

16. võistkondlik matemaatikavõistlus Balti Tee

5. november 2005, Stockholm, Rootsi

Lahendamiseks on aega 4 tundi ja 30 minutit.

Küsimusi võib esitada esimese 30 minuti jooksul.

1. Olgu a_0 positiivne täisarv. Jada $\{a_n\}_{n \geq 0}$ defineeritakse järgmiselt: kui

$$a_n = \sum_{i=0}^j c_i 10^i,$$

kus c_i on täisarvud, nii et $0 \leq c_i \leq 9$, siis

$$a_{n+1} = c_0^{2005} + c_1^{2005} + \dots + c_j^{2005}.$$

Kas on võimalik valida a_0 nii, et selle jada kõik liikmed on erinevad?

2. Olgu α , β ja γ kolm sellist nurka, et $0 \leq \alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$ ja $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 1$. Tõesta, et

$$\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma \geq \frac{3}{8}.$$

3. Jada $\{a_k\}_{k \geq 1}$ on antud seostega $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$ ja

$$a_{k+2} = a_k + \frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{4a_k a_{k+1}} \quad \text{iga } k \geq 1 \text{ korral.}$$

Tõesta, et

$$\frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \frac{1}{a_3 a_5} + \dots + \frac{1}{a_{98} a_{100}} < 4.$$

4. Leia kolm erinevat reaalarvulist kordajatega polünoomi $P(x)$, mis rahuldavad iga reaalarvu x korral tingimust $P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1$.
5. Olgu a , b ja c sellised positiivsed reaalarvud, et $abc = 1$. Tõesta, et

$$\frac{a}{a^2 + 2} + \frac{b}{b^2 + 2} + \frac{c}{c^2 + 2} \leq 1.$$

6. Olgu K ja N sellised positiivsed täisarvud, et $1 \leq K \leq N$. Kaardipakis on N kaarti. Paki segamiseks muudetakse K pealmise kaardi järjekord vastupidiseks ja tõstetakse need kaardid paki põhja. Tõesta, et ülimalt $4 \cdot N^2/K^2$ sellise sammu järel on kõik kaardid uuesti esialgses järjekorras.
7. Tabelis on n rida ja 6 veergu, kus $n > 2$. Tabeli igasse lahtrisse kirjutatakse 0 või 1, nii et tabeli kõik read on erinevad. On teada, et tabeli iga kahe rea $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ ja $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ jaoks leidub tabelis ka rida $(x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3, x_4 y_4, x_5 y_5, x_6 y_6)$. Tõesta, et tabelis leidub veerg, kus vähemalt pooltes lahtrites on nullid.

8. Ruudustik koosneb 25×25 ühikruudust. Mõõda ruudustiku jooni tohib punase pliiatsiga joonistada suvaliste küljepikkustega ruutude kontuure. Mitu kontuuri tuleb vähemalt joonistada, et katta värviga kõik ruudustiku jooned?
9. Ristkülik koosneb 200×3 ühikruudust. Tõesta, et võimalusi jaotada see ristkülik väiksemateks ristkülikuteks suurusega 1×2 on kolmega jaguv arv.
10. Olgu $m = 30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ ja olgu M arvu m selliste positiivsete jagajate hulk, millel on täpselt kaks algtegurit. Leia vähim positiivne täisarv n , millel on järgmine omadus: valides ükskõik millised n arvu hulgast M , leidub nende seas kolm arvu a , b ja c , nii et $a \cdot b \cdot c = m$.
11. Kolmnurga ABC külgedel BC ja AC võetakse vastavalt punktid D ja E , nii et $|BD| = |AE|$. Kolmnurkade ADC ja BEC ümberringjoonte keskpunkte läbiv sirge lõikab sirgeid AC ja BC vastavalt punktides K ja L . Tõesta, et $|KC| = |LC|$.
12. Olgu $ABCD$ kumer nelinurk, kus $|BC| = |AD|$. Olgu M ja N vastavalt külgede AB ja CD keskpunktid. Sirged AD ja BC lõikavad sirget MN vastavalt punktides P ja Q . Tõesta, et $|CQ| = |DP|$.
13. Kui palju on vähemalt vaja ringe raadiusega $\sqrt{2}$, et katta ristkülik mõõtmetega
 - (a) 6×3 ;
 - (b) 5×3 ?
14. Kolmnurga ABC mediaanid lõikuvad punktis M . Olgu D ja E sellised erinevad punktid sirgel BC , et $|DC| = |CE| = |AB|$ ning olgu punktid P ja Q valitud vastavalt lõikudel BD ja BE selliselt, et $2 \cdot |BP| = |PD|$ ja $2 \cdot |BQ| = |QE|$. Leia nurga PMQ suurus.
15. Sirged e ja f ristuvad punktis H . Punktid A ja B asuvad sirgel e ning punktid C ja D asuvad sirgel f , kusjuures punktid A , B , C , D ja H on paarikaupa erinevad. Sirged b ja d läbivad vastavalt punkte B ja D ning on risti sirgega AC . Sirged a ja c läbivad vastavalt punkte A ja C ning on risti sirgega BD . Sirgete a ja b lõikepunkt on X ning sirgete c ja d lõikepunkt on Y . Tõesta, et sirge XY läbib punkti H .
16. Olgu p algarv ja n positiivne täisarv. Olgu q arvu $(n+1)^p - n^p$ mingi positiivne jagaja. Tõesta, et $q-1$ jagub arvuga p .
17. Jada $\{x_n\}_{n \geq 0}$ on antud seostega $x_0 = a$, $x_1 = 2$ ja $x_n = 2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ iga $n > 1$ korral. Leia kõik sellised täisarvud a , et $2x_{3n} - 1$ on täisruut iga $n \geq 1$ korral.
18. Olgu x ja y sellised positiivsed täisarvud, et $z = 4xy/(x+y)$ on paaritu täisarv. Tõesta, et vähemalt üks arvu z jagaja esitub kujul $4n-1$, kus n on positiivne täisarv.
19. Kas leidub 2005 paarikaupa erinevat positiivset täisruutu, mille summa on samuti täisruut?
20. Leia kõik positiivsed täisarvud $n = p_1 p_2 \dots p_k$, mis jagavad arvu $(p_1+1)(p_2+1) \dots (p_k+1)$, kus $p_1 p_2 \dots p_k$ on arvu n esitus (mitte tingimata erinevate) algarvude korrutisena.