16de Baltic Way Wiskunde Teamcompetitie

5 november 2005, Stockholm, Zweden

Toegelaten tijd: 4 uur 30 minuten
Vragen mogen worden gesteld tijdens de eerste 30 minuten

1. Stel a_0 is een strikt positief geheel getal. Definieer de rij $\{a_n\}_{n\geq 0}$ als volgt: als

$$a_n = \sum_{i=0}^{j} c_i 10^i$$

waarbij c_i gehele getallen zijn met $0 \leq c_i \leq 9$, dan is

$$a_{n+1} = c_0^{2005} + c_1^{2005} + \cdots + c_j^{2005}.$$

Is het mogelijk een a_0 te kiezen zodat alle termen van deze rij verschillend zijn?

2. Laat α, β en γ drie hoeken zijn waarvoor $0 \leq \alpha, \beta, \gamma < 90°$ en $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 1$. Bewijs dat

$$\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma \geq \frac{3}{8}.$$

3. Beschouw de rij $\{a_k\}_{k\geq 1}$ gedefinieerd door $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$,

$$a_{k+2} = a_k + \frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{4a_k a_{k+1}} \qquad \text{als } k \geq 1.$$

Bewijs dat

$$\frac{1}{a_1a_3} + \frac{1}{a_2a_4} + \frac{1}{a_3a_5} + \cdots + \frac{1}{a_{98}a_{100}} < 4.$$

4. Bepaal drie verschillende veeltermen $P(x)$ met reële coëfficiënten zodat $P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$ voor alle reële getallen x.

5. Stel a, b, c zijn positieve reële getallen waarvoor $abc = 1$. Bewijs dat

$$\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq 1.$$

6. Stel K en N zijn positieve gehele getallen waarbij $1 \leq K \leq N$. Een stapel van N verschillende speelkaarten wordt geschud door volgende bewerking een aantal keer uit te voeren: de volgorde van de bovenste K kaarten omkeren en deze onderaan de stapel plaatsen. Bewijs dat na niet meer dan $4 \cdot N^2/K^2$ bewerkingen de speelkaarten zich opnieuw in hun oorspronkelijke volgorde zullen bevinden.

7. Een rechthoekig rooster heeft n rijen en 6 kolommen, met $n > 2$. Elke cel bevat 0 of 1. Alle rijen in het rooster zijn verschillend van elkaar. Voor elk paar rijen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ en $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ kan in het rooster ook de rij $(x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, x_5y_5, x_6y_6)$ gevonden worden. Bewijs dat er een kolom kan gevonden worden die minstens voor de helft uit nullen bestaat.

8. Beschouw een rooster bestaande uit 25×25 eenheidsvierkanten. Teken met een rode pen vierkanten met willekeurige grootte op de roosterlijnen. Wat is het minimum aantal vierkanten dat we moeten tekenen om alle roosterlijnen te kleuren?

9. Een rechthoek wordt verdeeld in 200×3 eenheidsvierkanten. Bewijs dat het aantal manieren om deze rechthoek te verdelen in rechthoeken met afmeting 1×2 deelbaar is door 3.

10. Stel $m = 30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ en stel M de verzameling van de positieve delers van m met precies 2 priemfactoren. Bepaal het kleinste natuurlijk getal n dat voldoet aan volgende eigenschap: onder elke n getallen uit M, zijn er 3 getallen a, b, c waarvoor $a \cdot b \cdot c = m$.

11. De punten D en E liggen respectievelijk op de zijden BC en AC van de driehoek ABC zodat $BD = AE$. De rechte door de middelpunten van de omgeschreven cirkels van de driehoeken ADC en BEC snijdt de rechten AC en BC in respectievelijk K en L. Bewijs dat $KC = LC$.

12. Stel $ABCD$ is een convexe vierhoek zodat $BC = AD$. Stel M en N zijn respectievelijk de middens van AB en CD. De rechten AD en BC snijden MN respectievelijk in P en Q. Bewijs dat $CQ = DP$.

13. Wat is het kleinste aantal cirkels met straal $\sqrt{2}$ die nodig zijn om een rechthoek te overdekken

    (a) met afmetingen 6×3?

    (b) met afmetingen 5×3?

14. Stel M is het snijpunt van de zwaartelijnen van de driehoek ABC. Stel D en E zijn verschillende punten op de rechte BC zodat $DC = CE = AB$ en stel P en Q punten op de lijnstukken BD en BE respectievelijk, zodat $2BP = PD$ en $2BQ = QE$. Bepaal $\angle PMQ$.

15. De rechten e en f snijden elkaar loodrecht in het punt H. Stel A en B liggen op e en C en D liggen op f, zodat de vijf punten A, B, C, D en H verschillend zijn. De rechten b en d gaan respectievelijk door B en D en staan loodrecht op AC; de rechten a en c gaan respectievelijk door A en C en staan loodrecht op BD. Stel X is het snijpunt van a en b en Y is het snijpunt van c en d. Bewijs dat H op XY ligt.

16. Stel p is een priemgetal en n is een strikt positief geheel getal. Stel q is een positieve deler van $(n+1)^p - n^p$. Bewijs dat p een deler is van $q - 1$.

17. Een rij $\{x_n\}_{n \geq 0}$ wordt als volgt gedefinieerd: $x_0 = a$, $x_1 = 2$ en $x_n = 2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ als $n > 1$. Bepaal alle gehele getallen a zodat $2x_{3n} - 1$ een volkomen kwadraat is voor elke $n \geq 1$.

18. Stel x en y zijn strikt positieve gehele getallen en veronderstel dat $z = 4xy/(x+y)$ een oneven geheel getal is. Bewijs dat minstens één deler van z kan geschreven worden in de vorm $4n - 1$ waarbij n een strikt positief geheel getal is.

19. Is het mogelijk om 2005 verschillende strikt positieve kwadraten te vinden zodat hun som ook een kwadraat is?

20. Bepaal alle strikt positieve gehele getallen $n = p_1p_2 \cdots p_k$ die een deler zijn van $(p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_k+1)$, waarbij $p_1p_2\cdots p_k$ de ontbinding in (niet noodzakelijk verschillende) priemfactoren van n is.