

Andragradsekvationer

Torbjörn Tambour 11 januari 2001

Idag skall vi börja diskutera *komplexa tal*. Ett av skälen till att man inför dem är att man vill att alla andragradsekvationer skall ha lösningar, så jag tyckte att det vore bra med en repetition av sådana ekvationer.

En allmän andragradsekvation kan skrivas

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

där *koefficienterna* a, b, c är några tal. Eftersom vi inte har infört de komplexa talen ännu, så antar vi att de är reella. För att det verkligen skall vara en andragradsekvation, så måste $a \neq 0$ (annars vore det ju en ekvation av grad 1) och då kan vi dividera (1) med a och får

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0. \quad (2)$$

Om vi sätter $p = b/a, q = c/a$ så blir detta

$$x^2 + px + q = 0. \quad (3)$$

Det viktiga är att (1) och (3) har *samma lösningar*.

Idén när man löser en andragradsekvation är att använda kvadreingsregeln

$$(x + \alpha)^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2. \quad (4)$$

Skriv

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q.$$

Lägg märke till att vi har lagt till och dragit ifrån termen $(p/2)^2$. Varför har vi gjort det? Jo, jämför vi med kvadreringsregeln (4) med $\alpha = p/2$ så ser vi att

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

och alltså är

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Ekvationen $x^2 + px + q = 0$ kan tydligen skrivas

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 0$$

vilket är detsamma som

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q. \quad (5)$$

Vi kan nu börja analysera när ekvationen har några *reella* lösningar. Om uttrycket $(p/2)^2 - q$ är < 0 , så kan ekvationen (5) inte ha några reella lösningar eftersom kvadraten på ett reellt tal alltid är ≥ 0 . Om $(p/2)^2 - q = 0$ så övergår ekvationen i $(x + p/2)^2 = 0$, vilket är detsamma som $x + p/2 = 0$ eller att $x = -p/2$. I detta fall har ekvationen alltså precis en lösning.

Om till sist $(p/2)^2 - q > 0$, så får vi

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

eller

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \quad (6)$$

Uttrycket $(p/2)^2 - q$ kallas för ekvationens *diskriminant* eftersom det skiljer (*diskriminerar*) mellan olika typer av ekvationer.

De komplexa talen inför man nu bl a av det skälet att man vill att alla andragradsekvationer skall ha lösningar. I fallet $(p/2)^2 - q < 0$ så kommer ekvationen att ha två icke-reella lösningar (som visar sig vara konjugerade komplexa tal). Det stora miraklet i sammanhanget är att om man tillåter komplexa lösningar till ekvationer så kommer *alla ekvationer att ha lösningar*, inte bara andragradsekvationer! Detta intressanta faktum kallas för *algebrans fundamentalsats* och bevisades av C.F. Gauss 1799. Historiskt var det dock inte i samband med andragradsekvationer som man började räkna med komplexa tal. Det skedde istället i slutet av 1400-talet i samband med försök att lösa ekvationer av grad tre.

Ett annat bevis för faktorsatsen

Som kuriosa vill jag ge ett annat bevis för faktorsatsen. Närmare bestämt skall vi visa att om $p(a) = 0$, så delar $x - a$ polynomet p , dvs $p(x) = (x - a)q(x)$ för något annat polynom q .

Antag först att $a = 0$ och att $p(0) = 0$. Då måste den konstanta termen i p vara 0, dvs $p(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots$, så att $p(x) = xf(x)$ för något polynom f . Om $a \neq 0$, så sätt $g(x) = p(x + a)$. Då är $g(0) = p(a) = 0$, varför $g(x) = xf(x)$. Men då blir ju

$$p(x) = g(x - a) = (x - a)f(x - a) = (x - a)q(x),$$

där q är ett polynom.