

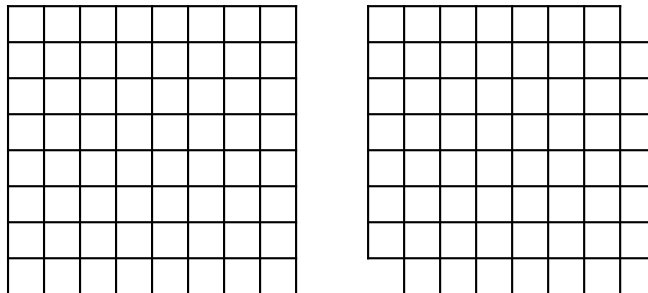
Två spelproblem

TORBJÖRN TAMBOUR 2001

Spel kan fylla många olika funktioner. I matematiken kan man använda spel för att underhålla, roa och stimulera intresset för ämnet, men ibland kan spel även vara början på en matematisk teori. Vi skall titta på två spelproblem som jag tycker är trevliga.

Ett schackbrädesproblem

Tänk er ett vanligt schackbräde med 8×8 rutor. Det är klart att man kan täcka över det med 32 stycken dominobrickor (en dominobricka täcker två rutor på brädet). Om man tar bort en ruta från brädet så får man ett stympat bräde med 63 rutor. Det kan man naturligtvis inte täcka över med dominobrickor, eftersom antalet rutor är udda och en dominobricka täcker två rutor (brickorna får inte täcka varandra). Men hur är det om man tar bort *två* diagonala hörnrutor (A1 och H8 i schackterminologi) från brädet? Kan man täcka över det brädet? Tja, det stympade brädet har 62 rutor, så man kan inte använda samma argument som för 63 rutor. Kanske går det att täcka det med 31 dominobrickor? Prova och fundera innan ni läser vidare!

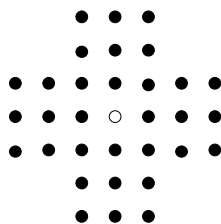


Efter lite experimenterande börjar man kanske misstänka att det inte går, men hur skall man bevisa det? Jo, de två borttagna rutorna har samma färg, säg vit, så det stympade brädet har 30 vita och 32 svarta rutor. En dominobricka täcker en vit och en svart ruta, hur man än lägger den. *Ett bräde som går att täcka med dominobrickor måste därför ha lika många vita som svarta rutor.* Vårt stympade bräde kan således inte täckas.

Ett solitärt problem

Spelet Solitär är gammalt och som namnet antyder spelas det av en person. På tyska heter det Nonnenspiel, vilket visar att det en gång i tiden var populärt i klostren. Den tyske filosofen, matematikern, diplomaten mm Gottfried Wilhelm

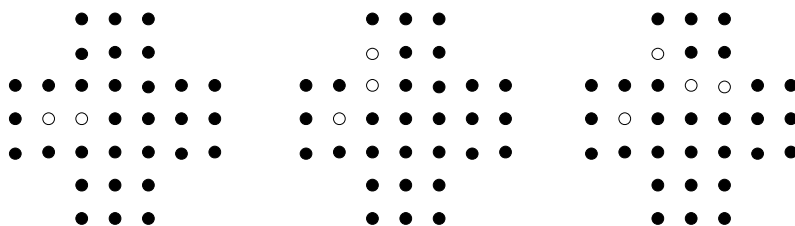
von Leibniz (1646-1716) försökte hitta på en hel teori för spelet, men den skall vi inte redogöra för här. Vi skall istället koncentrera oss på själva slutställningen i spelet. Vi börjar med att repetera reglerna. Spelplanen ser ut som i figuren nedan (fast ringarna är hål) och när man börjar ligger det en kula i varje hål utom det i mitten (de svarta cirklarna är alltså kulor).



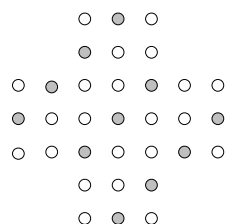
Spelet går ut på att man skall plocka bort kulor successivt. För att göra detta flyttar man kulor enligt en viss regel: Man får flytta en kula till ett tomt hål, men då måste man hoppa över precis en kula och den tar man då bort. Draget är illustrerat nedan.



Man får flytta kulor vågrätt och lodrätt, inte diagonalt. Målet är att man till slut bara skall ha en enda kula kvar. Det är mycket svårt att nå dit och man måste vara ordentligt skärpt för att det skall gå. Efter ett två, respektive tre drag kan spelet se ut så här:

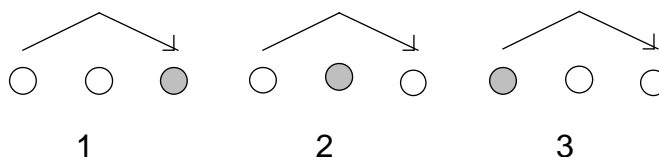


Det problem vi skall fundera över är följande: Om man nu är så skicklig att man bara får en kula kvar, var kan den hamna? I vilket hål som helst eller bara i vissa? Vi skall bevisa att den sista kula måste hamna antingen i centrumhålet eller i mitten längst ut i någon av "armarna". Börja med att färga en del av hålen som i bilden nedan.



Om en kula ligger i ett färgat hål, så säger vi att kulan själv är färgad. De andra kulorna kallar vi vita. Från början har vi 10 färgade och 22 vita kulor. Det finns tre typer av drag (illustrerade nedan):

1. En vit kula hoppar över en vit kula och hamnar i ett färgat hål
2. En vit kula hoppar över en färgad kula och hamnar i ett vitt hål
3. En färgad kula hoppar över en vit kula och hamnar i ett vitt hål.

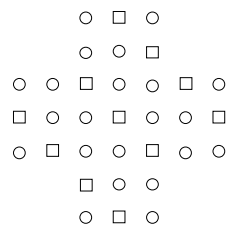


(Lägg märke till att en färgad kula inte kan hamna i ett färgat hål efter ett drag eftersom det är två vita hål mellan de färgade.) Hur ändras antalet färgade respektive vita kulor vid de olika dragen? Jo, vi får följande, där F betyder antalet färgade och V antalet vita kulor:

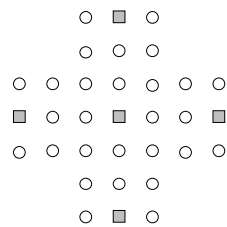
1. F ökar med 1 och V minskar med 2 (ty en vit kula hamnar i ett färgat hål och den vita kulan i mitten tas bort).
2. F minskar med 1 och V är oförändrat (ty den färgade kulan i mitten tas bort och en vit kula hamnar i ett vitt hål).
3. F minskar med 1 och V är oförändrat (ty den färgade kulan hamnar i ett vitt hål och samtidigt tas en vit kula bort).

Vi ser att antalet vita kulor antingen minskar med 2 eller är oförändrat. Eftersom antalet vita kulor från början var *jämmt* (22 stycken), så följer det att *antalet vita kulor alltid är jämnt*. Säg nu att vi har spelat så skickligt att det bara finns en enda kula kvar på planen. Antalet vita kulor är fortfarande jämnt, så den sista kulan kan inte vara vit (då hade ju antalet vita kulor varit 1, vilket är ett udda tal). *Den sista kulan måste tydligen vara färgad.*

Nu skall vi upprepa hela detta resonemang, fast den här gången gör vi vissa hål fyrkantiga istället:



I det här fallet finner vi att den sista kulan måste hamna i något av de fyrkantiga hålen. Men nu har vi bevisat att den sista kulan måste ligga i ett hål som är både färgat *och* fyrkantigt. Det finns fem sådana hål, nämligen det i mitten och mittenhålen längst ut i armarna. Voilà, färdig!



Det fantastiska i resonemanget är förstås att vi inte behöver knäcka spelet för att bevisa påståendet. Ibland säger man att ett jämnt/udda tal har jämn/udda *paritet*. Talet 22 har alltså jämn paritet och 35 har udda paritet. I beviset ovan fann vi att pariteten hos antalet vita kulor inte ändras under spelets gång (antalet är ju alltid jämnt). En sådan egenskap eller storhet som inte ändras kallas en *invariant*. Många matematiska problem har lösts genom att man hittat sådana invarianter.