16^{th} Baltic Way Mathematical Team Contest

November 5, 2005, Stockholm, Sverige

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Spørsmål kan stilles de første 30 minuttene.

1. La a_0 være et positivt heltall. Definer følgen $\{a_n\}_{n\geq 0}$ slik: hvis
$$a_n = \sum_{i=0}^{j} c_i 10^i \quad \text{der } c_i \text{ er heltall } (0 \leq c_i \leq 9),$$
$$\text{så la } a_{n+1} = c_0^{2005} + c_1^{2005} + \cdots + c_j^{2005}.$$
Er det mulig å velge a_0 slik at alle leddene i følgen blir forskjellige?

2. La α, β and γ være tre vinkler s.a. $0 \leq \alpha, \beta, \gamma < 90°$ og $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 1$. Vis at
$$\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma \geq \frac{3}{8}.$$

3. Betrakt følgen $\{a_k\}_{k\geq 1}$ definert ved $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$,
$$a_{k+2} = a_k + \frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{4a_k a_{k+1}} \quad \text{for } k \geq 1.$$
Vis at
$$\frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \frac{1}{a_3 a_5} + \cdots + \frac{1}{a_{98} a_{100}} < 4.$$

4. Finn tre forskjellige polynomer $P(x)$ med reelle koeffisienter slik at $P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$ for alle reelle x.

5. La a, b, c være positive reelle tall s.a. $abc = 1$. Vis at
$$\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq 1.$$

6. La K og N være positive heltall slik at $1 \leq K \leq N$. En kortstokk med N forskjellige kort stokkes ved at man ved hver omstokking reverserer rekkefølgen på de K øverste kortene og legger dem nederst i bunken. Vis at man etter ikke flere enn $4 \cdot N^2/K^2$ omstokkinger er tilbake til utgangsposisjonen.

7. En rektangulær tabell har n rader og 6 kolonner ($n > 2$). I hver celle står det enten 0 eller 1. Ingen av radene er like. For alle par av rader $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ og $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ er også raden $(x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, x_5y_5, x_6y_6)$ å finne i tabellen. Vis at det finnes en kolonne der minst halvparten av cellene inneholder 0.

8. Nils har et rutenett på 25×25 identiske kvadrater. Ved å tegne inn kvadrater av vilkårlig størrelse med røde sidekanter på dette rutenettet ønsker Nils å farge alle linjestykkene i rutenettet røde. Hva er det minste antallet kvadratkonturer Nils må tegne inn for å oppnå dette?

9. Et rektangel er delt inn i 200×3 identiske kvadrater. Vis at antall måter rektangelet kan dekkes med brikker på 1×2 er delelig med 3.

10. La $m = 30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ og la M være mengden av de positive divisorene som har nøyaktig to primtallsfaktorer. Bestem det minste heltallet n s.a. det i enhver delmengde av M med n elementer finnes 3 tall a, b, c som tilfredsstiller $a \cdot b \cdot c = m$.

11. La ABC være en vilkårlig trekant og la punktet D ligge på siden BC og punktet E på siden AC s.a. $BD = AE$. Linjen mellom omsentrene til trekantene ADC og BEC skjærer linjene AC og BC i henholdsvis K og L. Vis at $KC = LC$.

12. La $ABCD$ være en konveks firkant s.a. $BC = AD$. La M og N være midtpunktet til henholdsvis AB og CD. Linjene AD og BC skjærer linjen MN i henholdsvis P og Q. Vis at $CQ = DP$.

13. Hva er det minste antallet sirkler med radius $\sqrt{2}$ som trengs for å dekke et rektangel på

    (a) 6×3?

    (b) 5×3?

14. La M være tyngdepunktet i trekanten ABC. La D og E være forskjellige punkter på linjen BC s.a. $DC = CE = AB$, og la P og Q være punkter på henholdsvis linjestykket BD og BE s.a. $2BP = PD$ og $2BQ = QE$. Bestem $\angle PMQ$.

15. La linjene e og f stå vinkelrett på hverandre, og kall skjæringspunktet for H. La A og B ligge på e og C og D ligge på f s.a. de fem punktene A, B, C, D og H blir forskjellige. La linjene b og d gjennom henholdsvis B og D stå vinkelrett på AC, og la linjene a og c gjennom henholdsvis A og C stå vinkelrett på BD. Kall skjæringspuntet til a og b for X og skjæringspuntet til c og d for Y. Vis at XY går gjennom punktet H.

16. La p være et primtall og la n være et positivt heltall. La q være en positiv divisor av $(n+1)^p - n^p$. Vis at $q-1$ er delelig med p.

17. En følge $\{x_n\}_{n\geq 0}$ er definert ved: $x_0 = a$, $x_1 = 2$ og $x_n = 2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ for $n > 1$. Finn alle heltall a s.a. $2x_{3n} - 1$ blir et kvadrattall for alle $n \geq 1$.

18. La x og y være positive heltall,og anta at $z = 4xy/(x+y)$ er et oddetall. Vis at minst en divisor av z kan skrives på formen $4n-1$ der n er et positivt heltall.

19. Er det mulig å finne 2005 forskjellige positive kvadrattall s.a. summen av dem også er et kvadrattall?

20. Finn alle positive heltall $n = p_1p_2\cdots p_k$ som deler $(p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_k+1)$, der $p_1p_2\cdots p_k$ er primtallsfaktoriseringen av n (p_i-ene er ikke nødvendigvis forskjellige).