XVI Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich

5. listopada 2005, Sztokholm, Szwecja

Czas zawodów: 4 godziny 30 minut
Pytania mogą być zadawane przez pierwsze 30 minut.

1. Niech a_0 będzie liczbą całkowitą dodatnią. Definujemy ciąg $(a_n)_{n\geq 0}$ następująco: jeśli
$$a_n = \sum_{i=0}^{j} c_i 10^i,$$
gdzie c_i są takimi liczbami całkowitymi, że $0 \leq c_i \leq 9$, to
$$a_{n+1} = c_0^{2005} + c_1^{2005} + \cdots + c_j^{2005}.$$
Czy można wybrać liczbę a_0 tak, aby wszystkie wyrazy tego ciągu były różne?

2. Niech α, β, γ spełniają warunki: $0 \leq \alpha, \beta, \gamma < 90°$ oraz $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 1$. Dowieść, że
$$\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\gamma \geq \frac{3}{8}.$$

3. Rozważmy ciąg $(a_k)_{k\geq 1}$ zdefiniowany następująco: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$,
$$a_{k+2} = a_k + \frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{4a_k a_{k+1}} \quad \text{dla } k \geq 1.$$
Wykazać, że
$$\frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \frac{1}{a_3 a_5} + \cdots + \frac{1}{a_{98} a_{100}} < 4.$$

4. Znaleźć trzy różne wielomiany $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych takie, że $P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x.

5. Niech a, b, c będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi spełniającymi warunek $abc = 1$. Udowodnić, że
$$\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq 1.$$

6. Niech K, N będą liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $1 \leq K \leq N$. Tasujemy talię N różnych kart powtarzając operację polegającą na odwróceniu kolejności K wierzchnich kart i przestawieniu ich na spód talii. Wykazać, że po nie więcej niż $4 \cdot N^2/K^2$ takich operacjach uzyskamy z powrotem wyjściowe ułożenie kart.

7. Dana jest prostokątna tablica o n wierszach i 6 kolumnach, przy czym $n > 2$. W każdym jej polu znajduje się jedna z liczb: 0 lub 1. Wszystkie wiersze tablicy są różne. Jeżeli w tablicy znajdują się wiersze $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ i $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$, to znajduje się w niej również wiersz
$$(x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, x_5y_5, x_6y_6).$$
Udowodnić, że w pewnej kolumnie tablicy co najmniej połowa liczb jest równa zero.

8. Rozważmy siatkę 25×25 kwadratów jednostkowych. Rysujemy na niej kolorem czerwonym kontury kwadratów dowolnej wielkości. Jaką najmniejszą liczbę kwadratów musimy narysować, aby pokolorować wszystkie linie siatki?

9. Prostokąt o wymiarach 200×3 jest podzielony na kwadraty jednostkowe. Udowodnić, że liczba sposobów, na jakie można podzielić go na prostokątne kawałki składające się z dwóch kwadratów jednostkowych, jest podzielna przez 3.

10. Niech $m = 30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ i niech M będzie zbiorem tych dodatnich dzielników liczby m, które mają dokładnie 2 dzielniki pierwsze. Wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą n o następującej własności: wśród dowolnie wybranych n liczb ze zbioru M istnieją trzy takie liczby a, b, c, że $a \cdot b \cdot c = m$.

11. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC trójkąta ABC, przy czym $BD = AE$. Prosta łacząca środki okręgów opisanych na trójkątach ADC i BEC przecina odpowiednio proste AC i BC w punktach K i L. Dowieść, że $KC = LC$.

12. Niech $ABCD$ będzie takim czworokątem wypukłym, że $BC = AD$. Punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD. Proste AD i BC przecinają prostą MN odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnić, że $CQ = DP$.

13. Jaka jest najmniejsza liczba okręgów o promieniu $\sqrt{2}$, którymi można pokryć prostokąt

    (a) o wymiarach 6×3?

    (b) o wymiarach 5×3?

14. Środkowe trójkąta ABC przecinają się w punkcie M. Niech D i E będą różnymi punktami leżącymi na prostej BC, przy czym $DC = CE = AB$. Punkty P i Q leżą odpowiednio na odcinkach BD i BE oraz spełnione są równości $2BP = PD$ i $2BQ = QE$. Wyznaczyć $\angle PMQ$.

15. Proste e, f są prostopadłe i przecinają się w punkcie H. Punkty A i B leżą na prostej e, a punkty C i D leżą na prostej f, przy czym punkty A, B, C, D, H są różne. Proste b i d przechodzą odpowiednio przez punkty B i D i są prostopadłe do prostej AC. Proste a i c przechodzą odpowiednio przez punkty A i C i są prostopadłe do prostej BD. Proste a i b przecinają się w punkcie X, a proste c i d przecinają się w punkcie Y. Udowodnić, że prosta XY przechodzi przez punkt H.

16. Niech p będzie liczbą pierwszą i niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Liczba q jest dodatnim dzielnikiem liczby $(n+1)^p - n^p$. Wykazać, że liczba $q - 1$ jest podzielna przez p.

17. Ciąg $(x_n)_{n\geq 0}$ jest zdefiniowany następująco: $x_0 = a$, $x_1 = 2$ oraz $x_n = 2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ dla $n > 1$. Znaleźć wszystkie takie liczby całkowite a, że liczba $2x_{3n} - 1$ jest kwadratem liczby naturalnej dla wszystkich $n \geq 1$.

18. Niech x, y będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Załóżmy, że $z = 4xy/(x + y)$ jest liczbą całkowitą nieparzystą. Udowodnić, że co najmniej jeden dzielnik liczby z można przedstawić w postaci $4n - 1$, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią.

19. Czy istnieje 2005 różnych kwadratów liczb całkowitych dodatnich, których suma jest również kwadratem liczby całkowitej dodatniej?

20. Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których liczba $(p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_k+1)$ jest podzielna przez n, gdzie $n = p_1p_2\cdots p_k$ jest rozkładem na czynniki pierwsze (niekoniecznie różne).