

# Matematiken som redskap i naturvetenskaperna:

## Något om världsbildens utveckling

TORBJÖRN TAMBOUR

Rubriken på den här stencilen är ambitiös i överkant och vi kan naturligtvis inte täcka ens en bråkdel av vad som står där, utan skall bara nosa något litet på hur matematiken har använts när världsbilden har utvecklats. Det här är för övrigt ett stort område som innefattar både matematik, fysik och astronomi, men också historia, idéhistoria, arkeologi och antropologi. Vi skall diskutera främst hur föreställningarna om solsystemets uppbyggnad har varierat och utvecklats och börjar med en historisk översikt. Sist skall vi se hur man har försökt mäta avstånden i solsystemet.

**Inledning. Den antika världsbilden.**

Astronomin brukar kallas den äldsta vetenskapen. Redan för någon miljon år sedan måste *homo erectus*, den upprättgående människan, ha sett stjärnhimlen och skrämts och fascinerats av den. Genom tiderna har den befolkats av gudar och monster, styrt människors öden, använts som hjälp vid navigation och inspirerat såväl vetenskap och forskning som konst och kultur. Diskutera gärna själva med varandra om och varför det överhuvudtaget skall finnas forskning i astronomi. Finns det någon praktisk nytta eller skall man hålla på med det av andra skäl?

Om man bara tittar på hur världen lokalt ser ut så är det lätt att få uppfattningen att jorden är en platt skiva över vilken himlen välvs. Eftersom man inte märker någon rörelse, så måste jorden själv vara stillastående, medan himlen och det som finns på den rör sig på olika sätt. Själva himmelssfären tycks vrida sig ett varv på ett dygn och den förändras också med årstiderna. Solen och månen rör sig över himlen, liksom några av de "mindre ljusen". Dessa mindre rörliga ljus kallade grekerna för *planeter*, vandrande stjärnor. Till detta kommer mer sällsynta fenomen, som kometer och förmörkelser. De planeter som var kända under antiken var Merkurius, Venus, Mars, Jupiter och Saturnus. Om man lägger till solen och månen så får man sju himlakroppar, vilket är mycket tillfredsställande eftersom sju är ett heligt och mystiskt tal.

Övning 1: Diskutera med varandra om det finns några skäl att anta att jorden istället är ett klot.

Övning 2: Jorden rör sig i en praktiskt taget cirkelformad bana med radie 150 miljoner km kring solen. Hur hög hastighet rör den sig med? Förvånad?

I det tidiga Egypten föreställde man sig jorden som en platt skiva som delades på

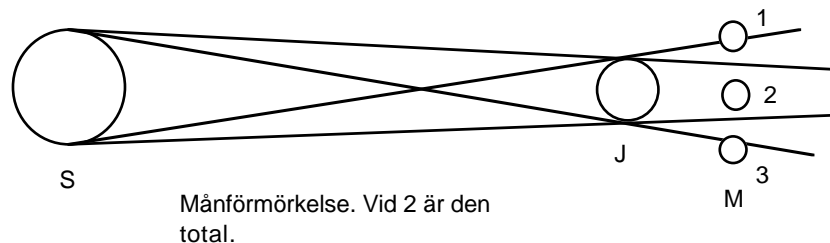
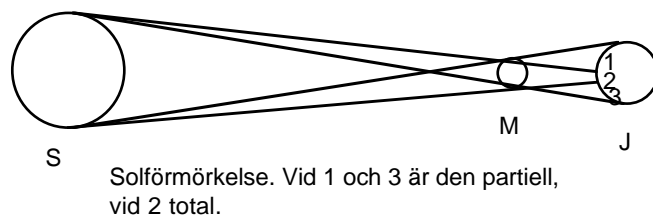
mitten av Nilen. I kanterna fanns höga berg och utanför dessa en enorm ocean, som associerades med den första av gudarna, Nun. Himlen vilade på fyra pelare eller höga berg. Dess blå färg tydde på att den egentligen var en stor ocean över vilken solen färdades i båt på dagen. Kanske lyste solen på natten över en annan värld, belägen långt under vår egen. Egyptierna hade ett stort behov av noggranna kalendrar för att kunna förutsäga Nilens årliga översvämning. När snön i de Etiopiska bergen började smälta och regnen fyllde på flodens källor gick en stor flodvåg genom Nildalen, som nådde den gamla huvudstaden Memfis i slutet av juni. Om man inte var förberedd, så kunde den orsaka stor skada, men istället lärde man sig att utnyttja det näringsrika slam som den förde med sig. Nildalen blev på det sättet ett av jordens bördigaste områden, trots sitt läge i nordöstra Sahara. De egyptiska prästerna och vetenskapsmännen använde en av himlens ljusstarkaste stjärnor, Sirius, för att förutsäga översvämningen. Man visste att när Sothisstjärnan, som den kallades, syntes i öster omedelbart före soluppgången, så var tiden inne.

Under loppet av ett år rör sig solen ett varv kring himlen längs en bana som kallas *ekliptikan*. De stjärnbilder som den passerar igenom är den som bildar *zodiaken*, djurkretsen. De stjärnor som befinner sig i närheten av solen vid en viss tid på året kan man inte se eftersom deras ljus dränks av solljuset. Men när solen förflyttar sig blir en sådan stjärna synlig strax före soluppgången. Detta kallas stjärnans *heliakiska uppgång* (helios är solen på grekiska) och den inträffar på ungefär samma dag varje år. Det var alltså Sirius heliakiska uppgång som egyptierna använde för att förutsäga Nilens översvämning. Det egyptiska året var tiden mellan två sådana uppgångar. Året hade 365 dygn, som indelades i 12 månader om 30 dagar plus ytterligare fem dagar i slutet av året. Eftersom året har 365 plus 1/4 dag, så innebar detta att nyåret kom att flytta sig genom årstiderna med en period på 1461 år, vilket kallas en Sothis-period. Detta sätt att räkna årets längd användes i Egypten till år 46 f Kr, då Julius Caesar reformerade tideräkningen och införde den *julianska kalendern* i vilken man skjuter in en skottdag vart fjärde år. Den julianska kalendern stämmer heller inte riktigt, eftersom årets längd mer exakt är 365, 2475 dygn, vilket också leder till att nyåret vandrar genom årstiderna. År 1582 beslutade påven Gregorius XIII om ytterligare en kalenderreform i vilken skottår är de år som är jämnt delbara med fyra, utom de sekularår (dvs sekelskiftesåren 1600, 1700, 1800 osv) som inte är jämnt delbara med 400. 1900 var alltså inte ett skottår, medan 2000 var det. Den gregorianska kalendern infördes i Sverige 1753, då tidsskillnaden mellan oss och större delen av det övriga Europa uppgick till 12 dagar. Reformen genomfördes på så sätt att man helt enkelt strök 12 dagar från år 1753, vilket ledde till en hel del oro eftersom en del trodde att deras liv samtidigt förkortades med 12 dygn. Den julianska kalendern används fortfarande av den ortodoxa kyrkan, som därför firar påsk vid en annan tid på året än resten av kristenheten.<sup>1</sup> Beräkningen av

<sup>1</sup>Även de länder som är eller har varit ortodoxt dominerade använde den julianska kalendern sent in i modern tid. Den ryska revolutionen kallas sålunda både oktober- och novemberrevolutionen. När man t ex skall räkna ut vilken veckodag någon historisk händelse inträffade, så måste man ta hänsyn till bytet av kalender, vilket kan vara nog så besvärligt.

påskens datum är för övrigt ett komplicerat problem som vi tyvärr inte kan gå in på här, men vi kan notera att den matematik som fanns i Västeuropa under den "mörka" folkvandringstiden till stor del handlade om beräkningen av påskdagens datum. Det romerska nyåret firades vid vårens början den 1 mars, vilket är förklaringen till att årets fyra sista månader heter den sjunde, åttonde, nionde och tionde (september, oktober, november och december).

Vi skall gå vidare till världsbilden i det antika Grekland. Den världsbild som finns hos Homeros<sup>2</sup> påminner mycket om egyptiernas och är snarast mytologisk än vetenskaplig. Den äldsta grekiska filosofskolan brukar kallas den joniska (Jonien är landskapet på nuvarande Turkiets västkust) och den omfattar Thales (geometris grundare), Anaximandros, Anaximenes och Anaxagoras. Från Anaximenes kommer idén att stjärnorna är fastsatta på en sfär av kristall som vrider sig kring jorden. Hans lärjunge Anaxagoras hade förbluffande moderna idéer. Han ansåg att månen och planeterna var gjorda av samma material som jorden och att månen hade berg och invånare. Han insåg att månen inte lyser med eget ljus, utan reflekterar solens och han förklarade hur mån- och solförmörkelser uppkommer. Anaxagoras ansåg även att solen är en glödande sten, större än Peloponnesos.



Omkring 500 f Kr gör pythagoréerna entré på idéhistoriens scen. De menade att allt i universum är tal eller förhållanden mellan tal. Det kan tyckas vara en udda föreställning, men på sätt och vis är den besläktad med vår egen tids idé om att

<sup>2</sup>Karl XII:s dödsdag den 30 november är exempelvis angiven i den julianska tideräkningen. En annat intressant sak är att Lucianatten ibland anses vara den mörkaste på året, trots den i själva verket inträffar vid vintersolståndet. Före kalenderreformen inföll dock Lucia just vid vintersolståndet, så påståendet var sant för ett par hundra år sedan.

<sup>2</sup>Iliaden och Odyssén skrevs ner omkring 700 f Kr, men skildrar händelser som inträffade 500 år tidigare.

man kan beskriva världen fysikaliskt-matematiskt. Vad är det som säger att det måste gå att göra det? Pythagoréerna ansåg att planeterna och stjärnorna satt på sfärer som vred sig kring jorden. I sin rörelse alstrade de toner, *sfärernas harmoni*. Man kan väl anta att ursprunget till denna idé är pythagoréernas upptäckt av sambandet mellan tonhöjden hos en svängande sträng och strängens längd. Pythagoréerna ansåg att sfären är den perfekta geometriska formen och därför måste jorden vara klotformad. Det fanns andra skäl till denna hypotes också. Anaxagoras hade ju förklarat att månförmörkelser uppkommer genom att jorden skuggar solen. Om man tittar på månen när den förmörkas, så ser man att jordskuggan är rund, vilket betyder att jorden måste vara ett klot. Att jorden är ett klot kan inte ha varit en särskilt chockerande tanke för samtiden eftersom både grekerna och andra var goda sjöfarare och vana att se land och berg sjunka bakom horisonten, något som inte skulle inträffa på en platt jord. Jordens radie uppskattades av Erathostenes i Alexandria omkring 200 f Kr.

På 300-talet f Kr menade Herakleides från Pontos att planeterna Merkurius och Venus inte rör sig kring jorden, utan kring solen. Det är nämligen så att dessa två planeter alltid befinner sig i närheten av solen, man kan se dem bara omedelbart efter solnedgången och före soluppgången. Den förste som föreslog en heliocentrisk världsbild (dvs med solen i centrum) var Aristarkos från Samos. Han placerade också in planeterna i rätt ordning från solen. Platon hävdade en geocentrisk världsbild, alltså med jorden i universums centrum. Runt jorden rör sig, fästade på sfäriska skal, månen, solen, Merkurius, Venus, Mars, Jupiter och Saturnus. För Platon var cirkeln och sfären de perfekta formerna och alla rörelser i universum måste därför vara cirkulära. Nu rör sig solen, månen och planeterna på ett synnerligen komplicerat sätt över himlen och deras rörelser låter sig inte omedelbart förklaras med cirkelrörelser. Platon menade dock att rörelserna inte är cirklar, utan sammansatta av flera cirkulära rörelser. Genom Platons stora auktoritet kom denna idé att dominera astronomin under många hundra år. Systemet kompletterades med fler och fler cirklar som rör sig inuti varandra och fullbordades av Ptolemaios ca 150 e Kr i ett verk som på arabiska kallas *Almagest*, den stora sammanfattningen.

Precessionen, jordaxelns rotation, upptäcktes av Hipparkos omkring 150 f Kr. Han hade tillgång till observationsdata från Babylonien och kunde konstatera att stjärnornas lägen hade ändrats på ett systematiskt sätt genom åren. Det var naturligtvis en enorm prestation att dra den korrekta slutsatsen om vad detta beror på. Precessionens period är 26000 år. Just nu pekar jordaxeln mot Polstjärnan, som alltså ligger nära den norra himmelspolen, men om några tusen år kommer den att peka i en annan riktning.

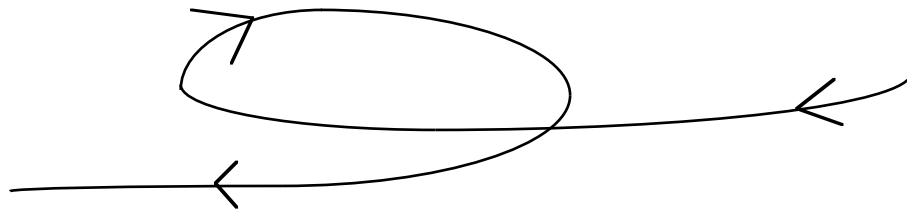
Under folkvandringstiden förföll naturvetenskapen och astronomin i Västeuropa och föreställningen att jorden är platt dök upp igen omkring 500 e Kr. Argumenten för en platt jord är teologiska till sin natur och hänvisar bl a till Jerusalems tempel: jorden måste ha samma form som templet, dvs fyrkantig och platt. Kyrkofadern Augustinus (300-talet) ansåg dock att jorden var rund, men att det inte kan finnas några människor på södra halvklotet. Under inflytande av

bl a Dantes Divina Commedia konstruerades det medeltida universum som kom att omfatta både de astronomiska himlarna och några av mer religiös natur (bl a salighetens sjunde himmel). Den geocentriska världsbilden hade naturligtvis kyrkans stöd: människan är skapelsens krona och jorden måste därför självklart vara universums centrum. Däremot menade flera teologer och präster att det mycket väl kunde finnas andra världar med människoliknande varelser (inte människor); att hävda motsatsen vore att underkänna Guds allmakt.

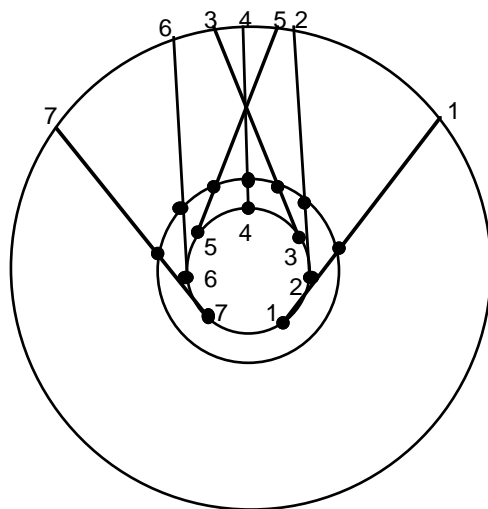
### Den kopernikanska revolutionen

Nicholas Kopernicus (1473-1543) var född i Torun, Polen, och studerade filosofi, teologi mm bl a i Bologna. Han var mest intresserad av astronomiska frågor, men var inte tillfreds med Ptolemaios världssystem, som han tyckte stred mot att cirkel är den perfekta formen för rörelse. Han föreslog därför ett heliocentriskt system i vilket jorden och de andra planeterna rör sig kring solen, och bara månen kring jorden. Kopernicus kunde dock inte frigöra sig föreställningen om perfekt cirkulära banor. Hans idéer presenterades i boken *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, Om de himmelska kropparnas rörelser, som kom ut samma dag som han dog. Kopernicus var naturligtvis rädd för hur den kyrkliga och den världsliga makten skulle reagera på hans revolutionära idéer; han levde under reformationstiden och känsligheten för kätterska idéer var stor.

Ett fenomen som är utomordentligt svårt att förklara om man antar att planeterna rör sig kring jorden är att några av dem (Mars, Jupiter och Saturnus) ibland vänder i sina banor och tycks röra sig bakåt, s k *retrograd rörelse*, se figuren nedan. Det var bl a detta som tvingade geocentrikerna att ta till de komplicerade modellerna med flera cirkelrörelser överlagrade varandra. I en heliocentrisk modell är det enkelt att med en figur förklara den retrograda rörelsen. Den inträffar omkring den tidpunkt då jorden s a s hinner upp planeten på in-nervarv.



Schematisk bild av en yttre planets retrograda rörelse på himlen.



Förklaring till en planets retrograda rörelse i det heliocentriska systemet.  
 Jordens bana är den inre cirkeln, planetens nästa och den yttersta cirkeln är  
 fixstjärnesfären på vilken planetbanan projiceras.

År 1572 inträffade en händelse som fick stora konsekvenser för världsbildens utveckling: en ny stjärna flammade plötsligt upp i stjärnbilden Cassiopeja. Den var så stark att den t o m syntes i dagsljus. Nuförtiden vet astronomerna att det var en supernova, dvs en stor stjärnas dödsskri, men då var det en stor händelse och många trodde att den yttersta tiden hade kommit. En som observerade den nya stjärnan var den danske astronomen Tycho Brahe, som kunde bevisa att den befann sig på mycket långt avstånd, långt bortom månen. Den nya stjärnan visade att kristallsfärerna och himlarna inte var oföränderliga och därmed att de stora auktoriteterna Aristoteles, kyrkofäderna m fl faktiskt kunde ha fel. Tycho observerade också en komet några år senare och kunde visa att även den var mer avlägsen än månen och således inte kunde vara en "utdunstning" i atmosfären, vilket annars var en vanlig uppfattning.

Den danske adelsmannen Tycho Brahe (1546-1601) var född på Knutstorp i Skåne och fick ön Ven i Öresund som förläning av den danske kungen Fredrik II. Där byggde han två astronomiska observatorier, Uraniborg och Stjärneborg, och gjorde under flera år in ytterst noggranna observationer av planeternas rörelser. Tycho blev sedermera ovän med den nye kungen Christian IV och flyttade sin verksamhet till Prag, där han blev hovastronom åt kejsar Rudolf II. Av hans observatorier återstår nu inte mer än några stenar, men sedan ett par år finns det ett nytt museum om honom på Ven.<sup>3</sup> Tycho Brahe sympatiserade av olika

<sup>3</sup>Ven är en mycket vacker ö i Öresund med underbar utsikt både mot Danmark och Glumslövs backar på den svenska sidan. För att komma dit kan man åka båt från Landskrona. Om Ven har bl a Gabriel Jönsson diktat i Vid vakten (Flicka från Backafall). Ven är svenskt sedan freden i Köpenhamn 1660, även om Sverige ansåg att den ingick i de områden som Danmark avträdde redan vid freden i Roskilde 1658.

skäl inte med det koperikanska systemet. Istället hittade han på en kompromiss i vilken planeterna visserligen rör sig kring solen, men solen själv (och månen) rör sig kring jorden.

I Prag arbetade Tycho tillsammans med Johannes Kepler (1571-1630), matematiker, fysiker, astronom och mystiker. Kepler försökte bringa ordning i planetrörelserna och solsystemets uppbyggnad genom att noggrant analysera Tychos jättelika observationsmaterial. Hans arbete är utan tvekan en enorm prestation, inte minst eftersom han naturligtvis var tvungen att räkna för hand. Kepler letade efter dolda mönster och samband i solsystemets uppbyggnad. Han försökte passa in de regelbundna polyederna mellan planeternas banor för att hitta en förklaring till avstånden mellan dem,<sup>4</sup> men det av hans arbete som överlevt är de tre lagarna för planeternas rörelser som han hittade med hjälp av Tychos observationer:

1. Planeterna rör sig i ellipsformade banor med solen i ena brännpunkten.
2. Radius vector (som är den tänkta linjen mellan en planet och solen) översveper lika stora areor på lika stora tider.
3. Kvadraterna på planeternas omloppstid är proportionell mot kuberna på deras medelavstånd till solen.

Man brukar säga att den moderna fysiken föddes med Galileo Galilei (1564-1642). Han var född i Pisa, där han också var professor i matematik, men senare verkade han även i Padua. Galileo införde den experimentella metoden i studiet av naturen. Tidigare hade vetenskapen som vi sett mest varit ett letande efter förklaringar till fenomenen hos de stora auktoriteterna Platon, Aristoteles och Bibeln, men Galileo menade att man kunde läsa naturen som en bok och ställa frågor till den. Inom fysiken sysslade han med att undersöka rörelse, bl a hos fallande föremål. Han fann genom kombinationer av utomordentligt listiga experiment och resonemang att alla föremål faller lika snabbt<sup>5</sup>. Att han skulle ha släppt stenar från kampanilen i Pisa är förmodligen en skröna.

Som ett exempel på ett av Galileos tankeexperiment kan vi ta följande. Aristoteles hade hävdade att tyngre föremål faller snabbare än lättare. Säg att vi har två stenar, en som väger 5 kg och en som väger 10 kg. Enligt Aristoteles faller den senare alltså snabbare än den förra. Men antag nu att vi sätter ihop dem med en kedja, så att vi får en sammanlagd massa om 15 kg. Eftersom 5 kg-stenen faller långsammare, så borde den bromsa upp 10 kg-stenen, så att hela paketet faller med lägre hastighet än den senare. Å andra sidan borde en sten med massa 15 kg falla snabbare än 10 kg-stenen. Slutsatsen man kan dra av denna paradox är att de två stenarna faller lika fort. Galileo fann närmare bestämt att den fallna sträckan är proportionell mot falltiden i kvadrat.

<sup>4</sup>Man kan se detta som ett utslag av en kombination av pythagoreiskt och platonskt tänkande. Det är lätt att göra sig löjlig över sådana idéer idag, men egentligen är de inte underligare än t ex partikelfysikernas letande av talsamband i mikrokosmos.

<sup>5</sup>Detta gäller om man bortser från luftmotståndet, t ex för olika stora stenar. Om man gör experiment i vacuum, vilket är fullt möjligt, så faller en sten och en fjäder lika fort.

Galileos andra stora insats är att han började använda den i Holland nyligen uppfunna kikaren för att studera himlen och planeterna. Han gjorde snabbt ett antal omvälvande upptäckter. Han upptäckte att månens yta inte är slät, som den skulle vara enligt Ptolemaios, utan att den är bergig och ojämn. Han såg att planeterna Venus och Merkurius uppvisar faser precis som månen. Det skulle de göra även i ett geocentriskt system, men faserna skulle se annorlunda ut än vad de faktiskt gör. Slutsatsen som Galileo drog var att planeterna rör sig kring solen, inte kring jorden. Det slutgiltiga beviset för att jorden inte är medelpunkten för all rörelse i universum fann Galileo när han riktade kikaren mot Jupiter och fann att planeten har fyra månar som alltså inte rör sig kring jorden utan kring Jupiter. Månarna, som fick namnen Io, Europa, Callisto och Ganymedes (efter några av Jupiters erövringar), kallas nu de galileiska satelliterna. Galileo var inte ute efter någon konflikt med vare sig kyrka eller vetenskapligt etablissemang, men den kom som ett brev på posten när han publicerade en satirisk bok med titeln *Dialogo sopra i due Massimi Sistemi del Mondo*, Dialog om de två stora världssystemen. Galileo får på ett briljant sätt anhängarna av Aristoteles och Ptolemaios att verka ytterligt korkade och nu kunde inte kyrkan tåla längre. Han fängslades och fördes inför Inkvisitionen, som under hot om tortyr fick honom att avsvära sig det heliocentriska systemet och han tillbragte sina sista år i husarrest. När Galileo dog 1642 flyttade den vetenskapliga revolutionen från Sydeuropa. På juldagen samma år föddes nämligen i England Isaac Newton.

### Isaac Newton

Isaac Newton föddes 1642 i Woolsthorpe, Lincolnshire. Han gick i skola i Grant-ham och kom till Cambridge 1661. 1665 stängdes universitetet på grund av en pestepidemi och Newton flyttade hem igen. Under det följande året, *annus mirabilis*, gjorde han en rad stora upptäckter inom optik, mekanik och matematik. 1667 återvände han till Cambridge och han blev 1669 professor i matematik. En av Newtons viktigaste insatser är den allmänna gravitationslagen (tyngdlagen). Han funderade över vad som får ett äpple att falla till marken och antog att äpplet attraheras av jorden med en viss kraft och att jorden attraheras av äpplet med en lika stor, men motsatt riktad kraft och att denna kraft, gravitationskraften, är densamma som den kraft som finns mellan ett äpple och jorden och månen. Newtons gravitationslag kan formuleras så här:

*Två massor attraherar varandra med en kraft som är direkt proportionell mot deras massor och omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet mellan dem.*

Med en formel kan lagen skrivas

$$F = G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{R^2},$$

där  $M_1$  och  $M_2$  är de två massorna (t ex jordens och månens massor) och  $R$  avståndet mellan dem. Konstanten  $G$  kallas den allmänna gravitationskonstanten.

Under sitt mirakulösa år bevisade Newton att *två kroppar som attraherar med gravitationskraften måste röra sig som Keplers lagar beskriver*. Under arbetet med detta utvecklade han den matematiska analysen, differential- och integralkalkylen (dvs teorin för derivator och integraler). Newton var inte särskilt intresserad av att publicera sina upptäckter, men blev övertalad att göra det i alla fall, av bl a Edmund Halley. Hans mästerverk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* utkom sålunda 1686 och det är en av den mänskliga tankens absolut främsta skapelser och ett av de mest inflytelserikaste arbetena någonsin. I Principia, som boken brukar kallas, härleds inte bara Keplers lagar, utan Newton diskuterar även precessionen, kometer, ebb och flod, jordens avplattning vid polerna mm. Principia representerar den heliocentriska världsbildens totala seger. Det är ingen överdrift att påstå att Newton är den moderna naturvetenskapens portalfigur och en av de absolut främsta tänkarna någonsin, kanske den allra störste.

Isaac Newton blev som den förste naturvetenaren någonsin adlad av Queen Anne 1705 och utnämnd till Master of the Mint, chef för det engelska myntverket. Han sysslade inte bara med fysik och matematik, utan även med alkemi och teologi. Han dog 1726 och ligger begravd i Westminster Abbey i London. Trots sina banbrytande insatser menade han själv att han bara var som en pojke som lekt på en strand och råkat hitta en och annan särskilt vacker sten, medan kunskapens hela ocean legat oupptäckt framför honom.

Efter Newton formligen exploderade matematiken och fysiken. Mme de Châtelet och Voltaire gjorde Newtons teorier accepterade i Frankrike, vilket utan tvekan var en av drivkrafterna bakom upplysningen. Redan Newton själv visste att han inte hade löst alla problem. I verkligheten rör sig nämligen inte planeterna i exakt ellipsformade banor, utan uppvisar avvikelser. Detta beror främst på att planetsystemet inte bara består av två kroppar som påverkar varandra, utan av flera. Skall man göra en perfekt modell av solsystemet så måste man ta hänsyn till det, vilket är ett ohyggligt svårt problem som ännu inte är löst. En framstående astronom och matematiker som arbetade med det var fransmannen Pierre Simon de Laplace (1749-1827) som är berömd för ett verk med titeln *Mécanique céleste* som är en mycket noggrann analys av rörelserna i solsystemet. Napoleon lär ha frågat Laplace varför han ingenstans i sitt arbete hade nämnt Gud, varvid Laplace lär ha svarat att han inte hade haft behov av den hypotesen.

## Nya planeter

Vi skall se senare hur man tidigt kunde uppskatta de relativa avstånden i solsystemet under antagandet att det kopernikanska systemet är i stort sett riktigt. Med hjälp av Keplers tredje lag kan man förfina avståndsskalan. De relativa avstånden var kända på Newtons tid, men man saknade skalan. 1672 gav sig en expedition av från Frankrike till franska Guyana för att göra en s k parallaxmätning av planeten Mars och bestämma dess absoluta avstånd till jorden (se

nedan). Mätningen var behäftad med stora fel, men man fick i alla fall en grov uppfattning av storleksordningen. Den enhet man vanligen använder för avstånd i solsystemet är en astrononisk enhet (AU), vilket definieras som avståndet mellan solen och jorden, dvs ca 150 miljoner km. I slutet av 1700-talet noterade två tyska astronomer, Titus och Bode, att planeternas avstånd till solen approximativt följer en enkel formel. Merkurius avstånd till solen är 0,4 AU och sedan får man de andra planeternas avstånd genom formel  $A = 0,4 + 0,3 \cdot 2^m$ , där  $m$  är ordningstalet. Venus är nummer 0 osv men man måste ge Jupiter nummer 4. De verkliga avstånden och de man får med Titus-Bodes formel finns i tabellen nedan.

$m$	<i>Planet</i>	<i>Verkligt avstånd</i>	<i>Titus-Bode</i>
-	Merkurius	0,4	0,4
0	Venus	0,7	0,7
1	Jorden	1	1
2	Mars	1,5	1,6
3	?	?	2,8
4	Jupiter	5,2	5,2
5	Saturnus	9,5	10
6	Uranus	19,2	19,6
(-	Neptunus	30	)
7	Pluto	38,8	39,5

Är Titus-Bodes formel ett märkligt sammanträffande eller visar den på någon fundamental princip i solsystemets uppbyggnad? Det vet man inte, men nutida astronomer lutar åt det förra. Nå, 1781 upptäckte det engelska syskonparet Caroline och William Herschel av en slump en ny planet utanför Saturnus, som fick namnet Uranus. Uranus avstånd till solen är 19,2 AU och det man får med Titus-Bode (för  $m = 6$ ) är 19,6 AU. Detta egendomliga sammanträffande fick astronomerna att gissa att det verkligen finns något oupptäckt mellan Mars och Jupiter. 1801 upptäckte en italiensk astronom, Piazzi, ett objekt på avståndet 2,8 AU från solen. Han gav det namnet Ceres, men när man beräknade dess massa fann man att det är alldeles för litet för att vara en riktig planet. Istället gav man det namnet asteroid eller småplanet. Snart upptäcktes massor av sådana i luckan mellan Mars och Jupiter och nu känner man till tusentals. Enligt en gammal teori skulle de utgöra resterna av en planet som en gång fanns, men som råkade ut för någon kosmisk katastrof och sprängdes i bitar. Asteroidernas sammanlagda massa är dock alldeles för liten för att detta skulle vara troligt. Nuförtiden tror man att de är rester som blev kvar vid solsystemets bildande. Att de inte har samlats ihop till en kropp beror förmodligen på jätteplanetens Jupiters inflytande.

Uranus upptäcktes alltså 1781 och den förbluffade nästan genast astronomerna genom att inte följa den beräknade banan, avvikelserna blev till och med större och större. En möjlig förklaring till detta beteende vore att det finns ytterligare

en planet utanför Uranus som stör denna i dess bana. En engelsk matematiker, J.C. Adams, och en fransman, U. LeVerrier, beräknade oberoende av varandra med hjälp av Newtons gravitationslag och Laplace metoder den hypotetiska planetens position. Den upptäcktes mycket nära det beräknade läget 1845 och fick namnet Neptunus. För Neptunus stämmer Titus-Bodes formel inte alls – dess avstånd till solen är 30 AU, men formeln ger 38,8 AU. Neptunus visade sig i början heller inte följa den beräknade banan, och planetjakten fortsatte, om än i mindre skala. År 1930 hittade en amerikan, C. Tombaugh, en ny planet på det beräknade stället. Den fick namnet Pluto, men när man beräknade dess massa visade det sig att den är alldeles för liten för att kunna störa Neptunus bana; den verkar snarast vara ett asteroidliknande objekt i solsystemets utkanter. Om man ger Pluto nummer 7 i Titus-Bodes formel, så får man avståndet 38,8 AU. Det verkliga medelavståndet är 39,5, vilket ju måste sägas vara ett märkligt sammanträffande (Plutos bana är dock kraftigt elliptisk och mellan 1976 och 1999 befann den sig innanför Neptunus bana).

Finns det alltså ytterligare en planet X utanför Neptunus? Om det gör det måste den vara ohyggligt avlägsen och ljussvag och det är tveksamt om man skulle kunna hitta den med nu till buds stående metoder. När rymdsonden Voyager 2 passerade Neptunus 1989 kunde man mäta planetens massa med betydligt större noggrannhet och med den nya massan följer den beräknade banan den verkliga betydligt bättre. Det finns således inga egentliga skäl att anta att det finns fler stora planeter i vårt solsystem. Om man trots allt någon gång skulle hitta en ny någonstans därute, så har man föreslagit att den skall heta Persefone, efter Plutos dystra hustru, underjordens drottning.

#### Att mäta avstånden i solsystemet

Redan under antiken försökte man med mycket listiga metoder att uppskatta avstånden i solsystemet. Vi skall titta lite på några sådana metoder, men först några fakta. Solsystemet har nio större planeter, varav alla utom Merkurius och Venus har en eller flera månar. Till detta kommer ett stort antal mindre kroppar, varav många rör sig i asteroidbältet mellan Mars och Jupiters banor. Till de mindre kropparna hör också kometer, som är mer eller mindre tillfälliga gäster. Solen är systemets centralkropp och står för mer än 99 % av massan. Planeterna rör sig, med ett undantag, Pluto, i stort sett i ett plan (Plutos bana lutar 17 grader mot detta plan).

Det plan som bestäms av jordens bana kring solen kallas *ekliptikans plan*. Ekliptikan är solens bana på himlen under ett år. Jordaxeln är inte vinkelrät mot detta plan, utan lutar 23 grader mot normalen till planet. Alla kroppar i solsystemet roterar och rotationsaxlarna lutar mer eller mindre. Planeterna kan delas in i två eller tre grupper, dels de jordliknande Merkurius, Venus, Jorden och Mars, dels jätteplaneterna Jupiter, Saturnus, Uranus och Neptunus. Pluto är en liten kropp som ibland förs till jordgruppen, ibland får bilda en egen grupp. Den har en måne, Charon, som är så stor att man snarast borde tala om en dubbel-

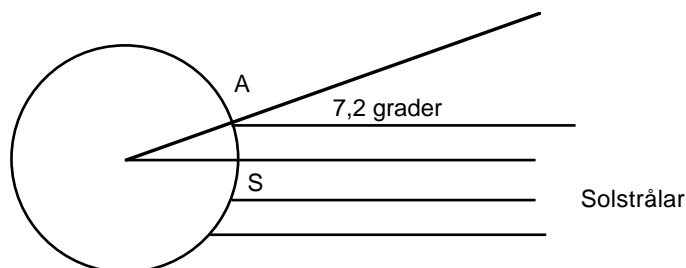
planet. De jordliknande planeterna är små och består av mineral av olika slag. Jätteplaneterna kallas ibland gasjättar eftersom de till stor del består av olika gaser, mest väte, men även ammoniak och metan.

### Några data om planeterna

Namn	Medelavstånd till solen (AU)	Massa (jorden = 1)	Radie ( $10^3$ km)	Omloppstid (år)	Dygnets längd
Merkurius	0,39	0,054	2,42	0,24	59 d
Venus	0,72	0,82	6,10	0,61	243 d
Jorden	1	1	6,38	1	24 t
Mars	1,52	0,11	3,38	1,88	24 t
Jupiter	5,20	317,8	71,4	11,9	10 t
Saturnus	9,54	95,2	60,4	29,5	10 t
Uranus	19,2	14,5	23,8	84	11 t
Neptunus	30,1	17,2	22,2	164	15 t
Pluto	39,4	0,002	2,25	248	6 d 9 t

### Jordens radie

Erathostenes (276-194 f Kr) var verksam i Alexandria och anses vara den förste som lyckades uppskatta jordens radie. Han observerade att solen vid sommar-solståndet stod rakt i zenit i staden Syene. Samtidigt kastade en obelisk i Alexandria en skugga som visade att solen där stod 7,2 grader från zenit. Alexandria ligger 5000 stadier (det då använda längdmåttet) rakt norr om Syene. En stadium är ca 185 meter.



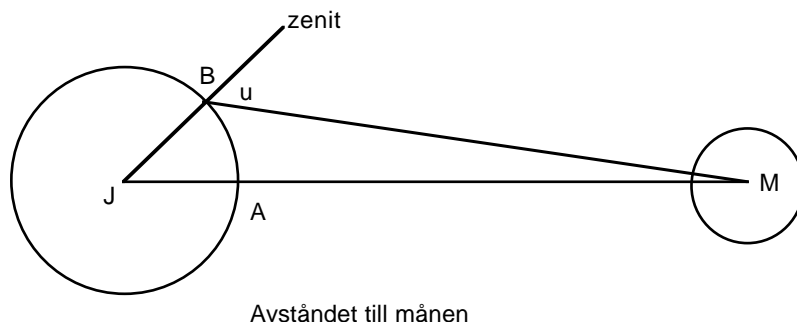
Mätning av jordens radie  
(A=Alexandria, S=Syene)

Övning 3: Beräkna jordens omkrets och radie med ledning av uppgifterna ovan.

### Avståndet till månen

Avståndet till månen uppskattades av Ptolemaios med följande metod. När månen står i zenit sedd från en plats  $A$ , så bildar lodlinjen och siktlinjen till månen en viss vinkel  $u$  på en annan plats  $B$ , se figuren nedan. Om man vet avståndet mellan  $A$  och  $B$  samt Jordens radie så kan man räkna ut vinkeln  $\angle BJA$ . Vinkeln  $\angle JBM$  får man ur mätningen. Basen  $JB$  är känd (jordradien),

och då kan man bestämma sidan  $JM$  i  $\triangle JMB$ , dvs avståndet till månen.



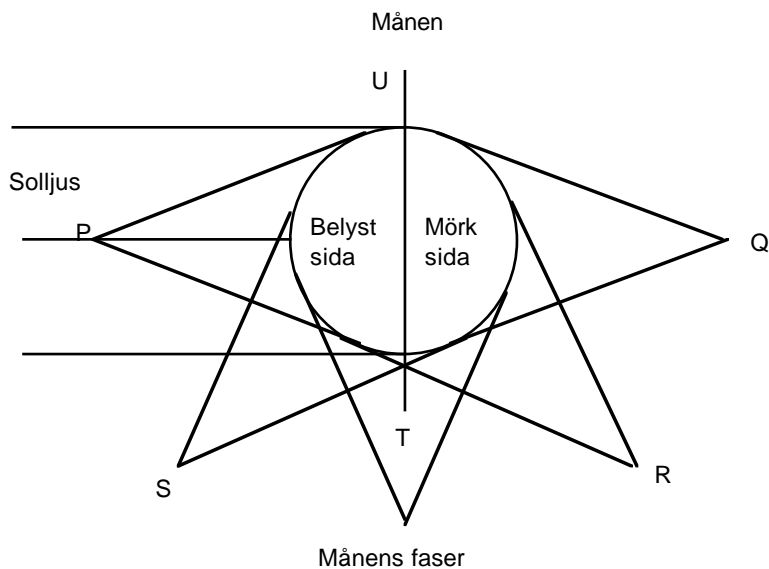
Övning 4: Avståndet mellan  $A$  och  $B$  är 10 mil. Vad är vinkeln  $\angle BJA$ ?

Övning 5: I  $B$  mätte man upp vinkeln  $u$  till  $69,6^\circ$ . Vad ger det för värde på avståndet till månen?

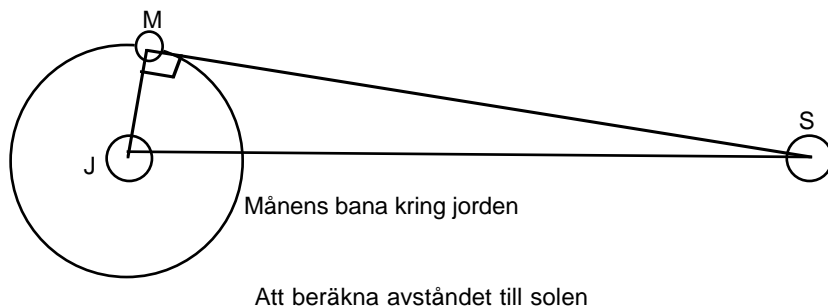
Metoden är elegant, men det är inte så enkelt att tillämpa den i praktiken. Den stora svårigheten är att mäta vinkeln  $u$  i  $B$  när månen står i zenit i  $A$ . Hur vet man när månen gör det om man inte kan kommunicera med t ex radio eller telefon mellan  $A$  och  $B$ ? Grekerna löste problemet på ett genialiskt sätt: de inväntade en månförmörkelse och valde  $A$  till en plats där månen står i zenit under förmörkelsen. Månen inträder i jordskuggan samtidigt på båda platserna och när det sker vet man att man skall mäta vinkeln  $u$  på platsen  $B$ . (Grekerna visste att månförmörkelser inträffar med en viss regelbundenhet.)

#### *Förhållandet mellan avstånden till solen och månen*

Aristarkos från Samos (310-230 f Kr) angav en metod att bestämma förhållandet mellan avståndet till solen och månen. Metoden är i princip riktig, men under antiken kunde man inte genomföra de mätningar som behövs med tillräckligt stor noggrannhet. Aristarkos var en av de första som insåg att månen inte lyser med eget ljus, utan reflekterar solljuset. Som skäl för denna uppfattning angav han att månen uppvisar faser: hade månen lyst med eget ljus så hade den inte gjort det (om man inte omfattar en mytologisk världsbild i vilken månen antingen är ett levande väsen eller en nyckfull gud). Förklaringen till faserna ser man i figuren nedan. Vid P ser man en fullmåne, vid Q är det nymåne, vid R en månskära och vid S ser man en inte helt full måne. På linjen TU ser man en halvmåne.



Ur figuren framgår att när det är halvmåne, så bildar jorden, månen och solen en rätvinklig triangel med månen i den räta vinkeln (se även nästa figur). I figuren nedan vet vi avståndet  $JM$  (enligt Ptolemaios beräkning) och om vi kan bestämma vinkeln  $\angle MJS$  så kan vi beräkna förhållandet mellan kateten  $JM$  och hypotenusan  $JS$ .

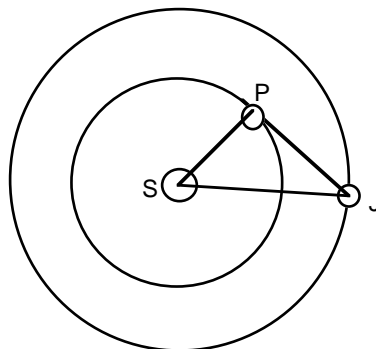


Övning 6: Vinkeln  $\angle MJS$  är  $89^\circ 50'$ . Beräkna förhållandet mellan  $JM$  och  $JS$ . Vad blir alltså avståndet till solen?

I praktiken är det mycket svårt att mäta  $\angle MJS$  eftersom det är svårt att avgöra när månen är exakt halv. Aristarkos fick i själva verket  $3^\circ$  och därmed ett värde på avståndet till solen som är ca 20 gånger för litet. Men det viktiga är att *han hade en idé* om hur man skulle kunna mäta avståndet till solen och inte nöjde sig med mytologiska spekulationer.

### Planeternas relativa avstånd

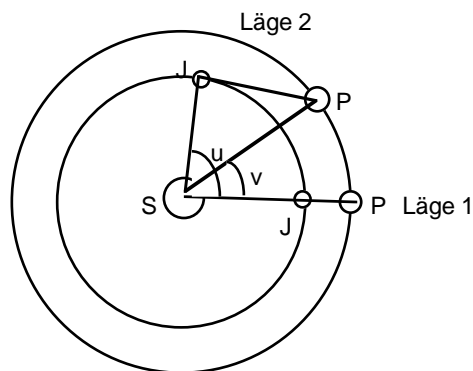
Genom andra vinkelmätningar kan man bestämma planeternas relativa avstånd till solen. Låt oss börja med en inre planet, dvs Venus eller Merkurius. Från jorden mäter man vinkeln  $\angle SJP$ . När den är maximal är  $JP$  tangent till  $P$ s bana, så att  $\angle JPS$  är rät. Man kan nu räkna ut förhållandet mellan  $JS$  och  $PS$ .



Avståndet mellan en inre planet och solen

Övning 7: För Merkurius fick Kopernicus att vinkeln  $\angle SJP$  är  $22^{\circ}6'$  och för Venus är den  $46^{\circ}$ . Beräkna deras avstånd till solen uttryckta i AU.

För en yttre planet (Mars, Jupiter, Saturnus) är det lite mer komplicerat att bestämma avståndet till solen. Man måste först vänta till solen, jorden och planeten ifråga står på en rät linje (läge 1 i figuren). Nu börjar man mäta vinkeln  $\angle SJP$ , som är 180 grader i läge 1 och sedan krymper. Eftersom jorden rör sig snabbare kommer planeterna att befinna sig i läge 2 efter en tid. När vinkeln  $\angle SJP$  är rät, så noterar man hur lång tid som förflutit sedan man passerade läge 1. Om man vet  $P$ s omloppstid kring solen, så kan vinkeln  $\angle JSP$  beräknas och därmed avståndet  $SP$  uttryckt i AU.



Avståndet mellan en yttre planet och solen

För Jupiter fann Kopernicus att  $\angle SJP$  är rät 87,3 dygn efter det att planeterna stod på rät linje med solen. Vinkeln  $u$  i figuren är då

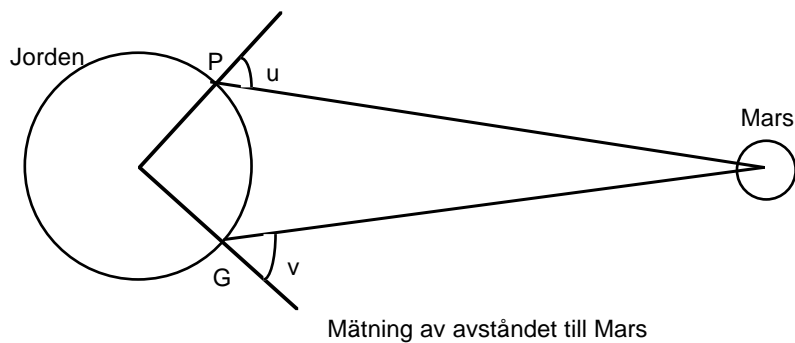
$$\frac{87,3 \cdot 360}{365} = 86,1 \text{ grader.}$$

Jupiters omloppstid är 12 år, så vinkeln  $v$  är

$$\frac{87,3 \cdot 360}{12 \cdot 365} = 7,2 \text{ grader.}$$

Alltså är  $\angle JSP = 86,1 - 7,2 = 78,9$  grader och  $|JS|/|PS| = \cos 78,9^\circ = 0,193$ . Då  $|JS|$  är 1 AU, så är avståndet mellan solen och Jupiter tydligen  $1/0,193 = 5,2$  AU.

Kopernicus hade alltså de relativa avstånden i solsystemet, men saknade själva enheten, dvs längden av en AU (Aristarkos metod att mäta avståndet till solen är alltför osäker för att man skall kunna få ens ett approximativt värde). För att bestämma hur lång en AU är mätte man avståndet till Mars när det är som kortast. Detta skedde år 1672 genom att man samtidigt mätte planetens läge på himlen från två olika platser på jorden. Den ena mätningen skedde i Frankrike och den andra i Franska Guyana, dit en expedition alltså hade åkt. Principen framgår av figuren nedan. Man mäter vinklarna  $u$  och  $v$  och med kännedom om dessa samt avståndet mellan  $P$  (Paris) och  $G$  (Guyana) kan man beräkna avståndet. Det här är en betydligt säkrare metod än Aristarkos, men ändå behäftad med en ganska stor osäkerhet.



### Keplers tredje lag

Keplers tredje lag säger att kvadraterna på planeternas omloppstid är proportionell mot kuberna på deras medelavstånd till solen. Om vi betecknar omloppstiden med  $T$  och medelavståndet med  $R$ , så kan vi skriva detta med en formel:

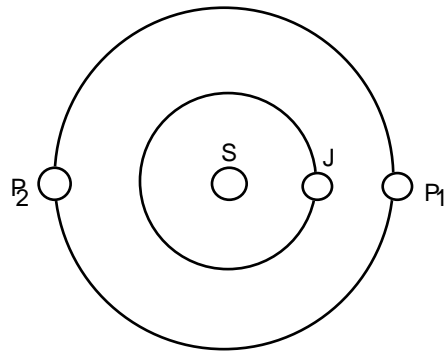
$$T^2 = k \cdot R^3,$$

där  $k$  är en konstant. Om vi väljer avståndsenheten till 1 AU och tidsenheten till ett år, så får vi  $1^2 = k \cdot 1^3$ , dvs  $k = 1$ . Om man mäter i AU och år, så gäller alltså att  $T^2 = R^3$  för alla planeter.

Övning 8: Tag planeternas omloppstid ur tabellen ovan och räkna ut deras avstånd i AU med hjälp av Keplers tredje lag. Hur väl stämmer de med de värden som finns i tabellen?

### Ljusets hastighet

Galileo upptäckte som sagt fyra av Jupiters månar, de galileiska satelliterna och observerade att de regelbundet förmörkas av planeten. Andra noterade att dessa förmörkelser verkade komma senare än beräknat när Jupiter stod långt bort från jorden än när den stod närmare. En dansk astronom, Ole Rømer, drog 1675 slutsatsen att detta beror på att ljuset från Jupiter behöver längre tid att färdas då planeten står långt bort än när den står nära, se figuren, där  $J$  är jorden och  $P_1$  och  $P_2$  Jupiter när den står som närmast respektive så långt bort som möjligt.



Ljusets hastighet

Övning 9: Tidsskillnaden mellan förmörkelserna i lägena 1 och 2 är ca 10 minuter. Vilket värde ger det på ljusets hastighet?

Nuförtiden vet vi genom betydligt noggrannare mätningar att ljushastigheten är nästan exakt 300000 km/s, men det som är intressant och viktigt är att Rømer insåg att *ljuset har ändlig hastighet*. Huruvida det är så eller ej var en fråga som man överhuvudtaget inte hade ställt tidigare.