16. matemātikas komandu sacensības “Baltijas Ceļš”

2005. gada 5. novembrī, Stokholmā, Zviedrijā

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Jautājumus var uzdot pirmo 30 minūšu laikā.

1. Pieņemsim, ka a_0 ir pozitīvs vesels skaitlis. Definēsim virkni (a_n), $n \geq 0$, sekojoši: ja

$$a_n = \sum_{i=0}^{j} c_i 10^i,$$

kur c_i ir tādi veseli skaitļi, ka $0 \leq c_i \leq 9$, tad

$$a_{n+1} = c_0^{2005} + c_1^{2005} + \cdots + c_j^{2005}.$$

Vai var izvēlēties a_0 tā, lai visi virknes locekļi būtu dažādi?

2. Pieņemsim, ka α, β un γ ir trīs leņķi, kam izpildās nosacījumi $0 \leq \alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$ un $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 1$. Pierādīt, ka

$$\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\gamma \geq \frac{3}{8}.$$

3. Aplūkosim virkni (a_k), $k \geq 1$, kuru definē ar nosacījumiem $a_1 = 1$; $a_2 = \frac{1}{2}$;

$$a_{k+2} = a_k + \frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{4a_k a_{k+1}}, \quad \text{ja } k \geq 1.$$

Pierādiet, ka

$$\frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \frac{1}{a_3 a_5} + \cdots + \frac{1}{a_{98} a_{100}} < 4.$$

4. Atrodiet tādus trīs dažādus polinomus ar reāliem koeficientiem $P(x)$, ka visiem reāliem x pastāv sakarība $P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1$.

5. Pieņemsim, ka a, b, c ir pozitīvi reāli skaitļi, kas apmierina nosacījumu $abc = 1$. Pierādiet, ka

$$\frac{a}{a^2 + 2} + \frac{b}{b^2 + 2} + \frac{c}{c^2 + 2} \leq 1.$$

6. Pieņemsim, ka K un N ir pozitīvi veseli skaitļi un $1 \leq K \leq N$. Kāršu komplekts satur N dažādas kārtis, kas sākumā saliktas kaudzē viena virs otras kaut kādā secībā. Ar vienu gājienu var paņemt K augšējās kārtis, apmainīt to secību uz pretējo un jauniegūto K kāršu bloku novietot kaudzes apakšā. Pierādiet: atkārtojot šādus gājienus, kārtis novietosies sākotnējā secībā pēc ne vairāk kā $4 \cdot N^2/K^2$ gājieniem.

7. Taisnstūrveida tabulā ir n rindas un 6 kolonnas, turklāt $n > 2$. Katrā tabulas rūtiņā ierakstīts skaitlis 0 vai 1. Tabulā nav divu vienādu rindiņu. Ja tabulā ir rindiņas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ un $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$, tad tajā ir arī rindiņa $(x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, x_5y_5, x_6y_6)$. Pierādiet: tabulā ir tāda kolonna, kurā vismaz pusē rūtiņu ierakstītas nulles.

8. Aplūkosim kvadrātisku režģi, kas sastāv no 25×25 vienības kvadrātiņiem. Vienā gājienā ar sarkanu zīmuli drīkst uzzīmēt jebkura izmēra kvadrāta kontūru, kas iet pa režģa līnijām. Ar kādu mazāko gājienu skaitu var nokrāsot visas režģa līnijas?

9. Taisnstūris sadalīts 200×3 vienības kvadrātos. Pierādīt: to veidu skaits, kuros taisnstūri var sadalīt mazākos taisnstūros ar izmēriem 1×2, dalās ar 3.

10. Apzīmēsim $m = 30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Ar M sapratīsim visu tādu skaitļa m pozitīvu dalītāju kopu, kuri katrs sadalās divu pirmskaitļu reizinājumā. Atrodiet mazāko naturālo skaitli n ar īpašību: lai kā izvēlētos n skaitļus no kopas M, starp izvēlētajiem atradīsies 3 tādi skaitļi a, b, c, ka $a \cdot b \cdot c = m$.

11. Punkti D un E atrodas attiecīgi uz trijstūra ABC malām BC un AC; pastāv vienādība $BD = AE$. Taisne, kas iet caur trijstūru ADC un BEC apvilkto riņķa līniju centriem, krusto taisnes AC un BC attiecīgi punktos K un L. Pierādiet, ka $KC = LC$.

12. Pieņemsim, ka $ABCD$ ir izliekts četrstūris un $BC = AD$. Punkti M un N ir attiecīgi malu AB un CD viduspunkti. Taisnes AD un BC krusto taisni MN attiecīgi punktos P un Q. Pierādīt, ka $CQ = DP$.

13. Ar kādu mazāko daudzumu riņķu, kuru rādiusi ir $\sqrt{2}$, var pārklāt taisnstūri

    (a) ar izmēriem 6×3,

    (b) ar izmēriem 5×3?

14. Pieņemsim, ka trijstūra ABC mediānas krustojas punktā M. Pieņemsim arī, ka D un E ir dažādi punkti uz taisnes BC un $DC = CE = AB$. Savukārt punkti P un Q atrodas atbilstoši uz nogriežņiem BD un BE, un pastāv vienādības $2BP = PD$ un $2BQ = QE$. Aprēķināt $\angle PMQ$.

15. Taisnes e and f ir savstarpēji perpendikulāras un krustojas punktā H. Punkti A un B pieder taisnei e, bet punkti C un D pieder taisnei f; visi pieci punkti A, B, C, D, H ir dažādi. Taisnes b un d vilktas atbilstoši caur B un D perpendikulāri AC; taisnes a un c vilktas atbilstoši caur A un C perpendikulāri BD. Pieņemsim, ka a un b krustojas punktā X, bet c un d krustojas punktā Y. Pierādiet, ka taisne XY iet caur punktu H.

16. Pieņemsim, ka p ir pirmskaitlis, bet n — pozitīvs vesels skaitlis. Ar q apzīmēsim skaitļa $(n+1)^p - n^p$ patvaļīgu pozitīvu dalītāju. Pierādīt, ka $q - 1$ dalās ar p.

17. Virkni (x_n), $n \geq 0$, definē sekojoši: $x_0 = a$; $x_1 = 2$; $x_n = 2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1$, ja $n > 1$. Kuriem veseliem skaitļiem a vienlaicīgi visi skaitļi $2x_{3n} - 1$, $n \geq 1$, ir veselu skaitļu kvadrāti?

18. Skaitļi x un y ir veseli un pozitīvi; skaitlis $z = 4xy/(x + y)$ ir nepāra vesels skaitlis. Pierādiet, ka vismaz vienu skaitļa z dalītāju var izteikt formā $4n - 1$, kur n ir vesels pozitīvs skaitlis.

19. Vai var atrast 2005 dažādus pozitīvu veselu skaitļu kvadrātus, kuru summa ir vesela skaitļa kvadrāts?

20. Kuriem veseliem pozitīviem skaitļiem n piemīt īpašība: izsakot $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, kur p_1, p_2, $\ldots$, p_k ir pirmskaitļi (ne noteikti dažādi), skaitlis $(p_1 + 1)(p_2 + 1) \cdots (p_k + 1)$ dalās ar n?