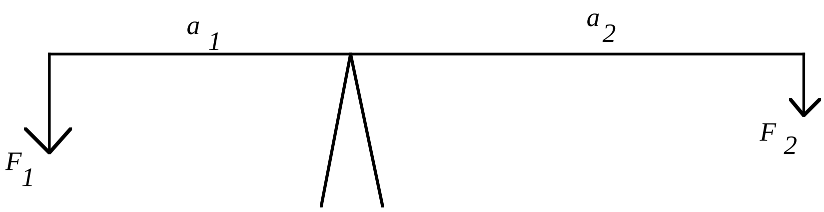
Klotets volym enligt Arkimedes

År 1906 upptäckte den danske filologen J.L. Heiberg ett manuskript av Arkimedes, som man trodde var förlorat. Det heter *Metoden* och är en s k *palimpsest*, dvs den är skriven på pergament och sedan bortskrapad för att ge plats för någon annan text (pergament var ju ett dyrbart material). Ibland kan man på sådant pergament ändå se den första texten som relieftryck och så var det alltså med Arkimedes saknade arbete. Det intressanta med just *Metoden* är att den handlar om hur han hittade på sina resultat. Hans andra arbeten innehåller både resultat och bevis, men inget om hur han kom på dem.

Arkimedes var ju inte bara matematiker, utan även fysiker och ingenjör och det var faktiskt så att han ofta använde mekaniska resonemang för att komma på sina satser. Hans beräkning av klotets volym är ett exempel på det. Vi kommer att behöva hänstångslagen, vilken också upptäcktes av Arkimedes. Figur 1 nedan skall föreställa en (masslös) stång som vilar på en bock (P är stödjepunkten). I stångens ändar verkar krafterna F_1 och F_2. Om avstånden från krafternas angreppspunkter till P är a_1 respektive a_2, så är villkoret för jämvikt att

$$F_1 a_1 = F_2 a_2.$$

Om situationen är mer komplicerad och vi istället har två kroppar som påverkas av tyngdkraften och balanserar varandra, så skall man tolka avstånden a_1 och a_2 som avstånden från kropparnas tyngdpunkter till P (detta bevisades också av Arkimedes).

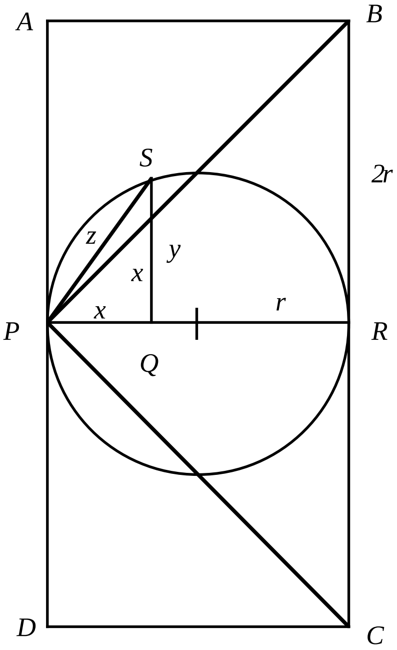


Vi lämnar mekaniken ett ögonblick och skall titta på lite geometri. Figur 2 består av en cirkel med radie r, en rektangel $ABCD$ med sidorna $2r$ och $4r$ samt en triangel $\triangle PCB$ med bas $4r$ och höjd $2r$. Låt Q vara en punkt på PR och sätt $x = |PQ|$. Drag normeln till PR i Q och låt S vara dess skärningspunkt med cirkeln. Sätt $y = |QS|$, $z = |PS|$. Vi har alltså $x^2 + y^2 = z^2$. Vi har också $\triangle PQS \sim \triangle PSR$, vilket ger $z/2r = x/z$ eller $z^2 = 2rx$. Alltså är $x^2 + y^2 = 2rx$. Vi låter nu hela figuren rotera kring linjen PR. Då uppstår ett klot, en kon och en cylinder (av cirkeln, $\triangle PCB$ respektive $ABCD$).

Tänk er nu en hävstång. På vänstra sidan hänger vi två oändligt tunna cirkelskivor med radier x och y på avståndet $2r$ från stödjepunkten (x, y och r är som nyss). Till höger hänger vi en cirkelskiva med radie $2r$ på avståndet x från stödjepunkten. Om vi multiplicerar sambandet $x^2 + y^2 = 2rx$ med $\pi \cdot 2r$ så får vi

$$(\pi x^2 + \pi y^2) \cdot 2r = \pi(2r)^2 \cdot x.$$

Men om cirkelskivornas tyngd är proportionell mot deras area, så är detta precis hävstångslagens villkor för jämvikt. Hävstången balanserar alltså.



Vi skall nu låta punkten Q förflytta sig längs PR och "summera ihop" bidragen från alla cirkelskivor som uppstår. "Summan" av alla cirkelskivor med radie x blir konen som vi nämnde ovan. Skivorna med radie y ger klotet som vi också nämnde nyss och skivorna med radie $2r$ ger cylindern. Låt volymerna av dessa vara V_1, V_2 och V_3. Hela tiden befinner sig arrangemanget i jämvikt. Tyngdpunkten till vänster ligger på avståndet r från stödjepunkten och tyngdpunkten till höger ligger på avståndet r, så hävstångslagen ger

$$(V_1 + V_2) \cdot 2r = V_3 \cdot r.$$

Volymen av konen är $V_1 = \pi(2r)^2 \cdot 2r/3 = 8\pi r^r/3$ och volymen av cylindern är $V_3 = \pi(2r)^2 \cdot 2r = 8\pi r^3$. Alltså är klotets volym

$$V_2 = \frac{1}{2r}(V_3 \cdot r - V_1 \cdot 2r) = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Pi enligt Arkimedes

Arkimedes använde in- och omskrivna regelbundna polygoner (till en cirkel) för att beräkna närmevärden till pi. Ju fler hörn man tar, desto närmare cirkelns omkrets bör ju polygonens omkrets vara. Men hur räknar man ut omkretsen av en in- eller omskriven polygon? Jo, Arkimedes hittade på ett sätt att räkna ut dem successivt: när man har räknat ut omkretsen av en n-hörning, så kan man på ett relativt enkelt sätt räkna ut omkretsen av en $2n$-hörning.

Låt I_n vara omkretsen av den regelbundna n-hörningen som är inskriven i en cirkel med radie 1. I figuren nedan är x_1 dess sida och x_2 är sidan i $2n$-hörningen. Pythagoras sats två gånger ger

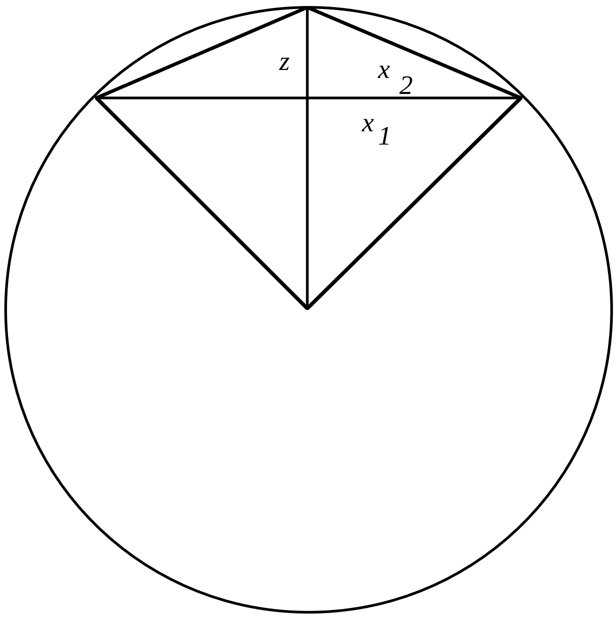
$$x_2^2 = z^2 + x_1^2/4 \quad \text{och} \quad (1-z)^2 + x_1^2/4 = 1.$$

Dessa samband ger

$$x_2^2 = 2 - \sqrt{4 - x_1^2}.$$

Nu har vi ju $I_n = nx_1$ och $I_{2n} = 2nx_2$ och vi får efter lite räknande

$$I_{2n} = 4n - 2\sqrt{4n^2 - I_n^2}.$$



Om vi låter den omskrivna regelbundna n-hörningen ha omkrets O_n, så kan man analogt visa att

$$O_{2n} = \frac{2O_n}{1 + \sqrt{1 + O_n^2/4n^2}}.$$

Övning: Räkna först ut I_3 och O_3 och använd därefter formlerna ovan för att beräkna I_n och O_n för $n = 6$ och 12. Vad får man för uppskattningar av π med hjälp av dessa?