Danish version

16^{th} Baltic Way Mathematical Team Contest

5. november 2005, Stockholm, Sverige

Varighed: 4 timer og 30 minutter
Spørgsmål til opgavesættet besvares inden for de første 30 minutter.

1. Lad a_0 være et naturligt tal. Definer følgen $\{a_n\}_{n\geq 0}$ således: Hvis
$$a_n = \sum_{i=0}^{j} c_i 10^i,$$
hvor c_i er heltal med $0 \leq c_i \leq 9$, da er
$$a_{n+1} = c_0^{2005} + c_1^{2005} + \cdots + c_j^{2005}.$$
Er det muligt at vælge a_0, så alle led i følgen er forskellige?

2. Lad α, β og γ være tre vinkler med $0 \leq \alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$, og $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 1$. Vis, at
$$\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma \geq \frac{3}{8}.$$

3. Betragt følgen $\{a_k\}_{k\geq 1}$ defineret ved $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$,
$$a_{k+2} = a_k + \frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{4a_k a_{k+1}} \quad \text{for } k \geq 1.$$
Vis, at
$$\frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \frac{1}{a_3 a_5} + \cdots + \frac{1}{a_{98} a_{100}} < 4.$$

4. Find tre forskellige polynomier $P(x)$ med reelle koefficienter, så $P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$ for alle reelle x.

5. Lad a, b, c være positive reelle tal med $abc = 1$. Vis, at
$$\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq 1.$$

6. Lad K og N være naturlige tal med $1 \leq K \leq N$. En stak med N forskellige spillekort blandes ved gentagne gange at tage de K øverste kort og placere disse i bunden af stakken i omvendt rækkefølge. Vis, at kortene i stakken vil ligge i deres oprindelige rækkefølge efter højst $4 \cdot N^2/K^2$ gentagelser.

7. Et rektangulært skema har n rækker og 6 søjler, hvor $n > 2$. I hver celle står der enten 0 eller 1, og rækkerne er forskellige. For hvert par af rækker $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ og $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ findes rækken $(x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, x_5y_5, x_6y_6)$ også i skemaet. Vis, at der findes en søjle, hvor der står 0 i mindst halvdelen af cellerne.

8. Et kvadrat er inddelt i 25×25 enhedskvadrater. Med en rød pen tegnes kvadrater af vilkårlig størrelse langs siderne af enhedskvadraterne. Hvad er det mindste antal kvadrater, man skal tegne, hvis alle siderne af enhedskvadraterne skal være røde?

9. Et rektangel er inddelt i 200×3 enhedskvadrater. Vis, at antallet af måder, hvorpå dette rektangel kan inddeles i 1×2-rektangler, er deleligt med 3.

10. Lad $m = 30030 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$, og lad M være mængden af positive divisorer med præcis to primfaktorer. Bestem det mindste heltal n med følgende egenskab: Enhver delmængde af M med n elementer indeholder tre elementer a, b og c, som opfylder $a \cdot b \cdot c = m$.

11. Punkterne D og E ligger henholdsvis på siden BC og på siden AC i trekant ABC, således at $|BD| = |AE|$. Linjen, der forbinder centrene for de omskrevne cirkler for trekant ADC og trekant BEC, skærer linjerne AC og BC i henholdsvis K og L. Vis, at $|KC| = |LC|$.

12. Lad $ABCD$ være en konveks firkant med $|BC| = |AD|$. Lad M og N være midtpunkterne af henholdsvis AB og CD. Linjerne AD og BC skærer linjen MN i henholdsvis P og Q. Vis, at $|CQ| = |DP|$.

13. Hvad er det mindste antal cirkler med radius $\sqrt{2}$, man skal bruge for at dække et

    (a) 6×3-rektangel?

    (b) 5×3-rektangel?

14. Lad M være medianernes skæringspunkt i trekant ABC, og lad D og E være forskellige punkter på linjen BC med $|DC| = |CE| = |AB|$. Lad P og Q være punkter på henholdsvis linjestykket BD og linjestykket BE, så $2|BP| = |PD|$ og $2|BQ| = |QE|$. Bestem $\angle PMQ$.

15. Linjerne e og f er ortogonale og skærer hinanden i H. Lad A og B ligge på e, og lad C og D ligge på f, så de fem punkter A, B, C, D og H er forskellige. Lad linjerne b og d gå gennem henholdsvis B og D og være normaler til AC; lad linjerne a og c gå gennem henholdsvis A og C og være normaler til BD. Linjerne a og b skærer hinanden i X, og linjerne c og d skærer hinanden i Y. Vis, at H ligger på linjen XY.

16. Lad p være et primtal, og lad n være et naturligt tal. Lad q være en positiv divisor i $(n+1)^p - n^p$. Vis, at p går op i $q-1$.

17. Følgen $\{x_n\}_{n\geq 0}$ er defineret ved: $x_0 = a$, $x_1 = 2$ og $x_n = 2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ for $n > 1$. Find alle heltal a, så $2x_{3n} - 1$ er et kvadrattal for alle $n \geq 1$.

18. Lad x og y være naturlige tal, og antag, at $z = 4xy/(x+y)$ er ulige. Vis, at mindst en divisor i z kan skrives på formen $4n-1$, hvor n er et naturligt tal.

19. Er det muligt at finde 2005 forskellige positive kvadrattal, hvis sum er et kvadrattal?

20. Find alle naturlige tal $n = p_1p_2\cdots p_k$, som går op i $(p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_k+1)$, hvor $p_1p_2\cdots p_k$ er n's primfaktoropløsning (p_i'erne ikke nødvendigvis forskellige).