstant  $\lambda^P$  sådan att, för alla  $s, t \in T$  med  $t = s + 1$  och alla  $i = 1, \dots, n$ , gäller att

$$E \left( \frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} | \mathcal{B}_i(s) \right) = f_{s \rightarrow t}^P + \lambda^P \cdot \frac{\sigma \left( \frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} | P_i(s) \right)}{\sigma \left( Q_{i,s}^{-1} | P_i(s) \right)} \cdot \left( Q_{i,s}^{-1} - E \left( Q_{i,s}^{-1} | P_i(s) \right) \right)$$

**IQ:** Det existerar en konstant  $\lambda^I$  sådan att, för alla  $s, t \in T$  med  $t = s + 1$  och alla  $i = 1, \dots, n$ , gäller att

$$E \left( \frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} | \mathcal{B}_i(s) \right) = f_{s \rightarrow t}^I + \lambda^I \cdot \frac{\sigma \left( \frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} | I_i(s) \right)}{\sigma \left( Q_{i,s} | I_i(s) \right)} \cdot \left( Q_{i,s} - E \left( Q_{i,s} | I_i(s) \right) \right)$$

Notera att  $f_{s \rightarrow t}^P$  och  $f_{s \rightarrow t}^I$  är de faktiska utvecklingsfaktorerna och inte de skattade. I modellantagandena står  $P_i(s) = \{P_{i,1}, \dots, P_{i,s}\}$  för informationen om all utveckling av processen för utbetalt,  $I_i(s) = \{I_{i,1}, \dots, I_{i,s}\}$  står för informationen om all utveckling av processen för taxation och  $\mathcal{B}_i(s) = \{P_{i,1}, \dots, P_{i,s}, I_{i,1}, \dots, I_{i,s}\}$  står för informationen om utvecklingen av båda processerna fram till slutet av utvecklingsperiod  $s$ . Som vanligt står  $E$  för väntevärdet och  $\sigma$  för standardavvikelsen.

Följande parameterskattningar behövs:

1. Utvecklingsfaktorerna för betalt respektive taxation:

$$\widehat{f}_{s \rightarrow t}^P := \frac{\sum_{i=1}^{n-s} P_{i,t}}{\sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s}}$$

$$\widehat{f}_{s \rightarrow t}^I := \frac{\sum_{i=1}^{n-s} I_{i,t}}{\sum_{i=1}^{n-s} I_{i,s}}$$

2. Variansen för utvecklingsfaktorerna för betalt respektive taxation:

$$(\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^P)^2 := \frac{1}{n-s-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s} \cdot \left( \frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} - \widehat{f}_{s \rightarrow t}^P \right)^2$$

$$(\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^I)^2 := \frac{1}{n-s-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-s} I_{i,s} \cdot \left( \frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} - \widehat{f}_{s \rightarrow t}^I \right)^2$$

3. Vi estimerar  $E(Q_{i,s}|I_i(s))$  som:

$$\widehat{q}_s := \frac{\sum_{j=1}^{n-s+1} P_{j,s}}{\sum_{j=1}^{n-s+1} I_{j,s}}$$

4.  $\sigma(Q_{i,s}|P_i(s))$  respektive  $\sigma(Q_{i,s}|I_i(s))$  skattas som:

$$\frac{\widehat{\rho}_s^P}{\sqrt{P_{i,s}}} \text{ och } \frac{\widehat{\rho}_s^I}{\sqrt{I_{i,s}}}$$

där  $\widehat{\rho}_s^P$  och  $\widehat{\rho}_s^I$  definieras som

$$(\widehat{\rho}_s^P)^2 = \frac{1}{n-s} \cdot \sum_{j=1}^{n-s+1} P_{j,s} \cdot (Q_{j,s}^{-1} - \widehat{q}_s^{-1})^2$$

$$(\widehat{\rho}_s^I)^2 = \frac{1}{n-s} \cdot \sum_{j=1}^{n-s+1} I_{j,s} \cdot (Q_{j,s} - \widehat{q}_s)^2$$

5. Residualerna är en viktig del i Munich Chain Ladder och återkommer framöver i denna uppsats. Pearsonresidualer används i beräkningen av residualerna.

- a. Residualerna för utvecklingsfaktorerna för betalt respektive taxation skattas som:

$$(3.2.2) \quad \widehat{Res}(P_{i,t}) = \frac{\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} - \widehat{f}_{s \rightarrow t}^P}{\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^P} \cdot \sqrt{P_{i,s}}$$

$$(3.2.3) \quad \widehat{Res}(I_{i,t}) = \frac{\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} - \widehat{f}_{s \rightarrow t}^I}{\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^I} \cdot \sqrt{I_{i,s}}$$

- b. Residualerna för relationerna  $I/P$  respektive  $P/I$  skattas som:

$$(3.2.4) \quad \widehat{Res}(Q_{i,s}^{-1}) = \frac{Q_{i,s}^{-1} - \hat{q}_s^{-1}}{\hat{\rho}_s^P} \cdot \sqrt{\widehat{P}_{i,s}}$$

$$(3.2.5) \quad \widehat{Res}(Q_{i,s}) = \frac{Q_{i,s} - \hat{q}_s}{\hat{\rho}_s^I} \cdot \sqrt{\widehat{I}_{i,s}}$$

6. Utifrån Pearsonresidualerna kan vi skatta korrelationsparametrarna  $\lambda^P$  och  $\lambda^I$

$$\widehat{\lambda}^P = \frac{\sum_{i,s} \widehat{Res}(Q_{i,s}^{-1}) \cdot \widehat{Res}(P_{i,t})}{\sum_{i,s} \widehat{Res}(Q_{i,s}^{-1})^2}$$

$$\widehat{\lambda}^I = \frac{\sum_{i,s} \widehat{Res}(Q_{i,s}) \cdot \widehat{Res}(I_{i,t})}{\sum_{i,s} \widehat{Res}(Q_{i,s})^2}$$

Slutligen får vi enligt antagandena  $PQ$  och  $IQ$  följande rekursiva formler:

$$\widehat{P}_{i,t} = \widehat{P}_{i,s} \cdot \left( \widehat{f}_{s \rightarrow t}^P + \widehat{\lambda}^P \cdot \frac{\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^P}{\widehat{\rho}_s^P} \cdot \left( \frac{\widehat{I}_{i,s}}{\widehat{P}_{i,s}} - \hat{q}_s^{-1} \right) \right)$$

$$\widehat{I}_{i,t} = \widehat{I}_{i,s} \cdot \left( \widehat{f}_{s \rightarrow t}^I + \widehat{\lambda}^I \cdot \frac{\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^I}{\widehat{\rho}_s^I} \cdot \left( \frac{\widehat{P}_{i,s}}{\widehat{I}_{i,s}} - \hat{q}_s \right) \right)$$

Där  $s \geq n - i + 1$  med initiala värdena  $\widehat{P}_{i,s} = P_{i,s}$  och  $\widehat{I}_{i,s} = I_{i,s}$  för  $s = n - i + 1$ . Vi har alltså fått individuella utvecklingsfaktorer för varje utvecklingsår och varje skadeår till skillnad mot Chain Ladder där vi endast har individuella utvecklingsfaktorer för varje utvecklingsår.

## 4. Reservvolatilitet

För att utvärdera Munich Chain Ladder metoden och dra slutsatser om huruvida metoden bör implementeras kommer vi att undersöka reservvolatiliteten. Det är viktigt att en reservsättningsmodell ger stabila estimat av den totala reserven. För att undersöka den volatilitet som finns i modellen och i framtida utveckling av skadorna kommer vi att utföra bootstrapping av Munich Chain Ladder.

### 4.1 Bootstrapping Munich Chain Ladder

Bootstrapping är ett simuleringsbaserat tillvägagångssätt av statistisk inferens. Det är en åter-samlingsprocedur där alla pseudoslumpstal som genereras av bootstrappingen är sub-dataset till det observerade datasetet eller identiska med det observerade datasetet. Idén är att skapa alternativa versioner av datasetet som vi skulle kunna ha observerat. Metoden tillåter att man beräknar många alternativa versioner av en enda statistika som normalt sett beräknas från ett enda dataset. På ett approximativt sätt kan man relativt enkelt estimerat standardfelet för en anpassad modell. Genom att inkludera simuleringar från underliggande fördelningar är det även möjligt att ta fram en approximation av prediktionsfelet. Detta är den främsta anledningen till att bootstrapping har blivit mycket populärt inom stokastisk reservsättning. H. Liu och R. Verrall (2010) har utvecklat bootstrapping för just Munich Chain Ladder.

Bootstrapping är endast användbart när den underliggande modellen är korrekt anpassad till data, dessutom är det ett krav (med den typ av residualbootstrap vi använder) att data är oberoende och



identiskt fördelat. För att kunna använda oss av denna metodik är det alltså viktigt att vi har tillämpat Munich Chain Ladder på ett korrekt sätt.

Vi börjar med att gå igenom den generella algoritmen för bootstrapping och hur den tidigare har använts på reservsättning.

Antag att vi har ett data set  $\vec{X}$  och att vi vill ta reda på fördelningen för statistikan  $\hat{\theta}$ . Följande steg omfattar den enklaste processen för bootstrapping:

1. Drag ett bootstrapsampel  $\vec{X}_1^B = \{X_1^B, X_2^B, \dots, X_n^B\}_1$  från det observerade datasetet  $\vec{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ .
2. Beräkna statistikan  $\hat{\theta}_1^B$  för det första bootstrapsamplet  $\vec{X}_1^B = \{X_1^B, X_2^B, \dots, X_n^B\}_1$ .
3. Upprepa steg 1 och steg 2  $N$  gånger.

Genom att upprepa steg 1 och 2  $N$  gånger kommer vi att få fram  $N$  stycken pseudosampel  $\vec{\theta}^B = \{\hat{\theta}_1^B, \hat{\theta}_2^B, \dots, \hat{\theta}_n^B\}$ . Av dessa kan vi beräkna ett sampel av den okända statistikan  $\hat{\theta}$ . Då  $N \geq 1000$  kan den empiriska fördelningen, konstruerad från  $\vec{\theta}^B = \{\hat{\theta}_1^B, \hat{\theta}_2^B, \dots, \hat{\theta}_n^B\}$ , anses vara en approximation av fördelningen för statistikan  $\hat{\theta}$ . En sådan fördelning innehåller alla egenskaper relaterade till  $\hat{\theta}$  och vi kan alltså ta fram all information om statistikan  $\hat{\theta}$ .

Algoritmen ovan kan användas för att med hjälp av bootstrapping ta fram prediktionsfördelningen för "best estimates" inom stokastisk reservsättning. I England och Verrall (2006) finns en genomgång av tillämpningar.

Liu och Verrall (2010) nämner att hittills har det inte skrivits något i aktuariell litteratur med hänsyn till bootstrapping på beroende data. Man bör notera att en modell som tar hänsyn till all tillgänglig information kan vara värdefull även om underliggande data är beroende. Det är därför värt att undersöka bootstrapping för dessa modeller, speciellt för att erhålla den prediktiva fördelningen för estimaten av försäkringsbolagets framtida risker.

Idén bakom bootstrapping av Munich Chain Ladder är att korrelationen i dataseten ska behållas vid varje återsampling. Den korrelation som observeras i data representerar beroendet mellan betalt och taxationsdata och eftersom Munich Chain Ladder är speciellt utformad efter detta beroende är det viktigt att den korrelationen lämnas oförändrad vid varje återsamlingsprocedur. Lösningen är att återsampla parvist så att korrelationen mellan de två originaldataseten inte bryts när vi genererar en fördelning för samplingens statistika.

Vi kommer alltså att gruppera de fyra set av residualer som vi beräknar i Munich Chain Ladder (se formel 3.2.2 till 3.2.5). Detta kommer att ge oss en ny triangel som består av dessa grupperade residualer. Varje cell i den grupperade residualtriangeln innehåller residualerna från samma skadeår och samma utvecklingsår. Den nya grupperade residualtriangeln innehåller all tillgänglig information samtidigt som den vidhåller det observerade beroendet. Denna triangel ses som det observerade datasetet som vi samplar från, med återläggning, när vi tillämpar bootstrapping. Därefter separeras de grupperade residualparen i den återsamlade residualtriangeln och skattningar för de parametrar som behövs fås genom att gå baklänges ur formeln för residualerna. Slutligen justerar vi utvecklingsfaktorerna enligt Munich Chain Ladder och kan estimerar total skadekostnad och total reserv. Detta avslutar en enskild iteration.

Denna metod förser oss med en skattning av standardfelet för Munich Chain Ladder. Dock fångar standardfelet endast variationen i parameterskattningarna. För att även kunna fånga upp variationen i de framtida väntevärdena adderar vi processfelet. Processfelet adderas genom att simulera framtida

värden från en fördelning med väntevärde och varians som beräknas i samma iteration. Liu och Verrall (2010) antar en normalfördelning för både dataset bestående av betalt och taxation. Genom att lägga till detta steg fångas både variationen i parameterskattningarna och variationen kring de framtida väntevärdena. När vi sedan beräknar standardfelet får vi prediktionsfelet och vi kan även estimerar den prediktiva fördelningen för reserven i Munich Chain Ladder. Minst 1000 iterationer krävs för att få en rimlig approximation av den prediktiva fördelningen

Liu och Verrall (2010) använder Pearsonresidualer för att möta antagandet om att samplen är lika fördelade i bootstrappingen. Precis som i England och Verrall (2006) använder de residualerna för de observerade utvecklingsfaktorerna (se formel 3.2.2 och 3.2.3) istället för de faktiska skadedatat, då vi använder en rekursiv modell.

Följande algoritm beskriver tillvägagångssättet för att implementera bootstrapping av Munich Chain Ladder:

1. Tillämpa Munich Chain Ladder på både data bestående av betalt och taxation och beräkna de fyra olika residualerna, se formler 3.2.2 till 3.2.5.
2. Justera Pearsonresidualerna, (3.2.2) - (3.2.5), genom att multiplicera med  $\sqrt{\frac{n-s}{n-s-1}}$ . På detta sätt får vi väntevärdesriktighet.
3. Gruppera alla fyra residualer, dvs. residualerna för utvecklingsfaktorerna för betalt och taxation och residualerna för betalt över taxation och taxation över betalt. Vi skriver detta som:

$$U_{ij} = \left\{ \left( Res(P_{ij}) \right), \left( Res(Q_{i,j}^{-1}) \right), \left( Res(I_{ij}) \right), \left( Res(Q_{i,j}) \right) \right\}$$

4. Börja iterationen som ska upprepas  $N$  gånger, där  $N \geq 1000$ . Detta innehåller följande steg:
  - a. Sampla slumpmässigt med återläggning från de grupperade residualerna från den grupperade triangeln så att vi skapar ett pseudosampel av den grupperade triangeln. Detta genererar en ny triangel av grupperade residualer. Benämna som
$$U_{ij}^B = \left\{ \left( Res(P_{ij}) \right)^B, \left( Res(Q_{i,j}^{-1}) \right)^B, \left( Res(I_{ij}) \right)^B, \left( Res(Q_{i,j}) \right)^B \right\},$$
  - b. Beräkna de bootstrappede och Munich Chain Ladder justerade utvecklingsfaktorerna för pseudosamlingen av betalt och taxation enligt följande steg:
    - i. Beräkna utvecklingsfaktorerna för betalt och taxation, relationerna betalt över taxation och relationerna taxation över betalt, genererade av pseudosamlingen. Invertera Pearsonsresidualerna enligt följande:

$$\begin{aligned} (F_{ij}^P)^B &= \frac{(Res(P_{ij}))^B \cdot \hat{\sigma}_j^P}{\sqrt{P_{ij}}} + \hat{f}_j^P, (Q_{ij}^{-1})^B = \frac{(Res(Q_{ij}^{-1}))^B \cdot \hat{\rho}_j^P}{\sqrt{P_{ij}}} + \hat{q}_j^{-1} \\ (F_{ij}^I)^B &= \frac{(Res(I_{ij}))^B \cdot \hat{\sigma}_j^I}{\sqrt{I_{ij}}} + \hat{f}_j^I, (Q_{ij})^B = \frac{(Res(Q_{ij}))^B \cdot \hat{\rho}_j^I}{\sqrt{I_{ij}}} + \hat{q}_j \end{aligned}$$

Residualerna fås genom att separera triangeln  $U_{ij}^B$ .

- ii. Beräkna  $P_{ij}$ - och  $I_{ij}$ - vägda medelvärden av utvecklingsfaktorerna och relationerna mellan betalt respektive taxation beräknade från pseudosamplingen:

$$(\hat{f}_j^P)^B = \sum_{i=1}^{n-j} \frac{P_{i,j}}{\sum_{k=1}^{n-j} P_{k,j}} \cdot (F_{ij}^P)^B, \quad (\hat{q}_j^{-1})^B = \sum_{i=1}^{n-j} \frac{P_{i,j}}{\sum_{k=1}^{n-j} P_{k,j}} \cdot (Q_{ij}^{-1})^B$$

och

$$(\hat{f}_j^I)^B = \sum_{i=1}^{n-j} \frac{I_{i,j}}{\sum_{k=1}^{n-j} I_{k,j}} \cdot (F_{ij}^I)^B, \quad (\hat{q}_j)^B = \sum_{i=1}^{n-j} \frac{I_{i,j}}{\sum_{k=1}^{n-j} I_{k,j}} \cdot (Q_{ij})^B$$

Notera att vikterna  $P_{ij}$  och  $I_{ij}$  kommer från originaldatasetet och inte från pseudosamplingen.

- iii. Beräkna motsvarande korrelationskoefficient för det återsamlade datat med hjälp av de pseudosamlade Pearsonresidualerna, enligt följande:

$$(\widehat{\lambda}^P)^B = \frac{\sum_{i,j} (\text{Res}(Q_{i,j}^{-1}))^B \cdot (\text{Res}(P_{i,j}))^B}{\sum_{i,j} (\text{Res}(Q_{i,j}^{-1})^B)^2}$$

$$(\widehat{\lambda}^I)^B = \frac{\sum_{i,j} (\text{Res}(Q_{i,j}))^B \cdot (\text{Res}(I_{i,j}))^B}{\sum_{i,j} (\text{Res}(Q_{i,j})^B)^2}$$

- iv. Beräkna varianserna för det bootstrappade dataseten enligt följande:

$$((\hat{\sigma}_j^P)^2)^B = \frac{1}{n-j-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-j} P_{i,j} \cdot ((F_{ij}^P)^B - (\hat{f}_j^P)^B)^2$$

$$((\hat{\rho}_j^P)^2)^B = \frac{1}{n-j-1} \cdot \sum_{j=1}^{n-j} P_{i,j} \cdot ((Q_{i,j}^{-1})^B - (\hat{q}_j^{-1})^B)^2$$

$$((\hat{\sigma}_j^I)^2)^B = \frac{1}{n-j-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-j} I_{i,j} \cdot ((F_{ij}^I)^B - (\hat{f}_j^I)^B)^2$$

$$((\hat{\rho}_j^I)^2)^B = \frac{1}{n-j-1} \cdot \sum_{j=1}^{n-j} I_{i,j} \cdot ((Q_{i,j})^B - (\hat{q}_j)^B)^2$$

Notera att summationen går från 1 till  $n-j$  eftersom den sista diagonalen av betalt till taxation (och taxation till betalt) inte ingår i återsamlingsproceduren.

- v. Beräkna de bootstrappade och Munich Chain Ladder justerade utvecklingsfaktorerna enligt följande:

$$(\hat{f}_{ij}^P)^B_{MCL} = (\hat{f}_j^P)^B + (\widehat{\lambda}^P)^B \cdot \frac{(\hat{\sigma}_j^P)^B}{(\widehat{\rho}_j^P)^B} \cdot ((Q_{ij}^{-1})^B - (\hat{q}_j^{-1})^B)$$

och

$$(\hat{f}_{ij}^I)^B_{MCL} = (\hat{f}_j^I)^B + (\hat{\lambda}^I)^B \cdot \frac{(\hat{\sigma}_j^I)^B}{(\hat{\rho}_j^I)^B} \cdot ((Q_{ij})^B - (\hat{q}_j)^B)$$

Notera att vi i enlighet med Munich Chain Ladder har justerat med korrelationskoefficienten mellan pseudosamlingsdataseten.

- c. Utveckla skadetriangeln, för både betalt och taxation, från processfördelningen där väntevärde och varians beräknas från föregående steg. För att göra detta behövs följande steg:

- i. För att prediktera ett steg framåt för den senaste diagonalen antar vi en normalfördelning, dvs. för  $2 \leq i \leq n$ ,

$$P_{i,n-i+2} \sim Normal \left( (\hat{f}_{i,n-i+1}^P)^B_{MCL} \cdot P_{i,n-i+1}, ((\hat{\sigma}_{n-i+1}^P)^2)^B \cdot P_{i,n-i+1} \right)$$

och

$$I_{i,n-i+2} \sim Normal \left( (\hat{f}_{i,n-i+1}^I)^B_{MCL} \cdot I_{i,n-i+1}, ((\hat{\sigma}_{n-i+1}^I)^2)^B \cdot I_{i,n-i+1} \right).$$

- ii. För prediktera upp till  $n$  steg framåt antar vi också en normalfördelning. Dock beräknas väntevärde och varians med hjälp av prediktionen innan istället för av observerat data, dvs. för  $3 \leq k \leq n$  och  $n - k + 3 \leq l \leq n$ ,

$$P_{kl} \sim Normal \left( (\hat{f}_{k,l-1}^P)^B_{MCL} \cdot \hat{P}_{k,l-1}, ((\hat{\sigma}_{l-1}^P)^2)^B \cdot \hat{P}_{k,l-1} \right)$$

och

$$I_{kl} \sim Normal \left( (\hat{f}_{k,l-1}^I)^B_{MCL} \cdot \hat{I}_{k,l-1}, ((\hat{\sigma}_{l-1}^I)^2)^B \cdot \hat{I}_{k,l-1} \right).$$

5. Beräkna den estimerade reserven per skadeår och totalt.

$$\hat{R}_n^B = \text{total estimerad skadekostnad}_n - \text{vad som hittills är betalt}.$$

6. Spara resultaten och återgå till början av iterationsloopen.

7. Genom att beräkna standardavvikelsen för den estimerade reserven per skadeår och totalt fås prediktionsfelet:

$$(4.1.1) \quad s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\hat{R}_n^B - \bar{R})^2}$$

8. Utifrån detta kan vi beräkna den prediktiva fördelningen för den estimerade totala reserven.

## 5. Skadedata

Analyserna i denna uppsats kommer att tillämpas på två olika försäkringsklasser från Trygg-Hansa. Dels hemförsäkring som är en kortsvansad försäkringsklass och dels sjuk- och olycksfall som är en långsvansad försäkringsklass.

Den kortsvansade försäkringsklassen som är en hemförsäkringsprodukt karakteriseras av att skadorna rapporteras in, reservsätts av skadereglerarna och betalas ut till försäkringstagaren relativt fort efter att de har inträffat. För denna försäkringsklass har vi även observerat säsongeffekter för vissa skadekvartal. Säsongeffekter kan uppstå dels när det finns en fördröjning i rapporteringen pga. vinterledighet eller sommarledighet och dels när det systematiskt inträffar fler skador pga. vinterväder (frysskador) eller sommarväder (brandskador). När vi har en försäkringsklass med systematiska säsongeffekter kan det vara så att Chain Ladder fungerar bra efter ett visst antal utvecklingskvartal eftersom det kan vara svårt att prediktera de första utvecklingsfaktorerna. För denna klass antar vi att den gränsen går efter ett år, dvs. vi tror att skadeutvecklingen inte längre påverkas av säsongeffekter efter fyra utvecklingskvartal. Vi kan använda data från och med 2004Q1 för att skatta parametrar till de olika modellerna. Detta tror vi ger tillräckligt med tillförlitliga historiska observationer. För denna hemförsäkringsprodukt är det rimligt att anta att skadorna är färdigutvecklade efter sju år, dvs. efter 28 kvartal.

Den långsvansade försäkringsklassen som är en sjuk- och olycksfallsprodukt för barn karakteriseras av att tiden mellan det att skadorna rapporteras in och betalas ut till försäkringstagaren är väldigt lång, i vissa fall kan det ta upp till 19 år innan skadorna stängs. Det generella problemet med långsvansade dataset är att de är svårare att prediktera. Det behövs mycket historiskt data för att kunna prediktera total skadekostnad för skadedata som har lång utveckling och ofta har man för lite eller ofullständigt historiskt data. Det kan förekomma dels interna förändringar i t.ex. produkt, skadehanteringen och hur reserver sätts av skadereglerarna och dels externa förändringar i t.ex. lagstiftning och inflation. Dessa förändringar leder till att skadedata dels kan förändras beloppsmässigt och dels kan förändras i dess utveckling. Detta kan ske även för andra mer kortsvansade försäkringsklasser, dock kräver de klasserna oftast inte lika mycket historiskt data som de långsvansade försäkringsklasserna gör.

När det tar lång tid innan skadorna stängs kan det vara fördelaktigt att kombinera Chain Ladder med BF för de senaste skadekvartalen och att göra en kurvanpassning för de tidigaste skadekvartalen. Detta ger oftast ett stabilare estimat av total skadekostnad för sådana försäkringsklasser. Dock har vi bortsett från att utreda BF och kurvanpassningar i denna uppsats. För denna sjuk- och olycksfallsprodukt kan vi använda data efter 1992Q1 för att skatta parametrarna. Detta tror vi ger tillräckligt med tillförlitliga historiska observationer. Vi tror även att det är rimligt att anta att skadorna är färdigutvecklade efter 19 år, dvs. efter 76 kvartal, för denna långsvansade försäkringsklass.

Data ligger kvartalsvis vad gäller skadeperiod och utvecklingsperiod. Dataseten som vi använder i tillämpningen av Brosius minstakvadratmetod består av taxation och i tillämpningen av Munich Chain Ladder använder vi dataset bestående av taxation och dataset bestående av betalt. I samtliga dataset är det senaste skadekvartalet 2010Q4, vi använder alltså data per 2010.

För att behålla Trygg-Hansas data konfidentiellt har skadedata som presenteras i denna uppsats skalats med en faktor.

## 6. Tillämpning av reservsättningsmetoderna på data

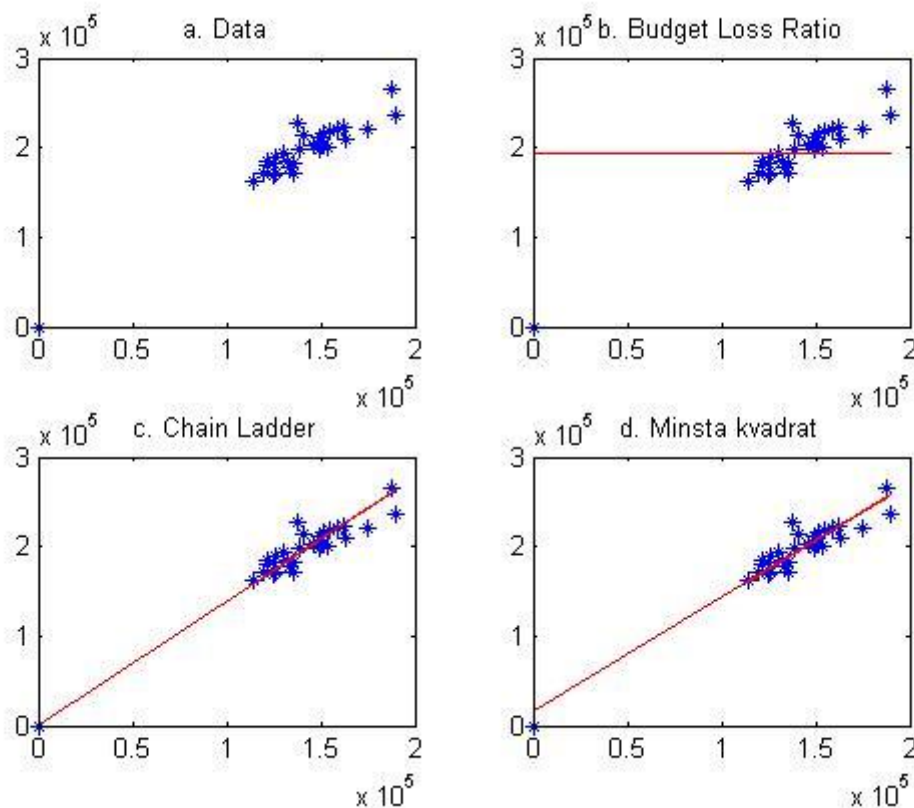
### 6.1 Brosius minstakvadratmetod

I detta avsnitt kommer vi att utföra Brosius minstakvadratmetod på skadedata bestående av Trygg-Hansas hemförsäkringsprodukt respektive sjuk- och olycksfallsprodukt, samt göra vissa jämförelser av resultaten.

#### 6.1.1 Kortsvarsat data

Först gör vi en jämförelse mellan Brosius minstakvadratmetod, Chain Ladder och Budget Loss Ratio metoden, se figur 1. Taxationen efter ett kvartal visas på x-axeln, och på y-axeln visas hur taxationen har utvecklats sig efter tre kvartal. Vi jämför den prediktion av skadekostnaden vi skulle ha gjort med de olika metoderna. Med Budget Loss Ratio metoden predikterar vi ett fixt värde oavsett vilket värde  $x$  har. Då värdet på  $x$  ökar så predikterar vi fortfarande det fixa värdet (figur 1b). Chain Ladder ger en anpassad linje genom origo som ger ett större estimerat värde ju större värdet på  $x$  är (figur 1c). Brosius minstakvadratmetod ger en anpassad linje som inte går genom origo och som inte ger ett fixt värde när vi estimerar den totala skadekostnaden efter tre kvartal. Vi kan notera att Chain Ladder ger ett lite högre estimat för höga värden på  $x$  än vad Brosius minstakvadratmetod ger, dock är det liten skillnad mellan estimaten i detta exempel.

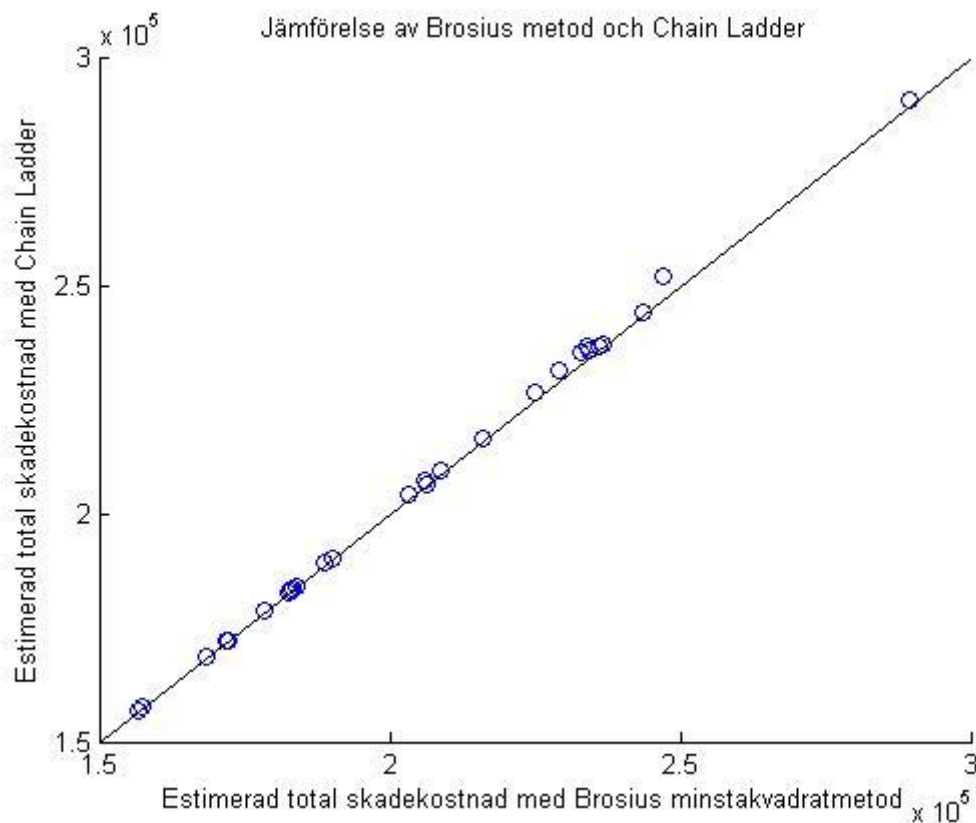
Notera att i figur 1 anpassas linjen genom att ett  $a$  och ett  $b$  beräknas. I Brosius minstakvadratmetod beräknas ett  $a$  och ett  $b$  för varje skadekvartal.



Figur 1: En jämförelse av metoderna genom att anpassa respektive metod till skadedata efter tre kvartal. På x-axeln visas skadedata efter ett kvartal och på y-axeln visas skadedata efter tre kvartal. Metodens prediktion av skadedata illustreras av linjen.

Nu utför vi Brosius minstakvadratmetod på taxationsdata och jämför med en vanlig Chain Ladder. Hemförsäkringsklassen antas enligt tidigare vara färdigutvecklad efter 28 kvartal och detta innebär att den observerade taxationen vid utvecklingskvartal 29 anses vara fullt utvecklad, dvs. lika med total skadekostnad. Därmed följer att  $\bar{y}$  i parameterskattningarna (3.1.1) beräknas som medelvärdet av taxationen vid utvecklingskvartal 29 och allt eftersom även de predikterade värden för total skadekostnad över alla skadekvartal.

I figur 2 visas en scatterplot över den estimerade totala skadekostnaden för de 28 senaste skadekvartalen för de båda metoderna. Om metoderna skulle ge exakt samma estimat skulle alla punkter ligga längs med den 45-gradiga linjen. Vi kan se att vissa punkter avviker från linjen men skillnaden mellan de båda metoderna är inte speciellt stor. När vi utför Brosius minstakvadratmetod använder vi oss av ett slags Chain Ladder estimat (se formel 3.1.2) i de fall vi får ett negativt värde på parametern  $a$ . Detta sker för de 15 första skadekvartalen. De punkter som avviker från den 45-gradiga linjen visar ett högre estimat av total skadekostnad för Chain Ladder. Dessa punkter hör till de tolv senaste skadekvartalen.



Figur 2: Estimerad total skadekostnad för Brosius minstakvadratmetod och Chain Ladder.

För att kunna jämföra metoderna närmre, undersöker vi den estimerade totala skadekostnaden samt den relativa skillnaden mellan metoderna för de tolv senaste skadekvartalen, se tabell 1.

kk

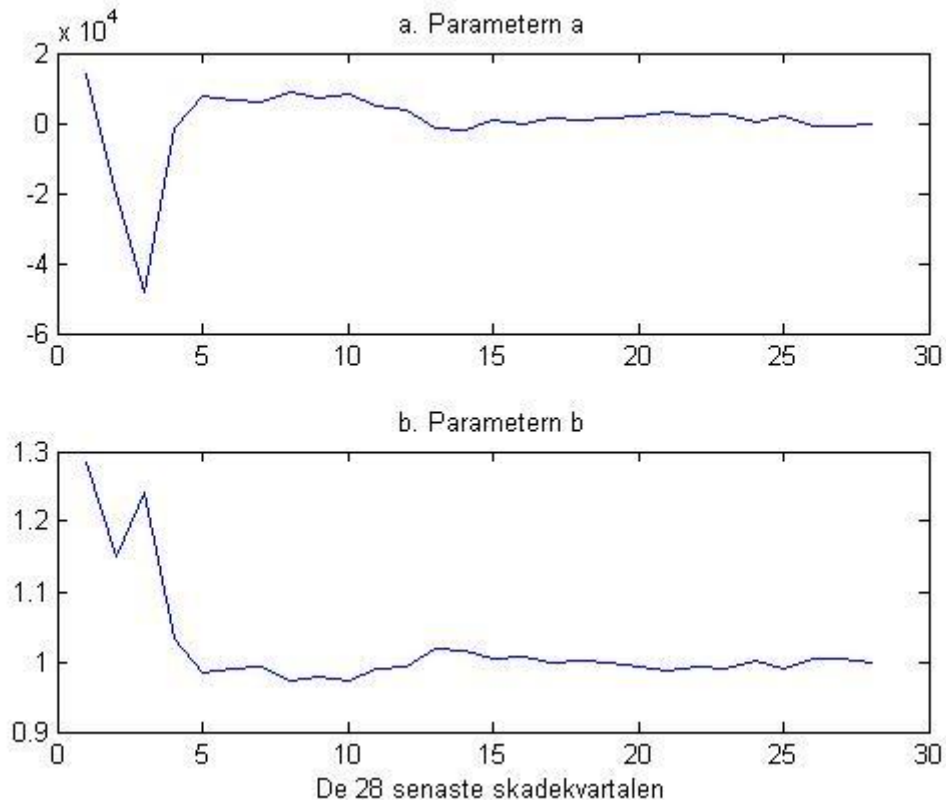
Skadekvartal	Brosius minstakvadrat metod (1)	Chain Ladder (2)	Differens (1) - (2)
2008 Q1	234	236	-0,6%
2008 Q2	179	179	0,0%
2008 Q3	233	235	-1,0%
2008 Q4	206	207	-0,5%
2009 Q1	234	237	-1,2%
2009 Q2	203	204	-0,4%
2009 Q3	225	227	-0,8%
2009 Q4	229	231	-0,9%
2010 Q1	290	291	-0,3%
2010 Q2	236	237	-0,3%
2010 Q3	243	244	-0,3%
2010 Q4	247	252	-1,8%
Totalt	2 759	2 779	-0,7%

Tabell 1: Estimerad total skadekostnad för de tolv senaste skadekvartalen.

För samtliga av dessa skadekvartal, förutom för skadekvartal 2010Q1 – 2010Q3, väljer vi minstakvadratmetoden när vi utför Brosius metod. För skadekvartal 2010Q1 – 2010Q3 blir parametern  $a$  negativ. Brosius minstakvadratmetod ger ett lite lägre estimat av total skadekostnad än vad Chain Ladder gör. Vi kan också notera att den största skillnaden mellan metoderna är för det senaste skadekvartalet.

Nu undersöker vi värdet på parametrarna  $a$  och  $b$ . I teorin bör de konvergera mot 0 respektive 1 eftersom  $x$  då närmar sig  $y$ , se formel 3.1.1. I E. Brosius (1993) varnas det för att parametern  $a$  kan bli negativ i slutet av triangeln och då kan vi inte använda Brosius metod utan blir tvungna att använda oss av ett slags Chain Ladder estimat istället. Vi ser dock att Chain Ladder väljs i början av triangeln, dvs. för skadekvartalen 2010Q1 till 2010Q3. Därför vill vi nu undersöka konvergensen hos parametrarna. Se figur 3.





**Figur 3: Konvergensen hos parametrarna  $a$  och  $b$ .** I teorin bör de konvergera mot noll respektive ett. x-axeln anger de 28 senaste skadekvartalen, dvs. det första värdet på parametrarna  $a$  och  $b$  används för att prediktera total skadekostnad för det senaste skadekvartalet och det 28:e värdet används för att prediktera det 28:e skadekvartalet.

I figur 3 ser vi i graf a hur värdet på parametern  $a$  varierar med skadekvartal och i graf b ser vi hur värdet på parametern  $b$  varierar med skadekvartal. Notera att det första värdet på parametrarna  $a$  och  $b$  används för att prediktera total skadekostnad för det senaste skadekvartalet, dvs. för skadekvartal 2010Q4 i tabell 1. Det är tydligt att parametern  $b$  konvergerar mot 1. Det ser även ut som att parametern  $a$  konvergerar mot 0, dock beror detta på att skalan på y-axeln är extremt stor. Parametern  $a$  är i själva verket långt från 0.

I figur 3 kan vi även se att vi får ett extremt negativt värde för det tredje senaste skadekvartalet, dvs. 2010Q2. Detta beror på att  $\bar{x}$  blir extremt stor då vi inkluderar  $x$ -värdet för 2010Q1<sup>1</sup>. Även skadekvartalen 2010Q1 och 2010Q3 har relativt stora negativa värden på parametern  $a$  som kommer av höga värden på  $\bar{x}$ . Även här drivs de höga värdena på  $\bar{x}$  av höga  $x$ -värden för de senaste skadekvartalen och inte av att samtliga  $x$ -värden är höga och närmre  $y$ . Detta är anledningen till att dessa skadekvartal får ett negativt värde på parametern  $a$ . Det är värt att notera att när parametern  $b$  ökar eller minskar leder detta till att parametern  $a$  minskar respektive ökar. Detta är en följd av hur parametern  $a$  definieras, se formel 3.1.1.

I tabell 2 visas resultatet av att använda Brosius minstakvadratmetod respektive Chain Ladder fram till utvecklingskvartal fyra för de åtta senaste skadekvartalen. För skadedata med säsongseffekter bör utvecklingsmönstret vara relativt stabilt efter ett år (se diskussion i avsnitt 5) och genom att jämföra estimat av skadekostnaden efter ett år kan vi undersöka ettårsrisken. För skadekvartal 2009Q1 till 2010Q1 har vi även det faktiska utfallet efter ett år. Notera att vi nu har en mindre skillnad mellan de båda metoderna för samtliga skadekvartal. Precis som tidigare blir parametern  $a$  negativ och Brosius

<sup>1</sup> 2010 Q1 är ett exceptionellt kvartal i den mening att vi har observerat en extremt hög skadekostnad pga. den hårda vintern.

minstakvadratmetod väljer ett slags Chain Ladder estimat för skadekvartalen 2010Q1 till 2010Q3. Till skillnad från tidigare sker detta även för skadekvartalen 2009Q1 till 2009Q4.

kkkr

Skadekvartal	Brosius minstakvadratmetod (1)	Chain Ladder (2)	Verkligt utfall (3)	Differens (1) - (2)
2009 Q1	232	232	231	0,0%
2009 Q2	193	193	199	0,0%
2009 Q3	230	230	223	0,0%
2009 Q4	221	221	225	0,0%
2010 Q1	283	283	283	0,0%
2010 Q2	231	231	-	0,0%
2010 Q3	237	237	-	0,0%
2010 Q4	243	244	-	-0,4%
<b>Totalt</b>	<b>1 870</b>	<b>1 871</b>	<b>-</b>	<b>-0,1%</b>

**Tabell 2: En jämförelse av estimatet för skadekostnaden efter ett år, dvs. Brosius minstakvadratmetod respektive Chain Ladder fram till utvecklingskvartal fyra för de åtta senaste skadekvartalen. Notera att vi i detta fall har det verkliga utfallet för skadekvartal 2009Q1 till 2010Q1 i kolumn 3.**

Vi har tidigare noterat att Brosius metod ger ett något lägre estimat för total skadekostnad än vad Chain Ladder gör. Samt att den största skillnaden verkar ligga vid det senaste skadekvartalet. Detta skulle kunna bero på att vi har som störst säsongseffekt och som störst variation vid det senaste skadekvartalet. Under avsnitt 5 konstaterade vi att efter ett visst antal utvecklingskvartal fungerar Chain Ladder bra för denna kortsvansade klass. Med detta som bakgrund vill vi jämföra de estimat vi har fått fram för total skadekostnad i tabell 1 med de estimat vi får om vi utför metoderna på skadetrianglar (se appendix A.1) där det senaste skadekvartalet går från 2008Q1 till 2010Q4 och sedan plockar ut estimaten för det senaste skadekvartalet. Tabell 3 är en påbyggnad av tabell 1 med dessa estimat.

kkkr

Skadekvartal	Brosius minstakvadratmetod (1)	Chain Ladder (2)	Brosius minstakvadratmetod, data per 2008Q1 - 2010Q4 (3)	Chain Ladder, data per 2008Q1 - 2010Q4 (4)	Differens (1) - (2)	Differens (3) - (4)	Differens (2) - (3)	Differens (2) - (4)
2008 Q1	234	236	211	213	-0,6%	-0,8%	10,5%	9,8%
2008 Q2	179	179	185	185	0,0%	-0,1%	-3,5%	-3,6%
2008 Q3	233	235	213	216	-1,0%	-1,6%	9,5%	8,1%
2008 Q4	206	207	205	206	-0,5%	-0,2%	0,9%	0,7%
2009 Q1	234	237	226	227	-1,2%	-0,6%	4,4%	3,9%
2009 Q2	203	204	215	215	-0,4%	-0,2%	-5,2%	-5,4%
2009 Q3	225	227	244	244	-0,8%	-0,2%	-7,4%	-7,6%
2009 Q4	229	231	229	229	-0,9%	-0,1%	1,2%	1,1%
2010 Q1	290	291	255	260	-0,3%	-2,0%	12,3%	10,5%
2010 Q2	236	237	259	264	-0,3%	-1,8%	-9,4%	-11,5%
2010 Q3	243	244	262	268	-0,3%	-2,5%	-7,2%	-9,9%
2010 Q4	247	252	247	252	-1,8%	-1,8%	1,8%	0,0%
<b>Totalt</b>	<b>2 759</b>	<b>2 779</b>	<b>2 750</b>	<b>2 779</b>	<b>-0,7%</b>	<b>-1,1%</b>	<b>1,0%</b>	<b>0,0%</b>

**Tabell 3: En jämförelse mellan metodernas estimat av total skadekostnad i tabell 1 och metodernas estimat när vi utför analysen med skadetrianglar per 2008Q1 – 2010Q4 och tar ut resultatet för det senaste skadekvartalet.**

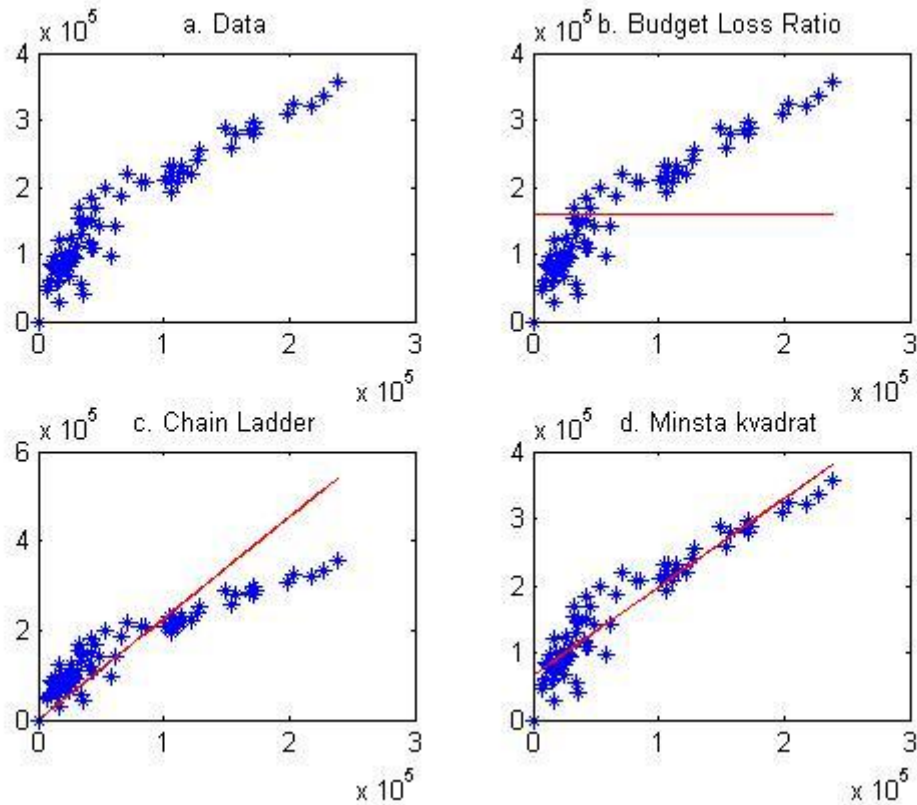
I tabell 3 kan vi observera följande:

- Brosius metoden ger systematiskt ett lite lägre estimat av total skadekostnad än Chain Ladder när vi jämför kolumn (3) mot kolumn (4), precis som vi observerat tidigare (se kolumn (1)-(2)).
- Enligt tidigare antagande tror vi att Chain Ladder är tillräckligt stabil för denna kortsvarsade försäkringsklass efter ett år eftersom utvecklingen därefter inte påverkas av säsongeffekter. Det betyder att vi har relativt stor tillit till Chain Ladder estimaten i kolumn (2) för kvartal 2008Q1 till kvartal 2009Q4.
- Det är en relativt liten skillnad mellan differenserna i kolumn (2)-(3) och (2)-(4). Dock ligger Chain Ladder estimaten i kolumn (4) lite närmre Chain Ladder estimatet i kolumn (2) som är det Chain Ladder estimat som vi anser vara relativt tillförlitligt.

Genomgående är det en väldigt liten skillnad mellan metoderna.

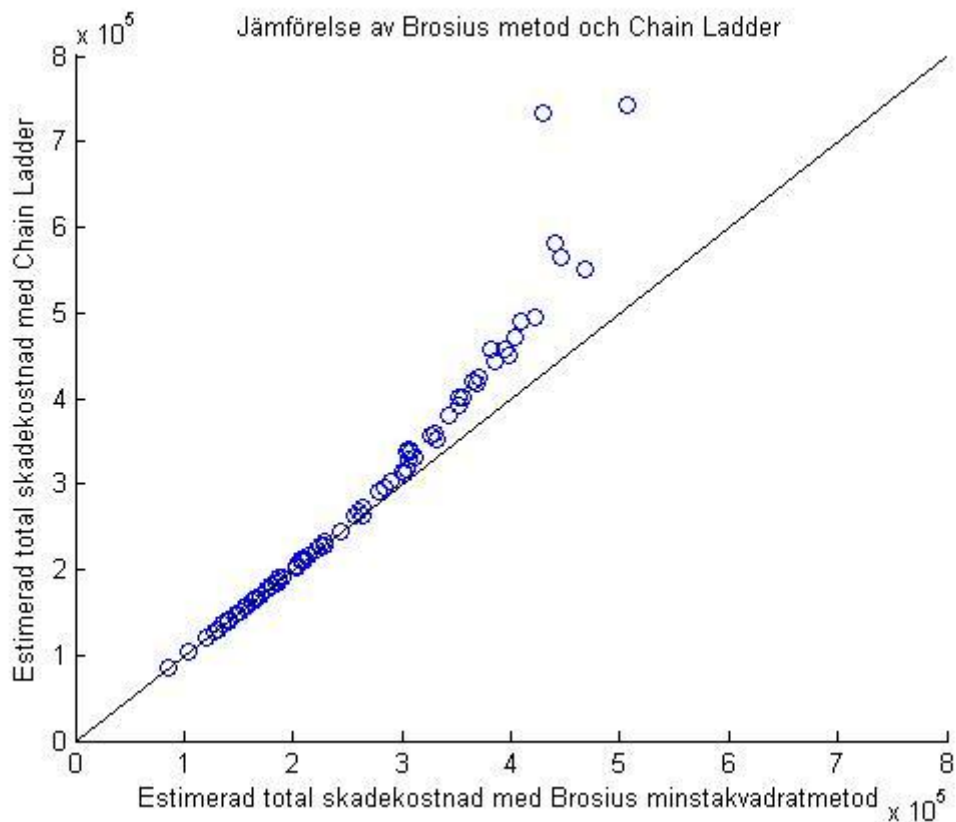
### **6.1.2 Långsvansat data**

Först gör vi, även för skadedata från sjuk- och olycksfallsprodukten, en jämförelse mellan Brosius minstakvadratmetod, Chain Ladder och Budget Loss Ratio metoden, se figur 4. Vi observerar liknande resultat som för den kortsvarsade försäkringsklassen (se figur 1). Skillnaden mellan kort- och långsvansade skadedata (figur 1 respektive figur 4) är att Chain Ladder ger ett betydligt större estimat för höga  $x$ -värden för det långsvansade datasetet än för det kortsvarsade datasetet. Dessutom kan vi inte säga att utvecklingen av skadedata följer en rät linje. Detta illustrerar behovet av en alternativ metod till Chain Ladder för att prediktera utvecklingen av de senaste skadekvartalen.



**Figur 4:** En jämförelse av metoderna genom att anpassa respektive metod till skadedata efter tre kvartal. På x-axeln visas skadedata efter ett kvartal och på y-axeln visas skadedata efter tre kvartal. Metodens prediktion av skadedata illustreras av linjen.

Nu utför vi Brosius minstakvadratmetod på taxationsdata och jämför med en vanlig Chain Ladder. I figur 5 visas en scatterplot över den estimerade totala skadekostnaden för de 76 senaste skadekvartalen för de båda metoderna (kom ihåg att vi har antagit att denna försäkringsklass är färdigutvecklad efter 76 kvartal). Skillnad mellan de båda metoderna är relativt stor och Chain Ladder ser ut att ge ett mycket högre estimat av total skadekostnad. När vi utför Brosius minstakvadratmetod är det för de 35 tidigaste skadekvartalen som vi ofta får ett negativt värde på parametern  $a$ . Den största skillnaden mellan metoderna är för de 20 senaste skadekvartalen. För den kortsvarsade försäkringsklassen var det en mycket mindre skillnad mellan metoderna och vi observerade den största skillnaden för de tolv senaste skadekvartalen istället för de 20 senaste skadekvartalen.



Figur 5: Estimerad total skadekostnad för Brosius minstakvadratmetod och Chain Ladder.

Vi undersöker den totala skadekostnaden för de tolv senaste skadekvartalen på samma sätt som i avsnitt 6.1.1. Se tabell 4.

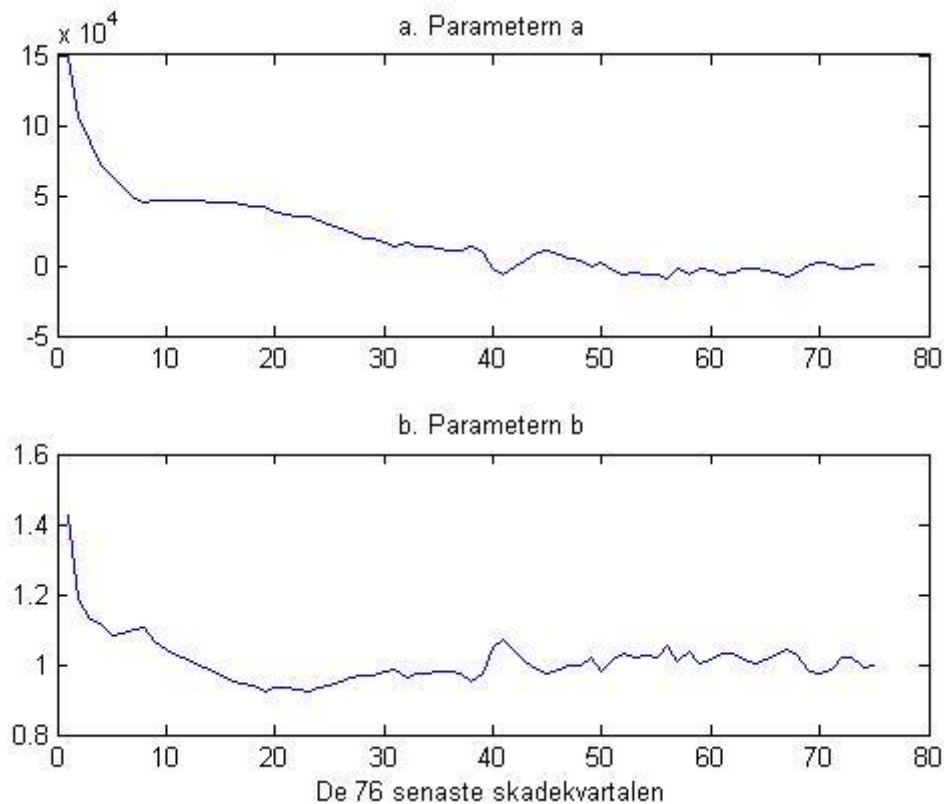
*kk*

Skade- kvartal	Brosius minsta kvadrat metod (1)	Chain Ladder (2)	Differens (1) - (2)
2008 Q1	395	458	-13,9%
2008 Q2	394	458	-14,0%
2008 Q3	405	472	-14,3%
2008 Q4	366	420	-12,9%
2009 Q1	468	551	-15,2%
2009 Q2	422	496	-15,0%
2009 Q3	410	490	-16,5%
2009 Q4	381	458	-16,8%
2010 Q1	447	565	-20,9%
2010 Q2	440	583	-24,5%
2010 Q3	506	744	-32,0%
2010 Q4	429	733	-41,4%
<b>Totalt</b>	<b>5 061</b>	<b>6 429</b>	<b>-21,3%</b>

Tabell 4: Estimerad total skadekostnad för de tolv senaste skadekvartalen.

Det är tydligt att Brosius minstakvadratmetod ger ett mycket lägre estimat än Chain Ladder. Vi kan ifrågasätta redan här om denna metod kan bidra med något när det gäller att estimerar total skadekostnad för denna långsvansade försäkringsklass. För kortsvensade skadedata hade vi 0,7 % i skillnad mellan metoderna, medan vi har 21,3 % i skillnad för långsvansade skadedata. Notera att den största skillnaden mellan metoderna är för det senaste skadekvartalet. Detta gäller för båda försäkringsklasserna och bör komma av att det senaste skadekvartalet har större variation i förhållande till de tidigare skadekvartalen som är mer utvecklade.

Enligt samma tillvägagångssätt som i avsnitt 6.1.1 undersöker vi konvergensen för parametrarna  $a$  och  $b$ . Som sagt bör parametrarna enligt teorin konvergera mot 0 respektive 1. Se figur 6.



**Figur 6: Konvergensen hos parametrarna  $a$  och  $b$ . I teorin bör de konvergera mot noll respektive ett. x-axeln anger de 28 senaste skadekvartalen, dvs. det första värdet på parametrarna  $a$  och  $b$  används för att prediktera total skadekostnad för det senaste skadekvartalet.**

Precis som för kortsvensade skadedata kan vi observera att parametern  $a$  ser ut att konvergera mot 0, med vissa negativa värden i slutet av triangeln, samt att parametern  $b$  konvergera mot 1. Dock är parametern  $a$  i själva verket långt från 0 eftersom skalan på y-axeln är extremt stor, precis som i figur 3. Vi kan även notera att parametern  $b$  inte konvergera lika fort mot 1 som i figur 3. Däremot är det tydligt att parametern  $a$  inte blir negativ i början av triangeln (vilket vi observerade i figur 3). Även här kan vi notera hur graferna följer varandra, dvs. att när parametern  $b$  ökar eller minskar leder det till att parametern  $a$  minskar respektive ökar, som förväntat.

Precis som i avsnitt 6.1.1 vill vi även jämföra de estimat vi har fått fram för total skadekostnad i tabell 4 med de estimat för total skadekostnad vi får om vi utför metoderna på skadetrianglar där det senaste skadekvartalet går från 2008Q1 till 2010Q4 och sedan plockar ut estimaten för det senaste skadekvartalet. Se tabell 5.

kk

Skadekvartal	Brosius minsta kvadrat metod (1)	Chain Ladder (2)	Brosius minstakvadrat metod, data per 2008Q1 - 2010Q4 (3)	Chain Ladder, data per 2008Q1 - 2010Q4 (4)	Differens (1) - (2)	Differens (3) - (4)	Differens (2) - (3)	Differens (2) - (4)
2008 Q1	395	458	336	782	-13,9%	-57,1%	26,7%	-70,6%
2008 Q2	394	458	342	812	-14,0%	-57,9%	25,4%	-77,1%
2008 Q3	405	472	418	888	-14,3%	-52,9%	11,5%	-88,1%
2008 Q4	366	420	371	613	-12,9%	-39,5%	11,6%	-46,2%
2009 Q1	468	551	479	1016	-15,2%	-52,8%	13,0%	-84,3%
2009 Q2	422	496	431	853	-15,0%	-49,5%	13,1%	-71,9%
2009 Q3	410	490	458	900	-16,5%	-49,1%	6,5%	-83,6%
2009 Q4	381	458	383	684	-16,8%	-44,1%	16,5%	-49,2%
2010 Q1	447	565	448	879	-20,9%	-49,0%	20,7%	-55,6%
2010 Q2	440	583	417	787	-24,5%	-47,0%	28,4%	-35,1%
2010 Q3	506	744	502	982	-32,0%	-48,9%	32,6%	-32,0%
2010 Q4	429	733	429	733	-41,4%	-41,4%	41,4%	0,0%
Totalt	5 061	6 429	5 014	9 930	-21,3%	-49,5%	22,0%	-54,5%

Tabell 5: En jämförelse mellan metodernas tidigare estimat av total skadekostnad och metodernas estimat när vi utför analysen med skadetrianglar per 2008Q1 – 2010Q4

I tabell 5 kan vi se att Chain Ladder ger ett mycket högre estimat för total skadekostnad för det senaste skadekvartalet när den utförs på skadetrianglar per 2008Q1 till 2010Q4, se kolumn (4). Brosius metod ger ett ännu lägre estimat än tidigare, se kolumn (3). När det gäller denna typ av mer ostabil och långsvansat skadedata är första utvecklingsfaktorerna i Chain Ladder ostabila och kan medföra oralistiska värden på estimerad total skadekostnad. Detta medför att vi inte har allt för stor tillit till Chain Ladder estimatet i kolumn 2 som vi har när det gäller mer stabilt och kortsvansat skadedata (tabell 3, kolumn 2). Genom att jämföra analyserna för senaste skadekvartalet, se kolumn (3) och (4), med analyserna när skadedata är mer utvecklat, se kolumn (1) och (2), ser Brosius minstakvadratmetod ut att vara en mer stabil metod än Chain Ladder. Genomgående är det relativt stora skillnader mellan metoderna.

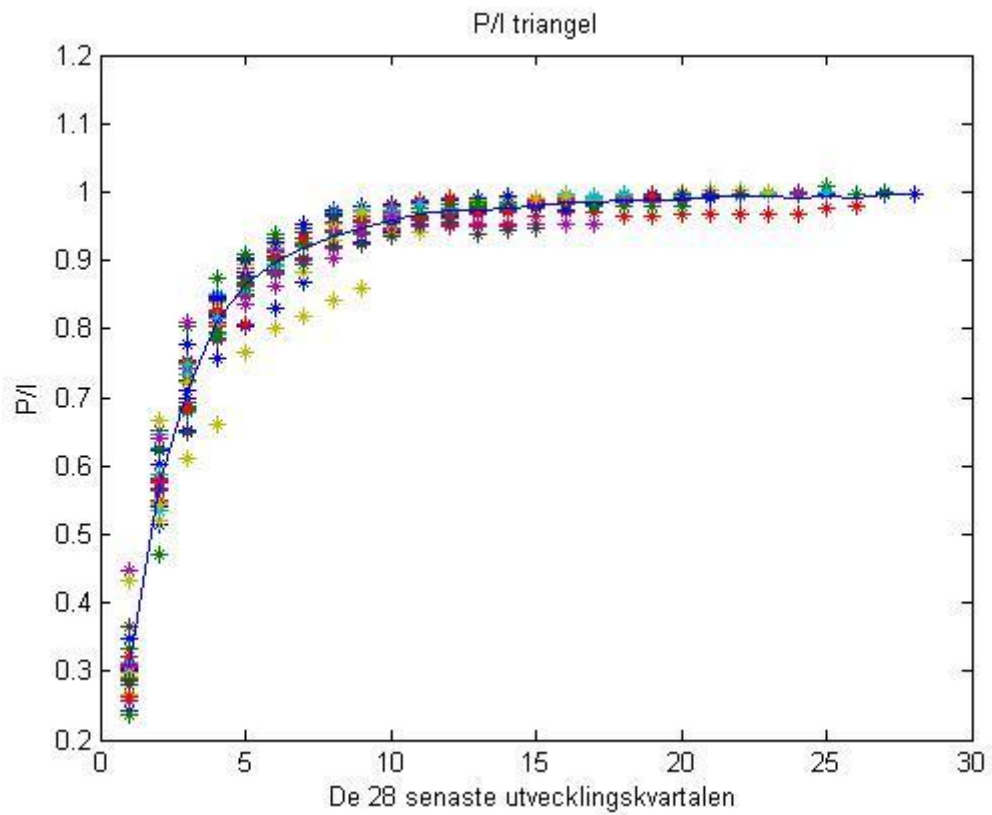
## 6.2 Munich Chain Ladder

I detta avsnitt kommer vi att utföra Munich Chain Ladder på skadedata bestående av Trygg-Hansas hemförsäkringsprodukt respektive sjuk- och olycksfallsprodukt, samt göra vissa jämförelser av resultaten.

### 6.2.1 Kortsvansat data

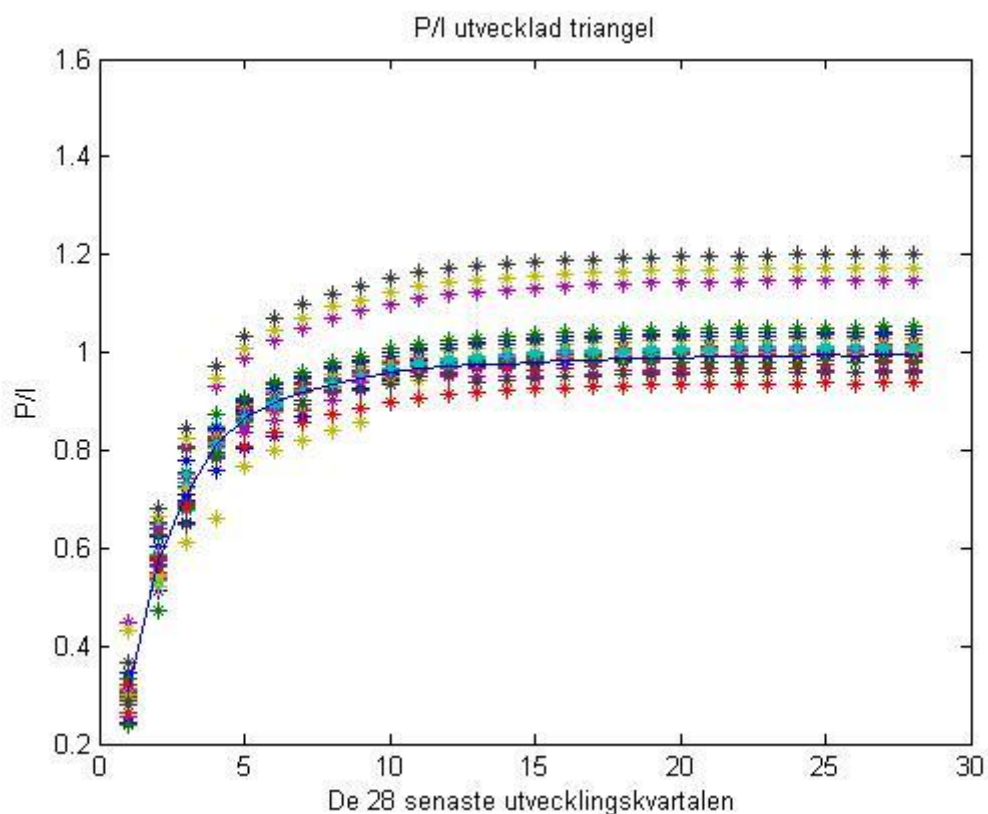
Först illustrerar vi Chain Ladder metodens  $P/I$  problem som vi diskuterade i avsnitt 3.2. I figur 7 ser vi relationen  $P/I$  för alla observationer av de 28 senaste skadekvartalen. Vi har alltså 28 observationer för det första utvecklingskvartalet och 1 observation för det 28:e utvecklingskvartalet. Observationerna är spridda kring sitt medelvärde (linjen i mitten). Som förväntat så konvergerar relationen  $P/I$  mot 1, dvs. allt eftersom fler utvecklingskvartal passerar så har vi betalat ut mer av det som är reservsatt. Om vi utvecklar triangeln för både betalat och taxation med Chain Ladder och sedan undersöker relationen  $P/I$  får vi inte detta resultat. I figur 8 illustreras att relationen  $P/I$  inte konvergerar när vi utvecklar

trianglarna. Detta är en effekt av att vi utvecklar skadekvartal där relationen  $P/I$  ligger under eller över genomsnittsrelationen  $P/I$  för det senaste utvecklingskvartalet för det skadekvartalet, se formel 3.2.1.



Figur 7: Relationen  $P/I$  för de 28 senaste utvecklingskvartalen och skadekvartalen. För utvecklingskvartal ett har vi 28 observationer och för utvecklingskvartal 28 har vi en observation.

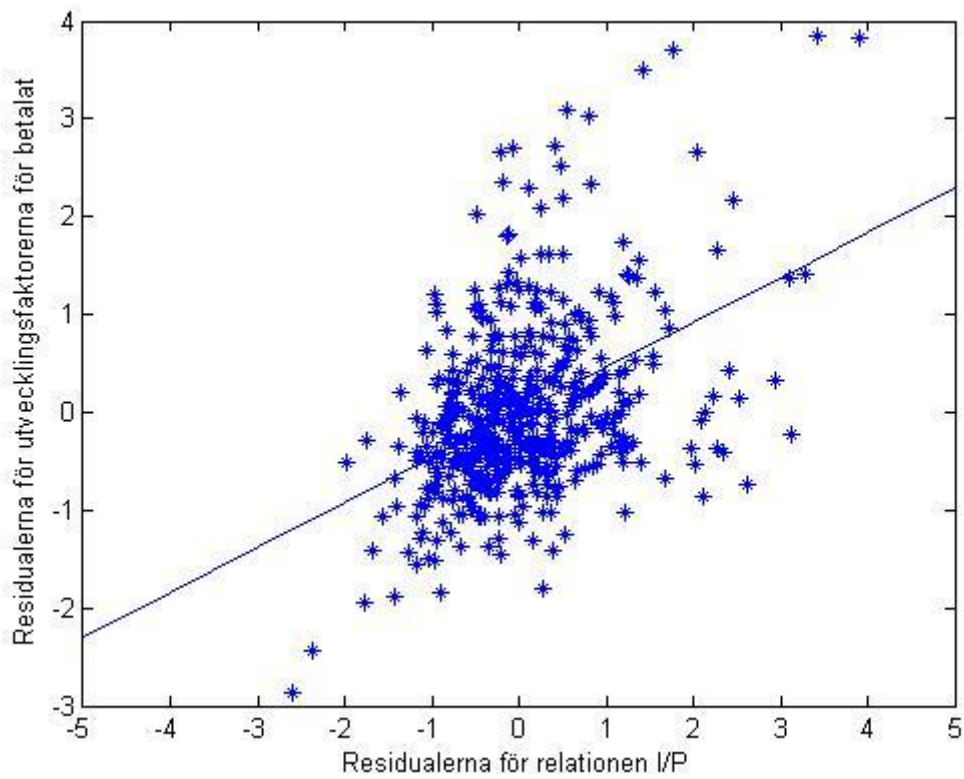




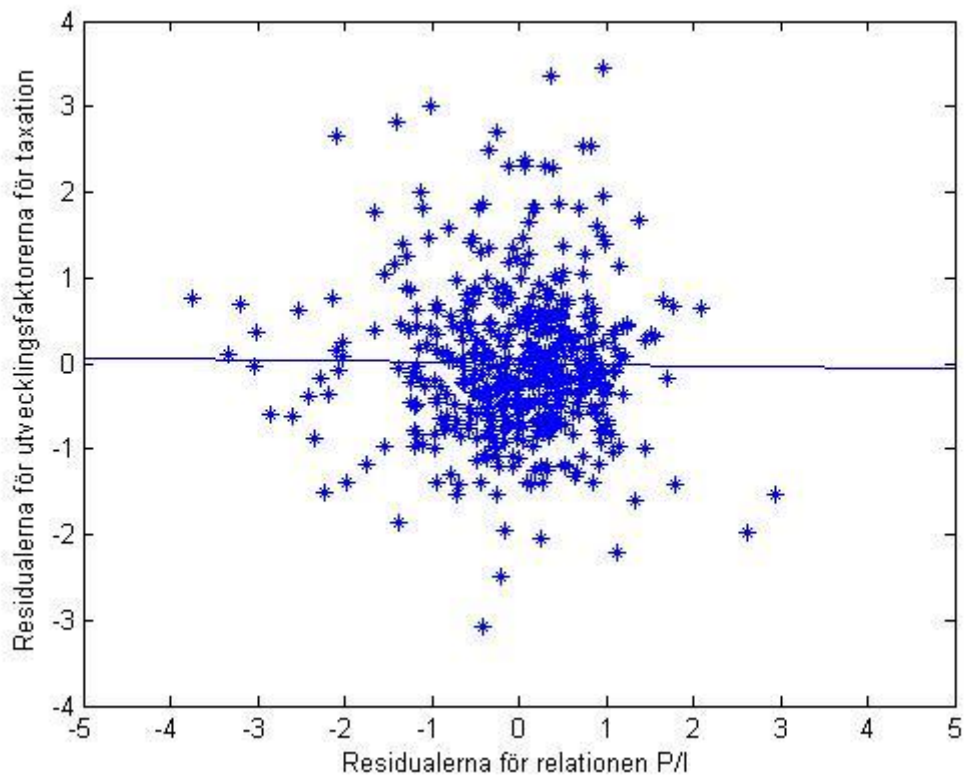
**Figur 8: Relationen  $P/I$  med utvecklad triangel för de 28 senaste skadekvartalen. För varje utvecklingskvartal har vi nu 28 observationer.**

Munich Chain Ladder är som sagt utvecklad för att lösa Chain Ladder metodens  $P/I$  problem. Vi börjar med att räkna ut parametrarna och att göra en residualplott för betalat och taxation, se figur 9 respektive figur 10.

Residualplotten för betalt, se figur 9, har residualerna för relationen  $I/p$  (se formel 3.2.4) på x-axeln och residualerna för  $f^P$  (se formel 3.2.2) på y-axeln. Vi observerar en korrelation på 41 %. Den estimerade lutningen på regressionslinjen genom origo är  $\widehat{\lambda}^P = 0.46$ . Som Munich Chain Ladder beskriver är detta i linje med att tolka  $\lambda^P$  som korrelationsparameter för betalt. På samma sätt har residualplotten för taxation, se figur 10 samt formler 3.2.3 och 3.2.5, en korrelation på -3 %, vilket är i linje med vårt estimat  $\widehat{\lambda}^I = -0.01$ . Värdena på korrelationsparametrarna,  $\lambda^P$  och  $\lambda^I$ , leder oss till slutsatsen att det bör vara utvecklingsfaktorerna för betalt som justeras mest.

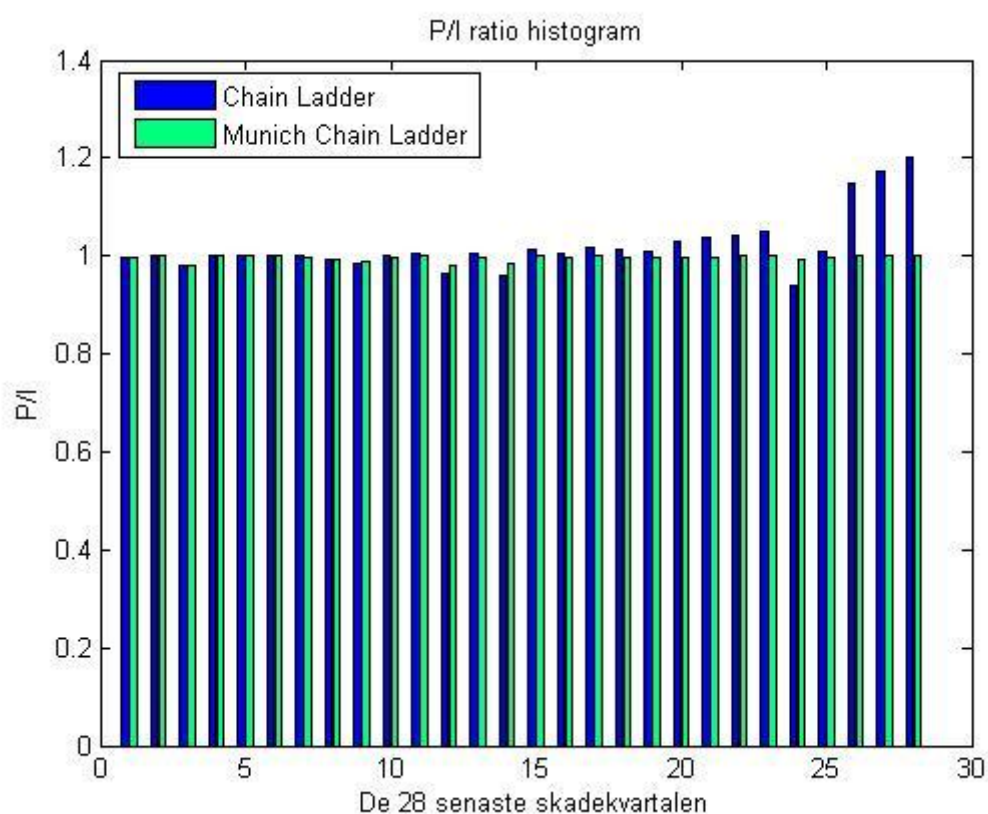


**Figur 9: Residualplot för betalat. På x-axeln visas residualerna för relationen I/P och på y-axeln visas residualerna för utvecklingsfaktorena.**



**Figur 10: Residualplot för taxation. På x-axeln visas residualerna för relationen P/I och på y-axeln visas residualerna för utvecklingsfaktorena.**

För att undersöka om vi har lyckats lösa Chain Ladder metodens  $P/I$  problem och för att jämföra vårt resultat för Munich Chain Ladder mot resultatet för Chain Ladder, plottar vi  $P/I$  relationen i ett histogram. I figur 11 jämför vi  $P/I$  relationen för den estimerade totala skadekostnaden för de 28 senaste skadekvartalen. I varje par av staplar visar staplarna till vänster relationen när vi estimerar total skadekostnad med hjälp av Chain Ladder. Staplarna till höger visar relationen när vi använder Munich Chain Ladder för att estimerar total skadekostnad. För de tre senaste skadekvartalen kan vi se att Chain Ladder estimerar betalt 15-20 % högre än taxation och för det femte senaste skadekvartalet kan vi se att Chain Ladder estimerar betalt ungefär 10 % lägre än taxation. Med Munich Chain Ladder får vi estimat för de båda trianglarna som är närmre varandra än det estimatet vi får med Chain Ladder. Utifrån figur 11 och värdet på korrelationsparametrarna kan vi dra slutsatsen att det är utvecklingsfaktorerna för betalt som justeras mest och att de även justeras ner.



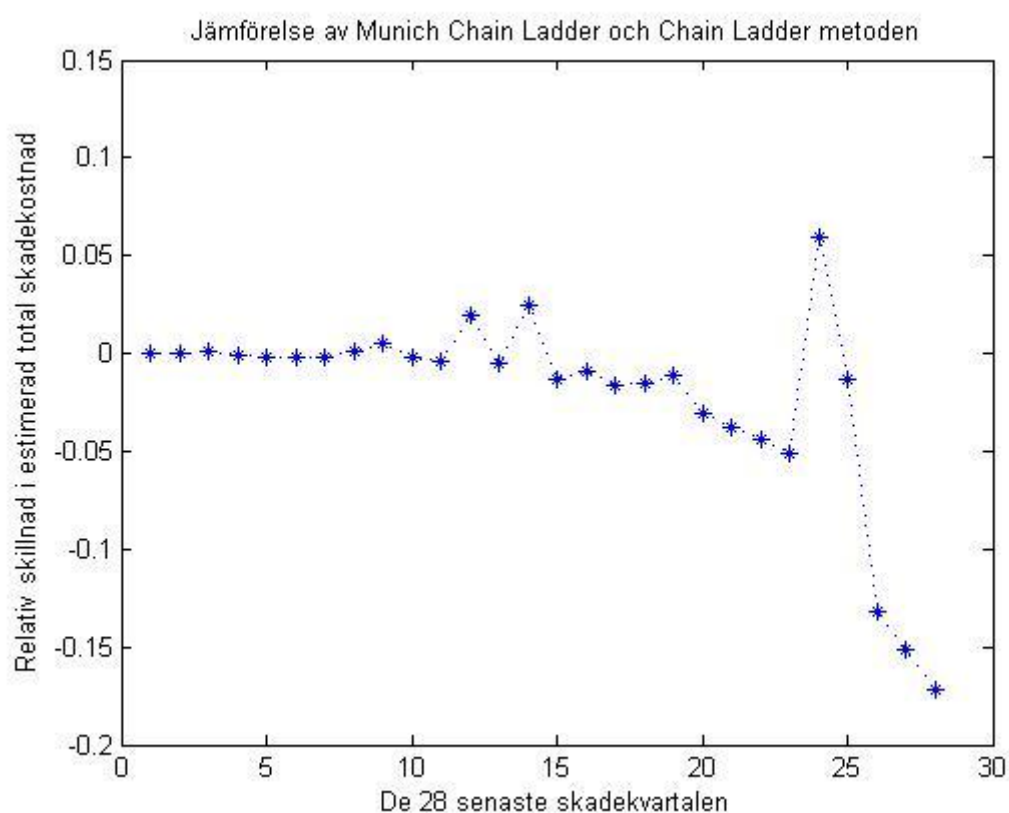
Figur 11: Jämförelse av relationen  $P/I$  för estimat baserade på Chain Ladder respektive Munich Chain Ladder.

För att få en bild av hur mycket och för vilka skadekvartal Munich Chain Ladder justerar utvecklingsfaktorn för betalt respektive taxation gör vi en jämförelse av den relativa skillnaden i estimerad total skadekostnad. I figur 12 och figur 13 kan vi se skillnaden mellan Munich Chain Ladder och Chain Ladder för betalt respektive taxation. Vi observerar följande:

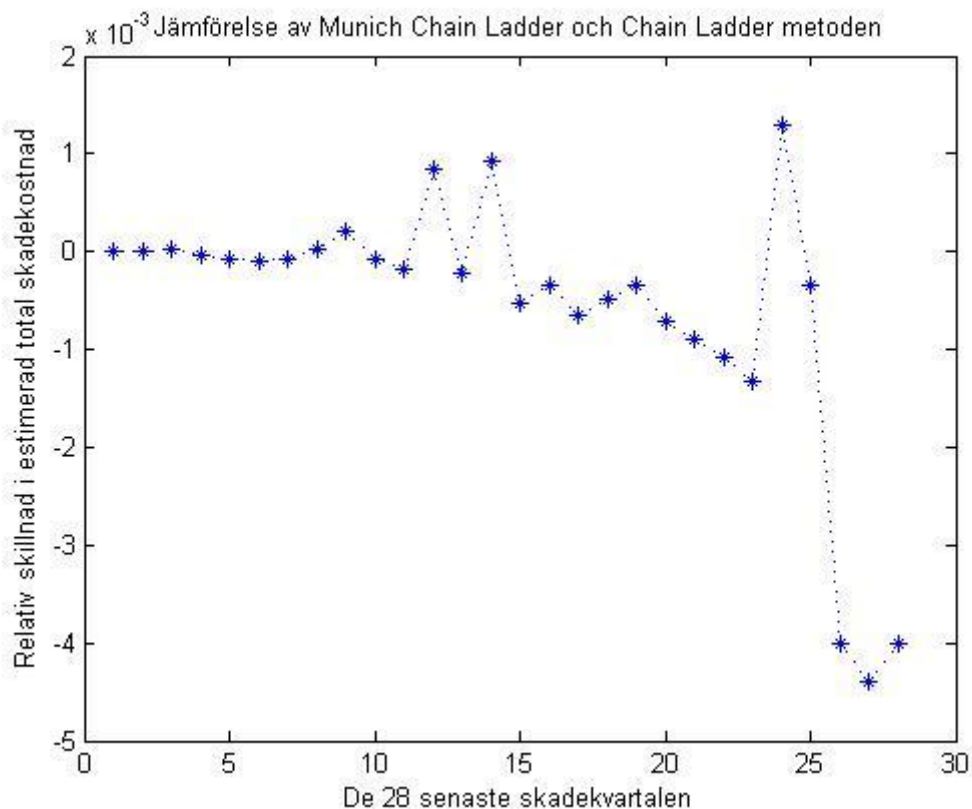
- I figur 12 kan vi tydligt se att Munich Chain Ladder ger ett lägre estimat för total skadekostnad för de tre senaste skadekvartalen. Det innebär att utvecklingsfaktorerna för betalt har justerats ner. Munich Chain Ladder ger även ett högre estimat för det femte senaste skadekvartalet vilket innebär att utvecklingsfaktorn har justerats ner. Detta är i linje med det vi såg i figur 11. Förutom denna justering ser vi även skillnad mellan metoderna för de senare skadekvartalen, dock inte i samma storleksordning.

- I figur 13 kan vi se att även här är det de tre senaste skadekvartalen och det femte senaste skadekvartalet som justeras mest. Även här har de utvecklingsfaktorerna justerats ned respektive upp, dock inte lika mycket som för data bestående av betalt.
- Dock är det en mindre skillnad mellan de båda metoderna (notera att skalan i figur 13 går från 0,2 % till -0,5 % medan skalan i figur 12 går från 15 % till -20 %). Det innebär att utvecklingsfaktorerna för taxation inte har justerats lika mycket som utvecklingsfaktorerna för betalt.

Metoderna tillämpade på data för betalt och taxation visas i tabell 6 respektive tabell 7 för de tolv senaste skadekvartalen. För data bestående av taxation får vi 0,1 % mindre i estimerad total skadekostnad när vi använder Munich Chain Ladder. För data bestående av betalt får vi 5,7 % mindre i estimerad total skadekostnad när vi använder Munich Chain Ladder. Av dessa skillnader kommer merparten från de tre senaste skadekvartalen, se tabell 6 och tabell 7 kolumn (1)-(2).



**Figur 12: Relativa skillnaden i estimerad total skadekostnad mellan Munich Chain Ladder och Chain Ladder (MCL - CL)/CL. Notera att vi använder data bestående av betalt.**



**Figur 13: Relativa skillnaden i estimerad total skadekostnad mellan Munich Chain Ladder och Chain Ladder (MCL - CL)/CL. Notera att vi använder data bestående av taxation.**

Precis som i avsnitt 6.1.1 vill vi även jämföra de estimat vi har fått fram för total skadekostnad med de estimat för total skadekostnad vi får om vi utför metoderna på skadetrianglar där det senaste skadekvartalet går från 2008Q1 till 2010Q4 och sedan plockar ut estimaten för det senaste skadekvartalet.

kk

Skadekvartal	Munich Chain Ladder (1)	Chain Ladder (2)	Munich Chain Ladder, data per 2008Q1 - 2010Q4 (3)	Chain Ladder, data per 2008Q1 - 2010Q4 (4)	Differens (1) - (2)	Differens (3) - (4)	Differens (2) - (3)	Differens (2) - (4)	Relationen P/I första kvartalet
2008 Q1	235	239	214	192	-1,6%	11,7%	10,6%	19,9%	26,3%
2008 Q2	178	181	184	202	-1,6%	-8,9%	-1,8%	-11,8%	31,2%
2008 Q3	235	237	215	230	-1,1%	-6,6%	9,5%	3,1%	30,6%
2008 Q4	207	213	205	214	-3,0%	-4,2%	4,0%	-0,2%	29,9%
2009 Q1	236	245	224	224	-3,7%	0,1%	8,7%	8,8%	28,6%
2009 Q2	204	213	214	260	-4,4%	-17,7%	-0,4%	-21,9%	34,7%
2009 Q3	226	239	241	282	-5,1%	-14,5%	-1,0%	-18,2%	33,4%
2009 Q4	230	217	227	256	6,0%	-11,4%	-4,5%	-17,9%	32,2%
2010 Q1	289	293	255	328	-1,3%	-22,1%	12,9%	-11,8%	36,5%
2010 Q2	236	272	260	405	-13,2%	-35,7%	4,2%	-49,0%	44,7%
2010 Q3	243	287	266	387	-15,1%	-31,0%	7,0%	-34,9%	43,2%
2010 Q4	251	302	251	302	-17,1%	-17,1%	17,1%	0,0%	36,6%
Totalt	2 770	2 938	2 755	3 280	-5,7%	-16,0%	6,2%	-11,6%	-

**Tabell 6: En jämförelse mellan metodernas estimat av total skadekostnad med data per 2010Q4 och metodernas estimat när vi utför analysen med skadetrianglar per 2008Q1 – 2010Q4. Notera att vi använder data bestående av betalt.**

kk

Skadekvartal	Munich Chain Ladder (1)	Chain Ladder (2)	Munich Chain Ladder, data per 2008Q1 - 2010Q4 (3)	Chain Ladder, data per 2008Q1 - 2010Q4 (4)	Differens (1) - (2)	Differens (3) - (4)	Differens (2) - (3)	Differens (2) - (4)	Relationen P/I första kvartalet
2008 Q1	236	236	216	213	-0,1%	1,5%	8,4%	9,8%	26,3%
2008 Q2	178	179	184	185	0,0%	-0,4%	-3,2%	-3,6%	31,2%
2008 Q3	235	235	215	216	0,0%	-0,6%	8,6%	8,1%	30,6%
2008 Q4	207	207	205	206	-0,1%	-0,3%	1,0%	0,7%	29,9%
2009 Q1	236	237	227	227	-0,1%	0,0%	3,9%	3,9%	28,6%
2009 Q2	204	204	215	215	-0,1%	0,0%	-5,4%	-5,4%	34,7%
2009 Q3	226	227	242	244	-0,1%	-0,9%	-6,6%	-7,6%	33,4%
2009 Q4	232	231	227	229	0,1%	-0,6%	1,7%	1,1%	32,2%
2010 Q1	290	291	255	260	0,0%	-1,7%	12,1%	10,5%	36,5%
2010 Q2	236	237	259	264	-0,4%	-1,8%	-9,5%	-11,5%	44,7%
2010 Q3	243	244	266	268	-0,4%	-1,0%	-8,8%	-9,9%	43,2%
2010 Q4	251	252	251	252	-0,4%	-0,4%	0,4%	0,0%	36,6%
Totalt	2 775	2 779	2 764	2 779	-0,1%	-0,6%	0,6%	0,0%	-

**Tabell 7: En jämförelse mellan metodernas estimat av total skadekostnad med data per 2010Q4 och metodernas estimat när vi utför analysen med skadetrianglar per 2008Q1 – 2010Q4. Notera att vi använder data bestående av taxation.**

I tabell 6 observerar vi följande:

- Munich Chain Ladder justerar ner Chain Ladder estimatet och störst justering görs för de tre senaste skadekvartalen, se kolumn (1)-(2). Dock är den största justeringen för det senaste skadekvartalet.
- När vi utför Chain Ladder på dataset per 2008Q1 till 2010Q4 blir estimatet för total skadekostnad 11,6 % högre än metodens estimat när vi använder data per 2010Q4. Detta kan vara en indikation på att Chain Ladder inte fungerar speciellt bra på data bestående av betalt när det ligger stora reserver kvar.
- När vi utför Munich Chain Ladder och Chain Ladder på data per 2008Q1 till 2010Q4 blir Munich Chain Ladder justeringen mycket större än tidigare, se kolumn (3)-(4). Detta är väntat eftersom vi i kolumn (1)-(2) såg att den största justeringen låg vid det senaste skadekvartalet.
- Den största justeringen Munich Chain Ladder gör när analysen utförs på skadetrianglar per 2008Q1 till 2010Q4 är för skadekvartal 2010Q1 till 2010Q3. I den sista kolumnen ser vi att dessa skadekvartal har relativt mycket betalt. Vi kan även se att skadekvartal 2008Q1 hade ovanligt lite betalt under det första kvartalet och i det fallet justerar Munich Chain Ladder upp estimerad total skadekostnad.

I tabell 7 observerar vi följande:

- Munich Chain Ladder justerar ner Chain Ladder estimatet och den största justeringen är för de tre senaste skadekvartalen, se kolumn (1)-(2). Dock är justeringen mycket mindre än för data bestående av betalt.
- Precis som tidigare har vi relativt stor tillförlit i Chain Ladder estimaten i kolumn (2) för kvartal 2008 Q1 till kvartal 2009 Q4 eftersom skadeutvecklingen för denna kortsvansade försäkringsklass därefter inte påverkas av säsongeffekter.

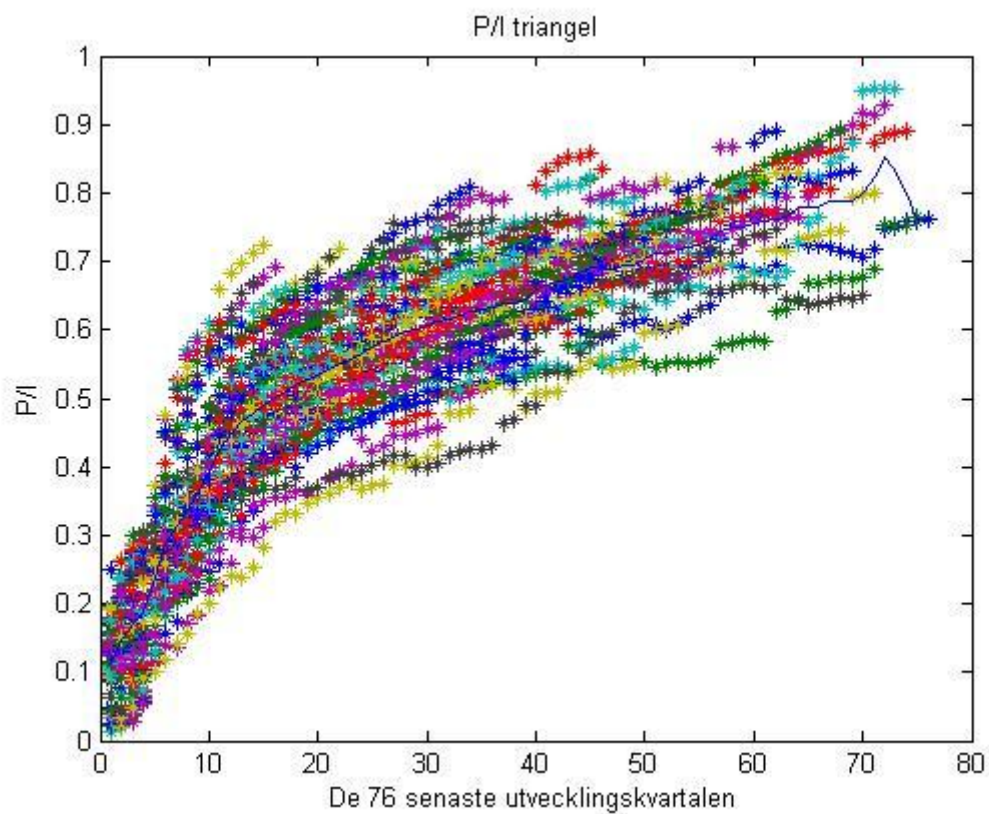
- Skillnaden mellan differensen i kolumn (2)-(3) och kolumn (2)-(4) för kvartalen 2008Q1 till 2010Q4 är mycket liten. Chain Ladder estimatet i kolumn (4) ligger ungefär 0,1 % närmre Chain Ladder estimatet i kolumn (2) än vad Munich Chain Ladder estimatet i kolumn (3) gör. Det är således en liten skillnad mellan metoderna i (3) och (4) för de kvartal vi har relativt stor tillförlit i (2).
- Den största justeringen Munich Chain Ladder gör när analysen utförs på skadetrianglar per 2008Q1 till 2010Q4 är för skadekvartal 2010Q1 till 2010Q3 samt 2008Q1. Dessa skadekvartal har en relativt mycket respektive lite betalt, se sista kolumnen.
- Notera att kolumn (1) i tabell 6 och tabell 7 respektive kolumn (3) i tabell 6 och tabell 7 ger relativt lika estimat av total skadekostnad. Det är 0,2 % i skillnad mellan kolumn (1) i respektive tabell och 0,3 % i skillnad mellan kolumn (3) i respektive tabell. Således lyckas Munich Chain Ladder ge relativt lika estimat av total skadekostnad utifrån de olika dataseten.

I både tabell 6 och 7 noterar vi att estimaten av total skadekostnad för det senaste skadekvartalet (kolumn (3)) som har skadekvartal där relation  $P/I$  är relativt hög eller låg justeras mest och dessutom ofta närmre Chain Ladder estimatet i kolumn (2). Detta verkar innebära att Munich Chain Ladder ger ett lite bättre estimat av total skadekostnad.

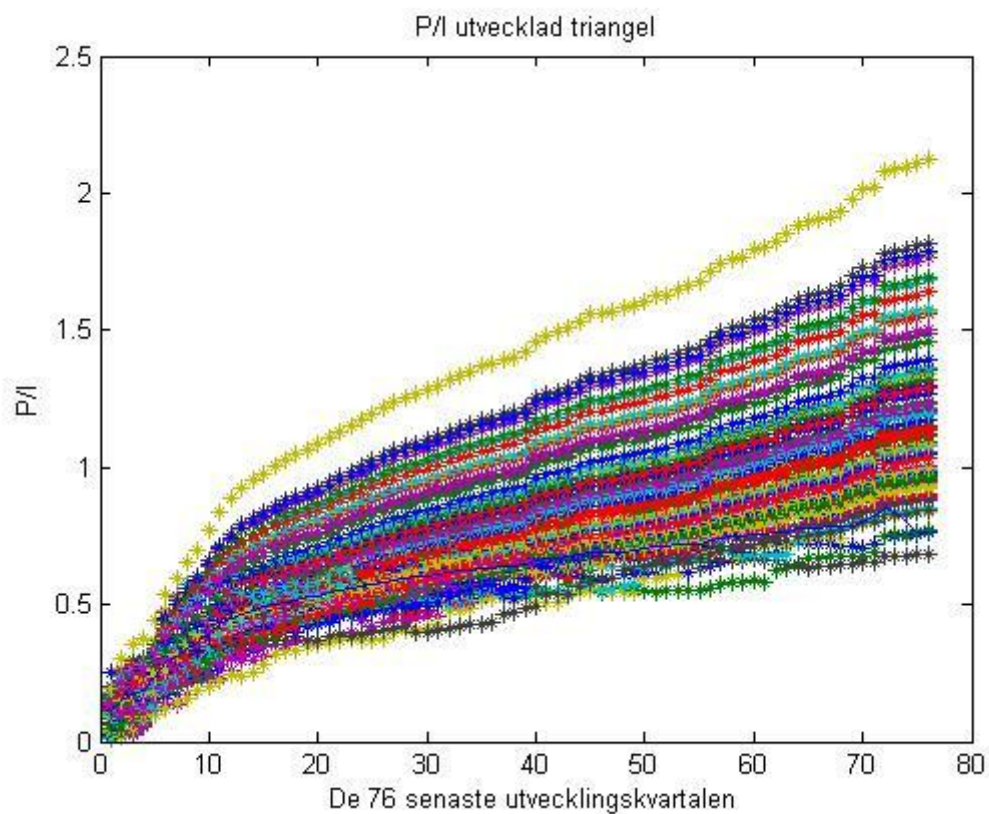
För att avgöra om denna metod ger ett säkrare reservestimat än Chain Ladder och passar för kortsvansat data kommer vi att beräkna prediktionsfelet med hjälp av bootstrapping. Detta kommer vi att undersöka i avsnitt 7.1.1.

## 6.2.2 Långsvansat data

Först illustrerar vi Chain Ladder metodens  $P/I$  problem som vi diskuterade i avsnitt 3.2. I figur 14 ser vi relationen  $P/I$  för alla observationer av de 76 senaste skadekvartalen. När vi illustrerade  $P/I$  problemet för kortsvansade skadedata, se figur 7, konvergerade relationen  $P/I$  som förväntat mot 1. I figur 14 kan vi tydligt se att för långsvansade skadedata sker konvergensen inte lika fort. Vi kan konstatera att vi har för lite historiskt skadedata för att relationen  $P/I$  ska kunna konvergera helt mot 1. När vi utvecklar triangeln för både betalat och taxation med Chain Ladder och sedan undersöker relationen  $P/I$  såg vi för kortsvansade skadedata att relationen  $P/I$  inte konvergerade (se figur 8). Om vi nu gör det samma för långsvansade skadedata ser vi att relationen  $P/I$  inte konvergerar och dessutom har större spridning än för kortsvansat data (se figur 15).



Figur 14: Relationen P/I för de 76 senaste utvecklingskvartalen och skadekvartalen. För utvecklingskvartal ett har vi 76 observationer och för utvecklingskvartal 76 har vi en observation.



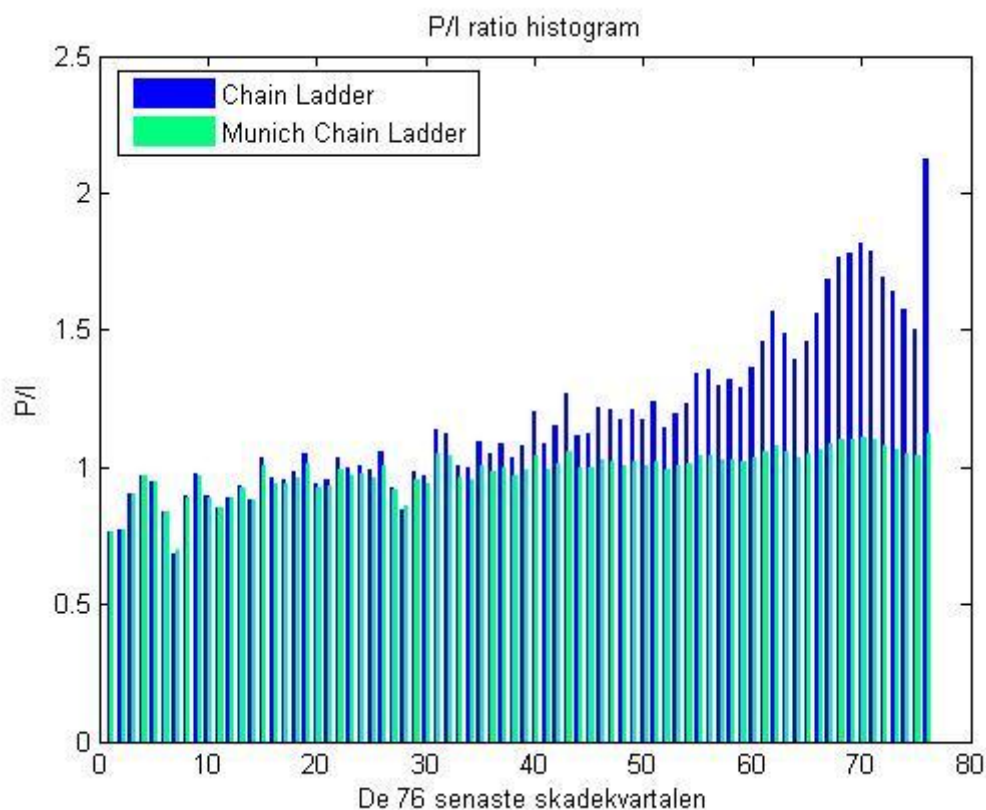
Figur 15: Relationen P/I med utvecklad triangel för de 76 senaste skadekvartalen. För varje utvecklingskvartal har vi nu 76 observationer.



Precis som i avsnitt 6.2.1 utför vi Munich Chain Ladder för att lösa Chain Ladder metodens  $P/I$  problem.

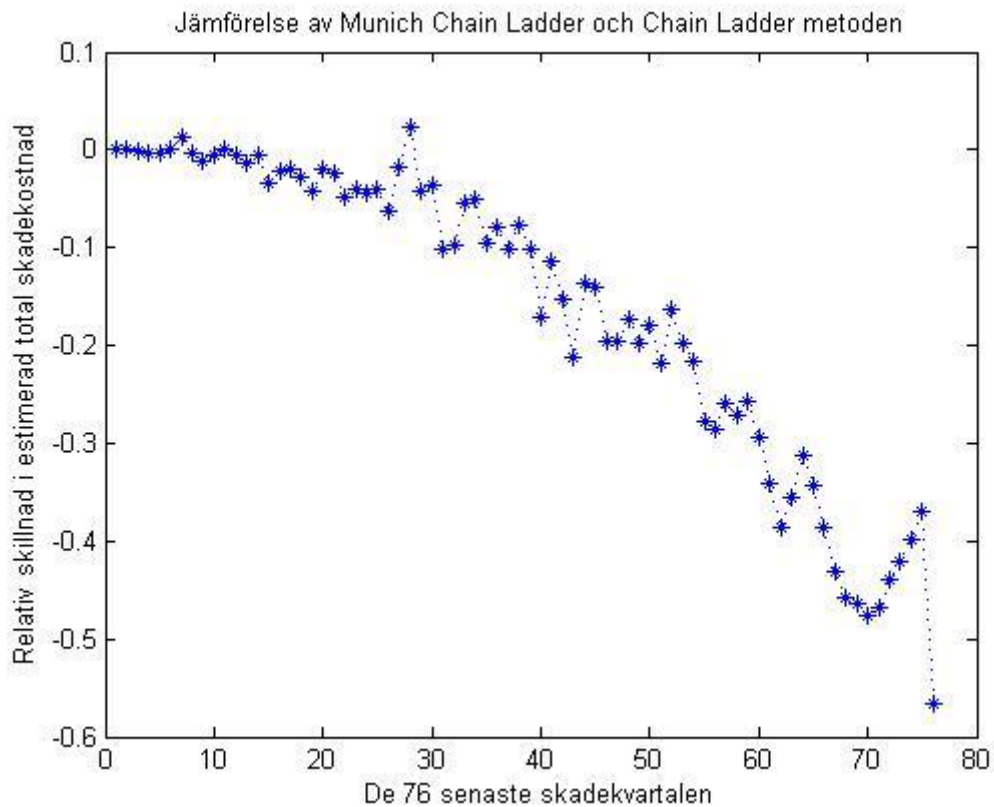
Residualplotten för betalt, se appendix A.6 figur 21, har en korrelation på 14 % vilket är i linje med vårt estimat av lutningen på regressionslinjen,  $\hat{\lambda}^P = 0.14$ . På samma sätt har residualplotten för taxation, se appendix A.6 figur 22, en korrelation på -2 %, vilket är i linje med vårt estimat av lutningen på regressionslinjen,  $\hat{\lambda}^I = -0.02$ . Som i avsnitt 6.2.1 kan vi även här tolka  $\lambda^P$  och  $\lambda^I$  som korrelationsparametrar för betalt respektive taxation. Värdena på korrelationsparametrarna leder oss till slutsatsen att det bör vara utvecklingsfaktorerna för betalt som justeras mest. Vi kan även notera att vi har en bättre överensstämmelse mellan korrelationen i residualplottarna och korrelationsparametrarna,  $\lambda^P$  och  $\lambda^I$ , för långsvansat data än för kortsvansat data.

För att undersöka om vi har lyckats lösa Chain Ladder metodens  $P/I$  problem och för att jämföra vårt resultat för Munich Chain Ladder mot resultatet för Chain Ladder, plottar vi  $P/I$  relationen i ett histogram. I figur 16 jämför vi  $P/I$  relationen för den estimerade totala skadekostnaden för de 76 senaste skadekvartalen. För nästan alla skadekvartalen kan vi se att Chain Ladder estimerar betalt högre än taxation. Speciellt för de 16 senaste skadekvartalen estimerar den ungefär 50 - 100 % högre för betalt än för taxation. Notera att Munich Chain Ladder inte korrigerar utvecklingsfaktorerna lika bra för långsvansade skadedata som för kortsvansade skadedata. Jämför vi figur 11 med figur 16 ser vi att relationen  $P/I$  ligger mycket närmre värdet ett i figur 11 och Chain Ladder metodens  $P/I$  problem löses således inte lika bra för denna långsvansade försäkringsklass. Utifrån figur 16 och värdet på korrelationsparametrarna kan vi dra slutsatsen att det är utvecklingsfaktorerna för betalt som justeras mest och att de även justeras ner.



Figur 16: Jämförelse av relationen  $P/I$  för estimat baserade på Chain Ladder respektive Munich Chain Ladder.

För att få en bild av hur mycket och för vilka skadekvartal Munich Chain Ladder justerar utvecklingsfaktorn för betalt respektive taxation gör vi en separat jämförelse av estimerad total skadekostnad. I figur 17 kan vi se den relativa skillnaden i estimerad total skadekostnad mellan Chain Ladder och Munich Chain Ladder för skadedata bestående av betalt. Munich Chain Ladder ger ett lägre estimat för total skadekostnad, vilket innebär att utvecklingsfaktorerna för betalt har justerats ner. Detta är i linje med det vi såg i figur 16. Även utvecklingsfaktorerna för taxation har justerats ner (se appendix A.6 figur 23). För data bestående av betalt får vi ungefär 44 % mindre i estimerad total skadekostnad när vi använder Munich Chain Ladder. För data bestående av taxation får vi 12 % mindre i estimerad total skadekostnad när vi använder Munich Chain Ladder. (Se tabell 8 och 9).



**Figur 17: Skillnad i estimerad total skadekostnad för Munich Chain Ladder och Chain Ladder (MCL-CL)/CL. Notera att vi använder data bestående av betalt.**

Precis som i avsnitt 6.1.1 vill vi även jämföra de estimat vi har fått fram för total skadekostnad med de estimat av total skadekostnad vi får om vi utför metoderna på skadetrianglar där det senaste skadekvartalet går från 2008Q1 till 2010Q4 och sedan plockar ut estimaten för det senaste skadekvartalet. Metoderna tillämpade på data för betalt och taxation visas i tabell 8 respektive tabell 9.

kk

Skadekvartal	Munich Chain Ladder (1)	Chain Ladder (2)	Munich Chain Ladder, data per 2008Q1 - 2010Q4 (3)	Chain Ladder, data per 2008Q1 - 2010Q4 (4)	Differens (1) - (2)	Differens (3) - (4)	Differens (2) - (3)	Differens (2) - (4)	P/I första kvartalet
2008 Q1	439	668	664	867	-34,4%	-23,5%	0,7%	-29,8%	11,6%
2008 Q2	438	714	687	885	-38,6%	-22,4%	3,8%	-24,0%	11,4%
2008 Q3	451	794	842	920	-43,2%	-8,5%	-6,1%	-15,9%	9,5%
2008 Q4	401	740	622	911	-45,9%	-31,8%	16,0%	-23,1%	12,7%
2009 Q1	526	981	955	1397	-46,4%	-31,7%	2,7%	-42,4%	12,9%
2009 Q2	472	902	782	1059	-47,6%	-26,2%	13,3%	-17,4%	11,7%
2009 Q3	466	875	830	1245	-46,8%	-33,3%	5,1%	-42,2%	13,0%
2009 Q4	435	776	640	1187	-44,0%	-46,1%	17,6%	-52,8%	15,7%
2010 Q1	535	925	838	1372	-42,1%	-38,9%	9,4%	-48,4%	13,8%
2010 Q2	552	919	739	1604	-39,9%	-53,9%	19,6%	-74,5%	17,7%
2010 Q3	705	1117	916	1573	-36,9%	-41,8%	18,0%	-40,8%	14,4%
2010 Q4	674	1554	674	1554	-56,7%	-56,7%	56,7%	0,0%	19,5%
Totalt	6 093	10 966	9 189	14 575	-44,4%	-37,0%	16,2%	-32,9%	-

Tabell 8: En jämförelse mellan metodernas estimat av total skadekostnad med data per 2010Q4 och metodernas estimat när vi utför analysen med skadetrianglar per 2008Q1 – 2010Q4. Notera att vi använder data bestående av betalt.

kk

Skadekvartal	Munich Chain Ladder (1)	Chain Ladder (2)	Munich Chain Ladder, data per 2008Q1 - 2010Q4 (3)	Chain Ladder, data per 2008Q1 - 2010Q4 (4)	Differens (1) - (2)	Differens (3) - (4)	Differens (2) - (3)	Differens (2) - (4)	P/I första kvartalet
2008 Q1	419	458	778	782	-8,5%	-0,5%	-69,8%	-70,6%	11,6%
2008 Q2	412	458	819	812	-10,1%	0,9%	-78,7%	-77,1%	11,4%
2008 Q3	416	472	885	888	-11,9%	-0,3%	-87,6%	-88,1%	9,5%
2008 Q4	365	420	632	613	-13,1%	3,0%	-50,6%	-46,2%	12,7%
2009 Q1	478	551	1028	1016	-13,3%	1,1%	-86,5%	-84,3%	12,9%
2009 Q2	427	496	843	853	-13,8%	-1,2%	-69,9%	-71,9%	11,7%
2009 Q3	425	490	874	900	-13,3%	-2,9%	-78,2%	-83,6%	13,0%
2009 Q4	405	458	614	684	-11,7%	-10,2%	-34,1%	-49,2%	15,7%
2010 Q1	505	565	788	879	-10,6%	-10,3%	-39,6%	-55,6%	13,8%
2010 Q2	526	583	644	787	-9,7%	-18,3%	-10,4%	-35,1%	17,7%
2010 Q3	679	744	865	982	-8,7%	-11,9%	-16,3%	-32,0%	14,4%
2010 Q4	601	733	601	733	-18,1%	-18,1%	18,1%	0,0%	19,5%
Totalt	5 658	6 429	9 371	9 930	-12,0%	-5,6%	-45,8%	-54,5%	-

Tabell 9: En jämförelse mellan metodernas estimat av total skadekostnad med data per 2010Q4 och metodernas estimat när vi utför analysen med skadetrianglar per 2008Q1 – 2010Q4. Notera att vi använder data bestående av taxation.

I tabell 8 observerar vi följande:

- Munich Chain Ladder justerar ner Chain Ladder estimatet med 44,4 % för de tolv senaste skadekvartalen och den största justeringen är för det senaste skadekvartalet, se kolumn (1)-(2). Detta är en betydligt större justering än för kortsvarsade skadedata (5,7 %).

- Som tidigare diskuterat kan vi inte anta att Chain Ladder är tillräckligt stabil för långsvansade skadedata och vi har inte allt för stor tillförlit i Chain Ladder estimaten i kolumn 2 gentemot Munich Chain Ladder estimatet i kolumn 1.
- När vi utför Chain Ladder på skadetrianglar per 2008Q1 till 2010Q4 blir estimatet för total skadekostnad 32,9 % högre än metodens estimat när vi använder data per 2010Q4. Detta kan vara en indikation på att Chain Ladder inte fungerar speciellt bra på data bestående av betalt när det ligger stora reserver kvar.

I tabell 9 observerar vi följande:

- Munich Chain Ladder justerar ner Chain Ladder estimatet med 12 % för de tolv senaste skadekvartalen och den största justeringen är för det senaste skadekvartalet, se kolumn (1)-(2). Dock är justeringen mycket mindre än för data bestående av betalt. Notera att även här gör Munich Chain Ladder en betydligt större justering än för kortsvansade skadedata (0,1 %, se tabell 7).
- När vi utför Chain Ladder på skadetrianglar per 2008Q1 till 2010Q4 blir estimatet för total skadekostnad 54,5 % högre än metodens estimat när vi använder data per 2010Q4. Vi tolkar detta som en indikation på att Chain Ladder inte heller fungerar speciellt bra på data bestående av taxation när det ligger stora reserver kvar.
- Notera att kolumn (1) i tabell 8 och tabell 9 respektive kolumn (3) i tabell 8 och tabell 9 ger relativt lika estimat av total skadekostnad. Det är 7,7 % i skillnad mellan kolumn (1) i respektive tabell och 1,9 % i skillnad mellan kolumn (3) i respektive tabell. Således lyckas Munich Chain Ladder ge relativt lika estimat av total skadekostnad utifrån de olika dataseten.

Genomgående för både Munich Chain Ladder och Chain Ladder är att estimatet av total skadekostnad för det senaste skadekvartalet (kolumn (3) och (4)) ändras signifikant när analysen utförs på skadedata per 2010Q4, dvs. när skadekvartalen är mer utvecklade (kolumn (1) och (2)). Detta tyder på att det är viktigt med en alternativ metod för de senaste skadekvartalen när det föreligger sen utveckling i skadedata.

Även för det långsvansade datasetet kommer vi att beräkna prediktionsfelet för Munich Chain Ladder med hjälp av bootstrapping. Detta kommer vi att undersöka i avsnitt 7.1.2.

## 7. Undersökning av reservvolatilitet

### 7.1 Bootstrapping: Munich Chain Ladder och Chain Ladder

I detta avsnitt kommer vi att utföra Bootstrapping av Munich Chain Ladder och Chain Ladder på skadedata bestående av Trygg-Hansas hemförsäkringsprodukt respektive sjuk- och olycksfallsprodukt, samt göra vissa jämförelser av estimerad reserv och prediktionsfel (se formel 4.1.1). Vi utför 10 000 simulationer för att få ett så säkert resultat som möjligt.

#### 7.1.1 Kortsvansat data

I tabell 10 illustreras den estimerade reserven för de tolv senaste skadekvartalen när vi beräknar den estimerade totala skadekostnaden med hjälp av Chain Ladder, Munich Chain Ladder och när vi bootstrappar Munich Chain Ladder. Det är tydligt att medelvärdet av de bootstrappade reservestimaten

är nära de reservestimat vi får genom att tillämpa Munich Chain Ladder direkt, både vad det gäller skadedata bestående av betalt och taxation.

Notera att totalen i tabell 10 endast är för de tolv senaste skadekvartalen och inte total reserv. Den totala reserven visas i tabell 11. Även här ser vi att medelvärdet av det bootstrappade reservestimatet är nära det reservestimat vi får genom att tillämpa Munich Chain Ladder direkt.

*kk*

Skade- kvartal	Bootstrap		Munich Chain Ladder		Chain Ladder	
	Betalt	Taxation	Betalt	Taxation	Betalt	Taxation
2008 Q1	6	5	6	5	10	6
2008 Q2	6	6	6	6	9	6
2008 Q3	11	11	11	11	13	12
2008 Q4	9	9	9	9	15	9
2009 Q1	13	12	13	12	22	13
2009 Q2	14	13	14	13	23	14
2009 Q3	19	18	19	18	32	20
2009 Q4	50	51	50	51	35	49
2010 Q1	59	59	59	59	63	60
2010 Q2	43	42	43	42	81	46
2010 Q3	84	83	85	84	132	88
2010 Q4	181	180	181	180	236	185
<b>Totalt</b>	<b>495</b>	<b>491</b>	<b>495</b>	<b>492</b>	<b>672</b>	<b>509</b>

**Tabell 10: Jämförelse av reservestimat baserat på bootstrapping av Munich Chain Ladder samt baserat på direkt tillämpning av Munich Chain Ladder och Chain Ladder för data bestående av betalt och taxation. Notera att vi här endast visar totalen för skadekvartal 2008Q1 – 2010Q4.**

*kk*

Bootstrap		Munich Chain Ladder		Chain Ladder	
Betalt	Taxation	Betalt	Taxation	Betalt	Taxation
533	534	532	535	705	552

**Tabell 11: Jämförelse av totalt reservestimat för samtliga skadekvartal baserat på bootstrapping av Munich Chain Ladder samt baserat på direkt tillämpning av Munich Chain Ladder och Chain Ladder för data bestående av betalt och taxation.**

För att beräkna prediktionsfelet utför vi bootstrapping av Munich Chain Ladder och Chain Ladder. I tabell 12 illustreras prediktionsfelet både i kronor och i procent av den bootstrappade reserven. Även här undersöks de tolv senaste skadekvartalen. Notera att totalen i tabell 12 endast är för de tolv senaste skadekvartalen och inte total reserv. Det totala prediktionsfelet i relation till den bootstrappade reserven visas i tabell 13 (totala prediktionsfelet i kronor finns i appendix A.7 tabell 16).

Vi gör följande observationer i tabell 12:

- Lägst prediktionsfel fås då Chain Ladder utförs på dataset bestående av taxation och högst prediktionsfel fås då Chain Ladder utförs på dataset bestående av betalt.
- Prediktionsfelet då Munich Chain Ladder utförs på datasetet består av betalt respektive taxation är relativt lika.

I tabell 13 är samtliga kvartal med och resultatet här skiljer sig lite från det i tabell 12. Vi gör följande observation i tabell 13:

- Lägst prediktionsfel i relation till reserven fås då Chain Ladder utförs på dataset bestående av taxation och högst prediktionsfel fås då Munich Chain Ladder utförs på dataset bestående av taxation.
- Det är endast en marginell skillnad i prediktionsfelet mellan dataset bestående av betalt och taxation då Chain Ladder utförs. Tittar vi på andra decimalen är dock prediktionsfelet lägre då dataset bestående av taxation används.
- Även om Chain Ladder ger lika litet prediktionsfel i procent på skadedata bestående av betalt som för taxation så är prediktionsfelet i kronor mycket större (se appendix A.7 tabell 16). Eftersom betalt ger konstant högre estimat av total skadekostnad ger den även systematiskt högre estimerad reserv.

Skade- kvartal	kk				%			
	Munich Chain Ladder		Chain Ladder		Munich Chain Ladder		Chain Ladder	
	Betalt	Taxation	Betalt	Taxation	Betalt	Taxation	Betalt	Taxation
2008 Q1	4	4	3	4	61,1%	81,7%	28,2%	64,8%
2008 Q2	3	4	3	3	50,7%	62,9%	32,3%	52,8%
2008 Q3	4	5	3	4	34,1%	40,7%	25,9%	34,7%
2008 Q4	4	5	6	4	40,9%	50,9%	36,6%	41,8%
2009 Q1	5	5	6	5	35,3%	42,1%	28,3%	33,9%
2009 Q2	5	5	6	5	34,0%	39,8%	26,1%	31,6%
2009 Q3	6	6	7	5	29,2%	34,6%	21,4%	27,6%
2009 Q4	6	7	7	6	12,4%	13,5%	19,5%	12,0%
2010 Q1	9	10	11	9	15,7%	17,2%	17,0%	15,4%
2010 Q2	16	17	14	15	37,4%	40,9%	17,7%	32,3%
2010 Q3	19	20	19	17	22,2%	24,0%	14,5%	19,1%
2010 Q4	24	25	40	21	13,1%	13,9%	17,0%	11,4%
<b>Totalt</b>	<b>21</b>	<b>26</b>	<b>38</b>	<b>18</b>	<b>4,2%</b>	<b>5,2%</b>	<b>5,7%</b>	<b>3,5%</b>

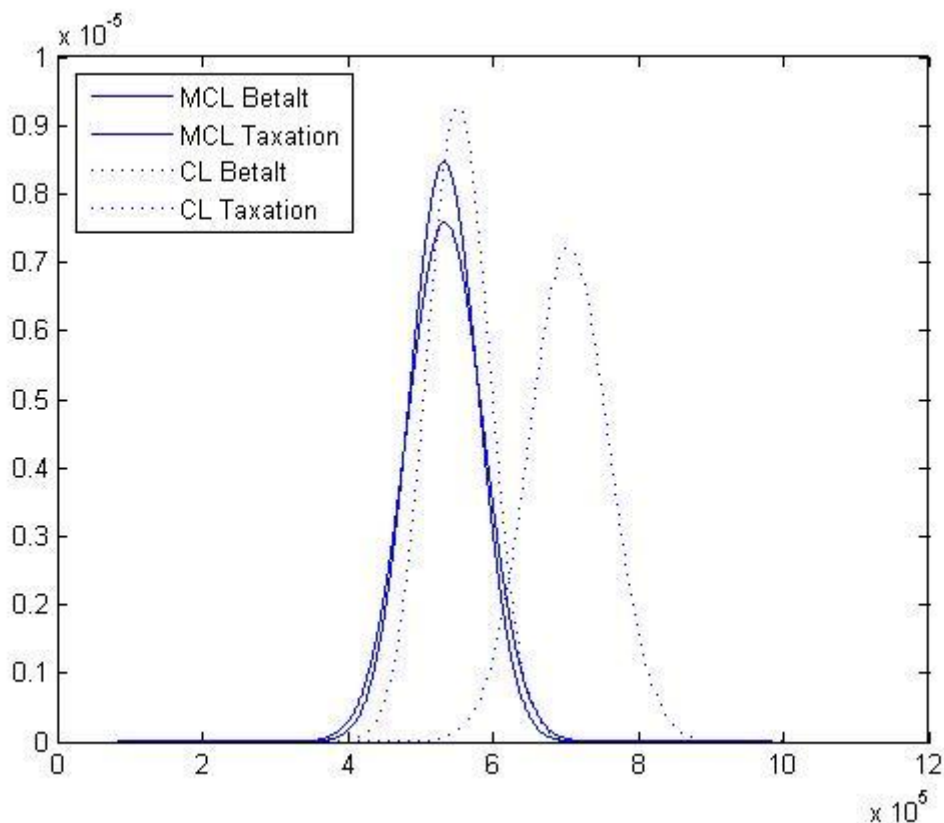
Tabell 12: En jämförelse av prediktionsfelet för Munich Chain Ladder och Chain Ladder för data bestående av betalt och taxation. Prediktionsfelet visas dels i kkr och dels som procent av den bootstrappade reserven. Notera att vi här endast visar totalen för skadekvartal 2008Q1 – 2010Q4.

Munich Chain Ladder		Chain Ladder	
Betalt	Taxation	Betalt	Taxation
8,8%	9,8%	7,8%	7,8%

Tabell 13: Jämförelse av totala prediktionsfelet relativt estimatet av totala reserven för samtliga skadekvartal.

Fördelningen för den estimerade reserven illustreras i figur 18. Reservens estimerad med hjälp av Munich Chain Ladder för dataset bestående av betalt och taxation visas av de heldragna linjerna och reservens estimerad med hjälp av Chain Ladder för dataset bestående av betalt och taxation visas av de streckade linjerna. Observera att reservestimaten baserade på betalt och taxation är mycket nära varandra när de estimeras med Munich Chain Ladder. Reservestimaten baserade på betalt och taxation är mycket längre ifrån varandra när de estimeras med Chain Ladder. Dessutom är det en något större spridning för reservestimat som estimeras av Chain Ladder och baseras på betalt (se streckade linjen till höger i figur 18).

Utifrån denna undersökning får vi indikatorer på att reserven estimerad av Chain Ladder på skadedata bestående av taxation har lägst reservvolatilitet.



Figur 18: Den prediktiva fördelningen för total reserv för Munich Chain Ladder och Chain Ladder. Notera att den streckade linjen till höger är den prediktiva fördelningen för Chain Ladder för data bestående av betalt och att den streckade linjen till vänster är den prediktiva fördelningen för Chain Ladder för taxation.

### 7.1.2 Långsvansat data

I tabell 14 illustreras den totala estimerade reserven när vi beräknar den estimerade totala skadekostnaden med hjälp av Chain Ladder, Munich Chain Ladder och när vi bootstrappar Munich Chain Ladder (se appendix A.7 tabell 17 för detaljerad information om de tolv senaste skadekvartalen). Medelvärden av de bootstrappade reservestimaten är inte lika nära det reservestimat vi får genom att tillämpa Munich Chain Ladder direkt, som när vi undersökte det kortsvansade datasetet, både vad det gäller dataset bestående av betalt och taxation. De bootstrappade reservestimaten ligger ungefär 3 % respektive 4 % ifrån det reservestimat vi får genom att tillämpa Munich Chain Ladder direkt för dataset bestående av betalt respektive taxation. Motsvarande siffra när vi undersökte de kortsvansade dataseten var 0,1 % respektive -0,2 %.

<i>kk</i>						
Bootstrap		Munich Chain Ladder		Chain Ladder		
Betalt	Taxation	Betalt	Taxation	Betalt	Taxation	
8 817	8 686	8 587	8 371	16 419	9 692	

Tabell 14: Jämförelse av totalt reservestimat för samtliga skadekvartal baserat på bootstrapping av Munich Chain Ladder, Munich Chain Ladder och Chain Ladder för data bestående av betalt och taxation.

I tabell 15 illustreras det totala prediktionsfelet i procent av reserven (se appendix A.7 tabell 18 för detaljerad information om de tolv senaste skadekvartalen). Vi gör följande observationer:

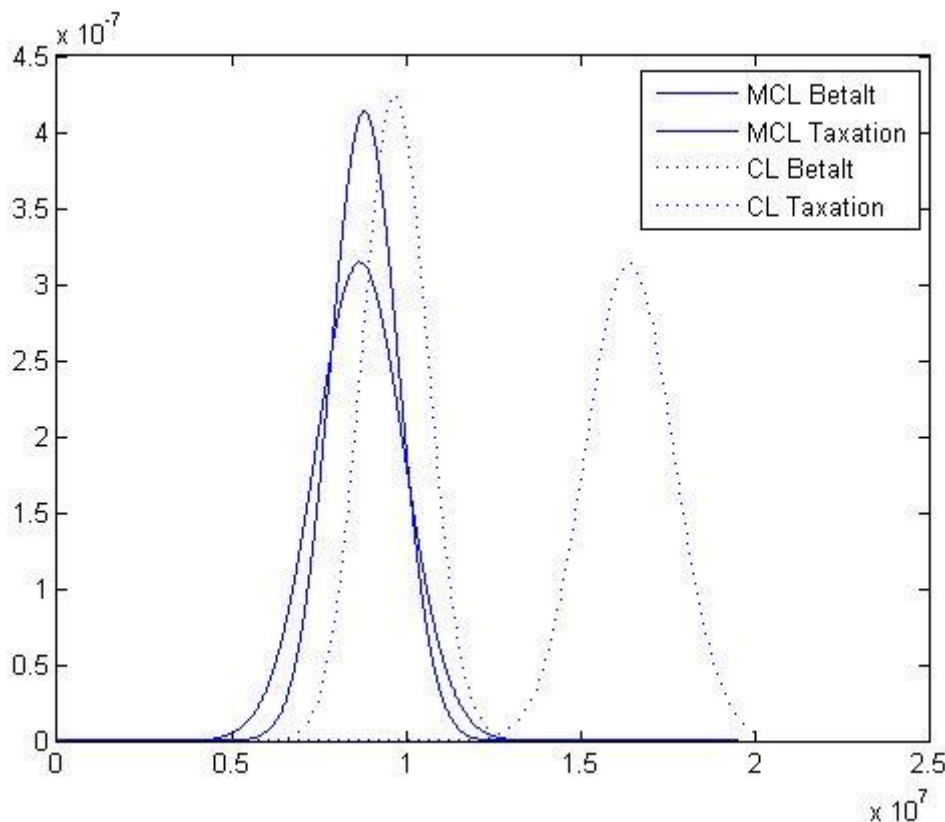
- Lägst prediktionsfel i relation till reserven fås då Chain Ladder utförs på dataset bestående av betalt och högst prediktionsfel fås då Munich Chain Ladder utförs på dataset bestående av taxation.
- Det är större skillnad mellan prediktionsfelen för de långsvansade dataseten än för de kortsvensade dataseten, både var gäller skadedata bestående av betalt eller taxation och vad gäller metod.
- Chain Ladder ger lägst prediktionsfel i procent på skadedata bestående av betalt. Dock är prediktionsfelet i kronor mycket större än de övriga (se appendix A.7 tabell 19). Eftersom betalt ger konstant högre estimat av total skadekostnad ger den även systematiskt högre estimerad reserv.

Munich Chain Ladder		Chain Ladder	
Betalt	Taxation	Betalt	Taxation
10,9%	14,6%	7,7%	9,7%

**Tabell 15: Jämförelse av totala prediktionsfelet relativt estimatet av totala reserven för samtliga skadekvartal.**

Fördelningen för den estimerade reserven illustreras i figur 19. Observera att reservestimaten baserade på betalt och taxation är mycket nära varandra när de projekteras av Munich Chain Ladder. När reservestimaten baserade på betalt och taxation projekteras av Chain Ladder är de mycket längre ifrån varandra. Dessutom är det en något större spridning för reservestimat som projekteras av Chain Ladder och baseras på betalt (se streckade linjen till höger i figur 19) och reservestimat som projekteras av Munich Chain Ladder och baseras på taxation (se heldragen linje till vänster i figur 19).





**Figur 19:** Den prediktiva fördelningen för total reserv för Munich Chain Ladder och Chain Ladder. Notera att den streckade linjen till höger är den prediktiva fördelningen för Chain Ladder för data bestående av betalt och att den streckade linjen till vänster är den prediktiva fördelningen för Chain Ladder för taxation.

Utifrån denna undersökning får vi indikatorer på att reserven estimerad av Chain Ladder på skadedata bestående av taxation har lägst reservvolatilitet i kronor men reserven estimerad av Chain Ladder bestående av betalt har lägst prediktionsfel i förhållande till sitt reservestimat.

## 8. Diskussion och slutsatser

Det generella problemet vid reservsättning är att det inte föreligger tidskonsistens i data vilket medför att det är svårt att utvärdera en reservsättningsmodell. Även om aktuarien har tillgång till mycket historiskt data kan det vara så att det inte är representativt för framtida utveckling av senare skadekvartal. Det kan som sagt bero på produktförändringar, förändringar i skaderegleringen, förändringar i lag etc. Detta medför att det är svårt att ta fram mått på hur pass bra reservsättningsmodellen i fråga passar data.

I början av denna uppsats hade vi stora ambitioner och ville undersöka fler implementeringsmått än prediktionsfelet. Dock var det mycket svårt att tillämpa välkända mått då det som sagt inte föreligger tidskonsistens i skadedata och ofta finns för lite skadedata. En stor frågeställning är hur man ska undersöka modellens anpassning till data och vi fick erfara att detta är en svår fråga. Vidare utveckling av detta arbete är att undersöka just detta och hur vi ska gå tillväga för att skatta sådana mått.

I denna uppsats har vi undersökt de två olika reservsättningsmetoderna Brosius minstakvadratmetod och Munich Chain Ladder. För att utvärdera metoderna har vi först jämfört dem gentemot Chain Ladder som är den vanligaste reservsättningsmetoden idag. För Munich Chain Ladder och Chain Ladder har vi även beräknat prediktionsfelet.

## 8.1 Brosius minstakvadratmetod

Brosius minstakvadratmetod använder som alla andra metoder observerade värden för att estimerar underliggande parametrar. Detta kan leda till felaktiga parameterestimater. Om det föreligger signifikanta förändringar i skadedatans karaktär kan användning av ojusterat data leda till felaktiga estimater. Detta problem uppstod för skadedata från hemförsäkringsklassen. I figur 3 såg vi att konvergensen av parametrarna  $a$  och  $b$  stördes av orealistiska värden på parametrarna som uppstod då skadedata för kvartalet 2010Q1 och i viss mån även 2010Q2 och 2010Q3 avviker stort från de genomsnittliga beloppen. Dock är detta inte enbart ett problem för Brosius minstakvadratmetod utan även Chain Ladder påverkas av detta.

När det gäller Brosius minstakvadratmetod såg vi i avsnitt 6.1.1 att den estimerar lite mindre i total skadekostnad än vad Chain Ladder gör dock är det genomgående en mycket liten skillnad mellan modellerna. Problemet med att tillämpa Chain Ladder på skadedata från försäkringsklassen hemförsäkring är att det är svårt att avgöra den första utvecklingsfaktorn när det finns säsongseffekter i skadedata. Utifrån undersökningen om ettårsrisken i avsnitt 6.1.1 tabell 2 anser vi inte att Brosius minstakvadratmetod tillför mer insikt i hur vi ska möta detta problem dels för att det är en mycket liten skillnad mellan modellerna och dels för att parametern  $a$  blir negativ i de flesta fall. Slutsatsen blir att vi inte anser att det är värt att implementera Brosius minstakvadratmetod då metoden inte kan tillföra något som kan ge ett bättre estimat än Chain Ladder estimatet när vi har säsongseffekter i skadedata.

Brosius minstakvadratmetod estimerar systematiskt lägre total skadekostnad än vad Chain Ladder gör för sjuk- och olycksfallsprodukten (se avsnitt 6.1.2). Jämförelsen mellan metoderna i tabell 5 visar att Brosius minstakvadratmetod ger 21,3 % lägre estimat än Chain Ladder. Problemet med att tillämpa endast Chain Ladder på skadedata från försäkringsklassen sjuk- och olycksfall är att det är svårt att få ett rättvisande estimat när det föreligger mycket sen utveckling i skadedata. Oftast används en BF för de senaste skadekvartalen.

Analysen för senaste skadekvartalet, med skadedata per 2008Q1 till 2010Q4, visade att skillnaden mellan prediktionen av senaste skadekvartalet och prediktionen av samma skadekvartal då det finns mer utveckling, är mycket stor för den långsvansade försäkringsklassen då Chain Ladder används (se tabell 5). Detta resultat ser vi dock inte för Brosius minstakvadratmetod. Det är således viktigt att utreda alternativa metoder för att få större stabilitet i prediktionen av det senaste skadekvartalet och i detta avseende kan Brosius minstakvadratmetod tillföra extra insikt. Brosius minstakvadratmetod bör således implementeras för vidare undersökning av estimat för det senaste skadekvartalet när vi har sen utveckling i skadedata.

Idén med Brosius minstakvadratmetod är mycket intressant då vi har en extra parameter att prediktera skadekostnaden med när det föreligger säsongseffekter i skadedata. Tyvärr verkade den inte tillföra något när vi estimerade skadekostnaden för hemförsäkringsprodukten. Illustrationen av Brosius minstakvadratmetod i figur 1 och figur 4 ger dock en indikation på att metoden kan tillföra något utöver Chain Ladder. Dock skattades ett  $a$  och ett  $b$  för den anpassade linjen istället för en skattning per skadekvartal. En vidareutveckling av detta arbete vore att undersöka en alternativ Brosius minstakvadratmetod där parametrarna skattas per utvecklingskvartal istället för skadekvartal.

## 8.2 Munich Chain Ladder

Fördelen med Munich Chain Ladder är att individuella utvecklingsfaktorer tas fram för varje skadekvartal och utvecklingskvartal som är justerade på så sätt att hänsyn tas till den korrelation som föreligger mellan betalt och taxation. Om det t.ex. ligger kvar en stor reserv på ett äldre skadekvartal där det normalt inte ligger mycket reserver kvar justerar Munich Chain Ladder utvecklingsfaktorn med bland annat hänsyn till den genomsnittliga relationen för  $P/I$ . I de fall där korrelationen inte är signifikant ger Munich Chain Ladder ungefär samma resultat som Chain Ladder. Däremot är det inte

önskvärt att denna justering görs om senare skadekvartal utvecklas enligt ett annat mönster än tidigare skadekvartal på grund av att det föreligger en förändring i t.ex. produkt eller skadereglering. I detta fall kan relationen  $P/I$  förändras och Munich Chain Ladder ge ett mindre rättvisande estimat av total skadekostnad.

I avsnitt 6.2.1 illustrerades att Munich Chain Ladder löste Chain Ladder metodens  $P/I$  problem för skadedata från hemförsäkringsprodukten samt att utvecklingsfaktorererna för betalt justerades mest (se figurer 11-13). Det är genomgående en mycket liten skillnad mellan metoderna då skadedata baserat på taxation används och skillnaden växer då skadedata baserat på betalt används. Detta resultat ser vi även för skadedata från sjuk- och olycksfallsprodukten i avsnitt 6.2.2, dock är skillnaderna mycket större. För båda dessa försäkringsklasser justerar Munich Chain Ladder estimaten för total skadekostnad (baserat på betalt) mot det estimat för total skadekostnad som ges av Chain Ladder när vi använder skadedata bestående av taxation. Detta ger en indikation på att Chain Ladder baserat på taxation ändå ger ett relativt bra estimat av total skadekostnad.

Analysen för senaste skadekvartalet, med skadedata per 2008Q1 till 2010Q4, visade att Munich Chain Ladder justerar de kvartal med hög respektive låg  $P/I$  relation mot det estimat av total skadekostnad som fås då analysen utförs på skadedata per 2010Q4. Detta resultat fås för båda försäkringsklasserna och även om justeringen inte är speciellt stor visar det ändå på att Munich Chain Ladder ger ett lite bättre estimat jämfört med Chain Ladder. Dock är det tydligt att oavsett metod är skillnaden mellan prediktionen av senaste skadekvartalet och prediktionen av samma skadekvartal då det finns mer utveckling, mycket stor för den långsvansade försäkringsklassen (se tabell 8 och 9). Det är således viktigt att utreda alternativa metoder för att få större stabilitet i prediktionen av det senaste skadekvartalet.

För att utvärdera Munich Chain Ladder har vi förutom att jämföra modellen mot Chain Ladder även beräknat prediktionsfelet genom att utföra bootstrapping av båda modellerna. Detta ger oss en indikation på hur stor volatilitet vi har i reservestimatet. Det är önskvärt att modellen ger ett stabilt estimat av reserverna och det är därför viktigt att ha ett relativt lågt prediktionsfel. Alltså kan vi använda prediktionsfelet som ett mått på om vi anser att en metod bör implementeras eller inte. Däremot anger inte prediktionsfelet hur pass bra modellen passar till data.

Man kan tänka sig att Munich Chain Ladder bör ge ett lägre prediktionsfel än Chain Ladder eftersom den tar hänsyn till mer information än vad Chain Ladder gör. Dock är vårt resultat tvärtom, Chain Ladder ger ett lite lägre prediktionsfel i relation till den bootstrappade reserven både för skadedata från hemförsäkringsprodukten och sjuk- och olycksfallsprodukten (se avsnitt 7.1.1 och 7.1.2). Prediktionsfelet i kronor är dock störst för Chain Ladder baserat på betalt och minst för Chain Ladder baserat på taxation (se appendix A.7 tabell 16 och 19).

Resultatet av undersökningen i avsnitt 6.2 och 7.1 leder oss till slutsatsen att Chain Ladder baserat på taxation ger ett relativt bra estimat och att Munich Chain Ladder bidrar med ett tydligt bättre estimat när vi använder skadedata baserat på betalt. Munich Chain Ladder är alltså en modell som kan tillföra insikt i reservestimaten då den använder sig av mer information än vad Chain Ladder gör.

Att ta fram mönster för "Cash flow" är en viktig del i det aktuariella arbetet. Detta mönster avser till att bestämma när reserverna kommer att betalas ut till försäkringstagarna och baseras vanligen på det mönster som tas fram med Chain Ladder på skadedata bestående av betalt. Det vore intressant att undersöka möjligheten att ta fram mönster för "cash flow" utifrån Munich Chain Ladder eftersom vi tror att denna modell ger oss mer rättvisande resultat när vi använder skadedata bestående av betalt. Detta ingår dock inte i denna uppsats men kan mycket väl vara en vidareutveckling av det arbete som har gjorts.

Munich Chain Ladder är en metod som kan tillföra extra insikt i arbetet med att ta fram estimat av total skadekostnad och total reserv och bör implementeras för vidare undersökning och alternativa användningsområden.

## 9. Referenser

BROSIUS, E. (1993): *Loss Development Using Credibility*.

<http://www.casualtyactuarialsociety.com/library/studynotes/brosius6.pdf>

DAHL, P. (2003): *Introduction to Reserving*.

<http://www2.math.su.se/matstat/und/sakii/pdf/dahl2003.pdf>

EFRON, B., TIBSHIRANI, R. J. (1993): *An introduction to the bootstrap*. Chapman & Hall/CRC.

ENGLAND, P. D., VERRALL, R. J. (1999): *Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving*, Insurance: Mathematics and Economics, vol. 25, 281-293.

ENGLAND, P. D., VERRALL, R. J. (2006): *Predictive Distributions of Outstanding Liabilities in General Insurance*, Annals of Actuarial Science 1, 2006, pp. 221-270.

HJORT, U. (1993): *Computer Intensive Statistical Methods: Validation, Model Selection, and Bootstrap*. Chapman & Hall/CRC

LIU, H. VERRALL, R. (2010): *Bootstrap Estimation of the Predictive Distributions of Reserves Using Paid and Incurred Claims*, Variance 4:2, 2010, pp. 121-135

MACK, T. (1993), *Distribution-Free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates*, Astin Bulletin, vol. 23, no. 2.

MACK, T. (1994): *Measuring the Variability of Chain Ladder Reserve Estimates*, Casualty Actuarial Society Forum, Spring 1994, Vol 1, 101-182.

QUARG, G. MACK, T. (2004): *Munich Chain Ladder: A Reserving Method that Reduces the Gap between IBNR Projections Based on Paid Losses and IBNR Projections Based on Incurred Losses*. Variance 2:2, 2008, pp. 266-299.

## A. Appendix

### A.1 Illustration av skadetrianglar

När aktuarien har bestämt reservsättningsmetod så tillämpas den på en skadetriangel. Skadetriangeln kan bestå av antingen taxation eller betalt. Triangeln har följande utseende:

Skadedata	1	2	3	...	...	$t-1$	$t$
1	$I_{1,1}$	$I_{1,2}$	$I_{1,3}$	...	...	$I_{1,n-1}$	$I_{1,n}$
2	$I_{2,1}$	$I_{2,2}$	$I_{2,3}$	...	...	$I_{2,n-1}$	
...	...	...	...	...	...		
...	...	...	...	...			
2010Q2	$I_{n-2,1}$	$I_{n-2,2}$	$I_{n-2,3}$				
2010Q3	$I_{n-1,1}$	$I_{n-1,2}$					
2010Q4	$I_{n,1}$						

Figur 20: Skadetriangel med kumulativa belopp.

Raderna består av skadekvartal och kolumnerna består av utvecklingskvartal. I denna uppsats är det senaste skadekvartalet  $n$  lika med 2010Q4, det näst senaste skadekvartalet  $n-1$  är lika med 2010Q3 osv. För varje skadekvartal rapporteras en viss skadekostnad per utvecklingskvartal. I kolumn 1 är den skadekostnad för respektive skadekvartal som har rapporterats till och med ett kvartal efter att skadorna har inträffat. I kolumn 2 är den skadekostnad för respektive skadekvartal som har rapporterats till och med två kvartal efter att skadorna har inträffat. Det tidigaste skadekvartalet, 1, har hunnit utvecklas i lika många kvartal som vi har skadekvartal, dvs. i  $n$  kvartal.

För alla dessa skadekvartal måste försäkringsbolaget hålla en reserv. Aktuarien beräknar den genom att prediktera alla skadekvartal till utvecklingskvartal  $n$ .

När vi refererar till början av triangeln är det de senaste skadekvartalen och deras utveckling vi pratar om och när vi refererar till slutet av triangeln är de tidigaste skadekvartalen och deras utveckling vi pratar om.

### A.2 Chain Ladder

En av de vanligaste metoderna för att bestämma IBNR reserven för en portfölj är att använda sig av Chain Ladder. Chain Ladder bygger på tidigare erfarenhet och går ut på att vi antar att skador som inträffar nu kommer att utveckla sig på samma sätt som tidigare skador har gjort. Chain Ladder kan användas på både taxation och betalt. Vi gör följande antagande:

$$E[I_{i,j+1}|I_{i,1}, I_{i,2}, \dots, I_{i,j}] = I_{i,j} \cdot f_{j \rightarrow j+1}$$

Vektorerna  $\{I_{i,1}, I_{i,2}, \dots, I_{i,n}\}$  och  $\{I_{k,1}, I_{k,2}, \dots, I_{k,n}\}$  är oberoende då  $i \neq k$ . Genom detta antagande kan vi estimeras skadekostnaden en utvecklingsperiod framåt. Dock vill vi estimeras den totala skadekostnaden, dvs. vid sista utvecklingsperioden.

Följande är ett välkänt resultat:

$$E[Z] = E[E[Z|X]]$$

Med antaganden och resultat ovan får vi följande:

$$\begin{aligned} E[I_{i,j+k}|I_{i,1}, I_{i,2}, \dots, I_{i,j}] &= E[E[I_{i,j+k}|I_{i,1}, I_{i,2}, \dots, I_{i,j+k-1}]|I_{i,1}, I_{i,2}, \dots, I_{i,j}] \\ &= E[I_{i,j+k-1} \cdot f_{j+k-1}|I_{i,1}, I_{i,2}, \dots, I_{i,j}] = E[I_{i,j+k-1}|I_{i,1}, I_{i,2}, \dots, I_{i,j}] \cdot f_{j+k-1} \\ &= E[E[I_{i,j+k-1}|I_{i,1}, I_{i,2}, \dots, I_{i,j+k-2}]|I_{i,1}, I_{i,2}, \dots, I_{i,j}] \cdot f_{j+k-1} \\ &= E[I_{i,j+k-2} \cdot f_{j+k-2}|I_{i,1}, I_{i,2}, \dots, I_{i,j}] \cdot f_{j+k-1} \\ &= E[I_{i,j+k-2}|I_{i,1}, I_{i,2}, \dots, I_{i,j}] \cdot f_{j+k-2} \cdot f_{j+k-1} = \dots = I_{i,j} \cdot f_{j+1} \cdot f_{j+2} \dots f_{j+k-1} \end{aligned}$$

Vi vill nu visa att denna metod kan användas för att estimeras total skadekostnad. Först skriver vi om vårt antagande:

$$E[I_{i,j+1}|I_{i,1}, I_{i,2}, \dots, I_{i,j}] = I_{i,j} \cdot f_{j \rightarrow j+1} \Leftrightarrow E\left[\frac{I_{i,j+1}}{I_{i,j}}|I_{i,1}, I_{i,2}, \dots, I_{i,j}\right] = f_{j \rightarrow j+1}$$

Vi kan tolka detta resultat som att vi kan använda de observerade relationerna  $I_{i,j+1}/I_{i,j}$  som väntevärdesriktiga skattningar av  $f_{j \rightarrow j+1}$ .

Nu gör vi ett antagande om variansen:

$$(A.1.1) \quad \text{Var}(I_{i,j+1}|I_{i,1}, I_{i,2}, \dots, I_{i,j}) = I_{i,j} \cdot \sigma_j^2$$

Parametern  $\sigma_j^2$  är en proportionalitetsfaktor som relaterar variansen av kumulativ skadekostnad med kumulativ skadekostnad en utvecklingsperiod tidigare. Den estimeras enligt följande:

$$(A.1.2) \quad \hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} I_{i,j} \left( \frac{I_{i,j+1}}{I_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2, \quad 1 \leq j \leq n-2$$

$$(A.1.3) \quad \hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min\left(\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \min(\hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2)\right)$$

Omskrivning av (A.1.1) ger:

$$\text{Var}\left(\frac{I_{i,j+1}}{I_{i,j}}|I_{i,1}, I_{i,2}, \dots, I_{i,j}\right) = \frac{\sigma_j^2}{I_{i,j}}$$

Nu ska vi utnyttja följande välkända resultat:

*Antag att  $X_i$  är  $n$  stycken okorrelerade stokastiska variabler med samma väntevärde och varians  $\sigma_i^2$ . Då är den bästa väntevärdesriktiga linjära skattningen av väntevärdet:*

$$\sum_{i=1}^n w_i \cdot X_i$$

där  $w_i \propto \sigma_i^{-2}$  och  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ .

Med hjälp av Lagrange metod bestämmer vi vikterna till  $w_i = \frac{\sigma_i^{-2}}{\sum_{k=1}^n \sigma_k^{-2}}$ . Genom att använda oss av omskrivningen av variansantagandet, se (A.1.2), och (A.1.3) får vi följande vikter:

$$w_i = \frac{\left(\frac{\sigma_j^2}{I_{ij}}\right)^{-1}}{\sum_{k=1}^{n-j} \left(\frac{\sigma_j^2}{I_{kj}}\right)^{-1}} = \frac{I_{ij}}{\sum_{k=1}^{n-j} I_{kj}}.$$

Skattningen av utvecklingsfaktorn  $\hat{f}_j$  blir då:

$$\hat{f}_j = \sum_{i=1}^{n-j} w_i \cdot \hat{f}_{ij} = \sum_{i=1}^{n-j} \left( \frac{I_{ij}}{\sum_{k=1}^{n-j} I_{kj}} \cdot \frac{I_{ij+1}}{I_{ij}} \right) = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} I_{ij+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} I_{ij}}$$

För att kunna använda utvecklingen av  $E[I_{i,j+k}|I_{i,1}, I_{i,2}, \dots, I_{i,j}]$  med skattningarna ovan, måste vi visa att skattningarna är okorrelerade. Vi definierar en följd av tidigare information fram till utvecklingsperiod k som  $A_k = \{I_{ij}|j \leq k, i \leq n\}$ . Nu visar vi att skattningarna är okorrelerade:

$$\begin{aligned} E[\hat{f}_j \cdot \hat{f}_k] &= E \left[ E[\hat{f}_j \cdot \hat{f}_k | A_k] \right] = E \left[ \hat{f}_j \cdot E[\hat{f}_k | A_k] \right] = E \left[ \hat{f}_j \cdot E \left[ \frac{\sum_{v=1}^{n-k} I_{v,k+1}}{\sum_{v=1}^{n-k} I_{vk}} | A_k \right] \right] \\ &= E \left[ \hat{f}_j \cdot \left( \frac{\sum_{v=1}^{n-k} E[I_{v,k+1} | A_k]}{\sum_{v=1}^{n-k} I_{vk}} \right) \right] = E \left[ \hat{f}_j \cdot \left( \frac{\sum_{v=1}^{n-k} E[I_{v,k+1} | I_{vk}]}{\sum_{v=1}^{n-k} I_{vk}} \right) \right] \\ &= E \left[ \hat{f}_j \cdot \left( f_k \cdot \left( \frac{\sum_{v=1}^{n-k} I_{vk}}{\sum_{v=1}^{n-k} I_{vk}} \right) \right) \right] = E[\hat{f}_j] \cdot f_k = E[\hat{f}_j] \cdot E[\hat{f}_k] \end{aligned}$$

Om vi kombinerar (A.1.3) med resultatet ovan får vi att följande är en väntevärdesriktig skattning av total skadekostnad:

$$\hat{E}[I_{in}|I_{ij}] = I_{ij} \cdot \hat{f}_j \cdots \hat{f}_{n-1}.$$

### A.3 Budget Loss Ratio Metoden

Denna metod antar att vi känner till alternativt har en budget för den totala skadekostnaden eller att vi har ett estimat för den som inte bygger på de skador vi hittills har observerat.

Det finns många olika tillvägagångssätt för att budgetera total skadekostnad. I Brosius minstakvadratmetod estimeras den totala skadekostnaden genom ett genomsnitt av tidigare skadeår, vid den utvecklingsperiod där vi antar att skadorna är färdigutvecklade.

### A.4 Bornhuetter & Ferguson

Bornhuetter & Ferguson bygger på exponering. Den tar hänsyn till när i tiden skadorna rapporteras eller betalas.

Antag att  $F_{ij}$  representerar den faktor som utvecklar skadekostnaden från utvecklingsperiod j till slutet, för skadeperiod i. vi gör följande antagande för  $F_{ij}$ :



Vi känner till  $F_{ij}$  genom att vi känner till följande:

$$F_{ij} = \frac{E[I_{in}]}{E[I_{ij}]}$$

$F_{ij}$  bestäms ofta genom att använda Chain Ladder.

Följande är en väntevärdesriktig skattning av slutgiltig total skadekostnad:

$$(A.2.1) \quad \hat{I}_{in}^{BF} = I_{ij} + \left(1 - \frac{1}{F_{ij}}\right) \cdot \hat{I}_{in}$$

där  $\hat{I}_{in}$  bestäms genom att vi har ett estimat för hur stor del den totala skadekostnaden kommer att vara av premien, dvs. ett estimat för skadegraden. Vi kan skriva om (A.2.1) på följande form.

$$\begin{aligned} \hat{I}_{in}^{BF} &= I_{ij} + \left(1 - \frac{1}{F_{ij}}\right) \cdot \hat{I}_{in} \\ &= \frac{1}{F_{ij}} \cdot I_{ij} \cdot F_{ij} + \left(1 - \frac{1}{F_{ij}}\right) \cdot \hat{I}_{in} \\ &= W_{ij} \cdot I_{ij} \cdot F_{ij} + (1 - W_{ij}) \cdot \hat{I}_{in} \end{aligned}$$

där  $W_{ij} = \frac{1}{F_{ij}}$ . Vi kan tydligt se att Bornhuetter & Ferguson ger en vägning mellan Chain Ladder estimatet,  $I_{ij} \cdot F_{ij}$ , och mellan ett estimat för skadegraden,  $\hat{I}_{in}$ .

## A.5 Bootstrapping Chain Ladder

I denna uppsats utför vi bootstrapping av Chain Ladder enligt samma princip som för Munich Chain Ladder. Följande algoritm beskriver tillvägagångssättet för att implementera bootstrapping av Chain Ladder:

1. Pearsonresidualer beräknas enligt formel 3.2.2 respektive 3.2.3 och vi justerar dem genom att multiplicera med  $\sqrt{\frac{n-s}{n-s-1}}$ . På detta sätt får vi väntevärdesriktighet.
2. Börja iterationen som ska upprepas  $N$  gånger, där  $N \geq 1000$ . Detta innehåller följande steg:
  - a. Sampla slumpmässigt med återläggning från residualerna för utvecklingsfaktorerna för betalt respektive taxation. Notera att residualerna inte är grupperade som i bootstrapping av Munich Chain Ladder, utan att bootstrappingen utförs för betalt och taxation separat.
  - b. Beräkna de bootstrappade utvecklingsfaktorerna genom att gå baklänges i definitionen av Pearsonresidualerna:
    - i. Beräkna utvecklingsfaktorerna för betalt respektive taxation genererade av pseudosamplingen. Invertera Pearsonsresidualerna enligt följande:

$$(F_{ij}^P)^B = \frac{\left(\text{Res}(P_{ij})\right)^B \cdot \hat{\sigma}_j^P}{\sqrt{P_{ij}}} + \hat{f}_j^P$$

$$(F_{ij}^I)^B = \frac{(\text{Res}(I_{ij}))^B \cdot \hat{\sigma}_j^I}{\sqrt{I_{ij}}} + \hat{f}_j^I$$

- ii. Beräkna de bootstrappade utvecklingsfaktorerna med hjälp av  $P_{ij}$ - respektive  $I_{ij}$ - vägda medelvärden av de pseudogenererade utvecklingsfaktorerna:

$$(\hat{f}_j^P)^B = \sum_{i=1}^{n-j} \frac{P_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j} P_{i,j}} \cdot (F_{ij}^P)^B$$

$$(\hat{f}_j^I)^B = \sum_{i=1}^{n-j} \frac{I_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j} I_{i,j}} \cdot (F_{ij}^I)^B$$

Notera att vikterna  $P_{ij}$  respektive  $I_{ij}$  kommer från originaldatasetet och inte från pseudosamplingen.

- c. Utveckla skadetriangeln för betalt respektive taxation med hjälp av samma antaganden som för bootstrapping av Munich Chain Ladder:
- i. För att prediktera ett steg framåt för den senaste diagonalen antar vi en normalfördelning, dvs. för  $2 \leq i \leq n$ ,

$$P_{i,n-i+2} \sim \text{Normal} \left( (\hat{f}_{i,n-i+1}^P)^B \cdot P_{i,n-i+1}, \left( (\hat{\sigma}_{n-i+1}^P)^2 \right)^B \cdot P_{i,n-i+1} \right)$$

och

$$I_{i,n-i+2} \sim \text{Normal} \left( (\hat{f}_{i,n-i+1}^I)^B \cdot I_{i,n-i+1}, \left( (\hat{\sigma}_{n-i+1}^I)^2 \right)^B \cdot I_{i,n-i+1} \right).$$

- ii. För prediktera upp till  $n$  steg framåt antar vi också en normalfördelning. Dock beräknas väntevärde och varians med hjälp av prediktionen innan istället för av observerat data, dvs. för  $3 \leq k \leq n$  och  $n - k + 3 \leq l \leq n$ ,

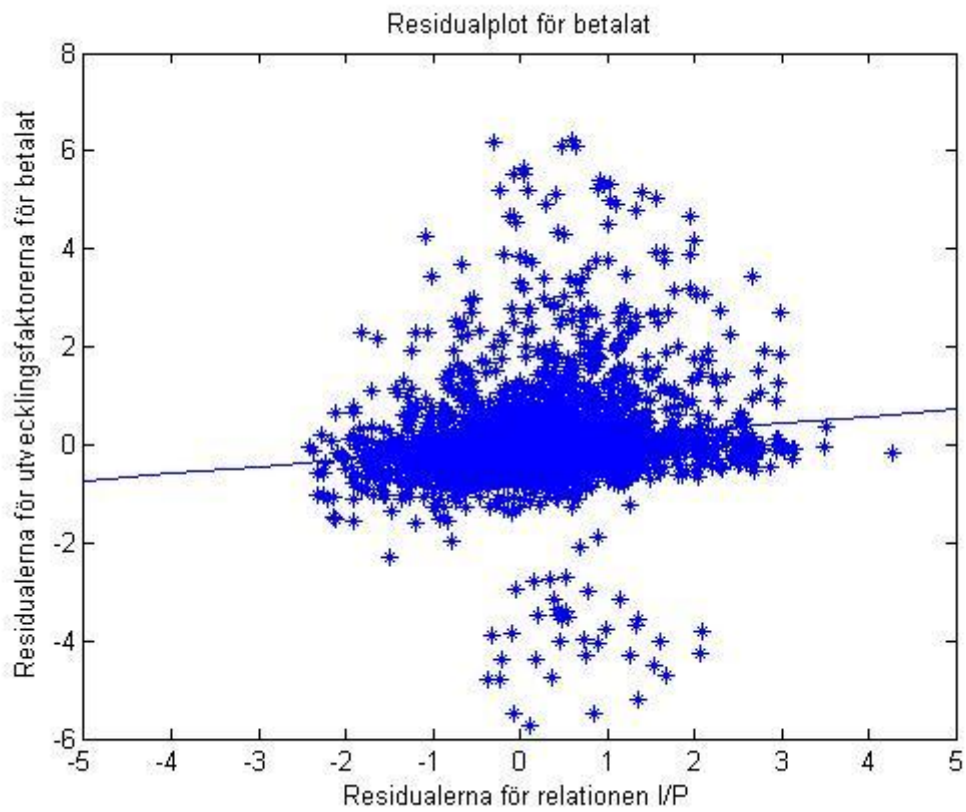
$$P_{kl} \sim \text{Normal} \left( (\hat{f}_{k,l-1}^P)^B \cdot \hat{P}_{k,l-1}, \left( (\hat{\sigma}_{l-1}^P)^2 \right)^B \cdot \hat{P}_{k,l-1} \right)$$

och

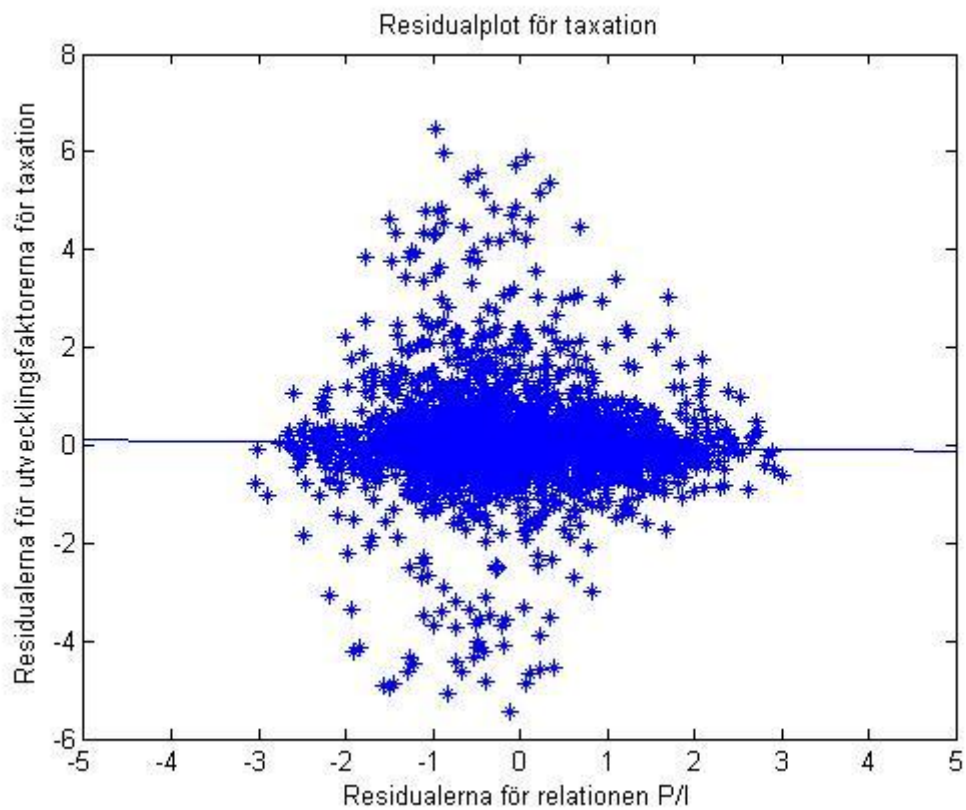
$$I_{kl} \sim \text{Normal} \left( (\hat{f}_{k,l-1}^I)^B \cdot \hat{I}_{k,l-1}, \left( (\hat{\sigma}_{l-1}^I)^2 \right)^B \cdot \hat{I}_{k,l-1} \right).$$

- d. Beräkna den estimerade reserven per skadeår och totalt.
- e. Spara resultaten och återgå till början av iterationsloopen. På detta sätt kan vi beräkna prediktionsfelet och den prediktiva fördelningen för den estimerade reserven.

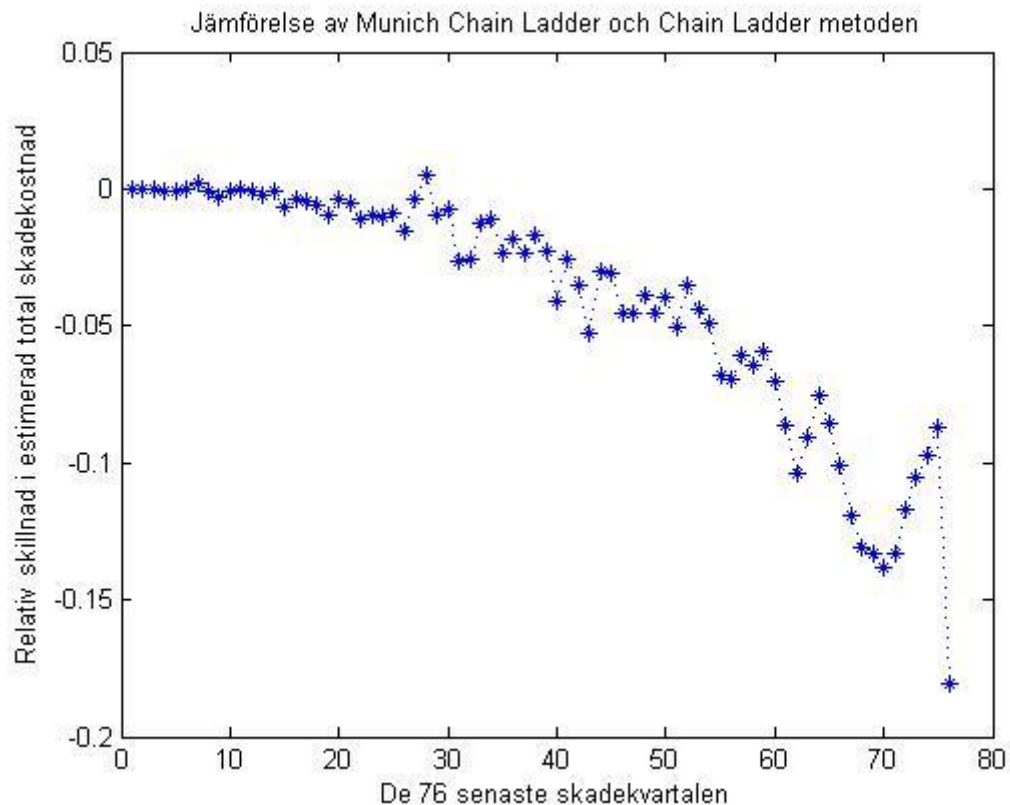
## A.6 Munich Chain Ladder: Grafer



Figur 21: Residualplot för betalat. Notera att detta resultat baseras på skadedata från sjuk- och olycksfallsprodukten.



Figur 22: Residualplot för taxation. Notera att detta resultat baseras på skadedata från sjuk- och olycksfallsprodukten.



Figur 23: Skillnad i estimerad total skadekostnad för Munich Chain Ladder och Chain Ladder (MCL-CL)/CL. Notera att vi använder data bestående av taxation. Notera även att detta resultat baseras på skadedata från sjuk- och olycksfallsprodukten.

## A.7 Bootstrapping Munich Chain Ladder: Grafer och tabeller

*kk*

Munich Chain Ladder		Chain Ladder	
Betalt	Taxation	Betalt	Taxation
47	53	55	43

Tabell 16: Totala prediktionsfelet för samtliga skadekvartal. Notera att detta resultat baseras på skadedata från hemförsäkringsprodukten.

*kk*

Skade- kvartal	Bootstrap		Munich Chain Ladder		Chain Ladder	
	Betalt	Taxation	Betalt	Taxation	Betalt	Taxation
2008 Q1	236	218	229	210	459	249
2008 Q2	240	216	231	205	507	251
2008 Q3	252	220	242	206	585	263
2008 Q4	237	205	226	190	566	245
2009 Q1	330	286	316	268	772	342
2009 Q2	311	269	299	254	728	323
2009 Q3	330	292	319	278	728	343
2009 Q4	342	314	330	300	672	354
2010 Q1	450	424	438	408	828	467
2010 Q2	482	459	470	444	837	501
2010 Q3	643	622	632	606	1044	671
2010 Q4	661	594	635	562	1516	695
<b>Totalt</b>	<b>4 514</b>	<b>4 122</b>	<b>4 368</b>	<b>3 933</b>	<b>9 241</b>	<b>4 704</b>

**Tabell 17: Jämförelse av reservestimat baserat på bootstrapping av Munich Chain Ladder samt baserat på direkt tillämpning av Munich Chain Ladder och Chain Ladder för data bestående av betalt och taxation. Här visas endast totalen för skadekvartal 2008Q1 – 2010Q4. Notera att detta resultat baseras på skadedata från sjuk- och olycksfallsprodukten.**

*kk*

Skade- kvartal	Munich Chain Ladder		Chain Ladder		%			
	Betalt	Taxation	Betalt	Taxation	Munich Chain Ladder		Chain Ladder	
	Betalt	Taxation	Betalt	Taxation	Betalt	Taxation	Betalt	Taxation
2008 Q1	70	99	106	88	29,9%	45,5%	23,0%	35,5%
2008 Q2	72	102	111	89	30,0%	46,9%	22,0%	35,5%
2008 Q3	77	106	122	91	30,4%	48,3%	20,8%	34,4%
2008 Q4	75	103	121	87	31,4%	50,2%	21,4%	35,5%
2009 Q1	90	123	142	102	27,3%	42,8%	18,4%	29,8%
2009 Q2	85	115	141	96	27,4%	42,9%	19,2%	29,9%
2009 Q3	86	115	140	100	26,0%	39,5%	19,2%	29,2%
2009 Q4	83	113	143	97	24,2%	35,9%	21,2%	27,4%
2010 Q1	98	132	224	112	21,9%	31,1%	27,1%	24,0%
2010 Q2	109	144	252	124	22,5%	31,4%	30,1%	24,6%
2010 Q3	138	179	303	158	21,5%	28,7%	29,1%	23,5%
2010 Q4	215	262	419	221	32,5%	44,2%	27,6%	32,0%
<b>Totalt</b>	<b>578</b>	<b>745</b>	<b>879</b>	<b>517</b>	<b>12,8%</b>	<b>18,1%</b>	<b>9,5%</b>	<b>11,0%</b>

**Tabell 18: En jämförelse av prediktionsfelet baserat på de olika metoderna för data bestående av betalt och taxation. Prediktionsfelet visas dels i kkr och dels som procent av den bootstrappade reserven. Notera att vi här endast visar totalen för skadekvartal 2008Q1 – 2010Q4. Notera även att detta resultat baseras på skadedata från sjuk- och olycksfallsprodukten.**

*kk*

Munich Chain Ladder		Chain Ladder	
Betalt	Taxation	Betalt	Taxation
965	1 268	1 271	940

**Tabell 19: Totala prediktionsfelet för samtliga skadekvartal. Notera att detta resultat baseras på skadedata från sjuk- och olycksfallsprodukten.**