16. Baltian tie -joukkuematematiikkakilpailu

5. päivä marraskuuta 2005 Tukholmassa, Ruotsissa

Kilpailuaika 4h 30min
Kysymykset tulee esittää ensimmäisten 30 minuutin aikana.

1. Olkoon a_0 positiivinen kokonaisluku. Määritellään jono $\{a_n\}_{n\geq 0}$ seuraavasti: Jos
$$a_n = \sum_{i=0}^{j} c_i 10^i,$$
missä c_i:t ovat kokonaislukuja ja $0 \leq c_i \leq 9$, niin
$$a_{n+1} = c_0^{2005} + c_1^{2005} + \cdots + c_j^{2005}.$$
Voidaanko a_0 valita siten, että kaikki termit jonossa ovat erisuuria?

2. Olkoot α, β ja γ kulmia, joille pätee $0 \leq \alpha, \beta, \gamma < 90^o$ ja $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 1$. Osoita, että
$$\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma \geq \frac{3}{8}.$$

3. Määritellään jono $\{a_k\}_{k\geq 1}$ seuraavasti: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$ ja
$$a_{k+2} = a_k + \frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{4a_k a_{k+1}},$$
kun $k \geq 1$. Osoita, että
$$\frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \frac{1}{a_3 a_5} + \cdots + \frac{1}{a_{98} a_{100}} < 4.$$

4. Etsi kolme eri reaalikertoimista polynomia $P(x)$, joilla $P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$ kaikilla reaalisilla x.

5. Olkoot a, b, c positiivisia reaalilukuja, joille $abc = 1$. Osoita, että
$$\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq 1.$$

6. Olkoot K ja N positiivisia kokonaislukuja, joilla $1 \leq K \leq N$. N:stä erilaisesta kortista koostuvaa pelikorttipakkaa sekoitetaan toistuvasti muuntamalla päinvastaiseksi päällimmäisten K:n kortin järjestys ja siirtämällä ne pakan pohjalle. Osoita, että pienin määrä toistoja, joiden jälkeen pakka on takaisin alkuperäisessä järjestyksessään, on korkeintaan $4 \cdot N^2/K^2$.

7. Taulukossa on n riviä, missä $n > 2$, ja 6 saraketta. Jokaiseen soluun on kirjoitettu joko 0 tai 1. Kaikki rivit ovat keskenään erilaisia. Jos $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ ja $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ ovat taulukon rivejä, niin myös $(x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, x_5y_5, x_6y_6)$ on taulukon rivi. Osoita, että taulukossa on sarake, jonka luvuista vähintään puolet on nollia.

8. Tarkastellaan 25×25 yksikköruuduista muodostuvaa ruudukkoa. Piirretään punaisella kynällä mielivaltaisen kokoisten neliöiden reunaviivoja ruudukon viivoja myöten. Mikä on pienin määrä neliöitä, joka pitää piirtää, jotta kaikki ruudukon viivat tulisi väritettyä?

9. Suorakulmio on jaettu 200×3-ruudukoksi. Osoita, että erilaisia tapoja jakaa suorakulmio 1×2-suorakulmioihin on kolmella jaollinen määrä.

10. Olkoon $m = 30030 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ ja olkoon M niiden luvun m positiivisten tekijöiden joukko, joilla on täsmälleen kaksi alkutekijää. Määritä pienin kokonaisluku n, jolla on seuraava ominaisuus: Minkä tahansa joukon M n:n luvun joukossa on 3 lukua a, b, c, jotka toteuttavat ehdon $a \cdot b \cdot c = m$.

11. Pisteet D ja E ovat kolmion ABC sivuilla BC ja AC ja toteuttavat ehdon $BD = AE$. Kolmioiden ADC ja BEC ympäripiirrettyjen ympyröiden keskipisteet yhdistävä suora leikkaa suorat AC ja BC pisteissä K ja L. Osoita, että $KC = LC$.

12. Olkoon $ABCD$ konveksi nelikulmio ja $BC = AD$. Pisteet M ja N ovat janojen AB ja CD keskipisteet. Suorat AD ja BC leikkaavat suoran MN pisteissä P ja Q. Osoita, että $CQ = DP$.

13. Mikä on pienin määrä $\sqrt{2}$-säteisiä ympyröitä, joka tarvitaan peittämään suorakulmio, jonka suuruus on

    (a) 6×3?

    (b) 5×3?

14. Kolmion ABC mediaanit leikkaavat pisteessä M. Olkoot D ja E kaksi suoran BC eri pistettä, joilla $DC = CE = AB$ ja olkoot P ja Q pisteitä janoilla BD ja BE siten että $2BP = PD$ ja $2BQ = QE$. Määritä $\angle PMQ$.

15. Suorat e ja f ovat kohtisuorassa toisiaan vasten ja leikkaavat toisensa pisteessä H. Pisteet A ja B ovat suoralla e ja pisteet C ja D suoralla f. A, B, C, D ja H ovat keskenään eri pisteitä. Kohtisuorassa AC:tä vasten ovat suora b, joka kulkee pisteen B ja suora d, joka kulkee pisteen D kautta. Kohtisuorassa BD:tä vasten ovat suora a, joka kulkee pisteen A ja suora c, joka kulkee pisteen C kautta. Suorat a ja b leikkaavat pisteessä X ja c ja d leikkaavat pisteessä Y. Osoita, että XY kulkee pisteen H kautta.

16. Olkoon p alkuluku ja n positiivinen kokonaisluku. Olkoon q luvun $(n+1)^p - n^p$ positiivinen tekijä. Osoita, että $q-1$ on jaollinen luvulla p.

17. Jono $\{x_n\}_{n\geq 0}$ määritellään seuraavasti: $x_0 = a$, $x_1 = 2$ ja $x_n = 2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1$, kun $n > 1$. Etsi kaikki kokonaisluvut a, joilla $2x_{3n} - 1$ on kokonaisluvun neliö kaikilla $n \geq 1$.

18. Olkoot x ja y positiivisia kokonaislukuja ja oletetaan, että $z = 4xy/(x+y)$ on pariton kokonaisluku. Osoita, että luvulla z on ainakin yksi jakaja, joka voidaan kirjoittaa muodossa $4n-1$ jollakin positiivisella kokonaisluvulla n.

19. Onko mahdollista löytää 2005 keskenään erisuurta positiivista kokonaisluvun neliötä, joiden summa on myös kokonaisluvun neliö?

20. Etsi kaikki kokonaisluvut $n = p_1p_2\cdots p_k$, jotka jakavat luvun $(p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_k+1)$, kun $p_1p_2\cdots p_k$ on luvun n hajotelma alkutekijöihin (ei välttämättä erisuuriin).