Stirlings formel

Torbjörn Tambour 2003

Stirlings[1] formel är en uppskattning av $n!$ och det finns flera mer eller mindre noggranna versioner av den. Vi skall visa följande:

$$n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n} e^{c_n/4n}, \quad \text{där } 0 \leq c_n \leq 1 \text{ för alla } n.$$

Man kan förbättra uppskattningen på felet c_n, men vi nöjer oss med den här versionen som inte är alltför svår att bevisa. Vi behöver dock en del förberedelser.

Integraluppskattningar av summor

Ibland kan man uppskatta summor med hjälp av integraler, som ofta är enklare att räkna ut. Låt $f(x)$ vara en växande funktion definierad på ett intervall $[m, n]$, där m och n är heltal. Om vi integrerar olikheten

$$f(k) \leq f(x) \quad \text{för } k \leq x,$$

från $x = k$ till $x = k + 1$ så får vi förstås

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(k)\, dx \leq \int_k^{k+1} f(x)\, dx.$$

Summerar vi detta från $k = m$ till $k = n - 1$ så får vi

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k) \leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\, dx = \int_m^n f(x)\, dx.$$

Om vi gör precis detsamma med olikheterna

$$f(x) \leq f(k) \quad \text{för } x \leq k,$$

så får vi istället

$$\int_m^n f(x)\, dx \leq \sum_{k=m+1}^{n} f(k).$$

[1] James Stirling, skotsk matematiker, 1692-1770.

Olikheterna kan sammanfattas i en olikhet:

$$f(m) + \int_m^n f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^n f(k) \le f(n) + \int_m^n f(x)\,dx.$$

Om f är avtagande gäller olikheterna

$$f(n) + \int_m^n f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^n f(k) \le f(m) + \int_m^n f(x)\,dx.$$

Vi skall titta på två exempel, ett som har med Stirlings formel att göra och ett annat som också är intressant.

Exempel: Låt först $f(x) = \log x$. Uppskattningarna för en växande funktion ovan ger

$$\int_1^n \log x\,dx \le \sum_{k=1}^n \log k \le \int_1^n \log x\,dx + \log n$$

eller

$$n \log n - n \le \log n! \le (n+1)\log n - n \tag{1}$$

och alltså

$$n^n e^{-n} \le n! \le n^{n+1} e^{-n}.$$

De här olikheterna är en första version av Stirlings formel, men det går som sagt att förbättra den ganska avsevärt. När man skall lösa problem med fakulteter räcker emellertid ofta den här versionen.

Exempel: Nu tar vi istället en avtagande funktion, nämligen $f(x) = 1/x$, och får

$$\frac{1}{n} + \int_1^n \frac{dx}{x} \le \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \le 1 + \int_1^n \frac{dx}{x}$$

dvs

$$\frac{1}{n} + \log n \le \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \le 1 + \log n.$$

Vi har tydligen

$$\frac{1}{n} \le \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \le 1,$$

så för stora n är $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \log n$ med ganska god noggrannhet. Eftersom $\log n \to \infty$ då $n \to \infty$, så ger den vänstra olikheten att $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$ då $n \to \infty$, dvs den harmoniska serien divergerar.

Sätt nu

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n.$$

Enligt vad vi just visat är följden γ_n nedåt begränsad. Vi har vidare

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - (\log(n+1) - \log n)\,.$$

Enligt medelvärdessatsen finns ett θ mellan 0 och 1 sådant att

$$\log(n+1) - \log n = \frac{1}{n+\theta}(n+1-n) = \frac{1}{n+\theta},$$

(ty $D \log x = 1/x$) varför

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+\theta} < 0$$

och följden γ_n är tydligen avtagande. Det följer att $\lim_{n\to\infty} \gamma_n$ existerar. Gränsvärdet brukar betecknas γ och heter *Eulers konstant*. Den är en av matematikens "naturkonstanter", även om den inte är lika känd som e och π. Man har $\gamma \approx 0,577$, men det är okänt om γ är rationellt eller irrationellt (och således än mindre om γ är algebraiskt eller transcendent). Alla matematiker skulle dock bli synnerligen överraskade om det visade sig att γ vore rationellt!

Anmärkning: Den harmoniska serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är alltså divergent, men motsvarande alternerande serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

är konvergent. Man kan till och med beräkna dess summa, så här:

$$\begin{aligned}
s_n &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Om vi använder samma beteckningar som nyss så betyder detta

$$s_n = \gamma_{2n} + \log 2n - \gamma_n - \log n = \gamma_{2n} - \gamma_n + \log 2 \to \gamma - \gamma + \log 2 = \log 2$$

då $n \to \infty$. Alltså är

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2.$$

Vi har här ett exempel på en betingat konvergent serie (och sådana skall man vara utomordentligt försiktig med!).

Wallis produkt

I det här avsnittet skall vi härleda den s k Wallis[2] produkt, som är en formel för π. Vad det har med Stirlings formel att göra kommer att uppenbaras nedan. Sätt

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx.$$

Om $n \geq 2$ så ger partialintegration

$$\begin{aligned}
I_n &= \left[-\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} x \, dx \\
&= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x \, dx \\
&= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n
\end{aligned}$$

[2] John Wallis, engelsk matematiker, 1616-1703.

varför

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \tag{2}$$

Vi har

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{och} \quad I_1 = 1,$$

så upprepning av (2) ger

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 1}{(2n)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

och

$$I_{2n+1} = \frac{2n\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 1}.$$

Man brukar använda beteckningarna

$$(2n)!! = (2n)(2n-2)\ldots 2 \quad \text{och} \quad (2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)\ldots 1$$

(som utläses $2n$- resp. $2n+1$-semifakultet) och då blir alltså

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, \quad I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Eftersom $0 \leq \sin x \leq 1$ på intervallet $[0, \pi/2]$, så har vi

$$\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$$

vilket ger $I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$ eller

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

En liten omskrivning ger

$$1 \leq \frac{(2n+1)!!(2n-1)!!}{((2n)!!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} \leq \frac{2n+1}{2n},$$

varför

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)!!(2n-1)!!}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right).\end{aligned}$$

Detta kallas *Wallis produkt*. Tyvärr går högerledet mycket långsamt mot $\pi/2$, så den är inte lämplig för numerisk beräkning av π. Men man får njuta av formelns skönhet istället och det är ju inte det sämsta!

Stirlings formel

Vi kan nu ge oss i kast med förbättra den första versionen (1) av Stirlings formel. Låt a_n vara skillnaden mellan $\log n!$ och medelvärdet av ytterleden, dvs

$$a_n = \log n! - \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n + n. \tag{3}$$

Vi har

$$a_n - a_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$$

och det här uttrycket skall vi uppskatta med hjälp av en annan integralapproximation. Betrakta kurvan $y = f(x) = 1/x$ för $x > 0$. Eftersom $f''(x) = 2/x^3$ så är kurvan konvex för $x > 0$, dvs tangenten i en punkt ligger under kurvan. Tangenten i $x = n + 1/2$ begränsar tillsammans med x-axeln och de lodräta linjerna $x = n$ och $x = n + 1$ ett parallelltrapets som helt och hållet ligger under kurvan. Arean av trapetset är

$$(n + 1 - n) \cdot f(n + 1/2) = \frac{1}{n + 1/2}.$$

Linjen genom punkterna $(n, 1/n)$ och $(n+1, 1/(n+1))$ begränsar tillsammans med x-axeln och linjerna $x = n$ och $x = n + 1$ också ett parallelltrapets som helt omsluter kurvan. Arean av det här trapetset är

$$(n + 1 - n) \cdot \frac{1}{2} \left(f(n) + f(n + 1)\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n + 1}\right).$$

Arean under kurvan är

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = [\log x]_n^{n+1} = \log \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Alltså har vi

$$\frac{1}{n + 1/2} < \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n + 1}\right)$$

och multiplikation med $n + 1/2$ samt en liten omskrivning ger

$$0 < a_n - a_{n+1} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Om vi ersätter n med $n+1, n+2, \ldots, n+p-1$ och adderar olikheterna så får vi

$$0 < a_n - a_{n+p} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right).$$

Cauchys konvergensprincip (se nedan) ger att $\lim_{n\to\infty} a_n$ existerar; vi betecknar det med a. Om vi bara låter $p \to \infty$ så får vi

$$0 < a_n - a < \frac{1}{4n},$$

så vi kan skriva

$$a_n = a + \frac{c_n}{4n}, \quad \text{där } 0 \leq c_n \leq 1 \text{ för alla } n.$$

Enligt definitionen (3) av a_n betyder detta att

$$\log n! = a + \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{c_n}{4n},$$

vilket ger

$$n! = e^a n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{c_n}{4n}}. \tag{4}$$

Det som återstår är förstås att bestämma värdet av konstanten e^a och det är här som Wallis produkt kommer in. Vi har

$$(2n)!! = 2n \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = 2^n n!$$

och sätter vi in (4) så får vi

$$(2n)!! = e^a 2^n n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{c_n}{4n}}.$$

Efter lite hyfsningsarbete får vi vidare

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{(2n)!!} = 2^{n+\frac{1}{2}} n^n e^{-n} e^{\frac{c_{2n}}{8n} - \frac{c_n}{4n}}$$

och fortsatt handarbete ger

$$\frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)!!(2n-1)!!} = \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)((2n-1)!!)^2} = \frac{1}{2}e^{2a}\frac{n}{n+1}e^{\frac{c_n}{n}-\frac{c_{2n}}{8n}}.$$

Enligt Wallis produkt går vänsterledet mot $\pi/2$ då $n \to \infty$. I högerledet ligger c_n och c_{2n} mellan 0 och 1, så det går mot $e^{2a}/4$. Alltså är

$$\frac{1}{4}e^{2a} = \frac{\pi}{2} \quad \text{dvs} \quad e^a = \sqrt{2\pi}$$

och vi har visat *Stirlings formel*

$$n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{n}}e^{-n}e^{\frac{c_n}{4n}} \quad \text{där } 0 \le c_n \le 1 \text{ för alla } n.$$

Övning

Undersök om följande serier konvergerar eller divergerar:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!e^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^n}{n!e^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Appendix: Konvergens av talföljder och Cauchys konvergensprincip

En fundamental egenskap hos $\mathbf{R}$ är

Supremumegenskapen: *En uppåt begränsad mängd av reella tal har en minsta majorant.*

Den minsta majoranten till $M \subseteq \mathbf{R}$ kallas *supremum* av M och betecknas $\sup M$. Om M inte är uppåt begränsad så är det bekvämt att sätta $\sup M = \infty$. Infimum av M, $\inf M$, är på samma sätt den största minoranten.

Sats 1 *En monoton begränsad talföljd är konvergent.*

Bevis: Antag att följden a_n är växande. Sätt $A = \sup a_n$. För varje $\epsilon > 0$ finns enligt definitionen av supremum som den minsta majoranten ett element a_N i följden sådant att

$$A - \epsilon < a_N \le A.$$

Men eftersom följden är växande har vi ju då

$$n > N \Rightarrow A - \epsilon < a_N \le a_n \le A.$$

Detta ger förstås

$$n > N \Rightarrow |a_n - A| < \epsilon, \quad \text{dvs} \lim a_n = A.$$

En monoton följd som inte är begränsad säges ofta ha (det oegentliga) gränsvärdet $\pm\infty$. Låt nu $a_n, n = 1, 2, 3, \ldots$, vara en begränsad talföljd. Vi definierar två nya följder a_n' och a_n'' genom

$$\begin{aligned} a_n' &= \sup\{a_k; k \geq n\} \\ a_n'' &= \inf\{a_k; k \geq n\}. \end{aligned}$$

En enkel med viktig observation är att om $N \subseteq M$, så är $\sup N \leq \sup M$, varav följer att *följden a_n' är avtagande* och på samma sätt inser man att *a_n'' är växande*. Alltså har följderna a_n' och a_n'' gränsvärden och man sätter

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n', \ \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n''.$$

Dessa kallas *limes superior* resp *limes inferior* av a_n. Limes superior och limes inferior har samma egenskaper som det vanliga limes, t ex gäller

$$\limsup(a_n + b_n) = \limsup a_n + \limsup b_n$$

och om $a \leq a_n \leq b$, så gäller $a \leq \limsup a_n \leq b$. Lägg också märke till att $\liminf a_n \leq \limsup a_n$. En fundamental konvergenssats är

Sats 2 *Följden a_n är konvergent om och endast om*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

I så fall gäller

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Bevis: "Om": Vi har $a_n'' \leq a_n \leq a_n'$. Eftersom ytterledens gränsvärden existerar och är lika, så ger sandwichprincipen (instängningsregeln) att även $\lim a_n$ existerar och att det är lika med ytterledens gränsvärden.

"Endast om": Sätt $A = \lim a_n$. Tag $\epsilon > 0$. Det finns ett tal N sådant att

$$n \leq N \Rightarrow |a_n - A| < \epsilon, \quad \text{dvs} \quad A - \epsilon < a_n < A + \epsilon,$$

vilket ger

$$A - \epsilon < \limsup a_n \leq A + \epsilon.$$

Detta gäller för varje $\epsilon > 0$, vilket är möjligt bara då $\limsup a_n = A$. Beviset för att $\liminf a_n = A$ är helt analogt.

En talföljd a_n säges vara *Cauchy-konvergent* om det för varje $\epsilon > 0$ finns ett tal N sådant att

$$n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Man kan också uttrycka det så här:

$$|a_n - a_m| \to 0 \quad \text{då } n, m \to \infty \text{ oberoende av varandra.}$$

En Cauchykonvergent följd är begränsad, för tag $\epsilon = 1$ (t ex). Då finns N sådant att

$$n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < 1.$$

Men då är ju

$$|a_n| = |(a_n - a_N) + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| \leq 1 + |a_N|.$$

Det är vidare klart att en konvergent följd är Cauchykonvergent, för om gränsvärdet är A, så har vi ju

$$a_n - a_m \to A - A = 0 \quad \text{då } n, m \to \infty.$$

Det intressanta och viktiga är att omvändningen också är sann, trots att Cauchykonvergens förefaller vara ett svagare villkor än konvergens:

Sats 3 (Cauchys konvergensprincip) *En Cauchykonvergent talföljd är konvergent.*

Bevis: Tag $\epsilon > 0$. Då finns ett tal N sådant att

$$n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Alltså gäller att

$$n \geq N \Rightarrow a_N - \epsilon < a_n < a_N + \epsilon$$

(tag nämligen $m = N$). Alltså är

$$a_N - \epsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq a_N + \epsilon$$

vilket ger

$$0 \leq \limsup a_n - \liminf a_n \leq 2\epsilon \quad \text{för alla } \epsilon,$$

vilket är möjligt bara då $\liminf a_n = \limsup a_n$. Enligt Sats 3 är följden konvergent.

Det fina med Cauchys konvergensprincip är att man kan använda den för att visa konvergens utan att veta vad gränsvärdet är. Här har vi låtit konvergensprincipen vara en konsekvens av supremumegenskapen, men man kan se på relationen mellan dessa på andra sätt också; vilket man väljer beror på hur man har konstruerat de reella talen. Det finns nämligen olika sätt att göra det, och ett är sådant att Sats 3 är inbyggd i själva konstruktionen. En talföljd som uppfyller villkoret i Cauchys konvergensprincip kallas ofta en *Cauchyföljd*.