16. Eystrasaltskeppnin

5. nóvember 2005, Stokkhólmi, Svíþjóð

Tími alls: 4 tímar og 30 mínútur
Spyrja má spurninga fyrstu 30 mínúturnar.

1. Látum a_0 vera jákvæða heiltölu. Skilgreinum rununa $\{a_n\}_{n\geq 0}$ sem hér segir: Ef
$$a_n = \sum_{i=0}^{j} c_i 10^i$$
þar sem c_i eru heiltölur með $0 \leq c_i \leq 9$, þá er
$$a_{n+1} = c_0^{2005} + c_1^{2005} + \cdots + c_j^{2005}.$$
Er mögulegt að velja a_0 þannig að allir liðir rununnar séu ólíkir?

2. Látum α, β og γ vera þrjú horn þannig að $0 \leq \alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$ og $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 1$. Sýnið að
$$\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma \geq \frac{3}{8}.$$

3. Skoðum rununa $\{a_k\}_{k\geq 1}$ sem er skilgreind sem $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$,
$$a_{k+2} = a_k + \frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{4a_k a_{k+1}} \quad \text{fyrir } k \geq 1.$$
Sannið að
$$\frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \frac{1}{a_3 a_5} + \cdots + \frac{1}{a_{98} a_{100}} < 4.$$

4. Finnið þrjár mismunandi margliður $P(x)$ með rauntölustuðlum þannig að $P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$ fyrir allar rauntölur x.

5. Látum a, b, c vera jákvæðar rauntölur með $abc = 1$. Sannið að
$$\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq 1.$$

6. Látum K og N vera jákvæðar heiltölur með $1 \leq K \leq N$. Stokkur með N mismunandi spilum er stokkaður með því að endurtaka eftirfarandi: K efstu spilunum er raðað í öfuga röð og þau svo sett neðst í bunkann. Sannið að spilin í stokknum verða í upprunalegri röð eftir ekki fleiri en $4 \cdot N^2/K^2$ aðgerðir.

7. Í töflu eru n línur og 6 dálkar, þar sem $n > 2$. Í hvern reit töflunnar er ritað annað hvort 0 eða 1. Allar línur töflunnar eru ólíkar. Fyrir sérhverjar tvær línur $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ og $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ gildir að línan $(x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, x_5y_5, x_6y_6)$ er líka í töflunni. Sannið að til er dálkur þar sem að minnsta kosti helmingur staka er núll.

8. Ferningi sem er 25×25 er skipt í einingaferninga. Teiknið með rauðum penna útlínur ferninga af einhverri stærð með hliðum sem falla saman við hliðar einingaferninganna. Hver er lágmarksfjöldi ferninga sem við þurfum að teikna til þess að lita hliðar allra einingaferninganna?

9. Rétthyrningi er skipt í 200×3 einingaferninga. Sannið að fjöldi leiða til þess að skipta þessum rétthyrningi í rétthyrninga af stærð 1×2 er deilanlegur með 3.

10. Látum $m = 30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ og látum M vera mengi þeirra jákvæðu deila sem hafa nákvæmlega 2 frumþætti. Ákvarðið minnstu heiltölu n með eftirfarandi eiginleika: Fyrir sérhverjar n tölur sem valdar eru úr M, má á meðal þeirra finna 3 tölur a, b, c sem uppfylla $a \cdot b \cdot c = m$.

11. Látum punktana D og E liggja á hliðunum BC og AC, á þríhyrningnum ABC, uppfylla $BD = AE$. Línan gegnum miðjur umrituðu hringanna um þríhyrningana ADC og BEC sker línurnar AC og BC í K og L. Sannið að $KC = LC$.

12. Látum $ABCD$ vera kúptan ferhyrning þannig að $BC = AD$. Látum M og N vera miðpunkta AB og CD. Línurnar AD og BC skera línuna MN í P og Q. Sannið að $CQ = DP$.

13. Hver er minnsti fjöldi hringa með geisla $\sqrt{2}$ sem þarf til þess að hylja rétthyrning

    (a) sem er 6×3 að stærð?

    (b) sem er 5×3 að stærð?

14. Miðlínur þríhyrningsins ABC skerast í punktinum M. Látum D og E vera mismunandi punkta á línunni BC þannig að $DC = CE = AB$. Látum P og Q vera punkta á strikunum BD og BE, þannig að $2BP = PD$ og $2BQ = QE$. Ákvarðið $\angle PMQ$.

15. Línurnar e og f liggja hornrétt hvor á aðra og skerast í punktinum H. Punktarnir A og B liggja á e og punktarnir C og D liggja á f, þannig að allir fimm punktarnir A, B, C, D og H eru ólíkir. Línurnar b og d liggja hornrétt á AC gegnum B og D; línurnar a og c liggja hornrétt á BD gegnum A og C. Línurnar a og b skerast í X og línurnar c og d skerast í Y. Sannið að XY fer gegnum H.

16. Látum p vera frumtölu og n vera jákvæða heiltölu. Látum q vera jákvæðan deili $(n+1)^p - n^p$. Sýnið að $q-1$ sé deilanleg með p.

17. Runan $\{x_n\}_{n\geq 0}$ er skilgreind sem hér segir: $x_0 = a$, $x_1 = 2$ og $x_n = 2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ fyrir $n > 1$. Finnið allar heiltölur a þannig að $2x_{3n} - 1$ sé ferningstala fyrir öll $n \geq 1$.

18. Látum x og y vera jákvæðar heiltölur og gerum ráð fyrir að $z = 4xy/(x+y)$ sé oddatala. Sannið að minnst einn deilir z geti verið settur fram á forminu $4n-1$ þar sem n er jákvæð heiltala.

19. Er mögulegt að finna 2005 mismunandi jákvæðar ferningstölur þannig að summa þeirra sé einnig ferningstala?

20. Finnið allar jákvæðar heiltölur $n = p_1p_2\cdots p_k$ sem ganga upp í $(p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_k+1)$, þar sem $p_1p_2\cdots p_k$ er þáttun tölunnar n í frumþætti (ekki endilega ólíka).