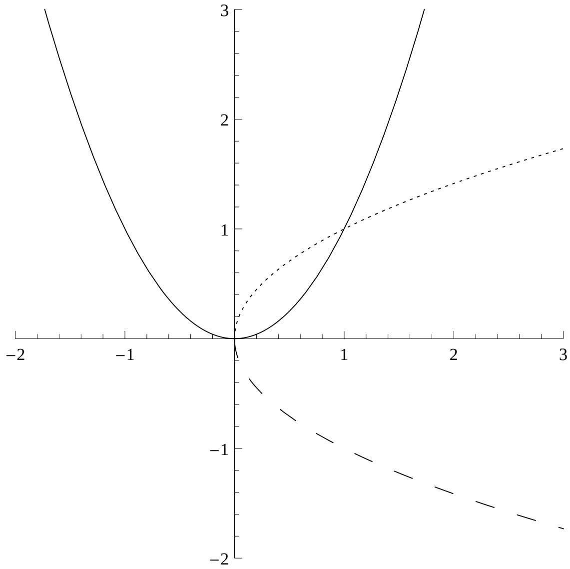
Förberedande kurs i matematik

Alexanderson, Bergkvist, Leander, Lundqvist



Förord

Detta material är avsett att introducera matematik för nya universitets- och högskolestudenter och skrevs som kurslitteratur till Förberedande kurs i matematik, som är en distanskurs utvecklad av Stockholms universitet. Kursen riktar sig till nya studenter i ämnet samt till de som vill få en djupare bild av matematiken. Materialet repeterar till en viss del grundläggande gymnasiematematik på universitetsvis, men tar också upp en hel del nya saker som vi tror att läsaren kommer att ha stor nytta av vid eventuellt kommande matematikstudier vid universitet eller högskola. Läsaren förutsätts ha kunskaper i ämnet minst motsvarandes gymnasiets Matematik C.

Materialet är organiserad i fyra kapitel. Vart och ett av dessa fyra kapitel är indelade i mindre avsnitt. Efter de flesta delavsnitt finns ett mindre antal övningar som läsaren med fördel kan göra för att kontrollera att han eller hon förstått de olika begreppen och metoderna från avsnittet. Alla övningar är tänkta att göras utan hjälp av miniräknare.

Kapitel 1 består till stor del av en presentation av olika tal, samt regler för hur man räknar med dessa. Kapitlet utgår från de positiva heltalen och motiverar en rad utvidgningar för att till slut komma fram till de komplexa talen.

I kapitel 2 behandlas algebra och kombinatorik. Kapitlet avslutas med en diskussion av några logiska symboler.

I kapitel 3 introduceras mängdlära. Med hjälp av mängdlära definierar vi funktionsbegreppet. I slutet av kapitlet behandlas olikheter, absolutbelopp och trigonometri.

Kapitel 4 börjar med en genomgång av gränsvärden. Vi använder teorin från gränsvärden för att definiera derivata. Vi definierar slutligen begreppet integral som ett gränsvärde av över- och undersummor.

Detta är den tredje upplagan av kursmaterialet. Antalet övningar har ökat och avsnittet om reella funktioner har utökats betydligt. Dessutom har en del mindre tryckfel rättats. Ett stort tack till Sarah Alsaadi som lämnat värdefulla synpunkter på materialet samt konstruerat många övningar.

Stockholm, april 2012
Författarna

Tredje upplagan, första tryckningen

Innehåll

Symboler

$\mathbb{N}$	de naturliga talen
$\mathbb{Z}$	heltalen
$\mathbb{Q}$	de rationella talen
$\mathbb{R}$	de reella talen
$\mathbb{C}$	de komplexa talen
$<$	mindre än
$\leq$	mindre eller lika med
$>$	större än
$\geq$	större eller lika med
!	fakultet
$\sum$	summa
$\binom{n}{k}$	binomialkoefficient, läses "n över k"
$\subset$	delmängd till, om $A \subset B$ så är A en delmängd till B
$\cup$	union
$\cap$	snitt
$\in$	är element i
$\notin$	är ej element i
$\Rightarrow, \Leftarrow$	implicerar
$\Leftrightarrow$	är ekvivalent med
$\wedge$	och
$\vee$	eller
VL	vänstra ledet
HL	högra ledet

1 Tal

Det första kapitlet handlar om räkning med olika typer av tal.

1.1 De positiva heltalen och de naturliga talen

Vi börjar med de tal man stöter på dagligen, nämligen *positiva heltal*. Det är tal som räknar hela antal. Mängden av de positiva heltalen betecknas $\mathbb{Z}_+$ och

$$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Om vi vill understryka att till exempel talet 2 är ett positivt heltal så skriver vi

$$2 \in \mathbb{Z}_+,$$

där symbolen $\in$ betyder tillhör. På motsvarande sätt betyder $-2 \notin \mathbb{Z}_+$ att -2 inte tillhör mängden $\mathbb{Z}_+$, det vill säga att -2 inte är ett positivt heltal.

Med de positiva heltalen saknar vi möjlighet att uttrycka "ingenting". Därför inför vi de *naturliga talen* som är de positiva heltalen inklusive talet noll. Vi betecknar de naturliga talen med symbolen $\mathbb{N}$ och

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}.$$

Observera att $\mathbb{N}$ och $\mathbb{Z}_+$ bara skiljer sig åt på ett enda tal (nollan). Eftersom alla tal som finns i $\mathbb{Z}_+$ också finns i $\mathbb{N}$. så är $\mathbb{Z}_+$ en *delmängd* av $\mathbb{N}$, vilket vi skriver som

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{N}.$$

Vad är det egentligen vi gör när vi adderar två naturliga tal? Varför är till exempel $4 + 1 = 5$? Det beror helt enkelt på att vi har definierat addition med ett som att röra oss till nästa tal i uppräkningen $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$. Betraktar vi talen som utplacerade på en linje kan vi tänka oss addition med ett som att gå ett steg till höger på den linjen. Att $4+4 = 8$ beror på att när vi flyttar oss fyra steg till höger från 4 så kommer vi att hamna på 8.

Eftersom vi hela tiden rör oss till höger på linjen när vi adderar naturliga tal så kommer vi alltid att få ett nytt naturligt tal. Vi säger att de naturliga talen är *slutna* under addition.

Multiplikation betraktar vi som upprepad addition och

$$a \cdot b = \underbrace{a + \cdots + a}_{b \text{ stycken}}.$$

Vi har visat att de naturliga talen är slutna under addition och eftersom multiplikation är upprepad addition så följer det att de naturliga talen är slutna även under multiplikation.

När vi subtraherar ett naturligt tal från ett annat rör vi oss till vänster på tallinjen. Om vi ska räkna ut $4 - 5$ så startar vi på position fyra och rör oss fem steg åt vänster. Men de naturliga talen "slutar" vid noll. De naturliga talen är alltså *inte* slutna under subtraktion. Så vi utvidgar de naturliga talen till *heltalen* .

1.2 Heltalen

Med de hela talen menas mängden

$$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

och denna betecknas $\mathbb{Z}$. Det gäller alltså att

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Med de hela talen löser vi problemet med subtraktionen $4-5$ eftersom vi nu kan röra oss till vänster om noll.

Subtraktion med ett negativt tal $-a$ definierar vi som att gå a steg till höger på tallinjen. Uttrycket $5-(-3)$ är således lika med $5+3$. När vi subtraherar ett heltal från ett annat heltal får vi ett nytt heltal. De hela talen är alltså slutna under subtraktion.

Följande lagar gäller för addition av heltal.

$(a+b)+c=a+(b+c)$	Associativa lagen
$a+b=b+a$	Kommutativa lagen
$-(-a)=a$	Negeringslagen

Det finns också två lagar som reglerar borttagandet av parenteser, nämligen

$$\boxed{\begin{aligned} a+(-b)&=a-b \\ a-(-b)&=a+b \end{aligned}}$$

Exempel 1.1. $(5+4-3)+2=5+(4-3+2)$.

Exempel 1.2. $1=4-3=4-(4-3+2)=4-4+3-2=1$.

Exempel 1.3. $1=5-4=-4+5=-(4-5)=-(-1)=1$.

Vi har sett att multiplikation av positiva heltal kan ses som en upprepad addition. På analogt vis kan vi tolka $(-4)\cdot 5$ som $-4-4-4-4-4=-20$.

Följande lagar gäller för multiplikation av heltal.

$a\cdot b=b\cdot a$	Kommutativa lagen för multiplikation
$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$	Associativa lagen för multiplikation
$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	Distributiva lagen

Den distributiva lagen behärskas vanligtvis bra från vänster till höger, men det är viktigt att även kunna gå från höger till vänster, det vill säga att skriva om uttryck på formen $a\cdot b+a\cdot c$ som $a(b+c)$.

Den distributiva lagen gäller givetvis även för fler element enligt exemplen nedan.

Exempel 1.4.

$$a\cdot(b+c+d)=ab+ac+ad.$$

Exempel 1.5.

$$(a+b)\cdot(c+d)=(a+b)c+(a+b)d=ac+bc+ad+bd.$$

Exempel 1.6.

$$5=25-20=5\cdot 5-5\cdot 4=5\cdot(5-4)=5\cdot 1=5.$$

Vi ska nu bestämma vad produkten av två negativa tal är. Vi har

$$0=-a\cdot 0=(-a)\cdot 0=(-a)\cdot(b-b).$$

Genom att utnyttja den distributiva lagen får vi

$$(-a)\cdot b+(-a)\cdot(-b)=0.$$

Vi flyttar över den vänstra termen till högerledet och får

$$(-a)\cdot(-b)=a\cdot b.$$

Produkten av två negativa tal är alltså lika med produkten av dess ”positiva motsvarigheter”.

Potenser

För att lättare hantera uttryck av typen $x \cdot x \cdot x$ har man infört *potenser*. Vi skriver

$$x \cdot x \cdot x = x^3,$$

där x är potensens *bas* och 3 är potensens *exponent* .

Potenser är ett kompakt skrivsätt och vi kan på mycket litet utrymme ge en övre gräns för antalet elementarpartiklar i hela universum enligt modern fysik, nämligen 2^{300}.

Kuriosa 1. *Det finns en sägen som säger att när uppfinnaren av det schackliknande spelet Shaturanja visade upp spelet för kungen av Indien blev denne så imponerad att han ville ge uppfinnaren en belöning. Uppfinnaren sa då att han önskade sig ett vetekorn för den första rutan på schackbrädet, två vetekorn för den andra rutan, fyra vetekorn för den tredje, åtta vetekorn för den fjärde, och så vidare. Kungen tyckte att detta lät som en rimlig belöning och beviljade uppfinnarens önskning. Han insåg inte att summan* $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{64}$ *med råge översteg samtliga vetekorn i hela världen.*

Vi kan notera att

$$x^3 \cdot x^4 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x \cdot x) = \underbrace{x \cdots x}_{\text{sju gånger}} = x^7$$

och att

$$(x^3)^2 = x^3 \cdot x^3 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) = x^6 = x^{3 \cdot 2}.$$

Allmänt gäller följande räkneregler:

$$\boxed{\begin{array}{c} x^a \cdot x^b = x^{a+b} \\ (x^a)^b = x^{a \cdot b} \end{array}}$$

Exempel 1.7. $2^4 \cdot 2^5 = 2^{4+5} = 2^9$

Exempel 1.8. $(2^4)^5 = 2^{4 \cdot 5} = 2^{20}$

Exempel 1.9. $9^2 \cdot 3^5 = (3^2)^2 \cdot 3^5 = 3^{2 \cdot 2} \cdot 3^5 = 3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$

Exempel 1.10. $(-1)^4 = 1$

Prioritetsreglerna

Att uttrycket $3 + 3 \cdot 4$ är lika med 15 och inte 24 ser nog många som självklart. Men anledningen till detta är endast konventionell. Vi har bestämt att multiplikation och division har högre *prioritet* än addition och subtraktion. Om det motsatta hade gällt så hade $3 + 3 \cdot 4$ varit lika med $6 \cdot 4 = 24$. Prioritetsreglerna är följande:

1. Beräkna parenteser.
2. Beräkna potenser.
3. Beräkna multiplikation och division.
4. Beräkna addition och subtraktion.

Exempel 1.11. *Förenkla uttrycket* $(-1)^3 + 3 \cdot ((4 - 2^3)^2 - 5)$.

Lösningsförslag: Vi använder prioritetsreglerna och får

$$\begin{aligned}(-1)^3 + 3 \cdot ((4 - 2^3)^2 - 5) &= -1 + 3 \cdot ((4 - 8)^2 - 5) = -1 + 3 \cdot ((-4)^2 - 5) = -1 + 3 \cdot (16 - 5) \\ &= -1 + 3 \cdot 11 = -1 + 33 = 32.\end{aligned}$$

★

Heltalsdivision

När man delar två heltal med varandra blir resultatet i allmänhet inget heltal. Till exempel går divisionen 17/5 inte jämt ut. Men genom att införa begreppen *kvot* och *rest* kan man studera så kallad heltalsdivision. Kvoten vid heltalsdivision av två positiva heltal a och b anger det maximal antalet gånger vi kan dra b från a och fortfarande få någonting icke-negativt kvar. Det vi får kvar är resten.

Exempel 1.12. *Beräkna kvoten och resten då 17 delas med 5.*

Lösningsförslag: Kvoten är det maximala antalet gånger som vi kan dra bort 5 från 17 och fortfarande få någonting positivt kvar. Eftersom $3 \cdot 5 = 15$ men $4 \cdot 5 = 20$ så blir kvoten 3. Vi har $17 = 3 \cdot 5 + 2$, alltså är resten lika med 2. ★

Mer formellt söker söker vi alltså kvoten k och resten r så att $a = kb + r$, där $0 \leq r < b$.

Exempel 1.13. *Beräkna kvoten och resten då* 106 *delas med* 21.

Lösningsförslag: Vi har $106 = 5 \cdot 21 + 1$, alltså är kvoten k lika med 5 och resten r lika med 1. ★

Exempel 1.14. *Beräkna kvoten och resten då* 20 *delas med* 4.

Lösningsförslag: Vi har $20 = 4 \cdot 5 + 0$, alltså är kvoten k lika med 4 och resten r lika med 0. ★

När resten är lika med noll vid heltalsdivision av a med b så betyder det att divisionen går jämt ut. Vi säger att b är en *delare* till a. Mer om detta i nästa kapitel.

Övningar

1. Beräkna $1 - (5 - 4)$.
2. Beräkna $(-1)^3$.
3. Beräkna $(-1)^{12}$.
4. Förenkla $-(a - b - (a + b)) + (a + b)$.
5. Förenkla $(a + b)(c + d) - c(a + b)$.
6. Visa att $(a + b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$.
7. Ge ett exempel på när $(x^a)^b = x^{(a^b)}$ och ett exempel på när $(x^a)^b \neq x^{(a^b)}$.
8. Beräkna kvoten k och resten r då 107 delas med 7.
9. Vad blir resten då 293 delas med 17?

1.3 Primtal

Antag att vi utgår från talen 3 och 5 och frågar oss vilka ytterligare naturliga tal vi kan bilda genom upprepad addition. De fem första talen som vi kan bilda är

$$3 + 3 = 6, \quad 3 + 5 = 8, \quad 3 + 3 + 3 = 9, \quad 5 + 5 = 10 \quad \text{och} \quad 3 + 3 + 5 = 11.$$

Om vi istället utgår från talet 1 så kan vi bilda $1 + 1 = 2$, $1 + 1 + 1 = 3$, $1 + 1 + 1 + 1 = 4$, det vill säga alla positiva heltal. Talet 1 fungerar alltså så att hela $\mathbb{Z}_+$ kan bildas från det med hjälp av upprepad addition.

Låt oss betrakta motsvarande situation för multiplikation. Vi utgår från talen 3 och 5 och frågar oss vilka ytterligare naturliga tal vi kan bilda genom upprepad multiplikation. De två första talen som vi kan bilda är

$$3 \cdot 3 = 9 \quad \text{och} \quad 3 \cdot 5 = 15.$$

Hur ska vi bära oss åt om vi vill kunna skapa alla naturliga tal på det här sättet? Låt oss lägga till talet 2. Vi kan nu även bilda

$$2 \cdot 2 = 4, \quad 2 \cdot 3 = 6, \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \quad 2 \cdot 5 = 10, \quad 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12, \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

Sammantaget har vi fått

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, \ldots\}.$$

Mängden blir tätare, men vi saknar till exempel talet 7. När vi lägger till detta tal så kan vi även bilda 14 och vi får

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, \ldots\}.$$

Vi kan fortsätta och lägga till 11 och sedan 13, men då kommer vi upptäcka att vi saknar talet 17. Talen $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ som vi utgått från är de sju första *primtalen* . Primtalen är de motsvarande multiplikativa enheterna för de naturliga talen. Varje naturligt tal större än ett kan bildas genom upprepad multiplikation av primtal.

Vi behöver förstås en mer precis beskrivning av vad som menas med ett primtal. För att göra det ska vi först berätta vad ett *sammansatt* heltal är.

Ett positivt heltal $a > 1$ är sammansatt om det kan skrivas som en produkt av två heltal b och c som är större än ett, d.v.s. $a = b \cdot c$, där $b > 1$ och $c > 1$. Nu kan vi definiera begreppet primtal.

Ett positivt heltal som är större än ett och som *inte* är sammansatt kallas för *primtal*.

Exempel 1.15. *Talen* $4, 6, 8, 9$ *är sammansatta eftersom*

$$4 = 2 \cdot 2, \quad 6 = 2 \cdot 3, \quad 8 = 2 \cdot 4 \quad \textit{och} \quad 9 = 3 \cdot 3,$$

medan talen $2, 3, 5, 7$ *är primtal eftersom dessa inte kan skrivas som en produkt av mindre postiva heltal.*

Det finns oändligt många primtal. Detta brukar man bevisa genom ett så kallat *motsägelsebevis*. Man antar att det bara finns ändligt många primtal och visar att detta leder till en motsägelse, varpå man drar slutsatsen att antalet primtal är oändligt.

Följande är exempel på kända primtal.

2	Det enda jämna primtalet. Varför?
65537	Det hittills största funna Fermatprimtalet (per 2012 03 28).
1111111111111111111	Det näst minsta primtalet som bara är en upprepning av ettor.

Lägg märke till att begreppet sammansatt tal är nära knutet till begreppet delbarhet från förra kapitlet, nämligen att ett heltal b är en *delare* till ett heltal a om $a = b \cdot c$ för något heltal c. En synonym till *delare* är *faktor*.

Vi är i huvudsak intresserade av *positiva delare* till *positiva heltal*.

Exempel 1.16. *Talet* 6 *har de positiva delarna* $1, 2, 3, 6$. *Talet* 7 *har de positiva delarna* 1 *och* 7. *Talet* 8 *har de positiva delarna* $1, 2, 4, 8$.

Kuriosa 2. *Ett tal* a *kallas* perfekt *om summan av de positiva delarna är lika med* $2a$. *Till exempel är* 6 *ett perfekt tal eftersom* $1 + 2 + 3 + 6 = 12$. *Hur många perfekta tal som finns är en öppen fråga. Kan du hitta något annat perfekt tal än sex? Tips: Det finns ett som är mindre än* 30.

Med hjälp av definitionen av delare så kan vi definiera sammansatta tal och primtal på ett annat sätt. Ett positivt heltal som är större än ett är sammansatt om det har fler än två positiva delare. Ett positivt heltal som endast har två positiva delare, sig själv och ett, kallas för ett primtal.

Ibland talar man även om *äkta delare*. Man säger att b är en äkta delare till a om b är en positiv delare till a och b är skilt från både ett och a. Ett primtal är alltså ett tal som saknar äkta delare.

Primtalsfaktorisering

Betrakta talet 520. Eftersom talet är jämnt så är det delbart med två och vi kan skriva

$$520 = 2 \cdot 260.$$

Även 260 är delbart med två och vi skriver

$$260 = 2 \cdot 130.$$

Återigen, 130 är jämt och vi får

$$130 = 2 \cdot 65.$$

Vi ser att fem är en positiv delare till 65 och

$$65 = 5 \cdot 13.$$

Vi har alltså visat att

$$520 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13.$$

Lägg märke till att $2, 5$ och 13 alla är primtal. Vi säger att vi har *primtalsfaktoriserat* 520. Primtalsfaktoriseringen av ett positivt heltal är unikt. Detta visas i Aritmetikens fundamentalsats som tas upp i högre kurser i algebra.

Primtalsfaktoriseringen av ett tal hjälper oss att ta fram delarna till talet som följande exempel visar.

Exempel 1.17. *Hur många positiva delare har talet* 520*?*

Lösningsförslag: Enligt ovan gäller det att $520 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13$. Läsaren bör övertyga sig om att de positiva delarna till talet är talen på formen $2^a \cdot 5^b \cdot 13^c$, där $0 \leq a \leq 3$, $0 \leq b \leq 1$ och $0 \leq c \leq 1$. Detta ger delarna

$$\begin{aligned}
2^0 \cdot 5^0 \cdot 13^0 = 1, \quad 2^0 \cdot 5^0 \cdot 13^1 = 13, \quad 2^0 \cdot 5^1 \cdot 13^0 = 5, \quad 2^0 \cdot 5^1 \cdot 13^1 = 65,\\
2^1 \cdot 5^0 \cdot 13^0 = 2, \quad 2^1 \cdot 5^0 \cdot 13^1 = 26, \quad 2^1 \cdot 5^1 \cdot 13^0 = 10, \quad 2^1 \cdot 5^1 \cdot 13^1 = 130,\\
2^2 \cdot 5^0 \cdot 13^0 = 4, \quad 2^2 \cdot 5^0 \cdot 13^1 = 52, \quad 2^2 \cdot 5^1 \cdot 13^0 = 20, \quad 2^2 \cdot 5^1 \cdot 13^1 = 260,\\
2^3 \cdot 5^0 \cdot 13^0 = 8, \quad 2^3 \cdot 5^0 \cdot 13^1 = 104, \quad 2^3 \cdot 5^1 \cdot 13^0 = 40 \quad \text{och} \quad 2^3 \cdot 5^1 \cdot 13^1 = 520.
\end{aligned}$$

Det finns alltså 16 positiva delare till 520.

★

Om man vill ta reda på om ett tal a är ett primtal så kan undersöka om a delas av primtalen $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$. Har man gått igenom alla primtal som är mindre än a och inte funnit någon positiv delare så vet man att a självt måste vara ett primtal. Men man behöver i själva verket inte testa alla primtal fram till talet a utan det räcker att testa alla primtal som är mindre än $\sqrt{a}$, där $\sqrt{a}$ är ett tal vars kvadrat är lika med a. Kan du fundera ut varför det är så?

Exempel 1.18. *Är* 257 *ett primtal?*

Lösningsförslag: Vi börjar med att uppskatta hur stort $\sqrt{257}$ är. Eftersom $20^2 = 400$ så gäller det att $\sqrt{400} = 20$. Alltså måste $\sqrt{257}$ vara mindre än 20. Vi har att $17^2 = 289$, alltså måste $\sqrt{257}$ även vara mindre än 17. Men $16^2 = 256$, så $\sqrt{257}$ är större än 16. Primtalen som är mindre än 17 är $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.

Eftersom 257 är udda så kan det inte vara delbart med 2. Eftersom $257 = 3 \cdot 85 + 2$ lämnas resten 2 vid division med tre och alltså kan det inte vara delbart med tre. Vi har att $5 \cdot 51 + 2 = 257$, alltså är 257 inte heller delbart med fem. Det lämnas som en övning till läsaren att verifiera att inte heller $7, 11$ och 13 är delare till 257. Alltså är 257 ett primtal. ★

Observera att primtalsfaktoriseringen av ett primtal är primtalet självt.

Övningar

1. Hur många positiva delare har talet 8?
2. Hur många äkta delare har talet 8?
3. Hur många positiva delare har talet $2^3 \cdot 5 \cdot 23^4$?
4. Avgör om talen 85, 133 och 661 är primtal. Om något tal inte är ett primtal så primtalsfaktorisera det och bestäm antalet positiva delare..
5. Försök att primtalsfaktorisera ditt personnummer eller telefonnummer med hjälp av en miniräknare. Kommentar: Detta är det enda stället i kompendiet där du förväntas använda en miniräknare!

1.4 Moduloräkning

Moduloräkning, eller *kongruensräkning*, hänger samman med begreppet rest och är något vi använder oss av ofta utan att reflektera över det. Om två tal a och b skiljer sig åt med en multipel av n säger vi att a och b är kongruenta modulo n. Detta skrivs

$$\boxed{a \equiv b \text{ (mod } n\text{) eller } a \equiv_n b \text{ och utläses "}a\text{ kongruent med }b\text{ modulo }n\text{".}}$$

Vi kommer att använda båda skrivsätten.

Exempel 1.19.

$$18 \equiv_4 14 \equiv_4 10 \equiv_4 6 \equiv_4 2 \equiv_4 -2 \textit{ och så vidare.}$$

Speciellt gäller att om talet a lämnar resten r vid division med b, så är a och r kongruenta modulo b.

Exempel 1.20. *Resten då 120 delas med 17 är 1, ty $7 \cdot 17 + 1$ och alltså är $120 \equiv 1$ (mod 17).*

Exempel 1.21. *Idag är det tisdag, vad är det för veckodag om 37 dagar?*

Lösningsförslag: Eftersom det går 7 dagar på en vecka söker vi det minsta icke-negativa heltal som är kongruent med 37 modulo 7 (eller resten vid heltalsdivision av 37 med 7 för den delen). Det gäller att

$$37 \equiv_7 2$$

eftersom $37 = 7 \cdot 5 + 2$. 37 dagar är alltså detsamma som fem veckor och två dagar. Så om vi enbart är intresserade av vilken veckodag det är efter 37 dagar kan vi lika gärna undersöka vilken veckodag det är efter två dagar. Om det är tisdag idag är det alltså torsdag om 37 dagar. ★

Vid moduloräkning kan kan man använda de tre räknesätten addition, subtraktion och multiplikation precis som vanligt. Division är däremot inte definierat i allmänhet.

Exempel 1.22. *Beräkna $18 + 11$ (mod 5). Ange svaret med ett så litet icke-negativt tal som möjligt, alltså mellan 0 och 4.*

Lösningsförslag 1: Vi lägger först ihop talen och tar reda på resten modulo 5.

$$18 + 11 = 29 \equiv 4 \text{ (mod 5)}$$

eftersom $29 = 5 \cdot 5 + 4$. ★

Ett annat sätt är att först ta reda på resten modulo 5 för de båda talen 4 och 18 och sedan addera dem.

Lösningsförslag 2:

$$18 + 11 \equiv_5 3 + 1 = 4.$$

★

Vid multiplikation och subtraktion kan man göra på samma sätt. Låt oss visa exempel på det också.

Exempel 1.23. *Beräkna* $12 - 7$ *(mod 3). Ange svaret med ett så litet icke-negativt tal som möjligt.*

Lösningsförslag: Vi har att $12 \equiv_3 0$ och $7 \equiv_3 1$ och kan därför lösa uppgiften enligt nedan.

$$12 - 7 \equiv_3 0 - 1 \equiv_3 -1 + 3 \equiv_3 2$$

Observera att vi i sista steget adderade tre eftersom -1 är ett negativt tal. ★

Exempel 1.24. *Beräkna* $6 \cdot 7$ *(mod* 5*). Ange svaret med ett så litet icke-negativt tal som möjligt.*

Lösningsförslag: Vi kan antingen först beräkna $6 \cdot 7 = 42$ och sedan ta reda på vilken om är det minsta icke-negativa heltalet kongruent med 42 modulo 5. Vi ser att $42 \equiv 2$ (mod 5). Eller så kan vi först betrakta sjuan, vi ser att $7 \equiv 2$(mod 5), och sedan sexan, $6 \equiv 1$(mod 5). Vi får

$$6 \cdot 7 \equiv_5 1 \cdot 2 \equiv_5 2.$$

★

Följande exempel illustrerar fördelen med att angripa faktorerna i en produkt innan vi utför multiplikationen.

Exempel 1.25. *Beräkna* $38 \cdot 41 + 43 \cdot 36$ *modulo* 3.

Lösningsförslag: Vi har att

$$38 = 12 \cdot 3 + 2, \quad 41 = 13 \cdot 3 + 2, \quad 43 = 14 \cdot 3 + 1 \quad \text{och} \quad 36 = 12 \cdot 3 + 0.$$

Alltså är

$$38 \cdot 41 + 43 \cdot 36 \equiv 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \equiv 1 + 0 \equiv 1 \text{ (mod 3)}.$$

★

Det vi gjort i exemplen ovan bygger på följande sats, som vi lämnar obevisad.

Sats 1. *Låt a vara ett positivt heltal och låt m_1, m_2, n_1, n_2 vara hela tal sådana att $m_1 \equiv n_1$ (mod a) och $m_2 \equiv n_2$ (mod a). Då gäller följande*

i) $m_1 + m_2 \equiv_a n_1 + n_2$.

ii) $m_1 \cdot m_2 \equiv_a n_1 \cdot n_2$.

Exempel 1.26. *Vilken rest erhålls då 211 divideras med 4?*

Lösningsförslag: Notera att vi kan skriva 211 som $211 = 2 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 1$. Vi ser att $10 \equiv_4 2$ och $100 = 10 \cdot 10 \equiv_4 2 \cdot 2 = 4 \equiv_4 0$. Om vi lägger samman detta får vi att

$$211 = 2 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 1 \equiv_4 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \equiv_4 3.$$

★

Exempel 1.27. *Vad får jämna respektive udda tal för rest vid division med 2? Varför?*

Lösningsförslag: Vi börjar med att ta några exempel för att få en uppfattning om vad svaret bör vara.

$$1 \equiv_2 1, \quad 2 \equiv_2 0, \quad 3 \equiv_2 1, \quad 4 \equiv_2 0, \quad 5 \equiv_2 1$$

Vi ser att jämna tal får rest 0 vid division med 2, detta beror på att alla jämna tal kan skrivas som $2 \cdot n$ för något heltal n. De udda talen får rest 1 vid division med två eftersom de kan skrivas på formen $2 \cdot n + 1$ för något heltal n. ★

Exempel 1.28. *Vad blir resten då 4^7 delas med 7?*

Lösningsförslag: Det gäller att $16 \equiv_7 2$, så genom att skriva $4^7 = (4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4) \cdot 4$ får vi $4^7 \equiv_7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \equiv_7 4 \cdot 2 \cdot 4 \equiv_7 2 \cdot 2 \equiv_7 4$. Resten då 4^7 delas med 7 är alltså 4.

★

Exempel 1.29. *Vad blir resten då 4^{127} delas med 7?*

Lösningsförslag: Eftersom $4^2 \equiv_7 2$ så är $4^3 \equiv_7 4 \cdot 2 \equiv_7 1$. Nu är $127 = 3 \cdot 42 + 1$, så $4^{127} = 4^{3 \cdot 42+1} = (4^3)^{42} \cdot 4$, varur det följer att $(4^3)^{42} \cdot 4 \equiv_7 1^{42} \cdot 4 \equiv_7 4$. ★

Kuriosa 3. *Moduloräkning har en mycket viktig tillämpning inom kryptering och i den välanvända RSA-algoritmen utnyttjar man en beräkningsasymmetri som uppstår vid just kongruensberäkningar.*

Övningar

1. Vilken rest erhålls då $18 + 7$ divideras med 5?
2. Vilken rest ger 64 vid division med 3?
3. Idag är det fredag. Vilken veckodag är det om 101 dagar?
4. Vilken rest ges då $64 \cdot 78 - 65 \cdot 101$ delas med 5?
5. Vilken rest ges då 3^7 delas med 10?
6. Vilken rest ges då 2^{204} delas med 11?
7. Siffersumman av ett tal är summan av de ingående siffrorna. Visa att ett tal som har en siffersumma som är delbar med tre i sig är delbart med tre. Exempel: Talet 138 har siffersumman $1 + 3 + 8 = 12$ som är delbart med tre. Alltså är 138 delbart med tre enligt påståendet ovan. Tips: Nästa avsnitt, särskilt representationen i ekvation 1.5.1 nedan, kan vara till hjälp.

1.5 Representation av heltal

Vi är så vana med hur vi skriver tal att vi knappast lägger märkte till tanken bakom. Tio kronor skriver vi som 10 kr, och nittiofem kronor som 95 kr. Men det finns många andra sätt att skriva, eller med ett finare ord, *representera* tal på. Du har antagligen stött på romersk representation av tal, där ett, fem och tio skrivs som I, V respektive X. Det här avsnittet kommer att handla om hur man kan representera tal i olika *talbaser*.

Varför är detta intressant? Låt säga att du vill beskriva hur många femtio stenar är. Du kan givetvis rita femtio streck och säga att du ser en sten för varje streck. Denna metod fungerar inte så bra i praktiken, varför vi uppfann *positionssystemet*, som ett sätt att representera olika antal.

Låt oss titta på uttrycket 3526. Vilket antal representerar detta? Skulle vi gå till banken och ta ut denna summan pengar så skulle vi sannolikt få tre stycken tusenlappar, fem hundralappar, två tiokronor och sex enkronor. Här ser vi ett tydligt mönster, varje mynt eller sedel motsvarar en viss potens av tio. Vi har alltså att $3526 = 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$. Att vi använder just talet tio härstammar från att vi har tio fingrar. Naturligtvis är 3526 inte alls samma som 5362, siffrornas position är betydande för talets värde och varje position motsvarar en viss potens av talet tio. Därför kallas vårt sätt att representera tal för positionssystemet med bas 10.

Allmänt så representerar vi heltal i bas tio enligt följande:

$$s_n s_{n-1} \ldots s_1 s_0 = s_n \cdot 10^n + s_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + s_1 \cdot 10^1 + s_0 \cdot 10^0 \tag{1.5.1}$$

Här är $s_n, s_{n-1}, \ldots, s_1, s_0$ siffrorna i talet.

Exempel 1.30. *För talet* 3526 *är* $s_3 = 3$, $s_2 = 5$, $s_1 = 2$ *och* $s_0 = 6$.

Tanken är att representationen ska vara unik, varje tal ska bara kunna skrivas på ett enda sätt. Detta för att helt enkelt undvika förvirring. Därför måste det gälla för siffrorna s_i att $0 \leq s_i \leq 9$.

Men förutom att tio är antalet fingrar vi har på händerna så är det inget speciellt med detta tal. I det här avsnittet ska vi gå igenom hur vi kan representera tal i positionssystemet med bas 2.

En dator lagrar sin data i positionssystemet med bas 2. Positionssystemet med bas 2 kallas oftast för det *binära talsystemet*.

Heltal i det binära talsystemet

Om vi använder basen två i vårt talsystem så skulle talet 28 representeras på följande sätt.

Representation i bas 2:	1	1	1	0	0
Positionsvärde:	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Talets värde:	$1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 28$				

Vi skriver detta som att $28_{10} = 11100_2$. I fortsättningen kommer vi inte att skriva ut 10:an för att markera att vi använder det decimala talsystemet, utan nöjer oss med att skriva $28 = 11100_2$.

Observera att i bas 2 använder vi bara två siffror, 0 och 1. Vi kan se det som att vi har 28 enkronor och växlar dessa till mynt med valörerna $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$ och sedan anger hur många mynt vi har av varje myntsort.

I allmänhet så representeras tal i bas 2 som följer.

Hur ett heltal skrivs i bas 2						
Representation i bas 2:	$\ldots$	s_4	s_3	s_2	s_1	s_0
Positionsvärde:	$\ldots$	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Talets värde:	$\cdots + s_4 \cdot 2^4 + s_3 \cdot 2^3 + s_2 \cdot 2^2 + s_1 \cdot 2^1 + s_0 \cdot 2^0$					

Exempel 1.31. *Skriv 18 i bas 2.*

Lösningsförslag: Vi börjar med att se efter vilken tvåpotens som är den största som är mindre (eller lika med) 18. Vi ser att $2^5 = 32$ är för stort ($32 > 18$). Däremot funkar $2^4 = 16$ alldeles utmärkt. Vi har nu bara en tvåa kvar att konvertera eftersom $18 - 16 = 2$. Vi använder då att $2^1 = 2$ och ser att vi kan skriva 18 i bas 2. Vi får

$$18 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 10010_2.$$

★

Om man har ett tal skrivet i bas 2 kan man så klart också skriva om det i bas 10. Man använder helt enkelt samma metod fast baklänges. Låt oss illustrera detta med ett exempel.

Exempel 1.32. *Konvertera* 110_2 *till bas* 10.

Lösningsförslag: Vi skriver först om 110_2 i tvåpotenser och beräknar sedan

$$110_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 + 2 + 0 = 6.$$

★

Övningar

1. Konvertera 34 till bas 2.
2. Konvertera 1101_2 till bas 10.

1.6 Rationella tal

Vi har nu tagit upp de positiva heltalen $\mathbb{Z}_+$, de naturliga talen $\mathbb{N}$ och heltalen $\mathbb{Z}$. Vi har även studerat moduloräkning och talrepresentationer. Nästa steg på vägen är de *rationella talen*.

Om a och b är två heltal så kommer lösningen till ekvationen

$$a + x = b$$

alltid att vara ett heltal eftersom

$$x = b - a$$

och heltalen ju är slutna under subtraktion. Men vad händer om vi vill lösa ekvationen

$$a \cdot x = b$$

där a och b är heltal? Är x ett heltal? Givetvis kan x vara ett heltal, exempelvis om $a = 4$ och $b = 12$ så är $x = 12/4 = 3$. Men om $a = 12$ och $b = 4$ så erhåller vi x genom att dividera båda leden i ekvationen

$$12 \cdot x = 4$$

med 4, så

$$x = 4/12 = 1/3.$$

Detta är ett bråktal, eller ett rationellt tal som vi kommer att kalla det i fortsättningen. Ett godtyckligt rationellt tal kan skrivas på formen $\frac{a}{b}$, där a och b är heltal och $b \neq 0$. Talet a i det rationella talet $\frac{a}{b}$ kallas *täljare* och b kallas *nämnare*.

Bland de rationella talen kan man alltid hitta lösningen till ekvationen $b \cdot x = a$ för två heltal a och b där $b \neq 0$.

Begreppet *rationellt tal* är besläktad med den engelska termen *ratio* som betyder *förhållande*.

Kanske är du redan av uppfattningen att heltal i själva verket är specialfall av rationella tal, och så är det ju, eftersom varje heltal a kan skrivas som $a/1$.

Man betecknar mängden av alla rationella tal med $\mathbb{Q}$, efter det engelska ordet *quotient* som betyder *kvot*. Det gäller därför att mängden av heltal är en delmängd till mängden av rationella tal, vilket vi ju som bekant uttrycker som $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

När vi löste ekvationen $12x = 4$ så utnyttjade vi att

$$\frac{4}{12} = \frac{4}{3 \cdot 4} = \frac{\cancel{4}}{3 \cdot \cancel{4}} = \frac{1}{3}.$$

Vi säger att $1/3$ är skrivet på *förkortad form*. Att vi inte kan förkorta bråket $1/3$ mer beror på att 1 och 3 saknar gemensamma delare (förutom 1). Så för att hitta den förkortade formen av ett bråk a/b kan vi primtalsfaktorisera både a och b. När vi väl har funnit primtalsfaktoriseringen kan vi förkorta bråket så att de inte längre har gemensamma delare.

Exempel 1.33. *Förkorta* $90/105$.

Lösningsförslag 1: Vi har att $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ och att $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, så

$$\frac{90}{105} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5}}{\cancel{3} \cdot \cancel{5} \cdot 7} = \frac{2 \cdot 3}{7} = \frac{6}{7}.$$

★

Ibland kan det vara lätt att se att två bråk har en gemensam delare. I så fall kan vi utföra förkortningen direkt. Låt oss därför titta på ett annat lösningsförslag.

Lösningsförslag 2: Vi ser att både 90 och 105 är delbara med 5, vi har nämligen att $90 = 5 \cdot 18$ och $105 = 5 \cdot 21$, så $90/105 = 18/21$. Vi har att $18 = 3 \cdot 6$ och $21 = 3 \cdot 7$, alltså är $90/105 = 18/21 = 6/7$. ★

Primtalsfaktorisering är beräkningstungt, och som tur är finns det en bättre metod för att avgöra om ett bråk är maximalt förkortat. Denna metod heter *Euklides algoritm* och den gås normalt igenom i högskolornas grundkurser.

Ibland skriver sneda bråkstreck och ibland raka. Men det är ingen skillnad i betydelse, alltså gäller det att

$$a/b = \frac{a}{b}.$$

Addition, multiplikation och division av bråk

Vi adderar bråk genom att göra *liknämnigt* och skriva dem på *gemensamt bråkstreck* enligt

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{d \cdot a}{d \cdot b} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Vi multiplicerar bråk genom att multiplicera täljare och nämnare för sig;

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Division av bråk ges av

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c},$$

vilket vi kan visa genom att multiplicera både täljare och nämnare med d/c. Detta ger oss

$$\frac{\frac{d}{c} \cdot \frac{a}{b}}{\frac{d}{c} \cdot \frac{c}{d}} = \frac{\frac{d}{c} \cdot \frac{a}{b}}{\frac{\cancel{d}}{\cancel{c}} \cdot \frac{\cancel{c}}{\cancel{d}}} = \frac{\frac{d}{c} \cdot \frac{a}{b}}{1} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Exempel 1.34.

Skriv $\frac{3}{4} + \frac{-4}{5}$ *på förkortad form.*

Lösningsförslag:

$$\frac{3}{4} + \frac{-4}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot (-4)}{4 \cdot 5} = \frac{-1}{20} = -\frac{1}{20}$$

★

När två nämnare har gemensamma faktorer kan vi uppnå liknämnighet genom att använda mindre tal.

Exempel 1.35.

Skriv $\frac{1}{6} + \frac{3}{14}$ *på förkortad form.*

Lösningsförslag: Vi har $6 = 2 \cdot 3$ och $14 = 2 \cdot 7$, så genom att multiplicera båda sidor i det första bråket med 7 och båda sidor i det andra med 3 får vi liknämnighet. Detta ger oss

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{14} = \frac{7}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{14} = \frac{7+9}{42} = \frac{16}{42} = \frac{8}{21}.$$

★

Exempel 1.36.

Skriv $\frac{3}{4} \cdot \frac{-4}{5}$ *och svara på förkortad form.*

Lösningsförslag 1:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{-4}{5} = \frac{3 \cdot (-4)}{4 \cdot 5} = \frac{-12}{20} = -\frac{12}{20} = -\frac{3 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot 5} = -\frac{3}{5}.$$

★

Givetvis kan vi förkorta bråket i det andra steget direkt.

Lösningsförslag 2:

$$\frac{3}{\cancel{4}} \cdot \frac{-\cancel{4}}{5} = \frac{3 \cdot (-1)}{5} = -\frac{3}{5}.$$

★

Exempel 1.37.

Skriv $\dfrac{\frac{-3}{4}}{\frac{5}{4}}$ *på förkortad form.*

Lösningsförslag:

$$\frac{\frac{-3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{-3 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot 5} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}.$$

★

Exempel 1.38.

Skriv $\dfrac{2}{\frac{5}{4}} + \dfrac{\frac{5}{4}}{2} - 2 \cdot \dfrac{4}{5}$ *på förkortad form.*

Lösningsförslag:

$$\frac{2}{\frac{5}{4}} + \frac{\frac{5}{4}}{2} - 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{5}{4}} + \frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{1}} - \frac{8}{5} = \frac{8}{5} + \frac{5}{8} - \frac{8}{5} = \frac{5}{8}.$$

★

Exempel 1.39.

Skriv $2/(2/3) + (5/4)/2$ *på förkortad form.*

Lösningsförslag:

$$2/(2/3)+(5/4)/2=\frac{\frac{2}{1}}{\frac{2}{3}}+\frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{1}}=\frac{3}{1}+\frac{5}{8}=\frac{29}{8}.$$

★

Exempel 1.40.

Skriv $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{3}{2}$ *på förkortad form.*

Lösningsförslag:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{3}{2}=\frac{7\cdot 2\cdot 1}{7\cdot 2\cdot 5}+\frac{5\cdot 2}{5\cdot 2\cdot 7}-\frac{5\cdot 7\cdot 3}{2\cdot 5\cdot 7}=\frac{14+10-105}{2\cdot 5\cdot 7}=\frac{81}{2\cdot 5\cdot 7}.$$

Vi har här behållit faktorerna i nämnaren för att lättare kunna kontrollera huruvida bråket är skrivet på förkortad form eller ej. Eftersom $81 = 9\cdot 9 = 3^4$ så saknar täljare och nämnare gemensamma delare. Alltså är

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{3}{2}=\frac{81}{70}.$$

★

Blandad form och decimalform

På högskolan undviker vi att svara på så kallad blandad form. Det främsta skälet till det är att det kan vara oklart vad som avses. Den blandade formen $2\frac{2}{3}$ betyder två hela och två tredjedelar, det vill säga $2+\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 3}{3}+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$. Samtidigt är det snarlika uttrycket $2\cdot\frac{2}{3}$ lika med $\frac{4}{3}$, vilket är något helt annat.

Decimalform använder vi oss i princip endast av när vi behöver avrunda. Bråket $\frac{2}{10}$ förkortar vi till $\frac{1}{5}$ istället för att skriva det som 0.2. Observera dessutom att uttryck som $\frac{1}{3}$ inte ens kan skrivas på exakt decimalform.

De rationella talens slutenhet

Säkert tänker du nu att mängden $\mathbb{Q}$ är sluten under division. Detta skulle betyda att om $p,q\in\mathbb{Q}$ så gäller att $p/q\in\mathbb{Q}$ för två godtyckliga rationella tal p,q. Men detta kan inte stämma i det allmänna fallet. För även talet 0 är ju ett rationellt tal och $p/0$ är inte definierat.

För att slutenhet ska gälla vid division måste vi alltså betrakta mängden av rationella tal utan talet 0, alltså mängden $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$, där $\backslash$-tecknet kallas mängdminus. Inom denna mängd gäller att division av två godtyckliga element (nollskilda rationella tal) ger oss ett element i samma mängd. Givetvis är mängden av alla rationella tal $\mathbb{Q}$ sluten under addition, subtraktion och multiplikation då alla dessa operationer med rationella tal resulterar i rationella tal.

Övningar

1. Skriv $1/3+1/2+1/7$ på formen a/b där a och b saknar gemensamma delare.
2. Skriv $2\cdot 1/3+\frac{-2}{\frac{1}{3}}-\frac{\frac{8}{3}}{2}$ på förkortad form.
3. Skriv $\frac{\frac{35}{6}}{\frac{7}{3}}$ på förkortad form.

4. Representerar $-1/3$ och $\frac{1}{-6}/\frac{1}{2}$ samma rationella tal?

5. Låt $s = -\dfrac{1}{9}, t = -\dfrac{1}{6}, u = \dfrac{3}{2}$ och bestäm

   (a) $s \cdot t + u$

   (b) $\dfrac{s}{t}/\dfrac{s}{u}$

   (c) $\dfrac{s-t}{t-u}$

   (d) $(s-u) \cdot \dfrac{t}{u+t}$.

1.7 Reella tal

Om ett rationellt tal är ett tal som kan uttryckas som en kvot mellan två heltal, så är ett *irrationellt* tal ett tal som *inte* kan uttryckas som en sådan kvot.

Att det finns tal som inte är rationella upptäcktes av Pythagoras (500-talet f kr). Du känner säkert till Pythagoras sats för en rätvinklig triangel:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

där a, b betecknar kateterna och c hypotenusan. Mer om rätvinkliga trianglar och Pythagoras sats finns att läsa i kapitel 3. Om $a = b = 1$ så ger Pythagoras sats $1^2 + 1^2 = c^2$ vilket ger oss $c^2 = 2$, och då c betecknar en längd är den ett positivt tal, nämligen $\sqrt{2}$.

Detta tal kan inte uttryckas som en kvot av två heltal och $\sqrt{2}$ är alltså ett *irrationellt* tal. Ett annat exempel på ett irrationellt tal är π som är ungefär lika med $3,14$.

Kuriosa 4. *För att visa att $\sqrt{2}$ är irrationellt antar man att $\sqrt{2}$ kan skrivas som ett bråk, det vill säga som a/b, där a och b är heltal. Man visar sedan att detta leder till en motsägelse. Detta bevis utfördes av Aristoteles (300-talet f kr) och är ett utmärkt exempel på ett motsägelsebevis. Beviset är inte så komplicerat och brukar ingå i högskolornas grundkurser i matematik.*

De irrationella talen utgör tillsammans med de rationella talen de *reella talen*. De reella talen utgörs av alla punkter på den så kallade reella tallinjen. Varje punkt på tallinjen svarar alltså mot ett reellt tal. De reella talen betecknas med $\mathbb{R}$. Som bekant betecknas de rationella talen med $\mathbb{Q}$ men det finns ingen särskild beteckning för de irrationella talen. Då de utgörs av alla tal som är reella men inte rationella så ligger de i mängden $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Du kan läsa mer om mängder i kapitel 3.

Även om de rationella talen ligger oändligt tätt längs tallinjen, så finns även ett oändligt antal hål på tallinjen och det är dessa som utgörs av de irrationella talen. Att de rationella talen ligger oändligt tätt ska tolkas som att det mellan två godtyckliga rationella tal alltid finns oändligt många rationella tal! Men för att få med alla tal på tallinjen måste vi alltså ta med både de rationella och de irrationella talen.

Mer om potenser

I heltalskapitlet stötte vi på potensbegreppet. Vi ska nu generalisera begreppet till de reella talen, men vi måste vara lite försiktiga. Vi kommer att titta på två olika fall.

1. Basen är ett reellt tal och exponenten är ett heltal, till exempel $(-\sqrt{2})^2$ eller 2^{-3}.

2. Basen är ett positivt reellt tal och exponenten är ett rationellt tal, till exempel $4^{1/2}$ eller $\sqrt{2}^{-2/3}$.

Vi börjar med fall 1. Först låter vi exponenten vara ett positivt heltal. Det är naturligt att låta

$$r^a = \underbrace{r \cdots r}_{a \text{ gånger}},$$

vilket för ett rationellt tal p/q innebär att

$$(p/q)^a = p/q \cdots p/q = p^a/q^a.$$

Exempel 1.41. *Vi räknar det första exemplet från fall 1). Vi får*

$$(-\sqrt{2})^2 = (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

Låt nu exponenten vara ett icke-positivt heltal. Vi definierar

$$r^0 = 1 \text{ när } r \neq 0 \quad \text{ och } r^{-a} = \frac{1}{r^a}.$$

Observera alltså att $4^0 = (-13)^0 = (\sqrt{2})^0 = (\frac{1}{4})^0 = 1$, men att 0^0 inte är definierat.

Exempel 1.42. *Vi räknar det andra exemplet i fall 1) och får*

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Vi fortsätter med fall 2, där exponenten alltså är ett rationellt tal och basen ett icke-negativt heltal. När a är ett icke-negativt heltal definierar vi $a^{1/2}$ som det positiva tal b vars kvadrat är lika med a, det vill säga att $a^{1/2} = \sqrt{a}$. På liknande sätt definierar vi, då a är ett icke-negativt heltal, $a^{1/n}$ som det positiva tal b som upphöjt till n är lika med a, det vill säga $b^n = a$.

Exempel 1.43.

$$4^{1/2} = \sqrt{4} = 2, \quad 27^{1/3} = (3^3)^{1/3} = 3^{3\cdot(1/3)} = 3^1 = 3, \quad (2^{10})^{1/10} = 2$$

Observera att $\sqrt{4} = 2$ och inte -2, eftersom vi kräver att $\sqrt{4}$ ska vara positivt.

Slutligen, om a är är ett icke-negativt heltal så definierar vi

$$a^{c/d} = (a^c)^{1/d}.$$

Exempel 1.44. *Förenkla* $4^{3/2}$.

Lösningsförslag 1: Vi använder definitionen och skriver $4^{3/2} = (4^3)^{1/2} = \sqrt{4^3}$. Vi fortsätter och får $\sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$. ★

Lösningsförslag 2: Man kan också utnyttja potenslagen $(a^b)^c = a^{bc}$ och omskrivningen $4 = 2^2$ för att få

$$4^{3/2} = (2^2)^{3/2} = 2^{2\cdot 3/2} = 2^3 = 8.$$

★

För att se fördelen med det senare sättet, betrakta $128^{4/7}$. Att beräkna 128^4 och sedan försöka finna sjunderoten av det talet är givetvis inte att föredra framför omskrivningen $128 = 2^7$ och räkningen $2^{7\cdot 4/7} = 2^4 = 16$.

Exempel 1.45. *Förenkla* $\sqrt{2}^{-2/3}$.

Lösningsförslag 1:

$$\sqrt{2}^{-2/3} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2/3} = \left(\frac{1^2}{\sqrt{2}^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} = \frac{1^{1/3}}{2^{1/3}} = \frac{1}{2^{1/3}} = 2^{-1/3}.$$

★

Lösningsförslag 2:

$$\sqrt{2}^{-2/3} = (\sqrt{2}^2)^{-1/3} = 2^{-1/3}.$$

★

Lösningsförslag 3:

$$\sqrt{2}^{-2/3} = (2^{1/2})^{-2/3} = 2^{(1/2)\cdot(-2/3)} = 2^{-1/3}.$$

★

Exempel 1.46. *Skriv*

$$\frac{3^{1/3} \cdot 3^{-2} \cdot \sqrt{27}}{9^3 \cdot (-3)^3 \cdot 3^{-1/3}}$$

på formen $-3^{a/b}$*, där* a/b *är ett maximalt förkortat bråk.*

Lösningsförslag

$$\frac{3^{1/3} \cdot 3^{-2} \cdot \sqrt{27}}{9^3 \cdot (-3)^3 \cdot 3^{-1/3}} = \frac{3^{1/3} \cdot 3^{-2} \cdot (3^3)^{1/2}}{(3^2)^3 \cdot (-1)^3 \cdot (3)^3 \cdot 3^{-1/3}} == \frac{3^{1/3-2+3/2}}{(-1)^3 \cdot 3^{2\cdot 3+3-1/3}} = \frac{3^{-1/6}}{-3^{26/3}} =$$

$$-\frac{3^{-1/6}}{3^{26/3}} = -3^{-1/6-26/3} = -3^{-53/6}.$$

$-53/3$ är maximalt förkortat och alltså är $a = -53$ och $b = 6$. Det är även korrekt att svara $a = 53$ och $b = -6$. ★

Vi har hittills bara tittat på snälla potenser som vi förenklat till heltal, rationella tal eller reella tal. Paradexemplet på att det inte alltid är så är $\sqrt{-1} = (-1)^{1/2}$ som *inte* är något reellt tal eftersom det inte finns något reellt tal vars kvadrat är negativ. Detta leder oss till de komplexa talen.

Övningar

1. Beräkna 2^6
2. Beräkna $\sqrt{(-2)^2}$
3. Beräkna $(\frac{1}{2})^{-3}$.
4. Beräkna $\sqrt{3}^4 + (3^{1/3})^{-3}$.
5. Beräkna $81^{3/4}$.
6. Beräkna $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}$.
7. Skriv
$$\frac{2^{-1/3} \cdot 2^{-3} \cdot \sqrt{64}}{2^3 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-1/8}}$$
på formen $2^{a/b}$, där a/b är ett maximalt förkortat bråk.

1.8 Komplexa tal

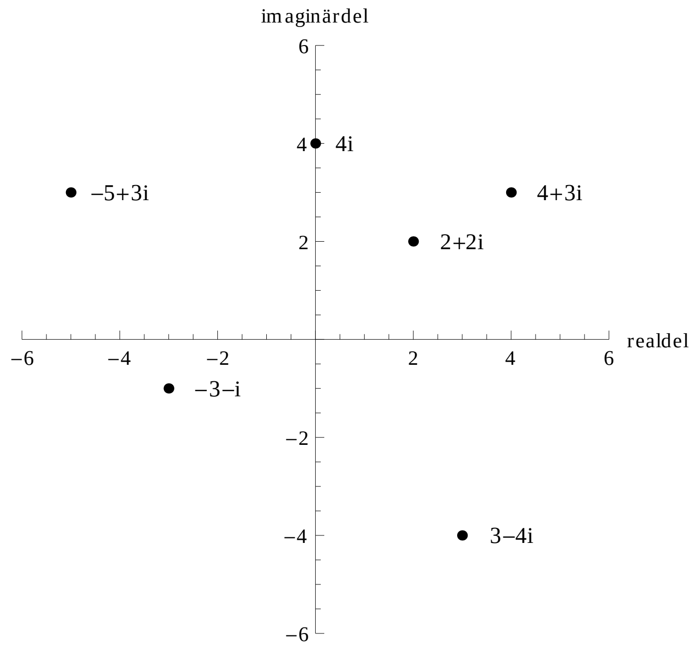
Man kan tycka att de reella talen, $\mathbb{R}$, är alla tal man någonsin skulle behöva här i livet. Men på 1500-talet insåg man att man behövde uppfinna ett nytt slags tal för att kunna lösa vissa ekvationer och man införde de *komplexa talen* .

Varje komplext tal z består av en reell del och en imaginär del och z kan skrivas som $a + bi$, där a och b är reella tal och i är den *imaginära enheten*. Den imaginära enheten i har egenskapen att $i^2 = -1$, vilket är precis det som krävs för att vi ska kunna lösa ekvationen $x^2 = -1$.

Varje komplext tal $a+bi$ svarar alltså mot ett par (a, b) av reella tal. Vi kallar a för *realdelen*, och b för *imaginärdelen*. Realdelen av ett komplext tal z skrivs $Re(z)$, och imaginärdelen skrivs $Im(z)$.

Exempel 1.47. *Låt* $z = \frac{1}{4} + 5i$. *Då är* $Re(z) = \frac{1}{4}$ *och* $Im(z) = 5$.

Bildligt talat kan man säga att när man inför de komplexa talen så lägger man till en ny dimension. De reella talen kan representeras på en tallinje, medan de komplexa talen kan framställas i ett talplan, där realdelen är x-koordinaten och imaginärdelen är y-koordinaten.



Figur 1: Här är det komplexa talplanet med några komplexa tal utmärkta.

Mängden av alla komplexa tal skrivs $\mathbb{C}$. Observera att de komplexa tal vars imaginärdel är 0, kommer vara de vanliga reella talen, $\mathbb{R}$. Detta innebär att $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Vi har alltså

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

När man adderar komplexa tal så adderar man realdelarna och imaginärdelarna för sig,

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

där a_1, a_2, b_1, b_2 är reella tal. Subtraktion behandlas på liknande sätt och vi har

$$(a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Så här långt så är det inte så märkligt. Men när vi ska multiplicera två komplexa tal $a_1 + ib_1$ och $a_2 + b_2i$ så får vi

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + i^2b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

genom att använda den distrubutiva lagen och sambandet $i^2 = -1$. Formeln är ingenting man behöver lära sig utantill, det är bättre att utföra multiplikationen direkt.

Exempel 1.48. *Låt* $z = 1 - 2i$ *och* $w = 3 + 4i$*. Beräkna* $z + w$*,* $z - w$ *och* $z \cdot w$*.*

Lösningsförslag: Vi använder reglerna ovan och får

$$z + w = (1 - 2i) + (3 + 4i) = 1 + 3 - 2i + 4i = 4 + 2i.$$

Subtraktion ger att

$$z - w = (1 - 2i) - (3 + 4i) = 1 - 3 - 2i - 4i = -2 - 6i.$$

Vi utför sedan multiplikationen och får

$$z \cdot w = (1 - 2i) \cdot (3 + 4i) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4i - 2i \cdot 3 - 2i \cdot 4i = 3 + 4i - 6i - 8i^2 = 3 - 2i + 8 = 11 - 2i.$$

Alltså har vi att $z + w = 5 + 2i$, $z - w = -2 - 6i$ och $z \cdot w = 11 - 2i$. ★

De regler som gäller för reella tal fungerar även för komplexa tal. Observera att vi ännu inte gett någon metod för att dividera två komplexa tal. Detta gör vi i nästa avsnitt.

Du kan själv verifiera att för komplexa tal z, w och v gäller det att

$z + w = w + z$	Kommutativa lagen för addition
$(z + w) + v = z + (w + v)$	Associativa lagen för addition
$z \cdot w = w \cdot z$	Kommutativa lagen för multiplikation
$(z \cdot w) \cdot v = z \cdot (w \cdot v)$	Associativa lagen för multiplikation
$z \cdot (w + v) = z \cdot w + z \cdot v$	Distributiva lagen

Exempel 1.49. *Beräkna* $(2i)^3$.

Lösningsförslag: Vi har att $(2i)^3 = 2^3 \cdot i^3$ som blir $8i^3$. Vidare så är $i^3 = i^2 \cdot i$ och $i^2 = -1$. Alltså är $8i^3 = -8i$. ★

Övningar

1. Beräkna $2 - i + 3 + 4i$.
2. Beräkna $2i \cdot (2 - 2i)$.
3. Låt $z = 1 - i$ och $w = 2 + \frac{i}{3}$.
   (a) Beräkna $z + w$.
   (b) Beräkna $z - w$
   (c) Beräkna $z \cdot w$.
4. Beräkna i^{10}.
5. Bestäm realdelen och imaginärdelen till $z = (1 + i)^3$.

1.9 Konjugatregeln och kvadreringsreglerna

Genom att använda den distributiva lagen och den kommutativa lagen för multiplikation ska vi härleda *kvadreringsreglerna* och *konjugatregeln*. Eftersom den kommutativa och den distributiva lagen gäller för alla de talsystem vi berör i detta material så kommer dessa regler att gälla allmänt.

Vi noterar först att

$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd.$$

Genom att betrakta specialfallet $a = c$ och $b = d$ får vi kvadreringsregeln

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Ibland kallas denna regel istället första kvadreringsregeln och då vi byter ut b mot $-b$ får vi det som ibland kallas *andra kvadreringsregeln.* Då gäller alltså:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Nedan följer några exempel där kvadreringsregeln kan vara praktisk att använda.

Exempel 1.50. *Använd kvadreringsregeln för att beräkna* 101^2.

Lösningsförslag: Ett bra sätt att beräkna kvadraten på ett mer komplicerat tal är att skriva om talet som summan av två tal vars kvadrater lätt kan beräknas. I detta exempel är det praktiskt att göra omskrivningen $101^2 = (100+1)^2$. Vi kan nu enkelt använda kvadreringsregeln för att beräkna kvadraten och får

$$(100+1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201.$$

★

Exempel 1.51. *Faktorisera* $x^2 - 2x + 1$.

Lösningsförslag: Här kan vi direkt använda andra kvadreringsregeln (med $a = b = 1$) och vi får

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

★

Exempel 1.52. *Faktorisera uttrycket*

$$x^3 + 4x^2 + 4x.$$

Lösningsförslag: Vi börjar med att bryta ut x eftersom x finns i alla termer i uttrycket.

$$x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4),$$

och därefter använder vi första kvadreringsregeln baklänges

$$x(x^2 + 4x + 4) = x(x+2)^2.$$

★

Konjugatregeln

Konjugatregeln säger att

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Regeln gäller eftersom

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2,$$

där vi använde oss av den kommutativa lagen som säger att $ab = ba$.

Exempel 1.53. *Skriv om uttrycket* $(2x+y)(2x-y)$ *med hjälp av konjugatregeln.*

Lösningsförslag: Vi tillämpar konjugatregeln och får

$$(2x+y)(2x-y) = (2x)^2 - y^2 = 2x \cdot 2x - y^2 = 4x^2 - y^2.$$

★

Sammanfattningsvis har vi följande räkneregler:

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Första kvadreringsregeln: } (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2. \\ \textbf{Andra kvadreringsregeln: } (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2. \\ \textbf{Konjugatregeln: } (a+b)(a-b) = a^2-b^2. \end{array}}$$

Exempel 1.54. *Förkorta följande uttryck så långt som möjligt.*

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + x}{4x^2 - 1}$$

Lösningsförslag: Vi ser att alla termer i täljaren innehåller x, varför vi kan bryta ut x ur täljaren. Vi får:

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + x}{4x^2 - 1} = \frac{x(4x^2 + 4x + 1)}{4x^2 - 1}.$$

Vi ser att första kvadreringsregeln kan användas på täljaren och konjugatregeln kan användas på nämnaren. Vi får att

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + x}{4x^2 - 1} = \frac{x(4x^2 + 4x + 1)}{4x^2 - 1} = \frac{x(2x+1)^2}{(2x+1)(2x-1)}.$$

Därefter letar vi efter gemensamma faktorer i uttrycket. Vi ser att vi kan bryta ut $(2x+1)$ ur både täljare och nämnare, det innebär att vi kan dela både täljaren och nämnaren med $(2x+1)$. Detta ger oss:

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + x}{4x^2 - 1} = \frac{x(4x^2 + 4x + 1)}{4x^2 - 1} = \frac{x(2x+1)^2}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{x(2x+1)}{(2x-1)}.$$

Hur vet vi då att vi är klara? Jo, både täljare och nämnare är faktoriserade så långt som möjligt och vi kan inte hitta några fler gemensamma faktorer. ★

Tillämpning av konjugatregeln på komplexa tal

En tillämpning av konjugatregeln är att skriva om bråk av komplexa tal. Om $z = x + iy$, så definierar vi *konjugatet* till z som $x - iy$. Detta betecknar vi med $\bar{z}$. Låt oss använda konjugatregeln för att multiplicera ihop z och dess konjugat. Vi får

$$z \cdot \bar{z} = (a+ib) \cdot (a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - (i)^2 b^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2.$$

Produkten av de två komplexa talen z och $\bar{z}$ är alltså ett positivt *reellt* tal.

Exempel 1.55. *Låt* $z = 4 + i$*. Då är* $\bar{z} = 4 - i$ *och* $z \cdot \bar{z} = 4^2 + 1^2 = 17$.

Låt nu z vara ett nollskilt komplext tal och skriv $z = a + bi$. Vi ska visa hur man kan skriva om $1/z$ på formen $c + di$, där c och d är reella tal. Idén är att förlänga bråket $1/z$ med konjugatet.

$$\frac{1}{z} = \frac{1 \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{(a^2 + b^2)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

Vi har alltså lyckats skriva $1/z$ på formen $c + di$ där $c = a/(a^2 + b^2)$ och $d = -b/(a^2 + b^2)$.

Exempel 1.56. *Skriv* $1/(2 + 3i)$ *på formen* $a + bi$*, där* a *och* b *är reella tal.*

Lösningsförslag: Konjugatet till $2 + 3i$ är $2 - 3i$. Vi förlänger bråket med konjugatet och får

$$\frac{1}{2 + 3i} = \frac{2 - 3i}{(2 + 3i) \cdot (2 - 3i)} = \frac{2 - 3i}{2^2 - (3i)^2} = \frac{2 - 3i}{4 + -(-9)} = \frac{2 - 3i}{4 + 9} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13} i.$$

★

Nästa exempel visar att vi även kan skriva ett komplext tal z/w på formen $a + bi$.

Exempel 1.57. *Skriv* $(4 + i)/(1 + \sqrt{2}i)$ *på formen* $a + bi$.

Lösningsförslag: Konjugatet till $1 + \sqrt{2}i$ är $1 - \sqrt{2}i$. Vi förlänger bråket med konjugatet och får

$$\frac{4 + i}{1 + \sqrt{2}i} = \frac{(4 + i)(1 - \sqrt{2}i)}{(1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i)} = \frac{4 + i - 4\sqrt{2}i - \sqrt{2}i \cdot i}{1 - (\sqrt{2}i)^2}$$
$$= \frac{4 + i - 4\sqrt{2}i + \sqrt{2}}{1 - (-2)} = \frac{4 + \sqrt{2} + (1 - 4\sqrt{2})i}{3} = \frac{4 + \sqrt{2}}{3} + \frac{1 - 4\sqrt{2}}{3} i.$$

★

Övningar

1. Beräkna $1002 \cdot 998$. Tips: Använd konjugatregeln.
2. Förkorta följande uttryck så långt som möjligt.
   (a) $\dfrac{x + x^2 + xy}{1 + x + y}$
   (b) $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$
   (c) $\dfrac{25 - x^2}{x - 5}$
3. Låt $z = 3 + 4i$. Beräkna $z \cdot \bar{z}$.
4. Skriv $(4 + i)/(1 - i)$ på formen $a + bi$.

2 Algebra, kombinatorik och logik

I det andra kaptilet börjar vi med att behandla polynom. Vi går noggrant igenom lösningsmetoder för polynomekvationer av grad 2 och går sedan igenom divisionsalgoritmen och faktorsatsen för polynom. Vi ger också en metod för att finna rationella rötter till en viss typ av polynomekvationer. I kombinatorikdelen kommer läsaren att få bekanta sig med hur man löser problem av typen *"På hur många sätt..."*. Kapitlet avslutas med lite logik.

2.1 Polynom och polynomekvationer

En *förstagradsekvation* eller en *linjär ekvation* är en ekvation som kan skrivas på formen $ax + b = 0$ där a och b är konstanter och $a \neq 0$. Ett sådant uttryck kallas för ett linjärt uttryck eftersom variabeln x förekommer med högsta exponent ett.

En förstagradsekvation kan skrivas på många sätt. Till exempel är

$$4x - 2 = x + 7$$

en förstagradsekvation eftersom vi kan dra bort 7 från båda leden, få

$$4x - 9 = x$$

och sedan subtrahera x från båda leden för att få

$$3x - 9 = 0.$$

Lösningen till en förstagradsekvation $ax + b = 0$ är som vi tidigare sett $x = -b/a$ vilket vi får efter att ha flyttat över b till högersidan och sedan dividerat båda leden i ekvationen med a. Vi säger att $-b/a$ är en *rot* till ekvationen $ax + b = 0$.

Roten till ekvationen

$$3x - 9 = 0$$

är följdaktligen lika med 3.

Vi kan verifiera att detta svar är korrekt genom att sätta in $x = 3$ i den ursprungliga ekvationen. Vänsterledet är $4x - 2$ som blir $4 \cdot 3 - 2 = 10$, och högerledet blir $3 + 7 = 10$ så lösningen är korrekt. Denna kontroll kallas för *insättning* och bör alltid genomföras för att se att man räknat rätt.

En *andragradsekvation* har den allmänna formen $ax^2 + bx + c = 0$, där a, b och c är konstanter och $a \neq 0$. På liknande sätt har en *tredjegradsekvation* den allmänna formen $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, där a, b, c och d är konstanter och $a \neq 0$. Innan vi generaliserar detta begrepp så introducerar vi begreppet *polynom*.

Polynom

Ett polynom av *grad* n i en variabel x är ett uttryck på formen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

där $a_n \neq 0$. Polynomets *koefficienter* är a_j:na. Dessa är tal, de kan vara reella tal, komplexa tal eller heltal — vilket man nu bestämmer sig för. Med polynomets grad avses alltså den högsta potensen av x i uttrycket ovan.

Exempel 2.1. $p(x) = 2x^5 - 1$ *är ett polynom med heltalskoefficienter av grad fem och* $p(x) = \sqrt{2}$ *är ett polynom av grad noll med reella koefficienter.*

Man kan givetvis döpa variabeln till något annat än x. Till exempel är $p(t) = 2t^5 - 1$ och $q(s) = 2s^5 - 1$ båda polynom av grad fem.

Multiplicerar man ett polynom i x av grad n med ett annat annat polynom i x av grad m så kommer det resulterande polynomet att ha grad $m + n$.

Exempel 2.2. *Polynomet* $(x^3 + x) \cdot (x^2 + x + 1)$ *har grad fem eftersom* $3 + 2 = 5$*. Lås oss verifiera detta genom att utföra beräkningen.*

$$(x^3 + x) \cdot (x^2 + x + 1) = x^3 \cdot (x^2 + x + 1) + x \cdot (x^2 + x + 1)$$
$$= x^5 + x^4 + x^3 + x^3 + x^2 + x = x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x,$$

vilket mycket riktigt är ett polynom av grad fem.

Vad händer då med graden vid addition eller subtraktion av två polynom? Graden av summan eller differensen av två polynom kan aldrig bli större än graden av det polynom som har högst grad, men gradtalet kan i övrigt bli vad som helst. Vad gradtalet blir beror på hur koefficienterna ser ut.

Om högstagradskoefficienterna till exempel tar ut varandra så sänks onekligen det resulterande polynomets grad.

Exempel 2.3. *Polynomet*

$$(5x^5 + 2x^2 + 1) + (8x^4 - 7x^3 - x) = 5x^5 + 8x^4 - 7x^3 + 2x^2 - x + 1$$

har grad 5*, polynomet*

$$(5x^5 + 2x^2 + 1) + (-5x^5 + x^2) = 3x^2 + 1$$

har grad 2 *och polynomet*

$$(5x^5 + 2x^2 + 1) - (5x^5 + 2x^2) = 1$$

har grad 0*.*

Polynomekvationer

Om vi har ett polynom $p(x)$ så är uttrycket $p(x) = 0$ en så kallad *polynomekvation*. När $p(x)$ är ett förstagradspolynom så säger vi att $p(x) = 0$ är en *förstagradsekvation*. Och när vi har ett andragradspolynom $q(x)$ så säger vi att $q(x) = 0$ är en *andragradsekvation*.

I allmänhet säger vi att en n:te-gradsekvation är en ekvation $p(x) = 0$, där $p(x)$ är ett polynom av grad n.

Vi har tidigare sett att en anledning till att införa de rationella talen är för att kunna lösa förstagradsekvationen $ax + b = 0$, där a och b är heltal.

På samma sätt infördes de komplexa talen för att kunna lösa en godtycklig andragradsekvation $ax^2 + bx + c = 0$. Som bekant har ju ekvationen $x^2 + 1 = 0$ inga reella lösningar, eftersom det inte finns något reellt tal vars kvadrat är minus ett.

Observera skillnaden mellan begreppen polynom och ekvation. Ett polynom är ett algebraiskt uttryck på formen $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. En ekvation har alltid ett vänster- och ett högerled avdelat med ett likhetstecken. Polynomet $5x^2 + x + 1$ är alltså *inte* en ekvation. Däremot är $5x^2 + x + 1 = 0$ en ekvation, men inget polynom.

Lösningen till en andragradsekvation med reella koefficienter

Vi löser en andragradsekvation med reella koefficienter genom så kallad *kvadratkomplettering*. Lösningsmetoden är ett exempel på en matematisk *algoritm*. Vi börjar med att betrakta ekvationen

$$x^2 - a = 0. \tag{2.1.1}$$

Om a är skilt från noll finns det två tal som uppfyller ekvationen, nämligen $\sqrt{a}$ och $-\sqrt{a}$ eftersom $\sqrt{a}^2 = a$ och $(-\sqrt{a})^2 = a$.

Exempel 2.4. *Ekvationen* $x^2 - 16 = 0$ *har lösningarna* $\sqrt{16} = 4$ *och* $-\sqrt{16} = -4$.

Exempel 2.5. *Ekvationen* $x^2 + 5 = 0$ *har lösningarna* $\sqrt{-5} = \sqrt{5}i$ *och* $-\sqrt{-5} = -\sqrt{5}i$.

En generell andragradsekvation löser vi genom att återföra till ekvation 2.1.1 ovan. Säg till exempel att vi vill lösa ekvationen

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Vi börjar med att addera 3 på båda sidor av ekvationen och får

$$x^2 + 2x = 3.$$

Vi ska nu försöka utföra kvadratkomplettera på vänsterledet. Detta innebär att vi i uttrycket $x^2 + 2x$ som innehåller både en x^2-term och en x-term samlar dessa båda i en gemensam kvadrat. I detta fallet får vi termerna x^2 och $2x$ via kvadraten

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Låt oss gå tillbaka till vår ekvation. Om vi lägger till 1 på båda sidor får vi

$$x^2 + 2x + 1 = 4,$$

det vill säga

$$(x + 1)^2 = 4.$$

Nu har vi lyckats återföra vår urspungliga ekvation på samma form som ekvation 2.1.1. I vänsterledet har vi ett uttryck vars kvadrat är 4. De tal vars kvadrat är 4 är talen $-\sqrt{4}$ och $\sqrt{4}$, vilket kort skrivs $\pm\sqrt{4}$. Alltså har vi att

$$(x + 1) = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Vi subtraherar ett från båda leden och får till sist

$$x = -1 \pm 2,$$

vilket ger oss de två lösningarna $x_1 = 1$ och $x_2 = -3$. Båda dessa $x-$värden uppfyller ekvationen. Försäkra dig om att detta gäller genom insättning.

Kvadratkomplettering av $ax^2 + bx + c$**.** Vi ska nu formalisera vad vi gjort och ge en lösningsmetod för allmänna andragradsekvationer. Ett resultat av vår lösningsmetod är att vi bevisar den så kallade pq-formeln som brukar läras ut på gymnasiet för att lösa andragradsekvationer.

Betrakta polynomekvationen $ax^2 + bx + c = 0$, där $a \neq 0$. Eftersom a är skilt från noll kan vi dela båda sidor av ekvationen med a och få

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Det gäller att lösningarna till ekvationen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

är desamma som lösningarna till ekvationen

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

När vi ska lösa en andragradsekvation räcker det alltså att hitta en metod för att lösa ekvationer av typen

$$x^2 + px + q = 0.$$

Vi börjar med att dra bort q från båda sidorna och får då

$$x^2 + px = -q.$$

Vi försöker nu samla $x^2 + px$ i en jämn kvadrat. Vi ser att

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

stämmer överens med vänsterledet $x^2 + px$ så när som på konstanttermen $\left(\frac{p}{2}\right)^2$.

För att kompensera konstanttermen adderar vi denna från båda sidor av ekvationen. Således kan vi skriva om vår ekvation som

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Nu kan vi skriva om vänsterledet som en jämn kvadrat och vi får

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Detta ger oss

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Slutligen subtraherar vi $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ från båda leden vilket ger oss de två lösningarna:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Exempel 2.6. *Lös andragradsekvationen $x^2 + x - 2 = 0$ med hjälp av pq−formeln och sedan med hjälp av kvadratkomplettering. Kontrollera lösningarna genom insättning.*

Lösningsförslag 1: Vi sätter in $p = 1$ och $q = -2$ i formeln och får att

$$x = -1/2 \pm \sqrt{(-1/2)^2 - (-2)} = -1/2 \pm \sqrt{1/4 + 2} = -1/2 \pm \sqrt{9/4} = -1/2 \pm 3/2,$$

vilket ger $x_1 = 1$ och $x_2 = -2$. Vi kontrollerar sedan att vi har räknat rätt genom insättning och får $1^2 + 1 - 2 = 0$ samt $(-2)^2 + -2 - 2 = 0$. ★

Lösningsförslag 2: Vi skriver om ekvationen som $x^2 + x = 2$ och samlar $x^2 + x$ i kvadraten

$$(x + 1/2)^2 = x^2 + x + 1/4,$$

där $1/2$ i parentesen är vald som halva koeffiecienten framför x-termen. Genom att lägga till $1/4$ på båda sidor i ekvationen får vi

$$x^2 + x + 1/4 = 2 + 1/4$$

som vi kan skriva om till

$$(x + 1/2)^2 = 9/4.$$

De tal vars kvadrat är lika med $9/4$ är $\pm 3/2$, alltså är $-1/2 \pm 3/2$ rötter till vår urspungliga ekvation, det vill säga $x_1 = 1$ och $x_2 = -2$, vilket är samma lösningar som vi fick ovan.

★

Exempel 2.7. *Lös ekvationen $3x^2 - 5x = 0$ med hjälp av pq− formeln och sedan med kvadratkomplettering. Kontrollera lösningarna genom insättning.*

Lösningsförslag 1: Först dividerar vi hela ekvationen med konstanten 3 och får då $x^2 - (5/3)x = 0$ som vi löser med pq-formeln (observera att $q = 0$):

$$x_{1,2} = \frac{5/3}{2} \pm \sqrt{(\frac{5/3}{2})^2} = \frac{5/3}{2} \pm \frac{5/3}{2}.$$

Det vill säga att $x_1 = 5/3$ och $x_2 = 0$ är ekvationens lösningar. Vi kontrollerar sedan att vi har räknat rätt genom insättning och får $(5/3)^2 - (5/3) \cdot (5/3) = 0$ samt $0 \cdot -(5/3) \cdot 0 = 0$. ★

Lösningsförslag 2: Vi delar båda sidor med tre och får $x^2 - (5/3)x = 0$. Vi samlar sedan $x^2 - (5/3)x$ i kvadraten

$$(x - 5/6)^2 = x^2 - 5/3x + 25/36.$$

Vi lägger till $25/36$ på båda sidor av ekvationen och får

$$x^2 - (5/3) + 25/36 = 25/36,$$

det vill säga

$$(x - 5/6)^2 = 25/36.$$

De tal vars kvadrat är $25/36$ är $\pm 5/6$. Lösningarna är därför $5/6 \pm 5/6$, det vill säga $x_1 = 5/3$ och $x_2 = 0$. ★

Lösningsförslag 3: Det finns ett tredje sätt att lösa ekvationen $3x^2 - 5x = 0$. Vi noterar att $3x^2 - 5x = x(3x - 5)$. Om detta uttryck ska vara lika med noll så måste antingen x vara noll eller så måste $(3x - 5)$ vara noll, vilket ger lösningarna 0 och $5/3$. Vi har *faktoriserat* ekvationen $3x^2 - 5x$. Mer om detta i nästa avsnitt. ★

Hittills har vi bara fått positiva tal under rottecknet och därmed bara fått reella lösningar, men givetvis fungerar formeln och algoritmen även då lösningarna är komplexa tal med nollskild imaginärdel.

Exempel 2.8. *Lös ekvationen $x^2 + x + 1$ med pq-formeln och med kvadratkomplettering.*

Lösningsförslag 1:

Från pq-formeln får vi $x_{1,2} = -1/2 \pm \sqrt{(1/2)^2 - 1} = -1/2 \pm \sqrt{-3/4}$. Vi har att

$$\sqrt{-3/4} = \sqrt{(-1) \cdot (3/4)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3/4} = i \cdot \sqrt{3}/\sqrt{4} = i \cdot \sqrt{3}/2,$$

så $x_1 = (-1 + i\sqrt{3})/2$ och $x_2 = (-1 - i\sqrt{3})/2$.

★

Lösningsförslag 2: Vi skriver om ekvationen som $x^2 + x = -1$ och sedan som

$$(x + 1/2)^2 = -1 + 1/4 = -3/4$$

via kvadratkomplettering.

De tal vars kvadrat är $-3/4$ är $\sqrt{-3/4} = i\sqrt{3}/2$ och $-\sqrt{-3/4} = -i\sqrt{3}/2$. Det gäller alltså att

$$x + 1/2 = \pm i\sqrt{3}/2.$$

Lösningarna blir $x_1 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ och $x_2 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$. ★

En förstagradsekvation har exakt en lösning, medan en andragradsekvation har som mest två lösningar. Ibland kan en andragradsekvation bara ha en lösning, till exempel har $x^2 = 0$ bara lösningen $x = 0$. Som vi tidigare har sett finns det andragradsekvationer som saknar lösningar över de reella talen, exempelvis $x^2 + 1 = 0$. I allmänhet gäller det att en n:te-gradsekvation har som mest n lösningar.

Kuriosa 5. *Det finns lösningsformler även för polynomekvationer av grad tre och fyra, men för godtyckliga polynomekvationer av grad fem eller högre saknas lösningsformler som bara innehåller de fyra räknesätten och rotutdragningar. Detta visades av norrmannen Niels Henrik Abel (1802-1829).*

Linjära ekvationssystem

Det ska ordnas en fisketävling och man vill belöna både kvantitet och kvalitet. Man bestämmer sig för att utdela 20 poäng per fisk och 10 poäng per hekto.

En tävlande som fått 3 abborrar med vikterna tre, två, och fem hekto får alltså $3 \cdot 20 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 10 = 160$ poäng, medan en tävlande som endast får en tvåhektosfisk får $1 \cdot 20 + 2 \cdot 10 = 40$ poäng.

Låt oss nu betrakta det omvända problemet. Låt oss anta att vi känner till vikten och antalet fiskar och det sammanlagda antalet poäng för två tävlande, men att vi inte vet hur många poäng det delas ut per fisk och inte heller hur mycket man får per hekto.

Säg till exempel att två fiskare båda har fått 20 poäng, att den första fiskaren har fångat 1 abborre om 4 hekto, och att den andra fiskaren fångat 2 abborrar om sammanlagt 3 hekto. Hur många poäng får då en fiskare som fångat 4 abborrar om sammanlagt ett kilo?

Låt oss anta att det delas ut a poäng per fisk och b poäng per hekto. Informationen om fiskare 1 ger oss att

$$a \cdot 1 + b \cdot 4 = 20$$

och informationen om fiskare 2 ger oss att

$$a \cdot 2 + b \cdot 3 = 20.$$

Detta ger upphov till ett *linjärt ekvationssystem* i variablerna a och b som vi skriver som

$$\begin{cases} a + 4b = 20 \\ 2a + 3b = 20. \end{cases}$$

Med linjärt i a och b menas att de obekanta a och b bara förekommer med exponent 1.

Vi löser ekvationssystemet genom *succesiv eliminering* av variabler. Den första ekvationen kan skrivas om till

$$a = 20 - 4b.$$

Vi sätter in detta uttryck för a i den andra ekvationen och får

$$2(20 - 4b) + 3b = 20.$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem i *en variabel* som har lösningen $b = 4$. (Verifiera detta.)

Sätter vi in b i den första ekvationen får vi $a = 20 - 4 \cdot 4 = 4$. En fiskare som fångat 4 abborrar om sammalagt ett kilo får alltså $4 \cdot 4 + 10 \cdot 4 = 56$ poäng.

Att succesivt eliminera variabler kan generaliseras till system med tre eller fler obekanta, och den teorin kommer läsaren att stöta på under sina första kurser på högskolan.

Övningar

1. Finn lösningarna till ekvationen $p(x) = 0$, där
   (a) $p(x) = x^2 + x + 1$
   (b) $p(x) = 3x^2 + 2x - 5$
   (c) $p(x) = (3 - x)(4 + x)$
2. Finn lösningen till ekvationssystemet
   $$\begin{cases} 3a + 2b = 4 \\ a + 3b = 2 \end{cases}$$
3. Finn lösningen till ekvationssystemet
   $$\begin{cases} x + y = 5 \\ 4x + 2y = 9 \end{cases}$$
4. Låt $p(x) = 2x^2 + ax + b$ vara ett polynom. Bestäm a och b så att $p(-3) = 6$ och $p(1) = 7$.

2.2 Faktorsatsen och polynomdivision

Liksom med vanliga tal kan man också dividera polynom med varandra. I det här avsnittet ska vi undersöka hur detta går till. Precis som för heltalsdivision kommer vi att använda begreppen *kvot* och *rest*.

Polynomdivision

Som vi såg i kapitel 1.2 så kan heltalsdivisionen $17/5$ skrivas som $17 = 3 \cdot 5 + 2$ och generellt kan heltalsdivisionen a/b skrivas som $a = k \cdot b + r$, där siffran k är kvoten och r är resten.

Om vi vill dividera polynomet $p(x)$ med polynomet $q(x)$ kan vi på motsvarande sätt skriva

$$p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x).$$

Polynomet $g(x)$ kallas för kvoten och polynomet $r(x)$ är restpolynomet. Genom att kräva att graden på $r(x)$ ska vara mindre än graden på divisorn $q(x)$ så blir framställningen

$$p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

unik.

Om $r(x) = 0$ kallas det för nollpolynomet. Om detta är fallet gäller det att $p(x)$ är *delbart* med $q(x)$ och att polynomdivisionen $p(x)/q(x)$ går jämnt ut.

Divisionsalgoritmen för polynom

Låt oss nu gå igenom divisionalgoritmen för polynom. Metoden illustreras lättast genom ett konkret exempel.

Exempel 2.9. *Dividera $p(x)$ med $q(x)$ där $p(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 6$ och $q(x) = x^2 + 4$. Vad blir kvoten och vad blir resten?*

Lösningsförslag: Vi ska eliminera förstagradstermen i $p(x)$ genom att dra bort en lämplig ”multipel” av $q(x)$. Genom att multiplicera $q(x)$ med $2x$ får vi ett uttryck som överensstämmer med $p(x)$:s högsta term. Detta ger oss

$$p(x) - 2x \cdot q(x) = (2x^3 + x^2 + 2x + 6) - (2x^3 + 8x) = x^2 - 6x + 6,$$

det vill säga

$$p(x) = 2x \cdot q(x) + (x^2 - 6x + 6).$$

För att vi ska vara klara måste graden av restpolynomet vara strikt mindre än divsorpolynomets grad. I vårt fall ska vi ha en rest med grad strikt mindre än 2, så vi måste fortsätta. Vi ser att

$$(x^2 - 6x + 6) - 1 \cdot q(x) = (x^2 - 6x + 6) - 1 \cdot (x^2 + 4) = -6x + 2,$$

det vill säga

$$(x^2 - 6x + 6) = 1 \cdot q(x) - 6x + 2$$

och nu kommer vi inte längre eftersom resten $-6x + 2$ har lägre grad än divisorn $x^2 + 4$. Jämför återigen med division av vanliga tal. När resten blivit mindre än divisorn kommer man inte längre.

Vi har alltså fått att

$$p(x) = 2x \cdot q(x) + (x^2 - 6x + 6) = 2x \cdot q(x) + 1 \cdot q(x) - 6x + 2 = (2x + 1)q(x) - 6x + 2$$

så vi har kvoten $2x + 1$ och resten $-6x + 2$. Man kan utföra polynomdivision med ”liggande stolen” eller ”trappan” om man så vill. Räkningarna vi utfört ovan kan sammanställas i liggande stolen som följer.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2x+1 \\ \cline{2-2}
x^2+4 & 2x^3+x^2+2x+6 \\
 & -(2x^3+8x) \\ \cline{2-2}
 & x^2-6x+6 \\
 & -(x^2+4) \\ \cline{2-2}
 & -6x+2
\end{array}
$$

★

Alltså är

$$2x^3 + x^2 + 2x + 6 = (2x + 1) \cdot (x^2 + 4) - 6x + 2.$$

Exempel 2.10. *Utför polynomdivisionen* $p(x)/q(x)$ *där* $p(x) = x^3 + 2x + 3$ *och* $q(x) = x + 1$.

Lösningsförslag: Vi utför polynomdivisionen med hjälp av liggande stolen. Vi ritar först upp stolen och placerar in $p(x)$ och $q(x)$.

$$
\begin{array}{r|l}
\cline{2-2}
x+1 & x^3+2x+3
\end{array}
$$

Nästa steg är att se hur många gånger x (från x+1) går i x^3 (från $x^3 + 2x + 3$), vilket är x^2 gånger. Vi drar därför bort $x^2(x + 1) = x^3 + x^2$ från $x^3 + 2x + 3$. Detta för vi in i liggande stolen enligt nedan. Över stolen skriver vi x^2 för att komma ihåg att vi dragit bort $x^2(x + 1)$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x^2 \\ \cline{2-2}
x+1 & x^3+2x+3 \\
 & -(x^3+x^2) \\ \cline{2-2}
 & -x^2+2x+3
\end{array}
$$

Vi har alltså gjort oss av med högstagradstermen i $x^3 + 2x + 3$, och skrivit $x^3 + 2x + 3 = x^2(x + 1) + (-x^2 + 2x + 3)$. Vi är inte klara ännu eftersom resten, $-x^2 + 2x + 3$, har högre grad än $x + 1$. Det vi vill göra nu är att utföra en polynomdivision mellan $-x^2 + 2x + 3$ och $x + 1$, så vi fortsätter på samma sätt. I nästa steg vill vi alltså få bort x^2-termen. Vi kontrollerar därför hur många gånger x går i $-x^2$, vilket är $-x$ gånger. Vi subtraherar därför $-x(x+1)$ från $-x^2+2x+3$, detta inför vi i liggande stolen enligt nedan.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x^2-x \\ \cline{2-2}
x+1 & x^3+2x+3 \\
 & -(x^3+x^2) \\ \cline{2-2}
 & -x^2+2x+3 \\
 & -(-x^2-x) \\ \cline{2-2}
 & 3x+3
\end{array}
$$

Slutligen vill vi utföra en polynomdivision av $3x + 3$ med $x + 1$. Vi får

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x^2-x+3 \\ \cline{2-2}
x+1 & x^3+2x+3 \\
 & -(x^3+x^2) \\ \cline{2-2}
 & -x^2+2x+3 \\
 & -(-x^2-x) \\ \cline{2-2}
 & 3x+3 \\
 & -(3x+3) \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

Eftersom vi slutade med en nolla gick polynomdivisionen jämt ut. Vi har alltså fått fram att $x^3 + 2x + 3 = (x + 1)(x^2 - x + 3)$. ★

Faktorsatsen

Låt $p(x)$ vara ett polynom av grad n. Om det finns en faktor $(x - a)$ i polynomet så kan man bryta ut denna faktor och skriva $p(x) = (x - a)q(x)$ där $q(x)$ är ett polynom av grad $n - 1$. Vi ser då att a är en rot till ekvationen $p(x) = 0$ eftersom

$$p(a) = (a - a)q(a) = 0 \cdot q(a) = 0$$

oavsett värdet på $q(a)$. Vidare gäller det alltså att om $(x - a)$ är en faktor till polynomet $p(x)$ så är a en rot till polynomekvationen $p(x) = 0$.

Exempel 2.11. *Polynomet $p(x) = x^2 - 4$ kan faktoriseras med hjälp av konjugatregeln, det vill säga $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Alltså är 2 och -2 rötter till ekvationen $p(x) = 0$.*

Vi ska nu visa att även det omvända gäller, alltså att om a är en rot till ekvationen $p(x) = 0$, för något polynom $p(x)$ av grad n, så måste $(x - a)$ vara en faktor i polynomet.

Vi börjar med att utföra polynomdivision på $p(x)$ med $(x - a)$. Från föregående kapitel vet vi att resten har grad mindre än det vi delar med, alltså får vi

$$p(x) = g(x)(x - a) + r(x),$$

där $g(x)$ är ett polynom av grad $n - 1$ och $r(x)$ är ett polynom av grad noll. Eftersom ett polynom av grad noll är konstant så kan vi skriva det som $r(x) = k$. Detta betyder alltså att $r(x)$ är lika med k oavsett värde på x.

Eftersom vi har antagit att a är en rot till $p(x)$, så är $p(a) = 0$. Sätter vi in detta i uttrycket ovan erhåller vi

$$0 = p(a) = g(a)(a - a) + r(a) = g(a) \cdot 0 + r(a) = r(a) = k.$$

Alltså är $k = 0$ och därmed har vi $p(x) = g(x)(x - a)$ och $(x - a)$ är en faktor i polynomet om a är en rot till $p(x) = 0$. Vi har således bevisat det som heter *faktorsatsen*.

Faktorsatsen: $(x - a)$ är en faktor i polynomet $p(x)$ om och endast om a är en rot till polynomekvationen $p(x) = 0$.

Uttrycket *om och endast om* innebär *ekvivalens*, vilket betyder att vi har visat påståendet åt båda hållen: om a är en rot till $p(x) = 0$ så är $(x - a)$ en faktor i polynomet och om $(x - a)$ är en faktor i polynomet så är a en rot. Enligt faktorsatsen är alltså problemet att finna lösningar till en algebraisk ekvation ekvivalent med problemet att finna förstagradsfaktorer i ett polynom.

Exempel 2.12. *Polynomet $p(x) = 5x^3 - 3x^2 - 2x$ är exempelvis delbart med faktorn $(x - 1)$ eftersom 1 är en rot till ekvationen. Även 0 är en rot till ekvationen och alltså är $p(x)$ delbart även med x.*

Exempel 2.13. *Låt $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Lös tredjegradsekvationen $p(x) = 0$ med faktorsatsen.*

Lösningsförslag: Om vi kan finna en heltalsrot genom att prova oss fram, så kan vi därefter utföra polynomdivision med motsvarande faktor för att därefter lösa den andragradsekvation vi då får. Vi ser i ekvationen ovan att $x = 2$ är en lösning till ekvationen eftersom $p(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 0$. Det betyder enligt faktorsatsen att $(x - 2)$ är en faktor i polynomet, vilket innebär att polynomet är delbart med $(x - 2)$. Med polynomdivision får vi $p(x) = (x - 2)(x^2 - x - 2)$ och ekvationen $x^2 - x - 2 = 0$ är en vanlig andragradsekvation med lösningarna $x = -1$ och $x = 2$. Således har vår ekvation lösningarna $x = -1$ och $x = 2$ där den senare är en dubbelrot. Polynomet kan därför skrivas som $p(x) = (x + 1)(x - 2)^2$. ★

Exempel 2.14. *Man vet att $x = 1$ och $x = 3$ är rötter till $x^2 + ax + b$. Bestäm a och b.*

Lösningsförslag: Enligt faktorsatsen gäller det att $(x - 1)(x - 3) = x^2 + ax + b$, det vill säga $x - 4x + 3 = x^2 + ax + b$. Alltså måste $a = -4$ och $b = 3$.

★

Hur man finner rationella rötter

Oftast är det omöjligt att gissa sig till en rot till en ekvation $p(x) = 0$. Det finns dock ett enkelt resultat som gör det möjligt att finna eventuella *rationella rötter* till $p(x) = 0$ då polynomet har heltalskoefficienter. Vi visar hur detta resultat fungerar med ett exempel.

Exempel 2.15. *Låt $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Finn alla rationella rötter till ekvationen $f(x) = 0$.*

Lösningsförslag: Vi antar att vi har en rationell rot $\frac{p}{q}$ till ekvationen, där p och q saknar gemensamma faktorer bortsett från 1 och -1 ($\frac{p}{q}$ är alltså förkortat så långt som möjligt). Då gäller att

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 6\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 11\frac{p}{q} - 6 = 0.$$

Om vi multiplicerar uttrycket med q^3 får vi

$$p^3 - 6p^2q + 11pq^2 - 6q^3 = 0.$$

Vi adderar sedan $6q^3$ till båda sidor och får

$$p^3 - 6p^2q + 11pq^2 = 6q^3.$$

Genom att bryta ut p i vänsterledet får vi

$$p(p^2 - 6pq + 11q^2) = 6q^3.$$

Eftersom nu vänsterledet är delbart med p måste även högerledet vara det. Vi antog att p och q saknar gemensamma faktorer vilket innebär att p *måste* dela 6. Möjliga värden på p blir därför $\pm1, \pm2, \pm3$ och ±6.

På samma sätt kan vi hitta möjliga värden på q. Vi gör detta genom att först subtrahera p^3 från båda led i ekvationen

$$p^3 - 6p^2q + 11pq^2 - 6q^3 = 0$$

vilket ger

$$-6p^2q + 11pq^2 - 6q^3 = -1 \cdot p^3.$$

Vi bryter ut q i vänsterledet och får

$$q(6p^2 + 11pq - 6q^2) = -1 \cdot p^3.$$

Vi ser att vänsterledet är delbart med q och därför måste också högerledet vara det. Vi antog att p och q saknar gemensamma faktorer vilket innebär att p *måste* vara delbart med -1. Vi får alltså de möjliga värderna ±1 för q. Kombinerar vi alla värden på p och q får vi

$$\begin{array}{llll}
\frac{1}{1} = 1, & \frac{1}{-1} = -1, & \frac{-1}{1} = -1, & \frac{-1}{-1} = 1, \\
\frac{2}{1} = 2, & \frac{2}{-1} = -2, & \frac{-2}{1} = -2, & \frac{-2}{-1} = 2, \\
\frac{3}{1} = 3, & \frac{3}{-1} = -3, & \frac{-3}{1} = -3, & \frac{-3}{-1} = 3, \\
\frac{6}{1} = 6, & \frac{6}{-1} = -6, & \frac{-6}{1} = -6, & \frac{-6}{-1} = 6,
\end{array}$$

det vill säga $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ och ± 6 är de möjliga rationella rötterna till ekvationen $f(x) = 0$. Låt oss testa rötterna genom insättning. Vi får

$$f(-1) = -24, \quad f(1) = 0, \quad f(-2) = -60, \quad f(2) = 0, \quad f(-3) = -120,$$
$$f(3) = 0, \quad f(-6) = -504 \quad \text{och} \quad f(6) = 60.$$

Alltså är $1, 2$ och 3 rötter till ekvationen $f(x) = 0$.

★

Mer allmänt gäller följande.

> Låt $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ vara ett polynom med heltalskoefficienter. Om p/q är en rot till ekvationen $p(x) = 0$, där p/q är förkortat så långt som möjligt, så måste p vara en faktor i a_0 och q en faktor i a_n.

Detta visar man på i princip samma sätt som vi resonerade i exemplet tidigare.

Exempel 2.16. *Låt $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Finn alla rationella lösningar till ekvationen $f(x) = 0$.*

Lösningsförslag: Om ekvationen har en rationell rot p/q så måste det gälla att q är en faktor till koefficienten framför x^3 (som är 1) och att p är en faktor till den konstanta termen (som också är 1). Alltså är de enda möjliga lösningarna

$$(-1)/(-1) = 1/1 = 1 \text{ och } 1/(-1) = (-1)/1 = -1.$$

Insättning ger

$$f(1) = 1^3 + 1^2 + 1 + 1 \neq 0$$

och

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0.$$

Alltså är -1 den enda rationella roten till ekvationen $f(x) = 0$.

★

Exempel 2.17. *Låt $f(x) = 8x^5 + 2x + 6$. Visa att ekvationen $f(x) = 0$ saknar rationella lösningar.*

Lösningsförslag: Om ekvationen har en rationell rot p/q så måste det gälla att q är en faktor till 8 och att p är en faktor till 6. Delarna till q är $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$. Delarna till p är $\pm 1, \pm 2 \pm 3, \pm 6$. Detta ger

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 6, \quad \pm\frac{1}{2}, \quad \pm\frac{1}{4}, \quad \pm\frac{3}{2}, \quad \pm\frac{3}{4}, \quad \pm\frac{1}{8}, \quad \pm\frac{3}{8}$$

som möjliga lösningar. Läsaren kan verifiera genom insättning att inget av dessa rationella tal är en lösning till ekvationen $f(x) = 0$. Alltså saknar ekvationen $f(x) = 0$ rationella lösningar. ★

Övningar

1. Utför polynomdivisionerna $p(x)/q(x)$ där

   (a) $p(x) = x^2 + x + 1$ och $q(x) = x - 1$,

   (b) $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ och $q(x) = x^2 + 3$,

   (c) $p(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x + 7$ och $q(x) = x^2 - 3x - 1$,

   (d) $p(x) = x^3 + 1$ och $q(x) = x^2 - x + 1$,

   (e) $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 2$ och $q(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 3$.

2. Visa med hjälp av faktorsatsen (utan att utföra polynomdivision) att $p(x) = x^3 - 6x + 4$ är delbart med $(x - 2)$.
3. Lös ekvationen $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ med hjälp av faktorsatsen.
4. Finn alla heltalslösningar till $x^4 - 2^5x^2 + 9$.
5. Bestäm de värden på konstanten k för vilka polynomet $p(x) = x^3 - kx + k^2$ är delbart med $(x + 2)$ och ange kvoten.
6. Finn alla rationella rötter till ekvationen $8x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$.
7. Finn alla rötter till ekvationen $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) = 0$.

2.3 Kombinatorik

Kombinatorik är den del av matematiken där man bland annat pratar om olika sorters urval.

Multiplikationsprincipen

Vi börjar avsnittet med att förklara multiplikationsprincipen med ett exempel.

Exempel 2.18. *Anna har tre tröjor och fyra par byxor. På hur många olika sätt kan hon klä sig?*

Lösningsförslag: Valet av tröja är *oberoende* av valet av byxor. Vilken tröja Anna ska ha på sig kan hon välja på tre sätt och byxorna hon ska ha på sig kan hon välja på fyra sätt. För varje val av tröja finns fyra val av byxor. Anna kan klä sig på $3 \cdot 4$ sätt. ★

Mer allmänt gäller:

> Antag att vi ska göra k val oberoende av varandra och att det i:te valet kan göras på m_i sätt. Då är det totala antalet valmöjligheter enligt multiplikationsprincipen
>
> $$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdots m_{k-1} \cdot m_k.$$

Exempel 2.19. *Stryktips går ut på att man gissar hur 13 fotbollsmatcher slutar (vinst, förlust eller oavgjort). Hur många möjliga stryktipsrader finns det?*

Lösningsförslag: Varje rad kan tippas på tre sätt och alla rader är oberoende av varandra. Enligt multiplikationsprincipen finns

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{13} = 1594323$$

stryktipsrader. Vi använde alltså multiplikationsprincipen med $k = 13$ och $m_1 = m_2 = \ldots = m_{13} = 3$. Detta var alltså ett *specialfall* av multiplikationsprincipen då alla m_i :n var lika. ★

I Kapitel 1 studerade vi begreppet positiv delare till naturliga tal. Vi såg bland annat att 520, som kan primtalsfaktoriseras som $2^3 \cdot 5 \cdot 13$, hade 16 positiva delare. Vi såg även att delarna till 520 är på formen $2^a \cdot 5^b \cdot 13^c$, där $0 \leq a \leq 3$, $0 \leq b \leq 1$ och $0 \leq c \leq 1$. För exponenten a har vi alltså fyra val (0,1,2,3) och för exponenterna b och c har vi två val $(0, 1)$ var. Enligt multiplikationsprincipen är antalet delare därför lika med $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Exempel 2.20. *Bestäm antalet delare till talet 516.*

Lösningsförslag: Vi har $516 = 2 \cdot 258 = 2 \cdot 2 \cdot 129 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 43 = 2^2 \cdot 3 \cdot 43$. Antalet delare är därför $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. ★

Exempel 2.21. *Bestäm antalet delare till talet* $2^5 \cdot 3^4 \cdot 17^9$.

Lösningsförslag: Enligt multiplikationsprincipen är antalet delare lika med $6 \cdot 5 \cdot 10 = 300$. ★

Permutationer

En *permutation* är ett ordnat urval av objekt. Vi kan se en permutation som en omordning av föremål, exempelvis är acb en permutation av bokstäverna a, b och c. En permutation tar hänsyn till i vilken ordning föremålen i urvalet kommer och varje föremål får endast vara med en gång.

Exempelvis är abc och bca olika permutationer av bokstäverna a, b och c. Så hur många permutationer av bokstäverna a, b och c finns det? Vi kan välja den första bokstaven på tre sätt, när vi har gjort detta val finns det två bokstäver kvar att välja bland. Vi kan välja en av dessa på två sätt och slutligen kan den tredje bokstaven väljas på ett sätt. Alltså finns det $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutationer av $\{a, b, c\}$, nämligen

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Vi har här använt multiplikationsprincipen med $m_1 = 3, m_2 = 2, m_1 = 1$.

På samma sätt kan vi beräkna antalet sätt att ordna de 52 korten i en kortlek. Det kan vi göra på $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sätt. För att slippa skriva ut den långa produkten inför vi nu en ny notation.

Defintion: För varje positivt heltal k inför vi beteckningen $k!$ (*k-fakultet*) för talet

$$k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1.$$

Heltalet $k!$ är alltså produkten av alla heltal mellan 1 och k. Vi definierar dessutom $0! = 1$ av praktiska skäl. I vårt kortleksexempel finns det alltså $52!$ sätt att ordna de 52 korten i en kortlek.

Exempel 2.22. *Beräkna 5!*

Lösningsförslag: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ ★

Exempel 2.23. *Hur många olika ord kan man bilda av bokstäverna i LUS (alla bokstäverna ska ingå)?*

Lösningsförslag: Vi använder multiplikationsprincipen. Den första bokstaven kan väljas på 3 sätt, den andra på 2 och den tredje på 1 sätt. Det följer att vi kan bilda $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ ord av bokstäverna i LUS. De olika orden är:

LUS, LSU, SLU, SUL ,ULS, USL.

★

Exempel 2.24. *På hur många sätt kan man bilda en kö av fyra personer?*

Lösningsförslag: Frågan handlar om att ordna fyra personer. Det finns alltså $4! = 24$ olika sätt att göra detta på. ★

Man kan också tänka sig att man väljer ut en del av objekten att skapa permutationer av.

Exempel 2.25. *På hur många sätt kan man måla en flagga med tre olika färger (som Frankrikes flagga) om vi har tio färger att välja bland?*

Lösningsförslag: Vi har tre områden att måla. Första området kan målas med tio färger, det andra med en av de övriga nio och det sista området med åtta färger. Detta ger oss då totalt $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ olika flaggor. ★

Vi kan generalisera flaggexemplet och med hjälp av multiplikationsprincipen får vi att det finns

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

sätt att ordna k objekt från n objekt.

Innan vi går in på kombinationer ska vi undersöka hur många ord vi kan bilda från en samling bokstäver där vissa bokstäver upprepas.

Exempel 2.26. *Hur många olika ord kan man bilda av bokstäverna i LUU (alla bokstäverna ska ingå)?*

Lösningsförslag: Här blir det något svårare eftersom vi har två likadana bokstäver. Om vi först bortser från detta vet vi enligt exemplet ovan att det finns 6 olika ord. Vi måste nu tänka på att vi ha två stycken U:n. Dessa kan i varje ord ordnas (inbördes byta plats) på två sätt så att ordet förblir detsamma. Vi får därför bara $\frac{3!}{2!} = 3$ möjliga ord. Från början, när vi antog att alla bokstäver var olika, räknade vi alltså varje ord två gånger. De olika orden är:

LUU, ULU, UUL.

★

Exempel 2.27. *Hur många olika ord kan man bilda av bokstäverna i ABAA (alla bokstäverna ska ingå)?*

Lösningsförslag: Om vi först bortser från att vi har tre likadana bokstäver finns det $4! = 24$ olika ord. De tre A:n kan i vart och en av dessa 24 ord ordnas (inbördes byta plats) på $3! = 6$ sätt så att ordet förblir detsamma. Vi får därför bara $\frac{4!}{3!} = 4$ möjliga ord. Från början, när vi antog att alla bokstäver var olika, räknade vi alltså varje ord sex gånger. De olika orden är:

AAAB, AABA, ABAA, BAAA.

★

Exempel 2.28. *Hur många olika ord kan man bilda av bokstäverna i SKATTKARTA (alla bokstäverna ska ingå)?*

Lösningsförslag: Vi har 10 bokstäver som ska ingå i ordet. Hade de tio bokstäverna varit olika hade det funnits $10!$ olika ord. Men nu måste vi komma ihåg att vi har två K:n som i varje ord kan ordnas på $2!$ sätt, tre A:n som kan ordnas på $3!$ sätt och tre T:n som kan ordnas på $3!$ sätt. Detta innebär att vi räknade varje ord $2!3!3!$ gånger när vi antog att alla bokstäver var olika. Det följer att vi kan bilda

$$\frac{10!}{2!3!3!} \text{ ord.}$$

★

Kombinationer

Med en *kombination* menas ett oordnat urval. Exempelvis är abc och acb samma kombination av a, b och c. De sex permutationerna av a, b och c är alltså samma kombination.

Exempel 2.29. *På hur många sätt kan vi välja ut tre personer ur en grupp med fem personer?*

Lösningsförslag: Här är det underförstått att man söker en kombination, eftersom det är en grupp personer som ska väljas, till skillnad från exemplet med flaggorna där ordningen spelade roll. Den första personen kan väljas på fem sätt, den andra på fyra och den tredje på tre sätt. Alltså kan vi göra ett ordnat urval på $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ sätt. Vi måste nu komma ihåg att för varje kombination av tre personer finns $3!$ permutationer varför vi måste dividera med sex. Varje kombination svarar alltså mot tre permutationer i detta fallet och svaret blir alltså $60/6 = 10$. De olika grupperna som kan bildas är

{P1, P2, P3}, {P1, P2, P4}, {P1, P2, P5}, {P1, P3, P4}, {P1, P3, P5}, {P1, P4, P5},

{P2, P3,P4}, {P2, P3, P5}, {P2, P4, P5}, {P3, P4, P5}, där P1 står för person ett, P2 för person två, och så vidare.

★

Hur många sätt finns det i allmänhet att oordnat välja k objekt från n objekt? Om vi hade tagit hänsyn till ordning hade det funnits

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

val. Eftersom en grupp av k personer kan ordnas på $k!$ sätt så kommer varje grupp av personer att förekomma $k!$ gånger när vi gör det ordnade urvalet. Vi får alltså det oordnade urvalet genom att dela med faktorn $k!$, vilket betyder att det finns

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

sätt att välja k objekt från n objekt oordnat.

Antalet sätt att välja k föremål av n möjliga dyker upp i många sammanhang och har därför fått en egen beteckning. Det betecknas

$$\binom{n}{k}$$

och kallas *binomialkoefficient*.

Genom att förlänga täljare och nämnare med $(n-k)!$ får vi likheten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Symbolen $\binom{n}{k}$ utläses "n över k".

Exempel 2.30. *Beräkna* $\binom{7}{3}$.

Lösningsförslag:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{7\cdot \cancel{6}\cdot 5}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 7\cdot 5 = 35$$

★

Exempel 2.31. *En pokerhand innehåller fem av de 52 korten i en kortlek. Vad är det totala antalet pokerhänder?*

Lösningsförslag: Vi ska räkna ut antalet sätt att dra fem kort ur en kortlek innehållande 52 kort, detta ska alltså ske utan ordning. Med andra ord finns det $\binom{52}{5}$ olika pokerhänder. ★

Vi kan konstatera att

$$\binom{n}{k} \quad \text{och} \quad \binom{n}{n-k}$$

är samma tal. Att välja ut k av n är ju detsamma som att strunta i att välja $(n-k)$ av n. Vi kan även visa detta algebraiskt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

Summasymbolen

Summasymbolen , $\sum$, införs för att man på ett mer kompakt sätt ska kunna skriva summan av ett större antal termer. Summasymbolen är den stora bokstaven sigma i det grekiska alfabetet. Om vi exempelvis vill summera alla tal mellan 1 och 30 skulle vi kunna skriva det som

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+ \\ 17+18+19+20+21+22+23+24+25+26+27+28+29+30$$

vilket är omständligt. Med hjälp av summasymbolen kan man istället skriva detta som

$$\sum_{i=1}^{30} i$$

Detta läser man som *summan av alla tal i då i går från ett till trettio.*

Exempel 2.32. *Skriv* $3^4+3^5+3^6+3^7+3^8+3^9+3^{10}+3^{11}$ *med hjälp av summasymbolen.*

Lösningsförslag: Vi summerar en massa trepotenser. Potenserna börjar på fyra och slutar på 11. Vi kan därför skriva

$$3^4+3^5+3^6+3^7+3^8+3^9+3^{10}+3^{11}=\sum_{i=4}^{11} 3^i.$$

Ibland skriver man också $\sum_{i=4}^{11} 3^i$ för att spara plats. ★

Binomialsatsen och Pascals triangel

Vi vet sedan tidigare att

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2,$$

enligt kvadreringsregeln. Vi ska nu se vad som händer om vi har en annan exponent än två.

Exempel 2.33. *Multiplicera ihop parenteserna i* $(x+y)^3$.

Lösningsförslag: Användning av resultatet i föregående uppgift ger att

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)^2 \\ &= (x+y)(x^2+2xy+y^2) \\ &= (x+y)x^2+(x+y)2xy+(x+y)y^2 \\ &= x^3+x^2y+2x^2y+2xy^2+xy^2+y^3 \\ &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.\end{aligned}$$

Resultatet kallas *kubregeln*. ★

Exempel 2.34. *Multiplicera ihop parenteserna i* $(x+y)^4$.

Lösningsförslag: Användning av kvadreringsregeln ger att

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= (x+y)(x+y)^3 \\ &= (x+y)(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) \\ &= (x+y)x^3+(x+y)3x^2y+(x+y)3xy^2+(x+y)y^3 \\ &= x^4+x^3y+3x^3y+3x^2y^2+3x^2y^2+3xy^3+xy^3+y^4 \\ &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4.\end{aligned}$$

★

Vi kommer att formulera regler för att räkna ut $(x+y)^n$ för alla positiva heltal n. Binomialsatsen handlar om just sådana utvecklingar.

Vi kan nu formulera binomialsatsen. Beviset utelämnas, men den intresserade läsaren uppmanas att försöka komma med ett eget bevis!

Sats 2. *För heltal n gäller det att*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Ett binom är ett polynom med två termer, varav namnet binomialsatsen.

Exempel 2.35. *Använd binomialsatsen för att utveckla $(x+y)^3$.*

Lösningsförslag: Vi använder summaformeln i binomialsatsen med $n = 3$ och får:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Termerna framför x^3, x^2y, xy^2 och y^3 kallas binomialkoefficienter. ★

Exempel 2.36. *Finn koefficienten framför x^4 i polynomet $(x+1)^6$.*

Lösningsförslag: Med $y = 1$ så har vi enligt binomialsatsen att

$$(x+1)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^{n-k} 1^k.$$

När k är 2 så är $x^{6-k} = x^4$. Alltså är koefficienten framför x^4 lika med $\binom{6}{2} = 15$. ★

Exempel 2.37. *Finn koefficienten framför x^3 i polynomet $(2+x)^6$.*

Lösningsförslag: Med $y = 2$ så har vi enligt binomialsatsen att

$$(x+2)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^{n-k} 2^k.$$

När k är 3 så är $x^{6-k} = x^3$. Alltså är koefficienten framför x^3 lika med $\binom{6}{3}2^3 = 20 \cdot 8 = 160$. ★

När vi utvecklar till exempel $(x+y)^2$ kan man direkt gissa att utvecklingen kommer innehålla termerna x^2, xy och y^2. Frågan är bara vilken koefficient vi får framför var och en av termerna. Man kan använda binomialsatsen för att ta reda på binomialkoefficienterna. *Pascals triangel* kan man se som en geometrisk framställning av binomialkoefficienterna. Namnet kommer från matematikern och fysikern Blaise Pascal. Toppen av Pascals triangel ser ut så här:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Om vi tittar på tredje raden ser vi att det är precis koefficienterna framför x^2, xy respektive y^2 i utvecklingen av $(x+y)^2$. På samma sätt finner vi binomialkoefficienterna för utvecklingen av $(x+y)^3$ på rad fyra och så vidare. Om vi räknar ut binomialkoefficienterna och ersätter dem med tal i Pascals triangel får toppen följande utseende.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Vi ser då att Pascals triangel är symmetrisk. Detta beror på att $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, som vi visat tidigare. För att förstå hur Pascals triangel är uppbyggd behöver vi en intressant egenskap hos binomialkoefficienterna, nämligen sambandet

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Den intresserade läsaren uppmanas att fundera över hur man kan bevisa sambandet.

Längst ut i vänsterkanten på Pascals triangel finns alltid ett tal på formen $\binom{n}{0} = 1$ och i högerkanten ett tal på formen $\binom{n}{n} = 1$. Däremellan är alla binomialkoefficienter summan av de båda talen ovanför, snett till höger och snett till vänster. För att beräkna summan använder vi likheten ovan. Till exempel så har vi att $\binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1}$, det vill säga $2 = 1 + 1$.

Övningar

1. På hur många sätt kan man ordna en kö med sju personer?
2. Hur många ord kan man bilda av bokstäverna i MISSISSIPPI?
3. Vi ska måla ett slott, en villa och koja i olika färger. Färgerna kan väljas bland orange, lila, rosa, röd och brun. På hur många sätt kan detta göras?
4. I en skolklass finns nio elever. På hur många sätt kan man välja ut tre av dem att delta i en tävling?
5. Beräkna
   (a) $\binom{7}{3}$ och
   (b) $\binom{12}{10}$.
6. Summera de första raderna i Pascals triangel och se om du kan finna ett samband.
7. (*svår*) Visa att $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$. Ledning: Använd binomialsatsen för ett algebraiskt bevis, tänk på resultatet i föregående uppgift. Försök gärna också visa det kombinatoriskt. Då kan det vara bra att tänka på att 2^n är antalet strängar av längd n med bara ettor och nollor.

2.4 Logik

Logik handlar om påståenden och slutsatser man kan dra från dessa. Om man till exempel påstår att $x \geq 10$, så kan man direkt dra slutsatsen att $x \geq 0$. Däremot kan man inte vara säker på att $x \geq 0$ garanterar att $x \geq 10$. Talet x kan ju nämligen ligga mellan 0 och 10.

Sådana här slutsatser kallas *implikationer*. Om vi använder matematiska symboler, så blir påståendet ovan $x \geq 10 \Rightarrow x \geq 0$. Detta utläses ”Om x är större än 10, så medför det att x är större än 0" eller "x större än 10 implicerar att x är större än 0". Ibland så händer det att två påståenden implicerar varandra. Detta kallas *ekvivalens* och innebär att båda påståendena har samma sanningsvärde samtidigt. Detta skrivs ganska naturligt som implikationspilar åt båda hållen, $\Leftrightarrow$. Ett exempel på ekvivalens är $x = 2 \Leftrightarrow x = 1 + 1$.

När man skriver om uttryck och ekvationer, så är det ofta att ekvationen före och efter manipulationen är ekvivalenta. Vad som menas med "ekvivalent" beror på vad man manipulerar. När det gäller ekvationer så säger man att två ekvationer är ekvivalenta om de har samma rötter. Det gäller alltså att

$$5x + 4 = 3x + 9 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

eftersom $x = \frac{5}{2}$ är den enda roten till alla tre ekvationerna.

Men ekvationerna

$$(x-1)x = x \quad \text{och} \quad x - 1 = 1$$

är *inte* ekvivalenta, eftersom den vänstra ekvationen har 0 och 2 som rötter, medan den högra endast har 2 som rot. Däremot gäller det att

$$(x-1)x = x \Leftarrow x - 1 = 1,$$

vilket betyder att den högra ekvationen implicerar den vänstra. Alla lösningar till den högra ekvationen är alltså lösningar till den vänstra.

Det är ett vanligt misstag att försöka lösa en ekvation av just typen

$$(x-1)x = x$$

genom att "dela med" x. Problemet är alltså att vi kan missa lösningar, i det här fallet lösningen $x = 0$.

En liknande situation får vi då vi betraktar rotekvationer. Ekvationen $\sqrt{x} = x - 2$ kan vi lösa genom att kvadrera båda led, vi får då $x = (x-2)^2$, eller $x = x^2 - 4x + 4$. Genom att använda kvadratkomplettering eller pq-formeln på $x^2 - 5x + 4 = 0$ får vi fram rötterna $x = 4$ och $x = 1$. Men om vi sätter in den andra roten i vår urspungliga ekvation får vi $1 = -1$ vilket är en falsk utsaga. Lärdomen vi ska dra är att kvadrering av båda sidor av en ekvation kan ge oss *falska* lösningar. Anledningen till detta har att göra med att kvadrering eliminerar minustecken. Utsagan

$$-2 = 2$$

är givetvis falsk, men när vi kvadrerar båda led får vi

$$4 = 4,$$

vilket är en sann utsaga.

Däremot gäller, precis som ovan, att alla lösningar till $\sqrt{x} = x - 2$ också är lösningar till $x = (x-2)^2$, det vill säga

$$\sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = (x-2)^2.$$

Exempel 2.38. *Lös ekvationen* $\sqrt{x} + 2x - 3 = 0$.

Lösningsförslag: Vi ställer rotutrycket ensamt i vänsterledet och kvadrerar sedan bägge led, vi får alltså att

$$\sqrt{x} + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (3 - 2x)^2.$$

Det högra uttrycket skrivs om till $9 - 13x + 4x^2 = 0$ vilket ger lösningarna $x = 1$ och $x = 9/4$. Vi testar lösningarna genom insättning och finner att $9/4$ är en falsk rot. ★

Så vilka operationer kan vi utföra på en ekvation och fortfarande ha ekvivalens? Vi kan utföra multiplikation och division med tal;

$$x^2 + x = 1 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot (x^2 + x) = 2 \cdot (1 + 2x),$$

och vi kan utföra addition och subtraktion med tal och med polynom;

$$x^2 + x = 1 + 2x \Leftrightarrow (-2x - 1) + (x^2 + x) = (-2x - 1) + (1 + 2x).$$

Ibland behöver man säga att flera påståenden är sanna samtidigt, till exempel "det regnar *och* det blåser". I det logiska språket skriver man $\wedge$ när man menar *och*. Påståendet $x \geq 0 \wedge x \leq 0$ säger alltså att x är större eller lika med noll, samtidigt som x är mindre eller lika med noll. Den enda möjligheten är då att $x = 0$. Vi kan då sluta oss till att

$$x \geq 0 \wedge x \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$$

och det är precis så man använder logik. Om man istället vill att minst ett av påståendena ska vara sant, använder man *eller*, vars matematiska symbol är $\vee$. Som ett exempel får vi att påståendet

$$x > 3 \vee x < 2$$

är sant för alla x som antingen är mindre än två eller större än tre.

Övningar

1. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $x - \sqrt{x} = 3/4$.
2. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $\sqrt{x} = -2$.
3. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $\sqrt{4x - 8} + 2 = x$.
4. Bestäm vilka påståenden som är sanna nedan för $x, y \in \mathbb{R}$:
   (a) $x \geq 1 \Rightarrow x \geq 0$
   (b) $x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$
   (c) $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$
   (d) $(x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0) \Leftrightarrow x \cdot y \geq 0$

3 Funktionslära

Funktioner är matematiska objekt som klassiskt har använts för att modellera naturliga samband. Vi ska definiera funktioner med hjälp av mängdlära och sedan studera några vanliga typer av funktioner, bland annat polynomfunktioner, exponentialfunktioner, logaritmfunktioner och trigonometriska funktioner. Kapitlet innehåller även viss teori för olikheter och ett mindre avsnitt om kurvritning.

3.1 Mängdlära

Begreppet mängd är fundamentalt i matematiken. Vi har redan stött på ett antal olika mängder, till exempel mängden av positiva heltal och mängden av rationella tal. En mängd är en samling objekt där varje objekt bara förekommer en gång. Objekten i en mängd kallas *element*. Vi skriver normalt en mängd inom måsvingar.

Ett exempel på en mängd är $\{1,2,3,4,100\}$, det vill säga mängden som innehåller talen 1, 2, 3, 4 samt 100. Ett annat exempel är $\{0,1/2,3,\pi,4\}$. Mängder kan även innehålla symboler, till exempel är

$$\{a,b,c,\dots,x,y,z\}$$

en mängd. En mängd kan även innehålla mängder, så

$$\{1,a,\{1,2,3,4\},\{2,3,4\}\}$$

är en mängd. Eventuellt tänker du nu att det sista exemplet innehåller upprepningar, vilket ju inte får förekomma i en mängd. Men elementen i mängden är $1, a, \{1,2,3,4\}, \{2,3,4\}$ och dessa är ju skilda från varandra, så detta bildar verkligen en mängd.

Vi har redan stött på mängdnotationerna $\in$ (tillhör) och $\subset$ (delmängd) för mängder av tal. Låt oss nu definiera dessa notationer allmänt.

För att säga att ett element ingår i en mängd så använder vi symbolen $\in$. Vi har att

$$1 \in \{1,a,\{1,2,3,4\},\{2,3,4\}\}$$

men

$$3 \notin \{1,a,\{1,2,3,4\},\{2,3,4\}\}.$$

För att säga att en hel mängd X ingår i en mängd Y så skriver vi $X \subset Y$. Detta utläses som att X är en *delmängd* till Y. Till exempel så gäller det att

$$\{1,2\} \subset \{0,1,2,5\}$$

och

$$\{\{2,3,4\},a\} \subset \{1,a,\{1,2,3,4\},\{2,3,4\}\}.$$

Observera alltså att vi inte bryr oss om i vilken ordning elementen kommer i. Självklart är varje mängd en delmängd till sig själv. Vi har alltså $X \subset X$ för alla mängder X.

Snittet av mängderna X och Y skrivs som $X \cap Y$ och är de element som ingår i både X och Y. Till exempel är

$$\{1,2,3,4,5\} \cap \{2,4,6\} = \{2,4\}.$$

Den tomma mängden som inte innehåller något element skrivs $\emptyset$. Vi har att

$$\{1,a,\{1,2,3,4\},\{2,3,4\}\} \cap \{2,3,4\} = \emptyset.$$

Observera dock att

$$\{1,a,\{1,2,3,4\},\{2,3,4\}\} \cap \{\{2,3,4\}\} = \{\{2,3,4\}\}$$

eftersom elementet $\{2,3,4\}$ ingår i båda mängderna.

Vill man däremot beskriva det som finns i minst en av mängderna, så är det *unionen* man är intresserad av. Detta skrivs $X \cup Y$ och denna mängd innehåller alla element som finns i minst en av mängderna. Vi har att $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Om X är en delmängd till Y och man vill beskriva de element som ligger i Y men inte i X så skriver man $Y \setminus X$. Man kan se det som att man subtraherar den ena mängden från den andra. Till exempel så är $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5\}$. Ett annat exempel är att de *irrationella talen* är de tal som ej kan skrivas på formen a/b, är $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

För att beskriva delmängder på ett kompakt sätt kan man använda symbolen | som avdelare. Mängden av alla jämna tal betecknas till exempel som

$$\{2 \cdot a \,|\, a \in \mathbb{Z}\},$$

vilket utläses "mängden av alla $2 \cdot a$, där a är sådant att det tillhör mängden $\mathbb{Z}$".

Vi kan ha fler krav på den högra sidan och som exempel ger vi mängden

$$\{a \,|\, a \in \mathbb{Q}, a \geq 2\}$$

som betecknar alla rationella ral större än 2.

Övningar

1. Låt $X = \{1, 2, 4, 6, 10, 100\}$ och $Y = \{2, 5, 6, 10, 101\}$. Bestäm följande mängder:
   (a) $X \cup Y$
   (b) $X \cap Y$
   (c) $X \setminus (X \cap Y)$
2. Gäller det att
$$\mathbb{Q} = \{a/b \,|\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}?$$

3.2 Funktionsbegreppet

När du tänker på en funktion så tänker du förmodligen på något i stil med $f(x) = x^2$. Kanske tänker du även på en graf för funktionen och då har du förutsatt att funktionen är definierad över de reella talen.

Med hjälp av mängder kan vi göra en mer precis definition av begreppet funktion.

Definition: Låt X och Y vara två icke-tomma mängder. Vi säger att f är en *funktion* från X till Y om det för varje element $a \in X$ svarar endast ett element $b \in Y$. Om b svarar mot a så skriver vi att $f(a) = b$ och vi säger att a avbildas på b eller att bilden av a är b.

Exempel 3.1. *Låt $X = \{a, b, c, d\}$ och låt $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Låt*

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 2, \quad f(c) = 3 \quad \textit{och} \quad f(d) = 4.$$

Då blir f en funktion från X till Y eftersom varje element i X avbildas på ett och endast ett element i Y.

Exempel 3.2. *Låt $X = \{a, b, c, d\}$ och låt $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Låt*

$$f(a) = 1, \quad f(a) = 1, \quad f(c) = 3 \quad \textit{och} \quad f(d) = 4.$$

Då är f inte *en funktion från X till Y eftersom $f(a)$ inte är unikt bestämt.*

Definitionsmängd, värdemängd och målmängd

När f är en funktion från X till Y så är X funktionens *definitionsmängd* och Y funktionens *målmängd* . Funktionens *värdemängd* är samtliga element i Y som vi kan skapa från X med hjälp av f. Vi skriver V_f för att beteckna värdemängden till f och D_f för att beteckna definitionsmängden till f.

Att f är en funktion från X till Y skriver vi i fortsättningen som $f : X \to Y$

Exempel 3.3. *Låt $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ och $f : X \to Y$ vara*

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 1, \quad f(c) = 1 \quad \textit{och} \quad f(d) = 1.$$

Då blir f en funktion från X till Y eftersom varje element i X avbildas på ett unikt *element i Y. Funktionens definitionsmängd är X, dess målmängd är Y och värdemängden är $\{1\}$.*

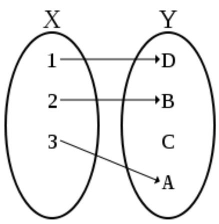
Begreppen surjektiv och injektiv

En funktion kan ha olika egenskaper och vi ska behandla begreppen *surjektiv* och *injektiv*.

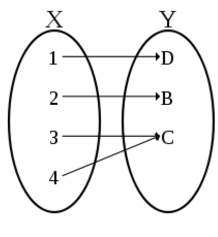
Om värdemängden är lika med målmängden säger vi att funktionen är surjektiv. I Exempel 3.1 ovan träffas alla element i Y av f, vilket vi kan skriva som att $V_f = \{1, 2, 3, 4\} = Y$ och alltså är f surjektiv. I Exempel 3.3 är $V_f = \{1\}$ och alltså är f inte surjektiv.

Om funktionen f avbildar skilda värden på skilda värden så säger vi att f är *injektiv* . I exemplet ovan är f injektiv eftersom a, b, c, d alla avbildas på olika element. Men i Exempel 3.3 så avbildas både a och b på 1, och alltså är f inte injektiv.

Figur 3.2 och 3.2 illustrerar begreppen.



Figur 2: Funktion från definitionsmängden $X = \{1, 2, 3\}$ till målmängden $Y = \{A, B, C, D\}$, där $f(1) = D, f(2) = B, f(3) = A$. Värdemängden V_f är lika med $\{A, B, D\}$. Funktionen är injektiv men inte surjektiv.



Figur 3: Funktion från definitionsmängden $X = \{1, 2, 3, 4\}$ till målmängden $Y = \{B, C, D\}$, där $f(1) = D, f(2) = B, f(3) = C, f(4) = C$. Värdemängden V_f är lika med $\{B, C, D\}$. Funktionen är surjektiv men inte injektiv.

Exempel 3.4. *Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, där $f(x) = x^2$. Funktionen är inte injektiv eftersom både -1 och 1 avbildas på talet 1. Funktionen är inte heller surjektiv eftersom det inte finnas något reellt tal vars kvadrat är negativt. Värdemängden består av alla icke-negativa reella tal, vilket vi kan beteckna med $R_{\geq 0}$.*

Det är viktigt att förstå att begreppen surjektiv och injektiv hänger samman med vilken definitionsmängd och värdemängd man väljer.

Exempel 3.5. *Låt $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, där $f(x) = x^2$. Nu är funktionen injektiv eftersom det inte finns två icke-negativa tal vars kvadrat är lika. Värdemängden är precis som i föregående exempel $R_{\geq 0}$, så funktionen är inte surjektiv.*

Exempel 3.6. *Låt $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, där $f(x) = x^2$. Denna funktion är både injektiv och surjektiv. Olika tal avbildas på olika tal och värdemängden är lika med målmängden ($\mathbb{R}_{\geq 0}$).*

Exempel 3.7. *Låt nu istället $f(x) = x^2$ vara en funktion definierad från $\mathbb{N}$ till $\mathbb{N}$. Då kommer värdemängden att vara $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\}$, det vill säga alla heltalskvadrater. Funktionen är inte surjektiv, men däremot är den injektiv eftersom $\mathbb{N}$ inte innehåller några negativa tal.*

Exempel 3.8. *Vi kan definiera en funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, det vill säga från heltalen till heltalen genom att låta varje heltal a svara mot heltalet $2a$, det vill säga $f(a) = 2a$. Denna funktion blir dock inte surjektiv eftersom vi aldrig kan "träffa" ett udda tal. Värdemängden innehåller alltså bara de jämna talen. Definitionsmängden till f är $\mathbb{Z}$ och värdemängden till f är $\{2 \cdot a \mid a \in \mathbb{Z}\}$.*

Exempel 3.9. *Låt $Y = \{j, u\}$ och definiera en funktion $g : \mathbb{Z} \to Y$ genom att låta*

$$g(a) = \begin{cases} j \text{ om a är jämnt}, \\ u \text{ om a är udda}. \end{cases}$$

Funktionen g kommer att vara surjektiv men inte injektiv eftersom (bland annat) de skilda värdena 1 och 3 avbildas på samma värde, nämligen u.

Sammansättningen av två funktioner

Låt $f : X \to Y$ och $g : Y \to C$ vara två funktioner. Eftersom funktionen g:s definitionsmängd är densamma som funktionen f:s målmängd så är det möjligt att bilda en ny funktion h från mängden X till mängden C där $x \in X$ först avbildas på $f(x) \in Y$, som i sin tur avbildas på $g(f(x)) \in C$. Funktionen h som avbildar $x \in X$ på $g(f(x)) \in C$ är då den *sammansatta funktionen* av f och g.

Funktionen h:s defintionsmängd blir alltså X och dess målmängd blir C.

Exempel 3.10. *Låt oss sammansätta vår funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(a) = 2a$ med funktionen*

$$g(a) = \begin{cases} j \text{ om a är jämnt}, \\ u \text{ om a är udda}. \end{cases}$$

Kalla den sammansatta funktionen för h. Det gäller alltså att $h : \mathbb{Z} \to \{j, u\}$, $h(a) = g(f(a))$. Då är

$$h(1) = g(f(1)) = g(2) = j, \quad h(2) = g(f(2)) = g(4) = j \quad \text{och} \quad h(3) = g(f(3)) = g(6) = j.$$

Det verkar alltså som att h avbildar alla värden på j. Det stämmer, och det beror på att

$$h(a) = g(f(a)) = g(2a) = j,$$

oberoende av värdet på a. Eftersom det inte finns något tal $a \in \mathbb{Z}$ så att $h(a) =$u, så är funktionen inte surjektiv. Funktionen är inte heller injektiv. Varför då?

Ibland är en funktions natur sådan att den inte är definierad överallt även om vi skulle önska det. Ta till exempel funktionen $f(x) = 1/x$ för reella värden på x. Den är inte definierad för $x = 0$ eftersom man inte får dividera med noll, men däremot är den definierad för alla andra reella tal. Funktionens definitionsmängd är alltså "alla reella tal utom 0", vilket vi kan skriva som $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Övningar

1. Låt f vara en funktion från $\{1, 2, 3\}$ till $\{a, b, c\}$ definierad genom $1 \to a$, $2 \to a$ och $3 \to b$. Ange $f : s$ värdemängd och avgör om f är injektiv.

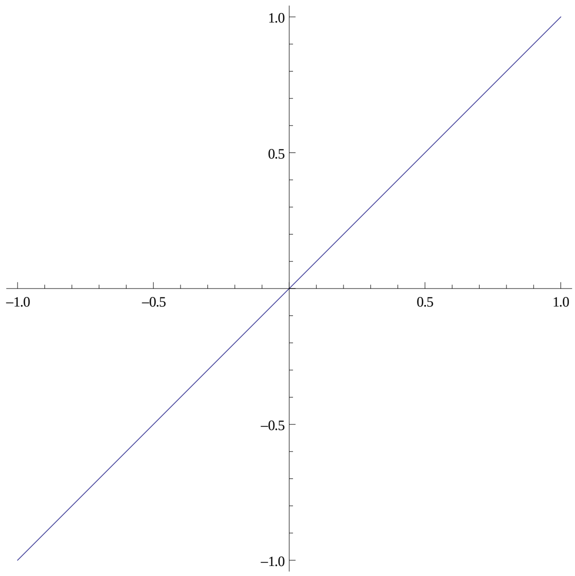
2. Låt $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vara definierad av $f(a) = -a$. Är f surjektiv? Är f injektiv?

3. Låt $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vara definierad av $g(a) = f(f(a))^2$, där f är funktionen ovan. Bestäm $g(a)$ utan att svara i termer av f. Är g surjektiv? Är g injektiv?

3.3 Grafritning och reella funktioner

I det här avsnittet kommer vi att betrakta funktioner definierade från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Sådana funktioner kallas *reella* funktioner. Grafen till en reell funktion $f(x)$ är alla punkter i xy-planet som uppfyller ekvationen $y = f(x)$. (Vi påminner om att den vågräta linjen kallas x-axeln och att den lodräta kallas y-axeln.)

När $f(x)$ är ett förstagradspolynom, $f(x) = ax + b$, kommer grafen $y = f(x)$ att bilda en rät linje som i Figur 4.



Figur 4: Skiss av funktionen $f(x) = x$.

Skissen i Figur 4 sker då x går från -2 och 2, vilket vi också kan uttrycka som att vi skissar $f(x) = x$ i *intervallet* $[-2, 2]$. Vi kan vända på hakparenteserna också. När $a \leq b$ så gäller det att

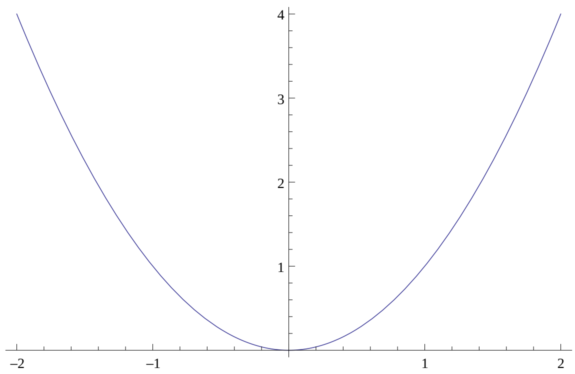
$$]a, b[= [a, b] \setminus \{a, b\},$$

vilket innebär att $]a, b[$ är intervallet mellan a och b med ändpunkterna borttagna.

Funktionen $f(x) = x$ är injektiv eftersom $f(x_1) = f(x_2)$ medför att $x_1 = x_2$. Givetvis är funktionen $f(x) = x$ även surjektiv — värdemängden till f är hela $\mathbb{R}$.

Den algebraiska motsvarigheten till grafen i Figur 4 är punktmängden $\{(a, a), a \in \mathbb{R}\}$, det vill säga mängden av alla punkter som ligger på grafen till $y = x$. Om vi istället låter $f(x) = x^2$ så blir punktmängden lika med $\{(x, x^2), x \in \mathbb{R}\}$. Denna funktion är inte injektiv eftersom $f(-1) = f(1) = 1$. Funktionen är inte heller surjektiv — det finns inget reellt tal vars kvadrat är negativ och alltså är $V_f = \{x \geq 0\}$. Grafen till $f(x)$ skissas i Figur 5.

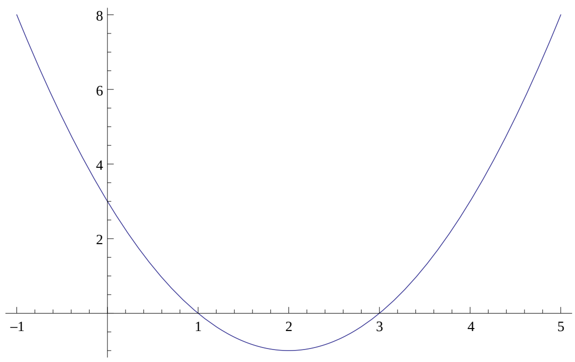
I allmänhet gäller det att om f är vilken funktion som helst så är punktmängden till grafen $y = f(x)$ lika med $\{(a, f(a)), a \in D_f\}$



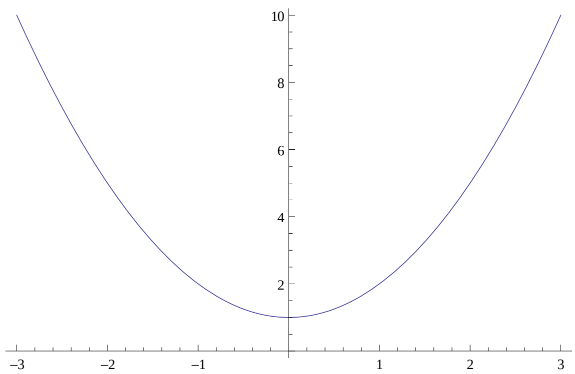
Figur 5: Skiss av funktionen $f(x) = x^2$ på intervallet $[-2, 2]$

Grafen till $f(x)$ och ekvationen $f(x) = 0$

Geometriskt svarar lösningarna till ekvationen $f(x) = 0$ mot de x-koordinater där grafen till funktionen $f(x)$ skär x-axeln.



Figur 6: Grafen till $x^2 - 4x + 3$ på intervallet $[-1, 5]$. Ekvationen $x^2 - 4x + 3 = 0$ har 1 och 3 som rötter, vilket sammanfaller med de x-koordinater där grafen skär x-axeln.

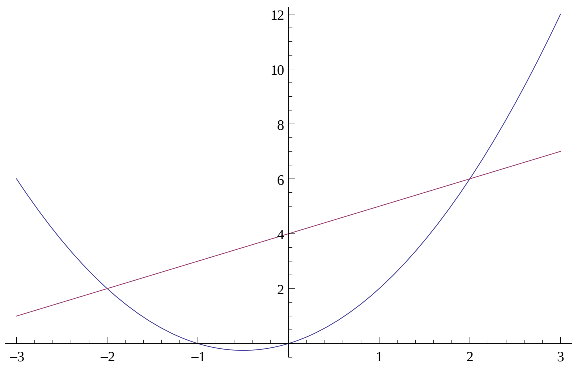


Figur 7: Grafen till $x^2 + 1$ på intervallet $[-3, 3]$. Ekvationen $x^2 + 1 = 0$ saknar reella lösningar och grafen till $x^2 + 1$ skär därför inte x-axeln.

För att bestämma skärningspunkter mellan olika grafer underlättar det ofta att översätta det geometriska problemet till ett algebraiskt problem. Genom att sätta grafernas ekvationer lika kan vi bestämma x-koordinaterna för skärningspunkterna. Med insättning av x-koordinaterna (i någon av ekvationerna) kan vi även bestämma motsvarande y-koordinat.

Exempel 3.11. *Bestäm de punkter i xy-planet där grafen till $f(x) = x^2 + x$ skär grafen till $h(x) = x + 4$.*

Lösningsförslag: Algebraiskt svarar frågan mot lösningar till ekvationen $f(x) = h(x)$, det vill säga lösningar till ekvationen $x^2 + x = x + 4$. Lösningarna till den ekvationen är $x \pm 2$. Vi har $f(2) = 6$ och $f(-2) = 2$, så skärningspunkterna är därför $(2, 6)$ och $(-2, 2)$, se även Figur 8. ★



Figur 8: Graferna till $x^2 + x$ och $x + 4$ skär varandra i punkterna $(2, 6)$ och $(-2, 2)$.

Observera att det även kan hända att en linje och en parabel saknar skärningspunkter. Linjen $y = x - 1$ kommer aldrig att skära parabeln $y = x^2 + x$ eftersom ekvationen $x^2 + x = x - 1$, som kan förenklas till $x^2 = -1$, saknar reella lösningar.

Kuriosa 6. *Algebraisk geometri är ett stort forskningsområde inom matematik och handlar i grunden om lösningar till ekvationssystem. Att kunna gå mellan algebraiska till geometriska framställningar av samma objekt är centralt i denna disciplin.*

Inversen till en funktion

Låt oss betrakta punktmängden $\{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Grafen till funktionen $f(x) = 1$ sammanfaller med bilden av den punktmängden.

Det är dock inte alltid som en punktmängd faktiskt svarar mot grafen till en funktion. Låt oss till exempel istället betrakta punktmängden $\{(1, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$. Om det skulle finnas en funktion $f(x)$ vars graf sammanfaller med bilden av punktmängden så skulle $f(1)$ anta alla reella värden och det är ju inte tillåtet. En funktion kan bara anta ett värde i varje punkt.

Som vi har sett tidigare är $\{(x, f(x)), x \in D_f\}$ punktmängden till funktionen f med definitionsmängd D_f, men som exemplet ovan visar så existerar det inte i allmänhet någon funktion g vars punktmängd är $\{(f(x), x), x \in D_f\}$. Men *när* det existerar en sådan funktion g, så säger man att g är den *inversa funktionen* till f och vi betecknar inversen g med f^{-1}. Det gäller att $f^{-1}(f(x)) = x$ och att $f(f^{-1}(x)) = x$. Om f har en invers så är den unikt bestämd och man säger att f är *inverterbar*. Inversbegreppet är symmetriskt, vilket innebär att om f^{-1} är invers till f så är f invers till f^{-1}.

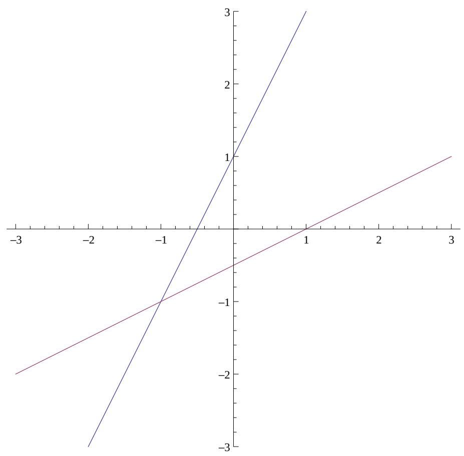
Det enklaste exemplet på en funktion som har en invers är $f(x) = x$. Den funktionen är sin egen invers, det vill säga $f^{-1} = f$ eftersom

$$\{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\} = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\} = \{(f(x), x), x \in \mathbb{R}\}.$$

Förstagradspolynom är i allmänhet inverterbara. Exemplet nedan visar hur man i detta fall kan bestämma den inversa funktionen med hjälp av substitution.

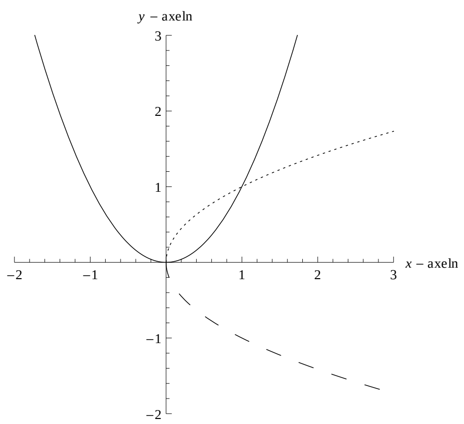
Exempel 3.12. *Bestäm den inversa funktionen till $f(x) = 2x + 1$.*

Lösningsförslag: Punktmängden som hör till grafen till $f(x)$ kan skrivas på formen $\{x, 2x+1\}$ och grafen till den inversa funktionens punktmängd blir $\{2x+1, x\}$. Genom substitutionen $z = 2x+1$ får vi $x = (z-1)/2 = z/2 - 1/2$. Punktmängden $\{2x+1, x\}$ är alltså lika med punktmängden $\{z, z/2-1/2\}$. och funktionen $g(x) = x/2-1/2$ är alltså den inversa funktionen till $2x+1$. Graferna är skissade i Figur 9. Vi kan kontrollera att $g(x)$ är en invers funktion till $f(x)$ genom att beräkna den sammansatta funktionen $f(g(x)) = 2g(x) + 1 = 2(x/2 - 1/2) + 1 = x$. ★



Figur 9: Grafen till funktionen $f(x) = 2x + 1$ och dess invers $f^{-1}(x) = x/2 - 1/2$.

Däremot saknar funktionen $f(x) = x^2$ invers. För att se detta, antag att det finns en funktion g så att $g(f(x)) = x$. Då ska det gälla att $g(f(-1)) = -1$ och att $g(f(1)) = 1$. Men $f(-1) = f(1) = 1$ och alltså innebär det både att $g(1) = -1$ och att $g(1) = 1$. Men då är g ingen funktion, eftersom 1 avbildas på två olika tal. I Figur 10 visas delar av punktmängderna $\{(a, a^2) \mid a \in \mathbb{R}\}$ och $\{(a^2, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.



Figur 10: Den heldragna kurvan visar en del av punktmängden $\{(a, a^2) \mid a \in \mathbb{R}\}$, det vill säga grafen till funktionen $f(x) = x^2$. Den streckade kurvan visar en del av punktmängden $\{(a^2, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Den streckade kurvan är inte grafen till någon funktion. Däremot är den del som har mindre streck grafen till funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ och den del som har långa streck är grafen till funktionen $f(x) = -\sqrt{x}$.

Om vi krymper definitionsmängden från hela $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}_{\geq 0}$ så har $f(x) = x^2$ en invers, nämligen

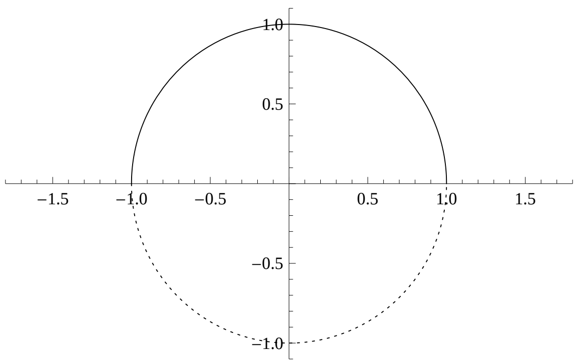
$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, eftersom det ju gäller att $f^{-1}(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = x$ om $x \geq 0$.

Istället för att krympa definitionsmängden för $f(x) = x^2$ så kan vi säga att f är inverterbar på *intervallet* $[0, \infty[$. Begreppet injektivitet hänger nära samman med begreppet invers och i allmänhet gäller det faktiskt att varje funktion f som är injektiv på ett intervall $[a, b]$ också är inverterbar i $[a, b]$.

Cirkelns ekvation

Hur ska vi beskriva en cirkel med radie r med centrum i punkten $(0, 0)$ (origo) algebraiskt? Om (x, y) är en punkt på cirkeln så gäller det att avståndet från punkten (x, y) till origo är lika med r. Det följer därför från Pythagoras sats att $x^2 + y^2 = r^2$, vilket är cirkelns ekvation när den har sitt centrum i punkten $(0, 0)$. Det innebär att punktmängden som bildar cirkeln är alla punkter (x, y) som uppfyller att $x^2 + y^2 = r^2$, det vill säga $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$. Det finns dock ingen funktion $f(x)$ så att $(x, f(x))$ är lika med den punktmängden. Anledningen till detta är att både $(r/\sqrt{2}, r/\sqrt{2})$ och $(r/\sqrt{2}, -r/\sqrt{2})$ ligger på cirkeln. Vi skulle alltså behöva kräva av vår funktion att $f(r/\sqrt{2})$ antog både värdet $r/\sqrt{2}$ och $-r/\sqrt{2}$. Vilket inte är tillåtet.

Däremot är det möjligt att beskriva punktmängden som en union av två punktmängder som vi kan beskriva med funktioner, nämligen $f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ och $f_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$, där f_1 och f_2 är definierade i intervallet $[-r, r]$. Figur 11 visar grafen till funktionerna $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ och $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.



Figur 11: Cirkel med radie 1. Den heldragna linjen är grafen till funktionen $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ och den streckade linjen är grafen till funktionen $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

Det är även möjligt att ge cirkelns ekvation även när centrum ligger i en annan punkt än origo. Låt oss anta att centrum ligger i punkten (a, b). Om (x, y) är en punkt på cirkeln så gäller det att avståndet från punkten (x, y) till punkten (a, b) är lika med r. Enligt Pythagoras sats gäller det alltså att $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, vilket är cirkelns ekvation.

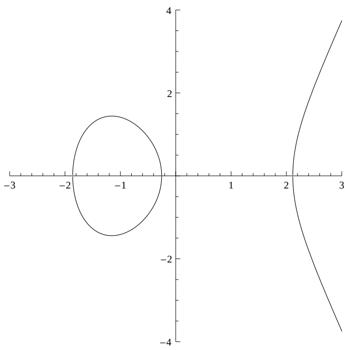
Exempel 3.13. *Bestäm ekvationen för en cirkel som har sin medelpunkt i* $(1, 1)$ *och radie* $\sqrt{2}$

Lösningsförslag: För att en punkt (x, y) ska ligga på cirkeln så måste det gälla att $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{2})^2$, vilket ger oss ekvationen $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$. ★

Kuriosa 7. *Om man modifierar cirkelns ekvation kan man få andra geometriska objekt. Låt oss betrakta mängden av alla reella tal* (x, y) *så att* $y^2 = x^3 - 4x - 1$. *Denna punktmängd bildar en så kallad elliptisk kurva, ett matematiskt objekt som är intressant bland annat för sin tillämpning inom kryptografi. Som Figur 12 visar så är punktmängden väsentligt skiljd från cirkelns punktmängd.*

Några reella funktioner och dess grafer

Vi ska nu gå igenom några vanliga reella funktioner. Vi väntar med att gå igenom de trigonometriska funktionerna till avsnitt 3.5.



Figur 12: Mängden av alla (x, y) så att $y^2 = x^3 - 4x - 1$ på intervallet $[-3, 3]$.

Räta linjer Liksom ett förstagradspolynom kan skrivas på formen $f(x) = ax + b$ så ges den räta linjens ekvation av motsvarande graf, det vill säga grafen $y = ax + b$. Ofta använder man bokstäverna k och m istälelt för a och b och skriver den räta linjens ekvation som

$$y = kx + m.$$

Geometriskt anger talet k *lutningen* på den räta linjen, det vill säga kvoten av skillnaden i y-led med skillnaden i x-led för två godtyckliga distinkta punkter på linjen. Talet m anger den y-koordinat där linjen skär x-axeln.

En rät linje $y = kx + m$ bestäms godtyckligt av två distinkta punkter i planet som följande exempel visar.

Exempel 3.14. *Bestäm ekvationen för den linje som går genom punkterna* $(1, 2)$ *och* $(-1, 1)$.

Lösningsförslag: Den räta linjen är på formen $y = kx + m$. Att den första punkten ligger på linjen ger oss ekvationen $2 = k \cdot 1 + m$. Den andra punkten ger oss $1 = k \cdot (-1) + m$. Detta ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} k + m = 2 \\ k - m = 1. \end{cases}$$

Den första ekvationen skrivs om som $k = 2 - m$ och insättning i den andra ekvationen ger oss $1 = -(2 - m) + m$, det vill säga $3 = 2m$ eller $m = 3/2$. Vi får $k = 2 - 3/2 = 1/2$. Den räta linjen ges alltså av ekvationen $y = x/2 + 3/2$. ★

Lutningen på linjen och en punkt på den räcker också för att bestämma ekvationen.

Exempel 3.15. *Bestäm ekvationen för den linje som går genom punkten* $(1, 1)$ *och har lutningen* -2.

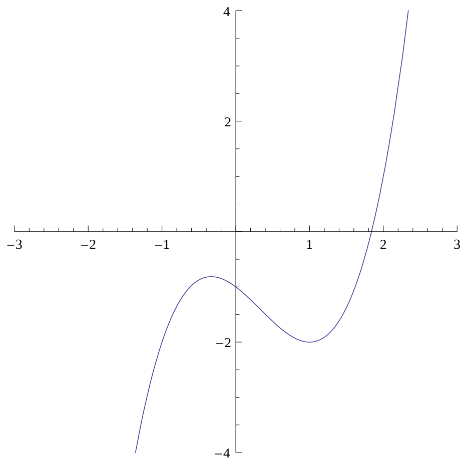
Lösningsförslag: Den räta linjen är på formen $y = kx + m$. Att den första punkten ligger på linjen ger oss ekvationen $1 = k \cdot 1 + m$. Att lutningen är -2 ger oss $k = -2$. Vi kan alltså lösa ut m som blir lika med tre. Ekvationen är alltså $y = -2x + 3$. ★

Det finns ett intressant specialfall i den räta linjens ekvation, nämligen när $k = 0$, det vill säga $y = m = f(x)$. I detta fall är grafen till $y = m$ parallell med $x - axeln$ och då funktionen $f(x)$ inte beror på m kommer värdemängden att vara $\{m\}$. Funktionen $f(x) = m$ är sålunda varken injektiv eller surjektiv. För andra k-värden än 0 är dock $f(x) = kx + m$ både injektiv och surjektiv.

Polynomfunktioner av högre grad Vi har redan sett av vi kan betrakta polynom som funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Definitionsmängden för ett godtyckligt polynom kan väljas till hela $\mathbb{R}$ och i allmänhet saknar polynomfunktionerna invers.

När funktionen f har udda grad så är värdemängden hela $\mathbb{R}$, det vill säga att f är surjektiv, men när f har jämn grad är värdemängden bara en delmängd till $\mathbb{R}$. Låt oss förklara detta med två exempel.

Betrakta först polynomet $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, vars graf delvis är uppritad i Figur 13. När

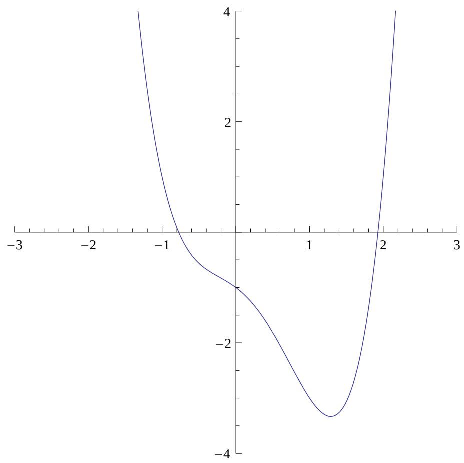


Figur 13: Grafen till funktionen $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

x växer kommer x^3-termens bidrag till polynomet att vara dominerande. Redan i $x = 10$ blir x^3-termen $10^3 = 1000$, att jämföra med -111 för ”svansen” $-x^2 - x - 1$. Och avståndet mellan x^3-termen och dess svans växer när x ökar. Även när x blir ett tillräckligt stort negativt tal, kommer x^3-termen att dominera. För $x = -10$ är x^3-termens bidrag -1000 och svansens bidrag endast -91.

Polynomet $p(x)$ uppför sig med andra ord ungefär som x^3 när x är ett väldigt stort positivt tal eller ett väldigt stort negativt tal. Det följer att $p(x)$ är negativt när x är ett tillräckligt stort negativt tal och positivt när x är ett tillräckligt stort positivt tal. Det innebär att $p(x)$ kommer att kunna anta godtyckligt stora värden och godtycklig stora negativa värden. Värdemängden V_p kommer därför att vara hela $\mathbb{R}$.

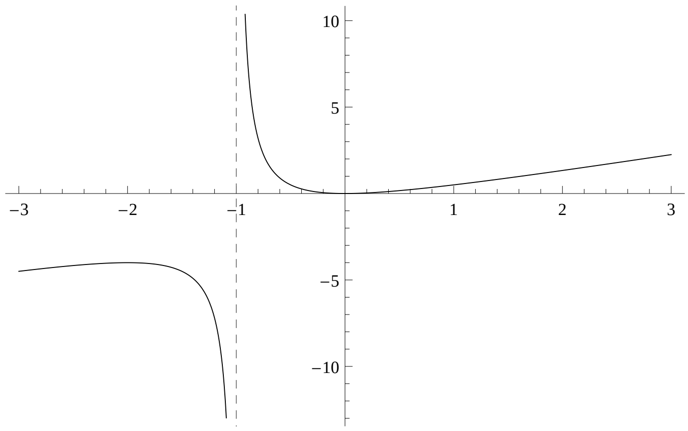
På motsvarande sätt kan vi se att det är x^4-termen som tydligt dominerar i polynomet $g(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$, uppritat i Figur 14 redan när $x = -10$ eller när $x = 10$. Det innebär att



Figur 14: Grafen till funktionen $g(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$.

$g(x)$ är positivt när x är ett tillräckligt stort negativt eller positivt tal. En följd av detta är att stora negativa tal kommer att saknas i värdemägnden till g och att g inte är surjektiv.

Rationella funktioner. En rationell funktion är en kvot mellan två polynom. Definitionsmängden till en rationell funktion är hela $\mathbb{R}$ förutom de punkter där nämnaren är lika med noll. För den rationella funktionen $\frac{x^2}{x+1}$ är definitionsmängden $\{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Nära de punkter där nämnaren är lika med noll uppstår så kallade *lodräta asymptoter*, se Figur 15.



Figur 15: Grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$. Nära punkten -1, där $f(x)$ inte är definierad, har funktionen en lodrät asymptot.

En rationell funktion är inte riktigt samma sak som ett rationellt uttryck. Båda är kvoter av polynom, men för rationella uttryck tillåter man förenklingar.

Det rationella uttrycket

$$\frac{x^2-1}{x-1}$$

kan skrivas om som

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

och därefter förkortas till $x+1$, medan vi inte kan göra samma sak om vi betraktar

$$\frac{x^2-1}{x-1}$$

som en funktion. I så fall skulle vi ju ändra definitionsmängden för funktionen. Med $x-1$ i nämnaren kan inte 1 ingå i definitionsmängden, men för $x+1$ kan alla reella tal utgöra definitionsmängd.

När vi ska lösa ekvationer av typen $f(x) = 0$ där $f(x)$ är en rationell funktion gör man först en omskrivning så att man får en polynomekvation. Man måste sedan kontrollera att lösningarna inte gör någon av de ingående nämnarna till noll.

Exempel 3.16. *Lös ekvationen*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + 1 = 0.$$

Vi börjar med att göra liknämnigt och får vänsterledet till

$$\frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)} + \frac{x(x+1)}{x(x+1)}$$

Vi multiplicerar sedan med $x(x+1)$ i båda led och får ekvationen

$$x + 1 + x + x(x+1) = 0,$$

vilken vi kan skriva om som

$$x^2 + 3x + 1 = 0$$

med lösningarna $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$*, som inte gör någon av nämnarna till noll. Alltså är* $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ *lösningar till vår ekvation.*

Exponentialfunktioner. En exponentialfunktion är en funktion på formen $f(x) = a^x$, där a är ett positivt reellt tal. De vanligaste exponentialfunktionerna är $2^x, 10^x$ och e^x, där e är ett reellt tal som har egenskapen att e^x är sin egen derivata (se nästa kapitel). Talet e är ungefär lika med 2.718 och exakt lika med den oändliga summan

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots .$$

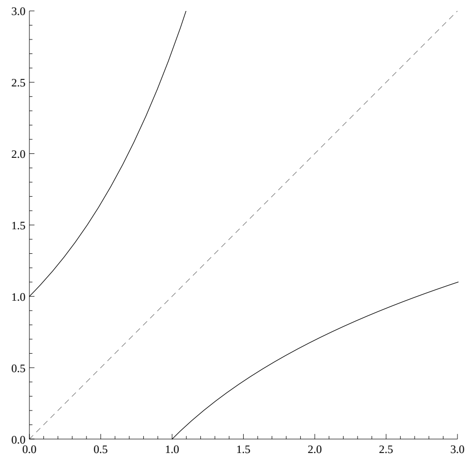
Symbolen ∞ är en matematisk beteckning av *oändligheten* och notationen $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$ innebär alltså att vi ska lägga ihop alla termer på formen $1/j!$, där j är ett naturligt tal.

Definitionsmängderna för de tre exponentialfunktionerna är hela $\mathbb{R}$ och värdemängden är de positiva reella talen. Exponentialfunktionernas snabba tillväxt benämns *exponentiell tillväxt* .

Logaritmfunktioner. Exponentialfunktionerna är inverterbara. Inversen till en exponentialfunktion kallas *logaritmfunktion*. Definitionsmängden till en logaritmfunktion är de positiva reella talen.

Mer precist är 2-logaritmen, betecknad $\log_2(x)$, inversen till 2^x, 10-logaritmen är inversen till 10^x och den *naturliga logaritmen*, betecknad $\ln x$, är inversen till e^x.

Det gäller alltså att $e^{\ln x} = x$ där $\ln x$ är definierat och $\ln e^x = x$ där e^x är definierat. I Figur 16 visas grafen för e^x och $\ln x$ i intervallet $[1, 3]$.



Figur 16: Den övre kurvan är grafen till funktionen e^x och den undre kurvan är grafen till funktionen $\ln x$ på intervallet $[1, 3]$. Den sträckade linjen är grafen till $f(x) = x$. Lägg märke till att de två första graferna är varandras spegelbilder i den linjen. Detta gäller alltid för en funktion och dess invers.

Kanske har du stött på de så kallade *logaritmlagarna* som beskriver hur man räknar med logaritmer. Dessa är

$$\boxed{\begin{gathered}\log(ab) = \log a + \log b \\ \log a^b = b \log a\end{gathered}}$$

Lagarna gäller oavsett vilken logaritmbas man använder. Låt oss bevisa den första logaritmlagen när logaritmen är naturlig. Låt a och b vara två positiva reella tal. Då finns det c och d så att $e^c = a$ och $e^d = b$, nämligen $c = \ln a$ och $d = \ln b$. Vi har alltså att $a \cdot b = e^c \cdot e^d = e^{c+d}$, så $\ln(ab) = \ln(e^{c+d}) = c + d = \ln a + \ln b$.

Exempel 3.17.

$$\log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$$

I allmänhet går det inte att skriva uttryck innehållandes logaritmer som rationella tal. Men i exemplet nedan, som är klassiskt, är det möjligt!

Exempel 3.18. *Skriv* $\log_{10} 2 + \log_{10} 5$ *som ett heltal.*

Lösningsförslag:
Genom att använda den första logaritmlagen baklänges får vi $\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10}(2 \cdot 5) = \log_{10} 10 = 1$.

★

Exempel 3.19. *Lös ekvationen* $e^x = 2$.

Lösningsförslag:
Logaritmering av båda sidor ger oss $\ln e^x = \ln 2$. Eftersom $\ln e^x = x$ så blir $x = \ln 2$ lösningen till ekvationen.

★

Exempel 3.20. *Lös ekvationen* $\ln x = 5$.

Lösningsförslag:
Vi exponentierar båda led och får $e^{\ln x} = e^5$. Eftersom $e^{\ln x} = x$ så är $x = e^5$.

★

Exempel 3.21. *Lös ekvationen* $2\ln(x - 4) = \ln x + \ln 2$.

Lösningsförslag: Vi skriver om ekvationen som $\ln(x-4)^2 = \ln 2x$ genom att använda logaritmlagarna. Vi exponentierar därefter båda led och får ekvationen $(x-4)^2 = 2x$ som har rötterna $x = 2$ och $x = 8$. Roten $x = 2$ är dock en falsk rot eftersom argumentet till urspungsekvationen blir negativt när $x = 2$. ★

Exempel 3.22. *Låt* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ *vara definierad av* $f(x) = e^x$ *och* $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ *definierad av* $g(x) = \ln x$. *Bestäm definitionsmängden, målmängden och värdemängden för* $f(g(x))$ *och* $g(f(x))$.

Lösningsförslag:
Den sammansatta funktionen $f(g(x)) = x$ har samma definitionsmängd som $g(x)$; $\mathbb{R}_{>0}$, och samma målmängd som $f(x)$; $\mathbb{R}_{>0}$. Värdemängden är $\mathbb{R}_{>0}$.

Den sammansatta funktionen $g(f(x)) = x$ har samma definitionsmängd som $f(x)$; $\mathbb{R}$, och samma målmängd som $f(x)$; $\mathbb{R}$. Värdemängden är $\mathbb{R}$.

★

Ett vanligt misstag vid logaritmräkning är att skriva om $\log(x + y)$ som $\log(x) + \log(y)$. Om vi låter $x = y = 4$ så får vi $\log_2(x + y) = \log_2(4 + 4) = \log_2(8) = \log_2(2^3) = 3$, medan $\log_2(x) + \log_2(y) = \log_2(4) + \log_2(4) = \log_2(2^2) + \log_2(2^2) = 2 + 2 = 4$. Det gäller alltså att $\log(x + y) \neq \log(x) + \log(y)$ i allmänhet.

Övningar

1. Vilka av följande mängder av punkter (x, y) utgör grafen till en funktion $y = f(x)$? Varför?
   (a) Alla par (x, y) av reella tal som uppfyller $x + y = 1$.
   (b) Alla par (x, y) av reella tal som uppfyller $x^2 + y^2 = 1$.
   (c) Alla par (x, y) av reella tal som uppfyller $x - y^2 = 0$.
2. Låt f vara en reell funktion definierad av $f(x) = x^2$. Rita kurvorna
   (a) $y = f(x)$.
   (b) $y = f(x - 1)$.
   (c) $y = f(x) + 1$.
   (d) $y = f(-x)$.
3. Rita grafen till funktionen
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{då } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{då } x > 1 \end{cases}.$$
4. Låt f vara en reell funktion definierad av $f(x) = 2x$. Bestäm inversen till f och ange definitionsmängden, målmängden och värdemängden till den inversa funktionen.
5. Låt f vara en reell funktion definierad av $f(x) = 3x + 5$. Bestäm inversen till f och ange definitionsmängden, målmängden och värdemängden till den inversa funktionen.
6. Bestäm ekvationen för linjen som går genom punkten $(3, 7)$ och har lutningskoefficient $1/2$.
7. Bestäm ekvationen för linjen som går genom punkterna $(-3, 5)$ och $(\frac{3}{2}, 10)$.
8. Lös ekvationerna
   (a) $\ln x + \ln(x - 1) = \ln 6$
   (b) $\ln(1/x^2) + \ln x^3 = 0$
9. För ett radioaktivt sönderfall gäller formeln
$$m(t) = m(0)e^{-\lambda t}$$
   där $m(t)$ är ämnets massa vid tiden t och λ är sönderfallskonstanten. Med halveringstiden T menas den tid det tar för ämnet att reducera sin massa till hälften. Bestäm sambandet mellan λ och T.
10. Lös ekvationerna
    (a) $3^{x^2}3^{2x} = \frac{1}{3}$
    (b) $4^{t+2} - 48 = 16$
    (c) $(e^x + e^{-x})^2 - e^{2x} - e^{-2x} = 1$
11. Lös ekvationerna
    (a) $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{5x^3-5}{x^3-1}$
    (b) $\frac{x-3}{x+4} = \frac{x+4}{x-3}$
    (c) $\frac{5(x-3)}{2x+8} = \frac{10}{2x^2-32}$
12. Ge en uppskattning av e genom att summera de fem första termerna i den oändliga summan som definierar e.
13. Hitta med papper och penna åtminstone tre punkter på den elliptiska kurvan i Figur 12. Tips: Ansätt x-koordinaten och försök lösa den uppkomna ekvationen. Upprepa.

3.4 Olikheter och absolutbelopp

I det här avsnittet studerar vi olikheter och absolutbelopp över de reella talen.

Olikheter

Olikheter påminner mycket om likheter men det finns vissa fällor man får se upp med. Vi börjar med ett par lagar som gäller för räkning med olikheter:

$$\begin{aligned} a > b &\Leftrightarrow a + c > b + c \\ a > b &\Leftrightarrow r \cdot a > r \cdot b \text{ om } r > 0 \\ a > b &\Leftrightarrow r \cdot a < r \cdot b \text{ om } r < 0 \end{aligned}$$

När vi arbetar med olikheter så är det oftast inte ett unikt tal x som blir lösningen utan ett helt intervall, $a < x < b$. Dessa intervall kan beskrivas på flera sätt:

Lösning	Intervall
$0 \leq x \leq 1$	$[0, 1]$
$0 < x \leq 1$	$]0, 1]$
$0 \leq x < 1$	$[0, 1[$
$0 < x < 1$	$]0, 1[$
$0 < x$	$]0, \infty[$
$x < 0$	$]-\infty, 0[$

Observera alltså att det är skillnad på lösningsmängden till $x > 0$ och $x \geq 0$. I den första mängden så är $x = 0$ en giltig lösning, men i den andra så är bara de positiva talen lösningar.

Vi kommer också stöta på lösningsmängder som består av flera intervall. Låt säga $35 < t < 45$ är det tidsintervall där kladdkakan är färdig, där $t = 0$ är när vi stoppade in den i ugnen. Då kommer $t \leq 35$ och $t \geq 45$ vara de intervall där kladdkakan inte är ätbar. Detta sker då $t \in]-\infty, 35] \cup [45, \infty[$.

Olikheter av grad ett. Att lösa olikheter med grad ett är inte svårare än att lösa ut en variabel. Det enda man måste tänka på är den tredje regeln ovan så att man vänder på olikhetstecknet vid rätt tillfälle. Här följer ett par illustrerande exempel.

Exempel 3.23. *Lös följande problem:*

1. *Finn de x som uppfyller olikheten $5x - 12 > 18$.*
2. *Finn de x som uppfyller olikheterna $4x - 7 \geq 20$ och $5 - 2x > 7$ samtidigt.*

Lösningsförslag: Vi använder första regeln och adderar 12 till båda leden:

$$5x - 12 > 18 \Leftrightarrow 5x > 30$$

Vi kan nu multiplicera båda leden med (det positiva talet) $\frac{1}{5}$, det vill säga vi dividerar med 5.

$$5x > 30 \Leftrightarrow x > 6$$

Alltså är lösningsmängden till olikheten $6 < x$.

Vi löser det andra problemet på samma sätt för var och en av olikheterna

$$4x - 7 \geq 20 \Leftrightarrow 4x \geq 27 \Leftrightarrow x \geq \frac{27}{4} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{27}{4}, \infty\right[$$

$$5 - 2x \geq 7 \Leftrightarrow -2 \geq 2x \Leftrightarrow -1 \geq x \Leftrightarrow x \leq -1$$

Vi vill nu finna de x som ligger i båda dessa lösningsmängder. Men som vi kan se, så finns det inga sådana x, då inga tal kan vara större än $27/4$ samtidigt som de är mindre än -1. Alltså finns inga x som uppfyller båda olikheterna samtidigt. ★

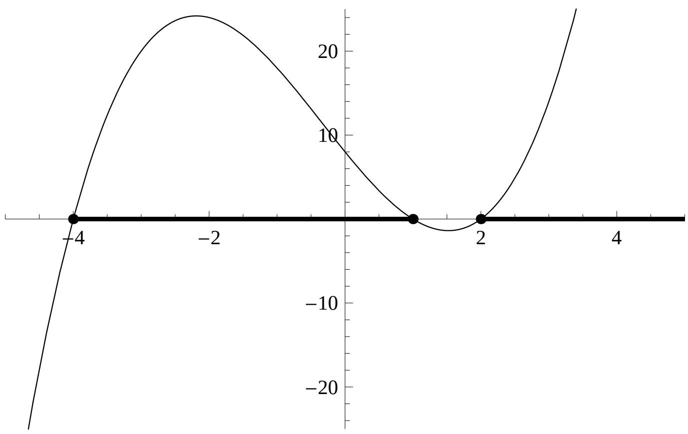
Olikheter av högre grad. Nu när vi bemästrat olikheter av första graden så angriper vi problem med högre grad. Den metod vi kommer att ha stor nytta av kallas *teckenschema* och det innebär att vi undersöker om i vilka intervall som uttryck är positiva eller negativa. Detta har stark koppling till regel två och regel tre för olikheter. Vi börjar med ett exempel:

Exempel 3.24. *Vilka x uppfyller att $(x-1)(x-2)(x+4) \geq 0$?*

Lösningsförslag: Gränserna för olikheten måste ju vara då vänsterledet är precis 0, det vill säga när $(x-1)(x-2)(x+4) = 0$. Det är alltså enbart när $x = 1$, $x = 2$ och när $x = -4$ som vi passerar en gräns för lösningsmängden. Vi tänker oss att vi är x som vandrar från $-\infty$ till ∞ och på vägen så undersöker vi vilket tecken som $(x-1)(x-2)(x+4)$ har. Är uttrycket positivt så är det x:et med i lösningen, annars inte. Men för att vandra mellan ett x som ger negativt tecken och ett som ger positivt, så måste vi ju passera de som ger oss 0. Detta ger oss ett teckenschema:

		-4		1		2	
$(x+4)$	-	0	+	+	+	+	+
$(x-1)$	-	-	-	0	+	+	+
$(x-2)$	-	-	-	-	-	0	+
$(x-1)(x-2)(x+4)$	-	0	+	0	-	0	+

Varje rad berättar vilket tecken som uttrycket i vänsterkolumnen har. Vi ser alltså att $(x+4)$ är positivt eller noll om $x \geq -4$, och liknande för de andra två uttrycken. Vi kan nu multiplicera de tre första raderna med varandra för att få den sista raden, ("minus gånger minus blir plus"). Den sista raden ger oss då en beskrivning för vilket tecken vi har i vilket intervall, och vi avläser att $(x-1)(x-2)(x+4)$ är positivt eller noll för $-4 \leq x \leq 1$ samt $2 \leq x$. Lösningen på olikheten blir då $x \in [-4, 1] \cup [2, \infty[$.



Figur 17: $f(x) = (x-1)(x-2)(x+4)$

★

Det första man måste göra när man löser en olikhet är alltså att faktorisera uttrycket, och därefter göra ett teckenschema. Det är inte alltid man får uttrycket färdigfaktoriserat, men man kan faktorisera dem med hjälp av faktorsatsen.

Exempel 3.25. *Vilka x uppfyller olikheten $x^2 - 5x \leq -6$?*

Lösningsförslag: Man kan lätt luras att tro att vi faktoriserar vänsterledet direkt, men vi måste ha 0 i högerledet för att kunna göra ett teckenschema. Vi skriver alltså om det som $x^2 - 5x + 6 \leq 0$. För att faktorisera vänsterledet, måste vi hitta rötterna till $x^2 - 5x + 6 = 0$. Löser vi denna andragradsekvation, så finner vi att $x = 2$ och $x = 3$ är rötter. Vi kan då faktorisera vänsterledet som $(x-2)(x-3)$ (kontrollera att om du utvecklar detta så får du precis $x^2 - 5x + 6$). Detta ger oss då $(x-2)(x-3) \leq 0$ och vi ställer upp ett teckenschema:

		2		3	
$(x-2)$	-	0	+	+	+
$(x-3)$	-	-	-	0	+
$(x-2)(x-3)$	+	0	-	0	+

Vi utläser att $(x-2)(x-3) \leq 0$ om $x \in [2, 3]$. ★

Absolutbelopp

Det här avsnittet handlar om absolutbeloppet. Vi börjar med definitionen

$$|x| = \begin{cases} x \text{ om } x \geq 0 \\ -x \text{ om } x < 0 \end{cases} \qquad \text{alternativt} \quad |x| = \sqrt{x^2}$$

För alla positiva tal x, så gäller det att $|x| = x$, men om x är negativt så kan man säga att absolutbeloppet "tar bort minustecknet". Det gäller alltså att $|x| \geq 0$ för alla x, och $|x| = 0$ endast om $x = 0$.

Absolutbeloppet är ett mått på storleken av talet oberoende av vilket tecken det har. Det kan också tolkas som det avstånd som x är från 0 på tallinjen.

Exempel 3.26. $|-1| = |1|, \quad |-\pi| = |\pi|$

Exempel 3.27. *Lös följande ekvationer:*

- $|x| = 3$.
- $|x-4| = 3$.

Lösningsförslag: När man arbetar med absolutbelopp så är det lättast att dela upp problemet i flera fall, beroende på om det vi tar absolutbelopp på är positivt eller negativt. Det är precis det vi kommer göra här. Första problemet blir då följande:

Fall 1: Om $x \geq 0$ så är $|x| = x$ och vi får att $x = 3$, vilket då enkelt är en lösning.

Fall 2: Om $x < 0$ så är$|x| = -x$ och vi får att $-x = 3$, så $x = -3$ är den andra lösningen.

Lösningen är alltså att $x = 3$ eller $x = -3$. Nu till nästa problem:

Fall 1: Om $x - 4 \geq 0$ så är $|x-4| = x - 4$ och vi får att $x - 4 = 3$, så $x = 7$ är en lösning.

Fall 2: Om $x - 4 < 0$ så är $|x-4| = -(x-4)$ och vi får att $-(x-4) = 3$, så $x = 1$ är den andra lösningen.

Kontrollera att lösningarna stämmer genom att sätta in dem i den ursprungliga ekvationen. ★

Nu ska vi kombinera det vi lärde oss om olikheter och använda de i kombination med absolutbelopp.

Exempel 3.28. *Lös olikheten $|x-5| \geq 3$.*

Lösningsförslag: Vi delar upp problemet i flera fall, nämligen $x \geq 5$ och $x < 5$ eftersom vid $x = 5$ är uttrycket i absolutbeloppet 0.

Fall $x \geq 5$: Här är det inom absolutbeloppet positivt och vi ersätter absolutbeloppet med parenteser. Vi får att $(x-5) \geq 3$ vilket ger oss $x \geq 8$. Alla dessa x uppfyller även att $x \geq 5$, vilket var en förutsättning för det här fallet. Alltså är $x \geq 8$ giltiga lösningar.

Fall $x < 5$: Nu får vi istället $-(x-5) \geq 3$, vilket efter multiplikation med -1 i båda leden ger $x - 5 \leq -3$. Slutligen får vi då att $x \leq 2$. Vi får då att $x \leq 2$ ger giltiga lösningar, dessa uppfyller ju också förutsättningarna att $x < 5$.

Lösningsmängden ges av $x \leq 2$ och $x \geq 8$. ★

Övningar

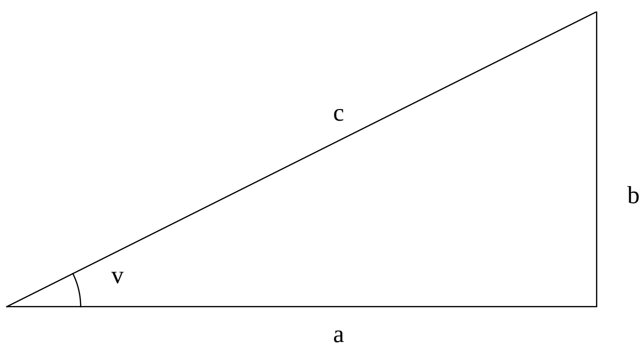
1. Lös följande olikheter
   (a) $3x + 6 > x - 8$
   (b) $x^2 + 2x > 3$
   (c) $(x-2)(x^2 + 4x + 4) \geq 0$
2. Låt f och g vara två reella funktioner definierade av $f(x) = x^2 + x - 2$ och $g(x) = 1 - 2x$. Bestäm alla skärningspunkter mellan $f:s$ och $g:s$ grafer. Rita graferna i samma figur. För vilka x är $f(x) > g(x)$?

3.5 Trigonometri

Trigonometri används för att beräkna avstånd och vinklar. Vi börjar med en kort repetition om rätvinkliga trianglar.

Rätvinkliga trianglar

En rätvinklig triangel är en triangel med en rät vinkel, alltså en vinkel på $90°$. Ett exempel på en rätvinklig triangel ser vi i figur 18.



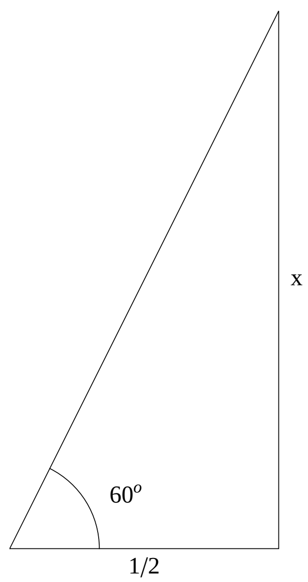
Figur 18: En rätvinklig triangel. Sidan c är triangelns hypotenusa, medan sidan a och b är triangelns katetrar. Den räta vinkeln finns mellan sidorna a och b.

Vinkelsumman, det vill säga summan av de tre vinklarna i en triangel, är $180°$. De sidor som bildar en rät vinkel mot varandra, sidorna a och b i figuren ovan, kallas katetrar och den tredje sidan, c, kallas för hypotenusan i triangeln. Vi gör även skillnad mellan de båda kateterna. När vi betraktar vinkeln v säger vi att a är den närliggande kateten och b den motstående. För en rätvinklig triangel, som den i figuren ovan, finns följande definierade funktioner mellan vinkeln v och kvoter av sidorna enligt nedan:

$$\begin{aligned}
\tan v &= \frac{b}{a} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}} \\
\sin v &= \frac{b}{c} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}} \\
\cos v &= \frac{a}{c} = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}}
\end{aligned}$$

$\tan v$ utläses “tangens för vinkeln v”, $\sin v$ “sinus för vinkeln v” och $\cos v$ utläses “cosinus för vinkeln v”.

Exempel 3.29. *Finn ett uttryck för x i figur 19 med hjälp av någon av de trigonometriska funktionerna sinus, cosinus och tangens.*



Figur 19: En rätvinklig triangel där det är möjligt att bestämma sidan x med hjälp av trigonometriska funktioner.

Lösningsförslag: Enligt definitionen av tangens ser vi att

$$\tan 60^\circ = \frac{x}{\frac{1}{2}}.$$

Vi kan multiplicera med $\frac{1}{2}$ på båda sidorna om likhetstecknet och får

$$\frac{\tan 60^\circ}{2} = x.$$

För att kunna beräkna x exakt måste vi veta värdet på $\tan 60^\circ$. ★

Vi kommer lära oss sinus, cosinus och tangens för vissa standardvinklar, till exempel 60°. Men först ska vi studera vinkelbegreppet.

Vinkelbegreppet

Vi har nu stött på en nittiogradersvinkel och en sextiogradersvinkel och vi har då mätt vinklarna i grader. Men hur definieras en vinkel egentligen? Och kan man mäta vinklar i andra enheter än grader?

För att ge en god definition introducerar vi nu den så kallade *enhetscirkeln* och begreppet *radianer*. Enhetscirkeln är en cirkel med medelpunkt i origo och med radie 1. Vi påminner om att en cirkel med radie r har omkrets $2\pi r$, så enhetscirkeln kommer att ha omkrets 2π.

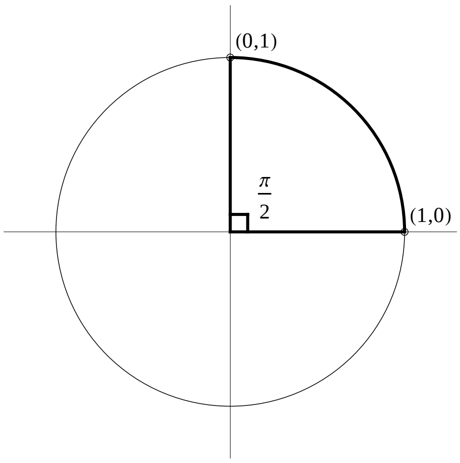
Tag nu en godtycklig rät linje som utgår från origo. Linjen kommer att skära cirkeln i en punkt. Vinkeln mellan linjen och den positiva x-axeln, mätt i radianer, definieras som längden på cirkelbågen som går från vår punkt till punkten $(1, 0)$.

Exempel 3.30. *Bestäm vinkeln i radianer mellan den positiva x-axeln och den positiva y-axeln.*

Lösningsförslag:

Eftersom längden på cirkelbågen mellan punkten $(0, 1)$ och $(1, 0)$ är en fjärdedel av cirkelns omkrets så kommer vinkeln att vara $2\pi/4 = \pi/2$ radianer, se Figur 20. Lägg märke till att vinkeln $\pi/2$ motsvaras av vinkeln $90°$.

★



Figur 20: Enhetscirkeln och vinkeln $\pi/2$.

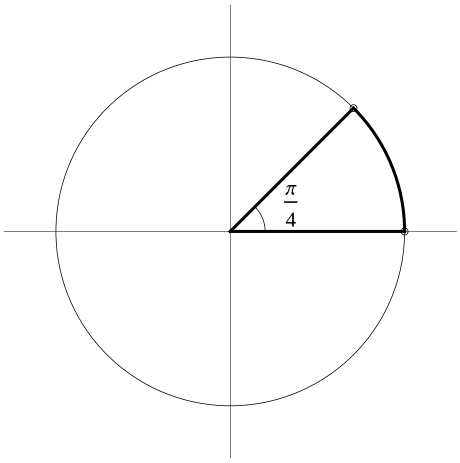
Exempel 3.31. *Ange vinkeln $45°$ i radianer.*

Lösningsförslag: Längden på cirkelbågen utgör en åttondel av cirkelns omkrets. Vinkeln blir därför $2\pi/8 = \pi/4$ radianer, se Figur 21.

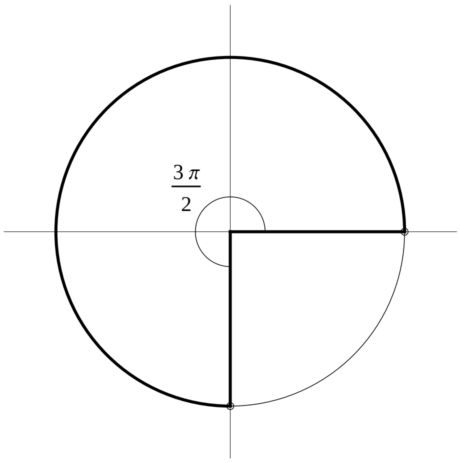
★

Exempel 3.32. *Ange vinkeln mellan den linje som går från origo genom punkten $(0, -1)$ och den linje som går från origo genom punkten $(1, 0)$.*

Lösningsförslag: Punkterna ligger på enhetscirkeln. Längden på cirkelbågen utgör tre fjärdedelar av cirkelns omkrets. Vinkeln blir därför $2\pi \cdot 3/4 = 3\pi/2$ radianer, se Figur 22. Denna vinkel svarar mot $270°$. ★



Figur 21: Enhetscirkeln och vinkeln $\pi/4$.



Figur 22: Enhetscirkeln och vinkeln $3\pi/2$.

De trigonometriska funktionerna och enhetscirkeln

Varje punkt $p = (x, y)$ i första kvadranten (där både x och y är positiva) på enhetscirkeln formar en triangel, se Figur 23.

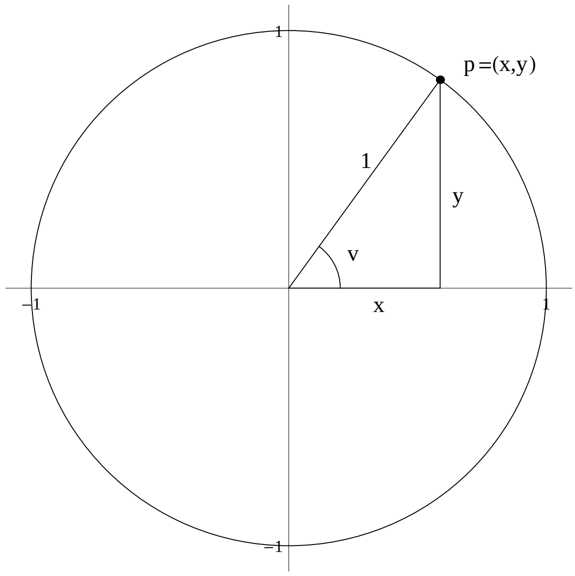
Triangeln är rätvinklig och eftersom punkten ligger på enhetscirkeln har hypotenusan längd ett. Vi ser också att vinkeln ligger mellan 0 och $\pi/2$, eller 0 och 90° mätt i grader. Med våra tidigare definitioner av tangens, cosinus och sinus får vi följande samband.

$$\begin{aligned}\tan v &= \frac{y}{x}\\ \sin v &= \frac{y}{1} = y\\ \cos v &= \frac{x}{1} = x\end{aligned}$$

Vi noterar här att

$$\tan v = \frac{y}{x} = \frac{\sin v}{\cos v}.$$

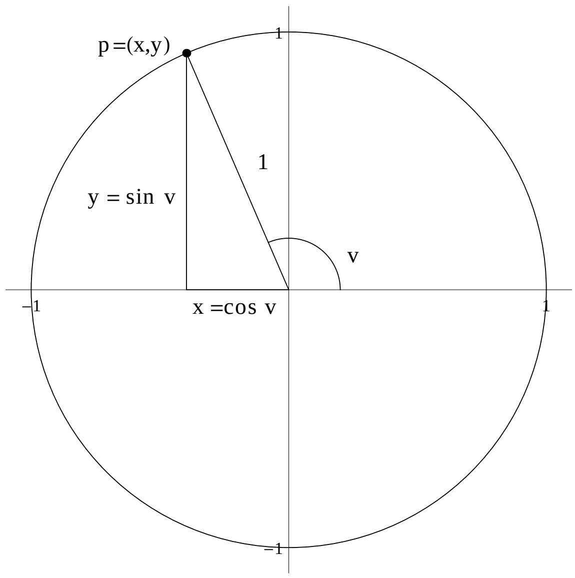
Vi kan alltså tolka cosinus av vinkeln v som x-koordinaten för punkten, och sinus av vinkeln som y-koordinaten för punkten. Det visar sig att denna tolkning kan användas som definition av cosinus och sinus för alla typer av vinklar.



Figur 23: En punkt $p = (x, y)$ i första kvadranten av enhetscirkeln.

Definition: Låt v vara en vinkel och låt l vara en linje som bildar vinkeln v med x-axeln. Då är $\cos v$ x-koordinaten för den punkt där l skär enhetscirkeln, $\sin v$ är y-koordinaten för samma punkt och $\tan v = \sin v / \cos v$.

Definitionen illustreras i Figur 24



Figur 24: En punkt $p = (x, y)$ i andra kvadranten av enhetscirkeln.

Exempel 3.33. *Bestäm* $\sin \pi$.

Lösningsförslag: Vi söker y-koordinaten för skärningspunkten mellan enhetscirkeln och linjen som bildar vinkeln π radianer med den positiva delen av x-axeln. Eftersom π svarar mot ett halvt varv blir skärningspunkten $(-1, 0)$. Det gäller alltså att $\sin \pi = 0$.

★

Exempel 3.34. *Bestäm* $\cos\pi$.

Lösningsförslag: Vi söker nu istället x-koordinaten för punkten $(-1,0)$, så $\cos\pi = -1$. ★

På högskolan brukar man mäta vinklar i radianer, men det är viktigt att behärska både radian- och gradbegreppet. För att omvandla grader till radianer multiplicerar man med omvandlingsfaktorn $\pi/180$ och för att omvandla radianer till grader multiplicerar man med omvandlingsfaktorn $180/\pi$.

Exempel 3.35. *Omvandla vinkeln* $330°$ *till radianer.*

Lösningsförslag: Vinkeln mätt i radianer blir $330 \cdot \pi/180 = \dfrac{11\pi}{6}$. ★

Nedan visas en översättningstabell för några vanliga vinklar.

radianer	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π
grader	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$360°$

Standardvinklar

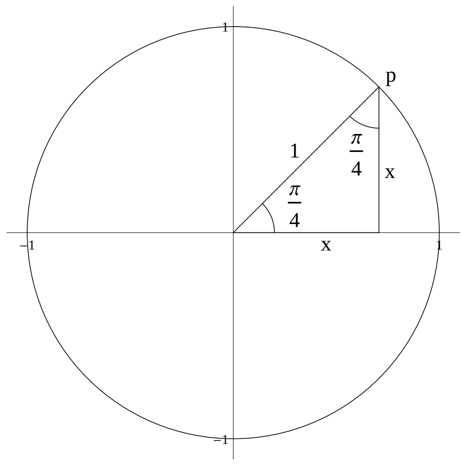
Låt oss nu bestämma sinus- och cosinusvärdena för några speciella vinklar. Vi väljer att arbeta i radianer, men kommer att presentera sinus- och cosinusvärdena för standardvinklarna i en tabell där vi även ger vinklarna mätta i grader.

Vi börjar med att notera att $\sin\pi/2 = 1$ eftersom vi vid ett kvarts varv är i punkten $(0,1)$. På samma sätt har vi också att

$$\cos\pi/2 = 0, \quad \sin 0 = 0 \quad \text{och} \quad \cos 0 = 1.$$

Låt oss nu undersöka vinkeln $\pi/4$. Vi ritar in vinkeln i enhetscirkeln och skriver in en hjälptriangel, se Figur 25.

Eftersom vinkelsumman i en triangel är π radianer och vi har en vinkel på $\pi/4$ och en på π måste även den sista vinkeln vara $\pi/4$. Det följer på grund av symmetri att de båda kateterna är lika långa.



Figur 25: Vinkeln $\pi/4$ och en i enhetscirkeln inskriven hjälptriangel. På grund av symmetri har de båda kateterna samma längd x.

Vi kan nu använda Pythagoras sats för att ta reda på sträckan x och vi får ekvationen

$$x^2 + x^2 = 1.$$

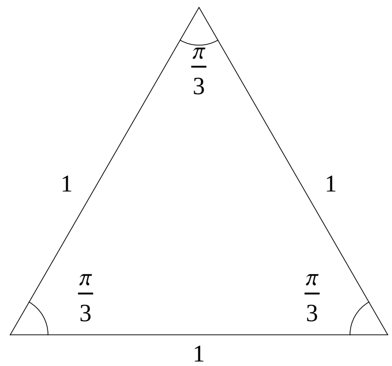
Alltså har vi $2x^2 = 1$, eller $x^2 = 1/2$ vilket ger lösningarna

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Det negativa svaret kan vi bortse ifrån eftersom att en sträcka alltid är positiv. Sträckan x i Figur 25 är därför $1/\sqrt{2}$. Det innebär att skärningspunkten p har koordinaterna $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Vi får alltså

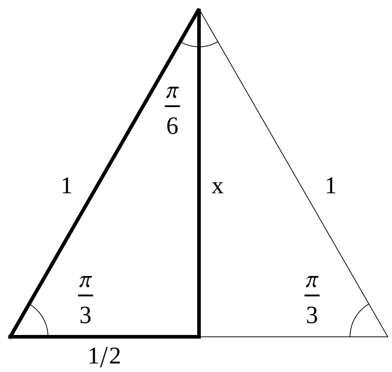
$$\sin \pi/4 = 1/\sqrt{2}, \quad \cos \pi/4 = 1/\sqrt{2} \quad \text{och} \quad \tan \pi/4 = 1.$$

Vi går nu vidare till vinklarna $\pi/6$ och $\pi/3$. Betrakta den liksidiga triangeln i Figur 26. Alla



Figur 26: En liksidig triangel med sidan 1.

sidor har längd 1 och därmed är alla vinklar lika stora, det vill säga $\pi/3$. Om vi delar en av vinklarna i triangeln mitt i tu får vi en vinkel på $\pi/6$, se Figur 27.



Figur 27: En liksidig triangel med sidan 1 samt en tudelning av den övre vinkeln. Den obekanta sidan x kan bestämmas med hjälp av Pythagoras sats.

Betrakta nu den fetmarkerade triangeln i Figur 27. Vi kan med hjälp av Pythagoras sats ställa upp en ekvation för den obekanta sidan. Det gäller ju att

$$x^2 + (1/2)^2 = 1^2,$$

vilket ger lösningarna

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Återigen kan vi bortse från det negativa värdet eftersom vi söker en sträcka. Genom att använda att sinus definieras som förhållandet mellan motstående katet och hypotenusan får vi att

$$\sin\pi/3 = \frac{\sqrt{3}}{2}/1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

På motsvarande sätt kan vi genom att använda att cosinus definieras som förhållandet mellan närliggande katet och hypotenusan få att

$$\cos\pi/3 = \frac{1}{2}/1 = 1/2.$$

Slutligen kan vi bestämma tangensvärdet som kvoten mellan sinus- och cosinusvärdet, det vill säga

$$\tan\pi/3 = \frac{\sqrt{3}}{2}/\frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

Figur 27 kan även användas för att bestäma de trigonometriska funktionernas värden för vinkeln $\pi/6$. Vi får

$$\sin\pi/6 = \frac{1}{2}/1 = 1/2,$$

$$\cos\pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2}/1 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan\pi/6 = \frac{1}{2}/\frac{\sqrt{3}}{2} = 1/\sqrt{3}.$$

Vi sammanfattar våra resultat i en tabell:

Grader	Radianer	$\sin$	$\cos$	$\tan$
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45°$	$\pi/4$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$60°$	$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\pi/2$	1	0	odef

Vi ska nu se på några samband mellan cosinus och sinus av olika vinklar. Som vi tidigare har utnyttjat kan vi använda Pythagoras sats på en rätvinklig triangel med sidorna x och y i enhetscirkeln och får

$$1^2 = x^2 + y^2.$$

Eftersom $x = \cos v$ och $y = \sin v$ får vi sambandet

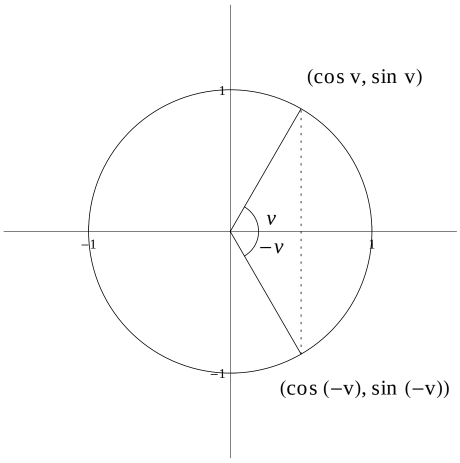
$$\cos^2 v + \sin^2 v = 1,$$

som är en viktig identitet kallad *trigonometriska ettan:*. Observera att vi skriver $\cos^2 v$ och $\sin^2 v$ istället för $(\cos v)^2$ och $(\sin v)^2$.

Vi fortsätter med att betrakta $\cos v$ och $\cos(-v)$, för att se ett samband mellan dem. Vi ritar in vinklarna v och $(-v)$ i enhetscirkeln, se Figur 28.

När vi avläser cosinus för en vinkel tittar vi på x-koordinaten. Om vi jämför x-koordinaterna för vinklarna v och $-v$ ser vi att de är lika. Vi får att

$$\cos(v) = \cos(-v).$$

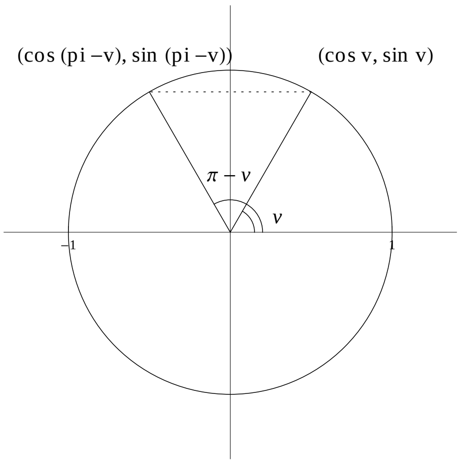


Figur 28: Vinklarna v och $-v$ i enhetscirkeln. De punkter där de båda linjerna skär enhetscirkeln har samma x-koordinat, det vill säga $\cos v = \cos(-v)$. Punkternas y-koordinater skiljer sig endast med ett tecken, det vill säga $\sin v = -\sin(-v)$.

Rita gärna in en vinkel v i en annan kvadrant för att övertyga dig själv om att formeln gäller även då. Om vi jämför y-koordinaterna ser vi att de är teckenskilda, vilket betyder att

$$\sin(v) = -\sin(-v).$$

Vi går nu vidare till att titta på vinklarna v och $\pi - v$ för att se ett samband mellan de båda vinklarnas sinus- och cosinusvärden. Vi ritar in en godtycklig vinkel v i enhetscirkeln, samt vinkeln $\pi - v$, se Figur 29.



Figur 29: Vinklarna v och $\pi - v$ i enhetscirkeln. De punkter där de båda linjerna skär enhetscirkeln har samma y-koordinat, det vill säga $\sin v = \sin(\pi - v)$. Punkternas x-koordinater skiljer sig endast med ett tecken, det vill säga $\cos v = -\cos(\pi - v)$.

För att avläsa sinusvärdet för en vinkel v i enhetscirkeln tittar vi på y-koordinaten där linjen nuddar cirkeln. Jämför vi y-koordinaterna för v och $\pi - v$ ser vi att de är lika. Motsvarande studie för x-koordinaterna avslöjar att de skiljer sig endast med tecken. Det gäller alltså att

$$\sin v = \sin(\pi - v) \text{ och att } \cos v = -\cos(\pi - v).$$

Sammanfattningsvis har vi följande samband:

$$\begin{aligned}
\cos^2 v + \sin^2 v &= 1\\
\cos v &= \cos(-v)\\
\sin v &= -\sin(-v)\\
\cos v &= -\cos(\pi - v) \quad \text{(eller } \cos v = -\cos(180^\circ - v))\\
\sin v &= \sin(\pi - v) \quad \text{(eller } \sin v = \sin(180^\circ - v)).
\end{aligned}$$

Exempel 3.36. *Bestäm* $\sin(5\pi/6)$.

Lösningsförslag: Vi har $5\pi/6 = \pi - \pi/6$. Alltså är

$$\sin(5\pi/6) = \sin(\pi - \pi/6) = -\sin(-\pi/6) = \sin\pi/6 = 1/2.$$

★

Triangelsatserna

I det här avsnittet kommer vi lära oss tre viktiga triangelsatser, nämligen areasatsen, cosinussatsen och sinussatsen. Vi kommer att använda oss av det klassiska vinkelbegreppet i detta avsnitt, men det går såklart även bra att mäta vinklarna i radianer.

Areasatsen Som du säkert kommer ihåg kan arean av en triangel beräknas med formeln

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

där b står för basen och h för höjden i triangeln.

Exempel 3.37. *Beräkna arean av en triangel med basen 5 cm och höjden 10 cm.*

Lösningsförslag: Vi använder formeln ovan.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = A = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25 \text{ cm}^2.$$

★

Det areasatsen säger är hur man beräknar arean av en triangel när man känner till två sidor och den mellanliggande vinkeln. Låt oss med ett exempel visa hur man kommer fram till areasatsen.

Exempel 3.38. *Beräkna arean av en triangel där vi känner till två sidor, a och b samt dess mellanliggande vinkel v.*

Lösningsförslag: Vi börjar med att rita upp en triangel (se Figur 30) och rita in höjden. Vi kan då skriva

$$\sin v = \frac{h}{b},$$

och alltså är höjden $h = b \cdot \sin v$. Vi kan nu använda formeln vi hade tidigare för att beräkna arean:

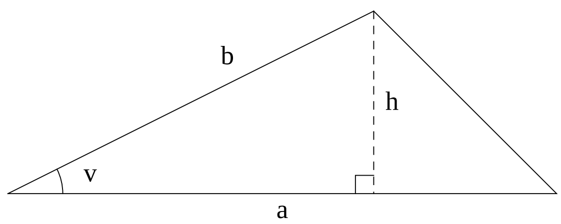
$$A = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin v}{2}$$

Vi har nu kommit fram till areasatsen. ★

Som vi såg i exemplet ovan så har vi följande formel:

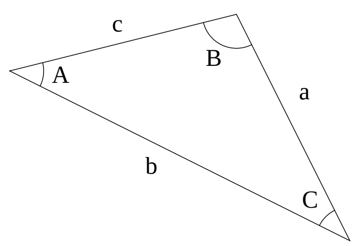
$$\textbf{Areasatsen: } A = \frac{a \cdot b \cdot \sin v}{2},$$

som gäller när a och b är två sidor i en triangel och v är dess mellanliggande vinkel. Areasatsen gäller för såväl trubbiga som spetsiga vinklar.



Figur 30: En triangel med de två sidorna a och b och dess mellanliggande vinkel v.

Sinussatsen För en triangel ABC med sidorna abc enligt Figur 31 gäller följande enligt sinussatsen:



Figur 31: En triangel ABC med sidorna abc.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Man kan visa sinussatsen från areasatsen, men vi utelämnar beviset.

Cosinussatsen Då en triangel ABC saknar en rät vinkel kan vi inte tillämpa Pythagoras sats. Däremot gäller sambandet

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C,$$

där a betecknar motstående sida till vinkeln A och så vidare, se Figur 31. Vi kommer inte ta upp beviset av denna sats.

Exempel 3.39. *Vad känner vi igen cosinussatsen som när vinkeln C är en rät vinkel?*

Lösningsförslag: Om C är $90°$ gäller

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cosC = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2,$$

vilket vi känner igen som Pythagoras sats. Pythagoras sats är alltså ett specialfall av cosinussatsen. ★

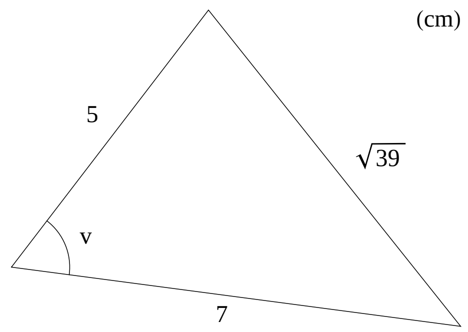
Exempel 3.40. *Beräkna vinkeln v i Figur 32.*

Lösningsförslag: Enligt cosinussatsen har vi

$$\sqrt{39}^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos v$$

vilket vi kan skriva om som

$$1/2 = \cos v.$$



Figur 32: En triangel med en obekant vinkel v som kan bestämmas med hjälp av cosinussatsen.

I vårt fall ger detta att $v = 60°$. ★

Sammanfattningsvis har vi följande triangelsatser:

Areasatsen: $A = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin v}{2}$

Sinussatsen: $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

Cosinussatsen: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

Trigonometriska funktioner

Som vi pratat om i föregående kapitel är sinus, cosinus och tangens exempel på trigonometriska funktioner, med $\mathbb{R}$ som definitionsmängd och intervallet $[-1, 1]$ som målmängd. Vi ska nu titta på negativa vinklar och vinklar som är större än 2π eller $360°$.

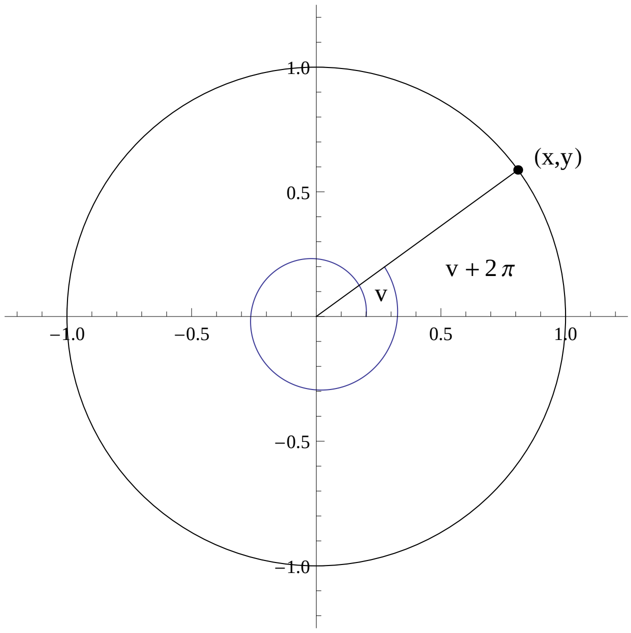
Periodiska funktioner *Om vi tänker oss en vinkel på enhetscirkeln och till den vinkeln adderar ett varv, det vill säga 2π, hur förändras då sinus- och cosinusvärdena?* Eftersom de trigonometriska funktionernas värden för en vinkel definieras av x och $y-$koordinaterna för en punkt på enhetscirkeln gäller det att ta reda på vilken punkt vi hamnar vid när vi till en vinkel adderar ett varv. Vi ser att vi hamnar vid precis samma punkt. Detta illustreras i Figur 33. Tänk dig exempelvis att du springer på en löparbana med formen av en cirkel. När du springer ett varv är du alltid tillbaka på samma ställe som du började. På samma sätt kommer du tillbaka till samma ställe om du springer 10 varv. Vi får följande trigonometriska samband:

$$\begin{aligned}\sin v &= \sin(v + n \cdot 2\pi)\\ \cos v &= \cos(v + n \cdot 2\pi),\end{aligned}$$

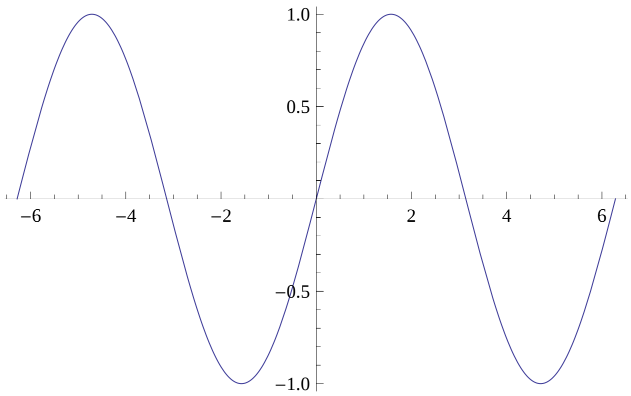
där n är ett heltal som anger antalet varv. Vi säger att sinus och cosinus är periodiska funktioner med perioden 2π (eller $360°$.) Graferna för funktionerna $\sin x$ och $\cos x$ finns i Figur 34 och i Figur 35.

Med hjälp av Figur 36 får vi följande formler som är till hjälp då vi ska bestämma perioden för tangens:

$$\begin{aligned}\sin(v + \pi) &= -y = -\sin v\\ \cos(v + \pi) &= -x = -\cos v\end{aligned}$$



Figur 33: I bilden ser vi en vinkel v samt vinkeln $v + 2\pi$.



Figur 34: Grafen för funktionen $f(x) = \sin x$ på intervallet $[-6, 6]$.

Vi får

$$\tan(v + \pi) = \frac{\sin(v + \pi)}{\cos(v + \pi)} = \frac{-\sin v}{-\cos v} = \frac{\sin v}{\cos v} = \tan v.$$

Detta innebär att tangensfunktionen är periodisk med perioden π och alltså gäller $\tan(v + n \cdot \pi) = \tan v$. Grafen till tangensfunktionen finns ritad i Figur 37.

Exempel 3.41. *Beräkna* $\cos 225°$.

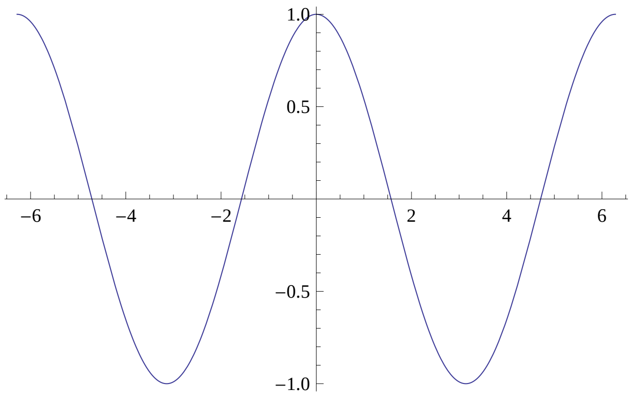
Lösningsförslag: Vi har

$$\cos 225° = \cos(180° + 45°) = -\cos 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

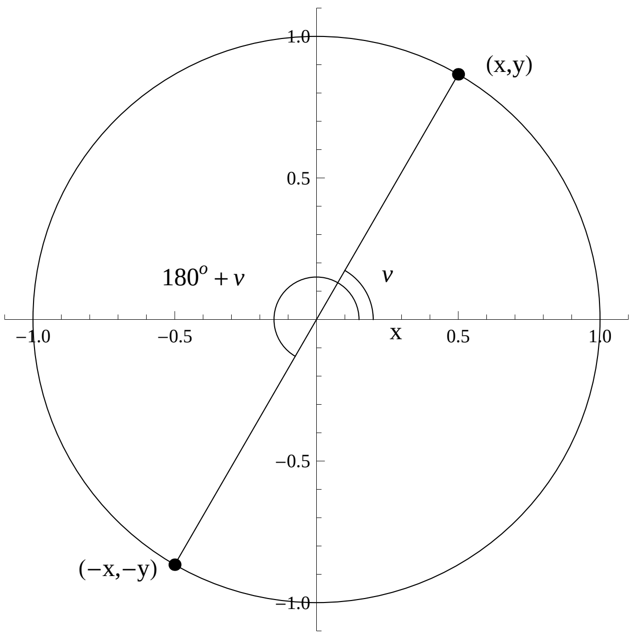
eftersom

$$\cos(180° + v) = -\cos v.$$

★



Figur 35: Grafen för funktionen $f(x) = \cos x$ på intervallet $[-6, 6]$.



Figur 36: En illustration av sambandet mellan sinus- och cosinusvärdena för en vinkel v samt vinkeln $v + 180°$.

Exempel 3.42. *Bestäm* $\cos(5\pi/3)$.

Lösningsförslag: Vi har $5\pi/3 = 2\pi - \pi/3$. Alltså är

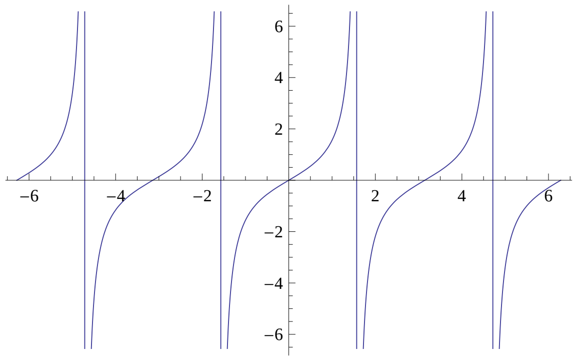
$$\cos(5\pi/3) = \cos(2\pi - \pi/3) = \cos(-\pi/3) = \cos(\pi/3) = 1/2.$$

★

Trigonometriska ekvationer

Exempel 3.43. *Bestäm samtliga lösningar till* $\sin v = \frac{1}{2}$. *Svara både i grader och i radianer.*

Lösningsförslag: Vi utför räkningarna i radianer och omvandlar sedan resultatet till grader. För att bestämma samtliga lösningar är det mycket att tänka på. Först måste vi veta någon vinkel



Figur 37: Grafen för funktionen $f(x) = \tan x$ på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$ minus punkterna $-3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2$ och $5\pi/2$ där $\tan x$ är odefinierad.

v som uppfyller $\sin v = \frac{1}{2}$. En sådan är $\pi/6$. Vi måste också komma ihåg att $\sin v = \sin(\pi - v)$ vilket innebär att även $v = 5\pi/6$ är en lösning till ekvationen. Slutligen får vi inte glömma att $\sin v = \sin(v + n \cdot 2\pi)$, där n är ett heltal. Alltså får vi att samtliga lösningar till ekvationen ges av

$$\pi/6 + n \cdot 2\pi \text{ och } 5\pi/6 + n \cdot 2\pi,$$

vilket är

$$30^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ och } 150^\circ + n \cdot 360^\circ$$

uttryckt i grader. ★

Exempel 3.44. *Hur många lösningar har ekvationen* $\cos v = \frac{1}{2}$ *i intervallet* $[\pi, 3\pi]$*?*

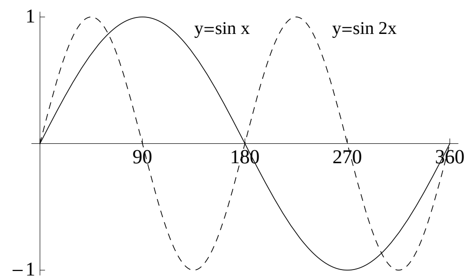
Lösningsförslag: Sen tidigare vet vi att en lösning till ekvationen är $\pi/3$. Eftersom $\cos v = \cos(-v)$ så är även $-\pi/3$ en lösning. De allmänna lösningarna till ekvationen är alltså $\pm\pi/3 + 2n\pi$. Om $n = 1$ så ger det oss lösningarna $\pi/3 + 2\pi$ och $2\pi - \pi/3$, vilka ligger i det aktuella intervallet. Om $n \leq 0$ eller $n \geq 2$ så hamnar lösningarna utanför intervallet. Antalet lösningar är därför 2. ★

Exempel 3.45. *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen* $\cos^2 v - 3\cos v/2 + 1/2 = 0$.

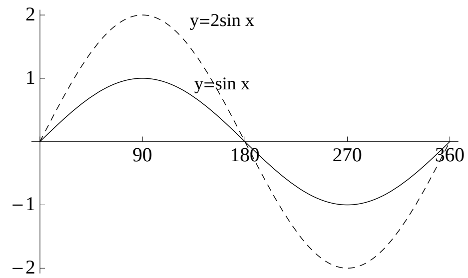
Lösningsförslag: Vi börjar med att sätt $y = \cos v$. Detta ger oss ekvationen $y^2 - 3y/2 + 1/2 = 0$ som har lösningarna $y = 1/2$ och $y = 1$. Från den föregående uppgiften vet vi att $\cos v = 1/2$ har lösningarna $\pm\pi/3 + 2n\pi$. Ekvationen $\cos v = 1$ har lösningarna $v = 2\pi$. Lösningarna till ekvationen ges alltså av $\pm\pi/3 + n \cdot 2\pi$ och $2n\pi$ ★

Period, amplitud och fasförskjutning. Nu ska vi titta på funktioner av typen $A\sin(Bx - C)$ och $A\cos(Bx - C)$, där A, B och C är konstanter. Vi väljer att mäta vinklarna med grader genom hela detta kapitel. Vi har tidigare pratat om perioden av $\sin x$ och $\cos x$. Vi ska nu se vad som händer med perioden om vi istället undersöker funktioner av typen $\sin(Bx)$ och $\cos(Bx)$. Vi börjar med att betrakta $\sin x$ och $\sin 2x$ för att jämföra dem. Vi vet sedan tidigare att $\sin x$ har perioden 360° vilket innebär att sinuskurvan upprepar sig efter 360°. De båda kurvorna $\sin x$ och $\sin 2x$ är uppritade i Figur 38.

Vi ser att $\sin 2x$ upprepar sig redan efter 180°. Och det visar sig att $\sin 2x$ har perioden 180°. Allmänt gäller att $\sin(Bx)$ och $\cos(Bx)$ har perioden $\frac{360^\circ}{B}$. I Figur 38 ser vi också att funktionen $\sin x$ antar värden mellan -1 och 1. Man säger att $\sin x$ har amplitud 1. Vi jämför nu $\sin x$ med $2\sin x$, se Figur 39.



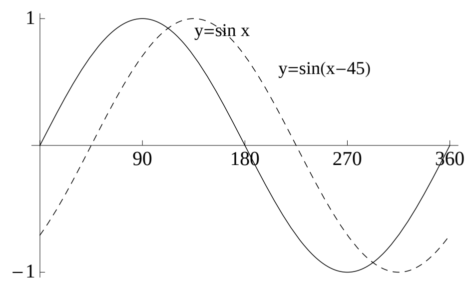
Figur 38: De båda kurvorna $\sin x$ och $\sin 2x$.



Figur 39: De båda kurvorna $\sin x$ och $2\sin x$.

Vi ser att de båda kurvorna har samma period men $2\sin x$ antar värden mellan -2 och 2. Man säger att $2\sin x$ har *amplitud* 2. Allmänt gäller att $A\sin x$ och $A\cos x$ har amplitud A.

Kvar har vi *fasförskjutning*. Betrakta Figur 40 där vi ser de båda funktionerna $\sin x$ och $\sin(x - 45°)$.



Figur 40: De båda kurvorna $\sin x$ och $\sin(x - 45°)$.

De båda kurvorna har samma utseende förutom att $\sin(x - 45°)$ är förskjuten $45°$ åt höger i x-led. Allmänt gäller att $\sin(x - C)$ och $\cos(x - C)$ har en fasförskjutning på C längdenheter åt höger om C är positivt och åt vänster om C är negativt.

Vi kan nu bestämma period, amplitud och fasförskjutning för funktioner på formen $A\sin(Bx + C)$ och $A\cos(Bx + C)$ där A, B och C är konstanter.

Exempel 3.46. *Bestäm period, amplitud och fasförskjutning för funktionen* $3\cos(2x - 30°)$.

Lösningsförslag: Amplituden kan direkt avläsas till 3 och perioden till $180°$. För att bestämma fasförskjutningen vill vi veta hur mycket x förskjuts och inte hur mycket $2x$ förskjuts. Fasförskjutningen blir alltså *inte* $30°$. Vi gör en omskrivning för att kunna avläsa fasförskjutningen. $3\cos(2x - 30°) = 3\cos(2(x - 15°))$. Fasförskjutningen blir alltså 15° till höger i x-led. ★

Polär framställning av komplexa tal

Tidigare har vi lärt oss att ange komplexa tal på formen $a + bi$. Vi kommer nu införa något som kallas *polära koordinater* för att ange komplexa tal. De polära koordinaterna bygger på att man anger hur långt från origo punkten ligger samt i vilken riktning.

Låt $z = a + bi$. I det första kapitlet införde vi beteckningen $\bar{z}$ för det komplexa talet $a - bi$ och vi såg att $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ genom att använda konjugatregeln. Vi definierar nu absolutbeloppet av det komplexa talet z som

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Observera att om $b = 0$ så överensstämmer definitionen av detta absolutbelopp med det vanliga absolutbeloppet.

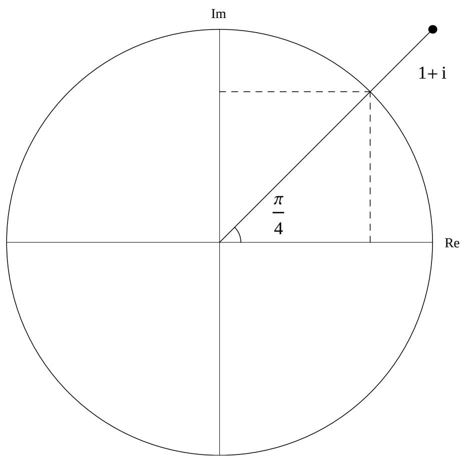
Exempel 3.47. *Låt $z = 1 + i$. Då är*

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Det komplexa talet $z = a + bi$ definierar en punkt (a, b) i det komplexa talplanet. Talet $r = |z|$ betecknar då avståndet till origo, det vill säga $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Argumentet till z, betecknat $\arg(z)$, är vinkeln mellan den positiva reella axeln och den räta linje som går från origo till punkten (a, b).

Exempel 3.48. *Argumentet till $z = 1 + i$ är $\pi/4$ eftersom vinkeln mellan den positiva reella axeln och den räta linje som går från origo till punkten $(1, 1)$ är $\pi/4$, se Figur 41.*



Figur 41: Punkten $z = 1 + i$ och enhetscirkeln i det komplexa talplanet.

Exempel 3.49. *Argumentet till $z = i - 1$ är $3\pi/4$ eftersom vinkeln mellan linjen genom origo till punkten $(-1, 1)$ och den positiva reella linjen är $\pi/2 + \pi/4 = 3\pi/4$, se Figur 42.*

Det komplexa talet $z = a + bi$ kan alltså skrivas som

$$|z|(\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z))).$$

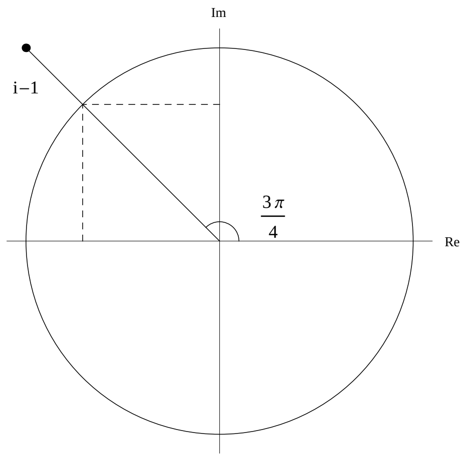
Lägg märke till att i specialfallet när $|z| = 1$ så ligger (a, b) på enhetscirkeln.

Exempel 3.50. *Skriv $z = i - 1$ på polär form.*

Lösningsförslag: Vi har tidigare sett att argumentet till z är $3\pi/4$. Eftersom absolutbeloppet av $i - 1$ är $\sqrt{2}$ så gäller det att

$$z = \sqrt{2}(\cos 3\pi/4 + i \sin 3\pi/4).$$

★



Figur 42: Punkten $z = i - 1$ och enhetscirkeln i det komplexa talplanet.

Exempel 3.51. *Det komplexa talet $z = 3 + 3i$ kan skrivas på formen $r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$. Bestäm r och θ.*

Lösningsförslag: Vi börjar med att beräkna absolutbeloppet av z och får

$$|z| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Vinkeln från origo till punkten $(3, 3)$ är $\pi/4$. Det komplexa talet z kan alltså skrivas som

$$3\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

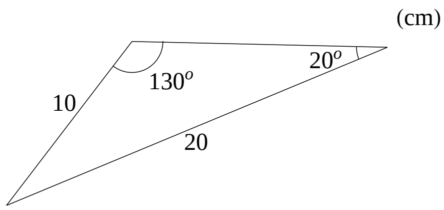
på polär form. Vi ser att $r = 3\sqrt{2}$ och att $\theta = \pi/4$.

★

Övningar

1. Visa att $\sin(90° - v) = \cos v$ och $\cos(90° - v) = \sin v$. *Ledning: Rita upp en rätvinklig triangel med en vinkel v och en vinkel $90° - v$.*

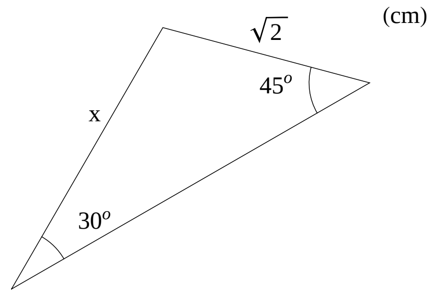
2. Beräkna arean av triangeln i Figur 43.



Figur 43: En triangel där vi vet två sidor och kan beräkna den mellanliggande vinkeln.

3. Beräkna längden av den med x markerade sidan i Figur 44.

4. Beräkna exakt
   (a) $\sin(-30°)$
   (b) $\sin 420°$



Figur 44: Längden av sidan x i figuren kan beräknas med en av triangelsatserna.

(c) $\cos(-720^\circ)$

5. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $\cos^2 v = \frac{1}{2}$. Svara i grader.
6. Bestäm period, amplitud och fasförskjutning för $5\sin(\frac{1}{3}x + 15)$.
7. Beräkna $\sin\frac{\pi}{6}$.
8. Lös ekvationen $\cos^2 x = \frac{1}{2}$. Svara i radianer.
9. Skriv på polär form.

   (a) $1 + i$

   (b) $1 - i$

4 Derivator och integraler

Det här kapitlet handlar om derivator och integraler. För att kunna definiera begreepen derivata och integral behöver vi *gränsvärden*. Vi börjar därför kapitlet med att studera gränsvärden.

4.1 Gränsvärden

Det finns i grunden två typer av gränsvärden när vi arbetar med funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Det ena fallet är när x går mot antingen plus eller minus oändligheten och det andra fallet är när x närmar sig ett ändligt tal, till exempel 0. Vi ger inte någon formell definition av gränsvärde i den här kursen, utan hänvisar till läromedel i högskolans grundkurser i matematik.

Gränsvärden när x går mot oändligheten

Att x går mot oändligheten skriver vi som $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$. Betrakta den rationella funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Först och främst kan vi dra slutsatsen att funktionen är definierad över hela $\mathbb{R}$ eftersom nämnaren $x^2 + 1$ aldrig kan vara lika med noll. Hur uppför sig då funktionen? Vi kan notera att

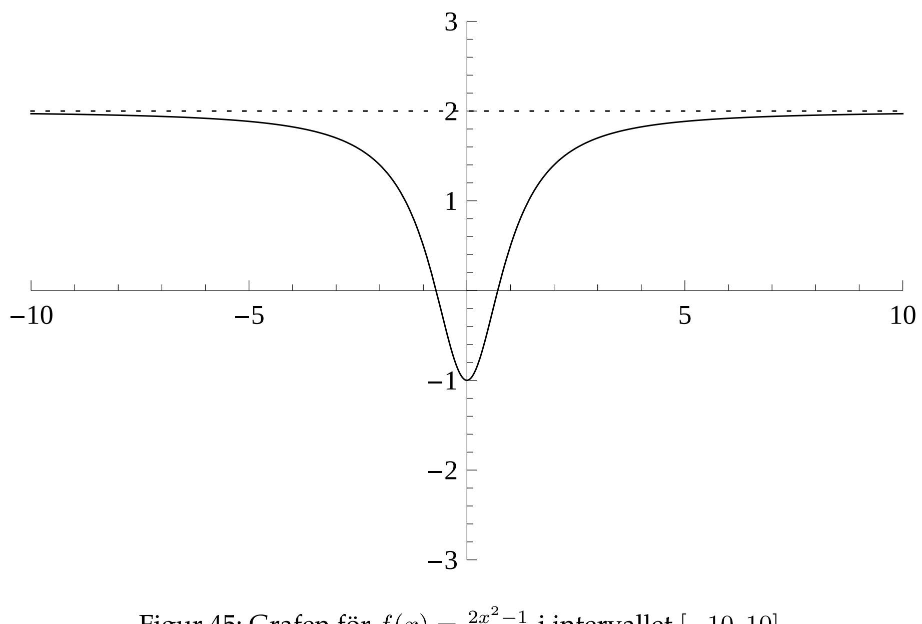
$$f(-a) = \frac{2(-a)^2 - 1}{(-a)^2 + 1} = \frac{2a^2 - 1}{a^2 + 1} = f(a)$$

för alla reella tal a. Det innebär att grafen för f är symmetrisk kring nollan.

Låt oss studera några värden på x. Av symmetriskäl räcker det att titta på positiva värden. Vi har

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	-1	1/2	7/5	17/10	31/17	49/26	71/37

Vi noterar att alla dessa värden är mindre än två. I Figur 45 har vi skissat $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$ samt linjen $y = 2$. Det verkar som att $f(x) \to 2$ då $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$.



Figur 45: Grafen för $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$ i intervallet $[-10, 10]$.

Det gäller att gränsvärdet för $f(x)$ när x går mot plus/minus oändligheten verkligen är två, och detta skriver vi som

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+1}=2 \quad \text{och} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+1}=2.$$

Låt oss ge ett bevis av detta. Vi börjar med att dela båda täljare och nämnare med x^2, vilket är tillåtet eftersom vi inte är intresserade av funktionens värde i nollan. Vi får

$$\frac{\frac{2x^2-1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}}=\frac{2-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}.$$

Om vi låter x gå mot plus eller minus oändligheten kommer $\frac{1}{x^2}$ att gå mot noll. Det gäller alltså att

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{2-0}{1+0}=2 \quad \text{och} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{2-0}{1+0}=2.$$

Gränsvärden då x närmar sig ett ändligt tal

Att x går mot ett ändligt tal a skriver vi som som $x \to a$. Om man vill säga att $f(x)$ närmar sig L då $x \to a$ så skriver man

$$\lim_{x\to a} f(x)=L.$$

Om $f(x)$ har gränsvärdet L då $x \to a$ så menar man underförstått att $f(x)$ har samma gränsvärde oberoende av om x närmar sig a från höger eller från vänster på tallinjen.

Betrakta den rationella funktionen

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+2x}{x-2},$$

se Figur 46. Vi ska nu beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 2} f(x).$$

Eftersom nämnaren är noll när $x=2$ så är f odefinierad i den punkten. Studerar vi grafen till f så ser det ut som att vi skulle kunna definiera $f(2)$ som 2.

Vi provar med att faktorisera täljaren. Först noterar vi att $x^3-3x^2+2x=x(x^2-3x+2)$ och med kvadratkomplettering kan vi skriva om x^2-3x+2 som $(x-1)(x-2)$. Det gäller alltså att

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+2x}{x-2}=\frac{x(x-1)(x-2)}{x-2}.$$

Nu kan det vara lockande att dela både nämnare och täljare med $x-2$, men

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{x-2} \quad \text{och} \quad x(x-1)$$

definierar endast samma funktion om x är skild från 2.

Däremot är

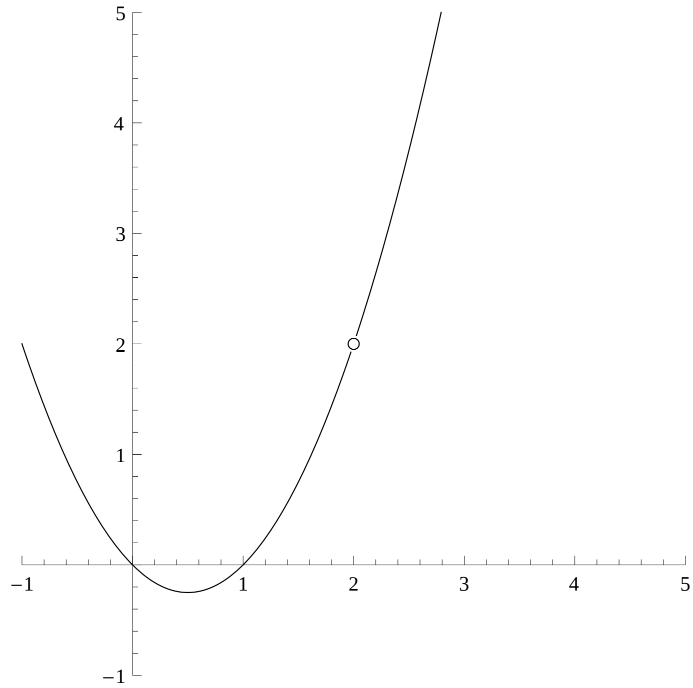
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to 2} x(x-1)$$

eftersom x endast närmar sig värdet 2, men aldrig antar detta värde.

Själva gränsövergången blir inte svår. Vi får

$$\lim_{x\to 2} x(x-1)=2(2-1)=2.$$

Vi har alltså visat att $\lim_{x\to 2} f(x)=2$.



Figur 46: Grafen för $f(x) = \frac{x^3-3x^2+2x}{x-2}$ i intervallet $[-1, 5]$. När $x = 2$ är funktionen odefinierad.

Ett klassiskt exempel på ett gränsvärde då x närmar sig ett ändligt tal är

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Definitionsmängden till funktionen $\frac{\sin x}{x}$ är $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, men det visar sig att när funktionen närmar sig noll från höger på tallinjen så närmar sig funktionens värde talet 1. Samma ska gäller när vi rör oss från vänster på tallinjen. Det gäller faktiskt att

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

En graf av funktionen $\sin x/x$ visas i figur Figur 47. Observera dock att $\sin x/x$ fortfarande inte är definierad i $x = 0$.

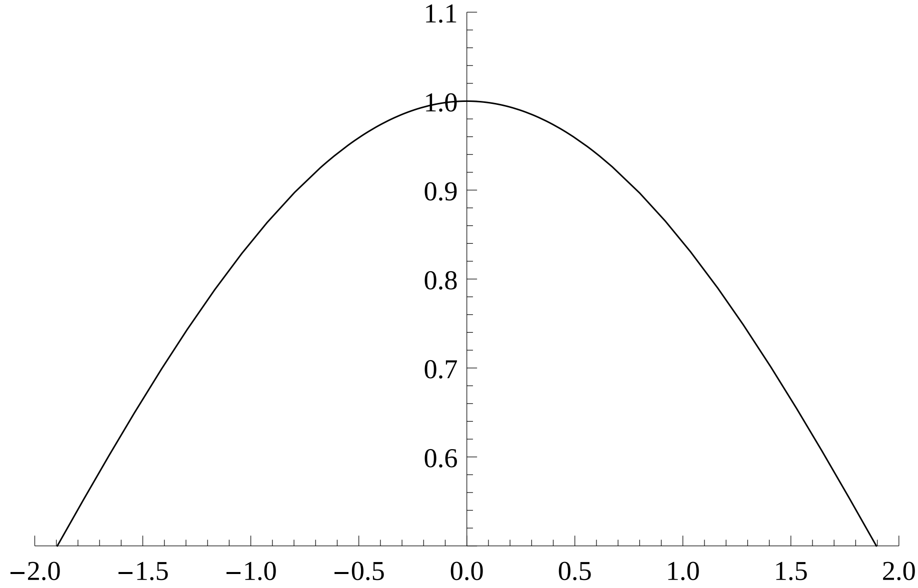
4.2 Derivata

När man kör bil måste man hålla koll på hastigheten. Det bilens hastighetsmätare visar är hastigheten i ett visst ögonblick, och alltså inte någon medelhastighet. Matematiskt beskriver man hastigheten med *derivata*.

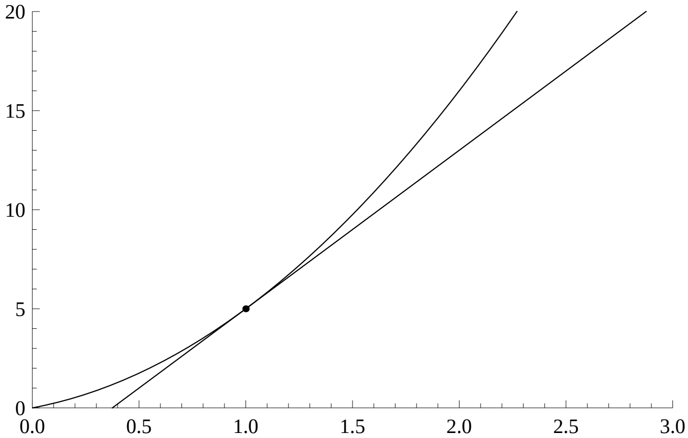
Mer precist beskriver begreppet derivata förändringshastighet. Om vi har en funktion $s(t)$ som beskriver hur lång sträcka vi har åkt, så kommer funktionens derivata $s'(t)$ beskriva hastigheten. Ritar vi grafen till $s(t)$ så kommer derivatan i punkten t_0 vara *lutningen* på *tangenten* till $s(t)$ i punkten t_0.

Följande resonemang ger oss hur vi kommer fram till tangentens lutning och då samtidigt derivatan i en punkt x_0.

Om vi ritar en linje genom två punkter på kurvan $f(x)$, där en av punkterna är $(x_0, f(x_0))$ och den andra punkten är nära denna punkten, så kommer denna linje vara nästan tangentens lutning. Ju närmare den andra punkten är $(x_0, f(x_0))$, desto bättre uppskattning.



Figur 47: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ på vardera sidor om $x = 0$



Figur 48: En funktion samt dess tangent i punkten $(1, 5)$.

Lutningen på en rät linje mellan punkterna (a, b) och (c, d) ges som vi tidigare sett av $\frac{d-b}{c-a}$, så om vi i vårt fall låter punkternas x-koordinater vara x_0 och $x_0 + h$, så kommer linjen genom punkterna $(x_0, f(x_0))$ och $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ bli

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

När vi låter parametern h, som kan vara både negativ och positiv, närma sig 0, så kommer vi att få lutningen på tangenten. Vi kan nu definiera derivatan av $f(x)$, som betecknas $f'(x)$.

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}}$$

Genom att använda sig av gränsvärden så kan man härleda derivatan av olika funktioner, något som du säkert minns från gymnasiet. Det finns också ett par allmänna regler för hur man räknar med derivering som också härleds med hjälp av gränsvärden.

Det finns flera sätt att beteckna derivatan av $y = f(x)$:

$$f'(x) \quad \text{och} \quad D\,[f(x)]\,.$$

Derivator av kända funktioner

Nedan visas derivator att våra vanligaste funktioner; konstanta funktioner, polynom, trigonometriska funktioner, exponentialfunktioner och logaritmfunktioner.

funktion	derivata
k	0
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
x^n	nx^{n-1}

Exempel 4.1.

$$D[2] = 0, \quad D[x] = 1, \quad D[x^{10}] = 10x^9, \quad D[x^{3/2}] = \frac{3}{2}x^{1/2}, \quad D[1/x] = D[x^{-1}] = -1{\cdot}x^{-2} = -1/x^2$$

Exempel 4.2. *Visa med hjälp av derivatans definition att derivatan av x^2 är $2x$.*

Lösningsförslag: Vi har alltså $f(x) = x^2$ och vi ska bestämma $f'(x)$. Enligt derivatans definition är

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Eftersom $f(x) = x^2$ så är

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x + h.$$

När h närmar sig noll går $2x + h$ mot $2x$, så

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x,$$

precis vad vi skulle visa. ★

För att bevisa att derivatan av x^n är nx^{n-1} för ett godtyckligt n kan man använda binomialsatsen.

För att visa att derivatan av $\sin x$ är lika med $\cos x$ använder man ett samband som inte ingår i kursen, nämligen $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

Derivatan av summor av funktioner

Det gäller att derivatan av en summa av funktioner är densamma som summan av funktionernas derivator, vilket är mycket hjälpsamt vid beräkning av derivator. Mer precist så gäller det att

$$\boxed{\begin{gathered} D[f(x) + g(x)] = D[f(x)] + D[g(x)] \\ \text{och} \\ D[af(x)] = aD[f(x)] \text{ för } a \in \mathbb{R}. \end{gathered}}$$

Exempel 4.3.

$$D[\sin x + x^2 + 4x^4] = D[\sin x] + D[x^2] + 4D[x^4] = \cos x + 2x + 16x^3.$$

Produktregeln

Produktregeln beskriver hur man deriverar produkten av två funktioner:

$$\boxed{D\left[f(x) \cdot g(x)\right] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Exempel 4.4. *Vad blir derivatan av funktionen $f(x) = x^2 \cdot \sin x$ i punkten $x = \pi$?*

Lösningsförslag: Låt $g(x) = x^2$ och låt $h(x) = \sin x$. Då får vi

$$D(f(x)) = D(g(x)h(x)) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

enligt produktregeln. Alltså är $f'(\pi) = -\pi^2$. ★

Exempel 4.5. *Vad blir derivatan av funktionen $f(x) = e^x \cdot \ln x$?*

Lösningsförslag: Låt $g(x) = e^x$ och låt $h(x) = \ln x$. Då får vi

$$D(f(x)) = D(g(x)h(x)) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = e^x \cdot \ln x + \frac{e^x}{x}$$

enligt produktregeln. ★

Produktregeln visar man med hjälp av definitionen på derivata och gränsvärdesformler.

Kedjeregeln.

Kedjeregeln beskriver hur man deriverar en sammansatt funktion:

$$\boxed{D\left[f\left(g(x)\right)\right] = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)}$$

Man kallar $f(x)$ för den *yttre* funktionen och $g(x)$ för den *inre* funktionen. Regeln minns man då lättast genom att tänka "yttre derivatan gånger inre derivatan".

Exempel 4.6. *Bestäm derivatan av funktionen $f(x) = \sin x^2$.*

Lösningsförslag: Låt $g(x) = \sin x$ och låt $h(x) = x^2$. Då är $f(x) = g(h(x))$. Enligt kedjeregeln blir derivatan

$$D(f(x)) = D(g(h(x)) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \cos x^2 \cdot 2x.$$

★

Exempel 4.7. *Bestäm derivatan av funktionen $f(x) = (x^2 + 5)^{10}$ i punkten $x = 0$.*

Lösningsförslag 1: Låt $g(x) = x^{10}$ och låt $h(x) = x^2 + 5$. Då är $f(x) = g(h(x))$. Enligt kedjeregeln blir derivatan

$$D(f(x)) = D(g(h(x)) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 10(x^2 + 5)^9 \cdot 2x$$

och vi får $f'(0) = 10(0^2 + 5)^9 \cdot 2 \cdot 0 = 0$. ★

Lösningsförslag 2: En annan möjlig lösning är att utveckla $(x^2 + 5)^{10}$ med binomialsatsen och sedan derivera polynomet termvis. Men det blir givetvis otroligt mycket räkningar. ★

För den intresserade läsaren ska vi nu genomföra beviset av kedjeregeln. Vi kallar $g(x)$ för y, och vi använder Δx för att beteckna en liten skillnad på x. Då gäller det att en liten skillnad på x ger oss en liten skillnad på y, förutsatt att g är *kontinuerlig* . Vi ska inte gå in på detaljer, men man kan säga att en funktion är kontinuerlig om man kan rita den utan att lyfta på pennan. Alla reella funktioner som vi stött på hittills är kontinuerliga. Vi behöver en till definition innan vi formulerar och bevisar satsen. Vi sätter $\Delta y = g(x + \Delta x) - g(x)$, vilket innebär att Δy är litet om Δx är litet.

Sats. Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara kontinuerliga reella funktioner. Då gäller att

$$D\left[f\left(g(x)\right)\right] = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$$

Bevis. Enligt definitionen av derivata så gäller det att

$$D\left[f(g(x))\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

Vi förlänger täljare och nämnare med $g(x + \Delta x) - g(x)$ och får

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{g(x + \Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Vi kan enligt ovan snygga till nämnaren, samt byta ut $g(x + \Delta x)$ till $\Delta y + g(x)$ i nämnaren. Vi får

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta y + g(x)) - f(g(x))}{\Delta y} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Här byter vi nu ut $g(x)$ till y, och får

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Eftersom $\Delta y \to 0$ då $\Delta x \to 0$, så får vi att ovanstående blir

$$\left(\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y}\right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right)$$

Vi känner nu igen delarna som definitioner på derivator och vi har helt enkelt

$$f'(y) \cdot g'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Vi är nu klara med beviset. $\square$

Kvotregeln. Kvotregeln beskriver hur man beräknar derivatan av en kvot.

$$\boxed{D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}.}$$

Exempel 4.8. *Beräkna derivatan av $f(x) = x^2 / \sin x$.*

Lösningsförslag: Låt $g(x) = x^2$ och låt $h(x) = \sin x$. Då är

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x)h'(x)}{\left(h(x)\right)^2} = \frac{2x \cdot \sin x - x^2 \cos x}{\sin^2 x}.$$

★

Man kan härleda kvotregeln från produktregeln och kedjeregeln, men vi utelämnar det beviset.

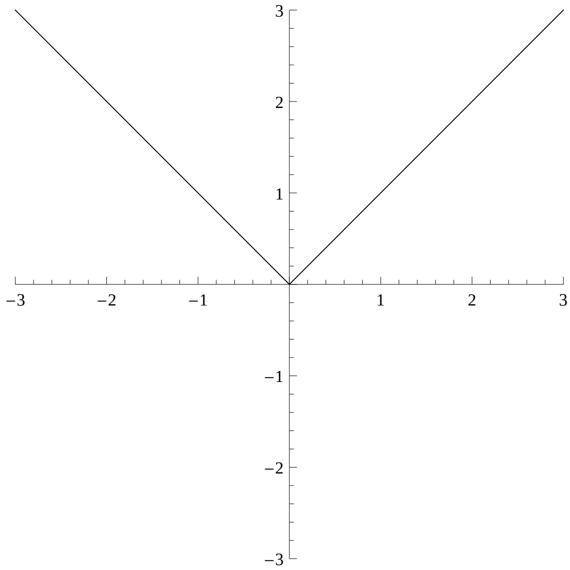
Är derivatan alltid definierad?

Låt oss studera derivatans definition igen. Det gäller alltså att

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Vad som är viktigt att förstå är att talet h kan vara både negativt och positivt. Det innebär att $x + h$ både kan vara mindre än eller större än x. För att derivatan ska vara definierad måste alltså $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ vara samma tal oavsett om vi ”kommer från höger” (om h är positivt) eller om vi ”kommer från vänster” (om h är negativt). Att det inte spelar någon roll från vilket håll vi kommer gäller för våra vanliga funktionstyper; polynom, rationella funktioner, exponentialfunktioner, logaritmfunktioner och trigonometriska funktioner, men det visar sig att det finns elementära funktioner där derivatan är *odefinierad*.

Ett klassiskt exempel är funktionen $f(x) = |x|$, se Figur 49. Funktionen kan skrivas som



Figur 49: Funktionen $f(x) = |x|$.

$$f(x) = \begin{cases} g(x) = x \text{ om } x \geq 0 \\ h(x) = -x \text{ om } x < 0. \end{cases}$$

Derivatan av funktionen $g(x)$ är 1 medan derivatan av funktionen $h(x)$ är -1, vilket antyder att derivatan till funktionen är odefinierad i punkten 0. Låt oss visa att derivatan verkligen är odfinierad. Antag först att h är ett positivt tal. Vi får då

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} f(h)/h = \lim_{h \to 0} h/h = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$

Om vi istället antar att h är ett negativt tal så får vi

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} f(h)/h = \lim_{h \to 0} -h/h = \lim_{h \to 0} -1 = -1$$

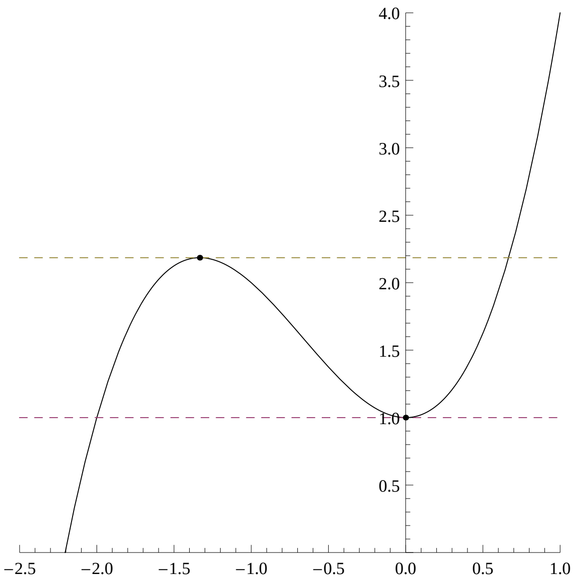
eftersom $f(h) = -h$ då h är negativt.

Det gäller alltså att funktionen $f(x)$ saknar derivata i punkten 0. Observera att $\lim_{h \to 0} 1 = 1$ och att $\lim_{h \to 0} -1 = -1$ eftersom vänsterleden inte alls beror av h.

Tillämpning av derivata

Vi säger att en funktion $f(x)$ har ett lokalt minimum i punkten a om funktionsvärderna precis intill punkten a är större än $f(a)$. På samma sätt har $f(x)$ ett lokalt maximum i punkten a om funktionsvärderna precis intill punkten a är mindre än $f(a)$.

Derivatan till en funktion är noll eller odefinierad i punkter där lokalt minimum eller maximum finns. Man kan inse detta genom att minnas definitionen av derivatan av en funktion i en punkt som lutningen på tangenten på funktionens grad i samma punkt. Att ha lutning noll är detsamma som att vara parallell med x-axeln, se Figur 50.



Figur 50: Grafen för funktionen $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$. Derivatan $f'(x)$ är lika med $3x^2 + 4x = (3x + 4) \cdot x$ och har nollställen i $x = 0$ och i $x = -4/3$. I punkten $x = 0$ har funktionen en lokal minimpunkt och i punkten $x = -4/3$ antar f ett lokalt maxima. Tangenterna i dessa punkter är utritade med streckade linjer.

Funktionen $f(x) = 16 - x^2$ har ett maximum för $x = 0$ och mycket riktigt så är $f'(0) = 0$. Funktionen $f(x) = |x|$ har ett minimum i $x = 0$ och saknar derivata i den punkten. Punkter som är lokala maxima eller minima kallas för *extrempunkter*.

Det gäller att andraderivatan $f''(x)$, definierad som derivatan av $f'(x)$, är positiv i ett lokalt minimum, och att $f''(x)$ är negativ i ett lokalt maximum (om den existerar vill säga). Observera att det i vissa fall gäller att $f'(x) = f''(x) = 0$. I dessa fall kan det hända att funktionen inte har några lokala extrempunkter trots att derivatan är noll. Exempelvis saknar funktionen $f(x) = x^3$ lokala extrempunkter trots att $f'(0) = 0$.

Exempel 4.9. *Bestäm alla extrempunkter, deras typ, och funktionsvärdet i dessa för funktionen* $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.

Lösningsförslag: Efter $f(x)$ är ett polynom så är derivatan definierad överallt. Vi beräknar att $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$, så lösningarna till $f'(x) = 0$ är $x = 2$ och $x = -1$. Detta blir våra potentiella extrempunkter, eftersom $f(x)$ inte har några punkter där derivatan saknas.

Vi beräknar sedan $f''(x) = 12x - 6$ och vi får att $f''(-1) = -18 < 0$, så $x = -1$ är ett maximum. Vidare så är $f''(2) = 18$ och $x = 2$ är då ett minimum.

Sammanfattningsvis har vi då att $x = -1$ är ett maximum, och $x = 2$ är ett minimum. Funktionsvärdena i dessa punkter är $f(-1) = 12$ resp. $f(2) = -15$. ★

Maximum och minimum av en funktion definierad på ett intervall. Om man vill finna maximum (minimum) för en funktion, $f(x)$ i ett intervall $[a, b]$, så kan man göra på följande sätt.

1. Derivera $f(x)$ och bestäm alla punkter inom $[a, b]$ där $f'(x) = 0$. Beräkna funktionsvärdet i dessa.

2. Beräkna funktionens värde i eventuella punkter där derivatan inte är definierad.

3. Beräkna funktionens värde i ändpunkterna.

4. Funktionens maximum (minimum) är det största (minsta) värdet av alla funktionsvärden du beräknat.

Exempel 4.10. *Bestäm alla extrempunkter, deras typ, och funktionsvärdet i dessa för funktionen* $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ *på intervallet* $[-3, 1]$.

Lösningsförslag: Sedan tidigare vet vi att derivatan till $f(x)$ är noll i $x = 2$ och $x = -1$. Det första värdet ingår dock inte i vårt intervall. Låt oss ta reda på funktionsvärderna i ändpunkterna. Vi får $f(-3) = 2\cdot(-27)-3\cdot 9-12\cdot(-3)+5 = -54-27+36+5 = -40$ och $f(1) = 2-3-12+5 = -8$. Det följer att funktionens maximala värde är $f(-1) = 12$ och att dess minimala värde är $f(-3) = -40$. ★

Det var ju ganska enkelt eftersom funktionen ovan var snäll. Vi avslutar avsnittet med ett tuffare exempel.

Exempel 4.11. *Finn största och minsta värde som funktionen* $f(x) = -x^2 + |x| + 2$ *antar på intervallet* $[-2, 1/4]$.

Lösningsförslag: Eftersom vi har ett absolutbelopp med så är derivatan inte definierad i $x = 0$. Låt oss dela upp funktionen i två delar, där båda delarna är polynom.

Funktionen kan skrivas som

$$f(x) = \begin{cases} g(x) = -x^2 + x + 2 \text{ om } x \geq 0 \\ h(x) = -x^2 - x + 2 \text{ om } x < 0. \end{cases}$$

Derivatan av $g(x)$ är $-2x + 1$. Om vi sätter detta uttryck till noll får vi $x = 1/2$. Denna punkt ligger dock inte i det intervall där $f(x)$ är definierad.

För funktionen $h(x)$ har vi $h'(x) = -2x - 1$ och vi får $x = -1/2$ som lösning till $h'(x) = 0$.

Vi har alltså fyra punkter som kandidater till min- och maxpunkter; punkten där derivatan är odefinierad ($x = 0$), punkten där derivatan är noll ($x = -1/2$) samt intervallets ändpunkter ($x = -2$ och $x = 1/4$).

Vi får

$$f(0) = 2, \quad f(-1/2) = 9/4, \quad f(-2) = 0 \quad \text{och} \quad f(1/4) = 35/16.$$

Eftersom $9/4 = 36/16$ så är $f(-1/2) > f(1/4)$. Alltså är funktionens största värde $9/4$ och funktionens minsta värde är 0. Funktionen illustreras i Figur 51. ★

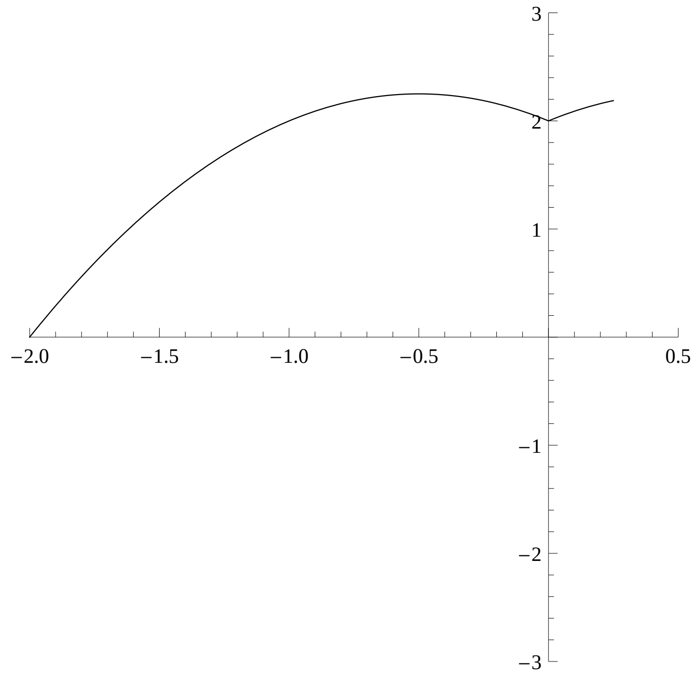
Övningar

1. Bestäm derivatan av $x^5 + x^4 + 3x^2 - 2 + x^{-1}$

2. Bestäm derivatan av $\sin 2x + \cos 2x$.

3. Bestäm derivatan av $\sin^2 x + \cos^2 x$.

4. Bestäm $f'(0)$ då



Figur 51: Funktionen $f(x) = -x^2 + |x| + 2$ på intervallet $[-2, 1/4]$.

(a) $f(x) = x^2 + 2x \cos x$
(b) $f(x) = e^{\sin x}$
(c) $f(x) = (2x + 4)^{10}$

5. Finn minsta och största värde som följande funktioner antar i intervallet $[-10, 10]$:
   (a) $10 - 2x - x^2$
   (b) $|x - 2| + x^2 - 4x$

4.3 Integraler

För att uppskatta en area A i planet som begränsas av en positiv graf och ett intervall $[a, b]$ på x-axeln kan vi ta hjälp av inskrivna och omskrivna rektanglar. Dessa rektanglar brukar kallas för övre och undre rektanglar, se Figur 52.

Låt f vara en funktion som är begränsad i intervallet $[a, b]$. Detta betyder att $f(x) < \infty$ för alla $x \in [a, b]$. Till exempel är alla polynom begränsade i $[a, b]$ oavsett värde på a och b.

Låt oss nu dela upp intervallet $[a, b]$ i n stycken delar. Indelningen kan till exempel skrivas $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, så att x_i är den högra ändpunkten i det i:te intervallet från vänster räknat. Vi får då att det $i$te intervallet ges av $[x_{i-1}, x_i]$ och har längden $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$.

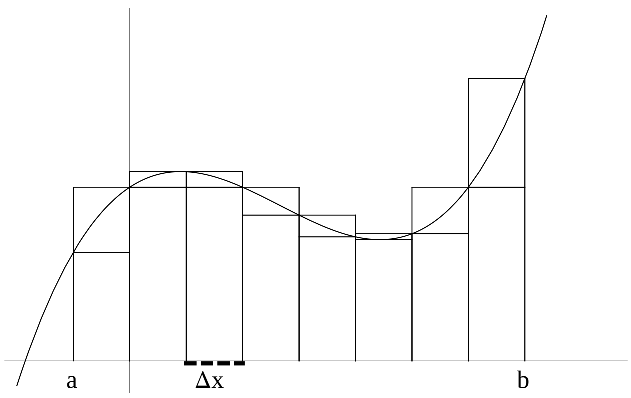
Exempel 4.12. *Om vi delar upp intervallet* $[1, 2]$ *i fem lika stora delar får vi*

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1.2 \quad x_2 = 1.4, \quad x_3 = 1.6, \quad x_4 = 1.8 \quad \textit{och} \quad x_5 = 2.$$

Beteckna det största funktionsvärdet i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$ med M_i och det minsta funktionsvärdet i samma intervall med m_i. Då kommer den övre rektangeln i det i:te intervallet att ha arean $M_i \cdot \Delta x_i$ och den undre rektangeln i samma intervall att ha arean $m_i \cdot \Delta x_i$.

Vi erhåller den så kallade *översumman* och *undersumman* som

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \text{ respektive } s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$



Figur 52: Övre och undre rektanglar till funktionen $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 7$.

Exempel 4.13. *Låt* $f(x) = x^2$. *Beräkna undersumman respektive översumman på intervallet* $[1, 2]$ *då* $n = 2$.

Lösningsförslag: Vi noterar först att $f(x)$ är växande på intervallet $[1, 2]$. Eftersom $n = 2$ ska vi dela upp intervallet i två delar, nämligen $[1, 3/2]$ och $[3/2, 2]$. Det största värdet på funktionen i intervallet $[1, 3/2]$ är $f(3/2) = 9/4$, alltså är $M_0 = 9/4$. Det minsta värdet i samma intervall är $f(1) = 1$, alltså är $m_0 = 1$. Det största värdet på f i intervallet $[3/2, 2]$ är $f(2) = 4$, så $M_1 = 4$ och det minsta värdet är $f(3/2) = 9/4$, så $m_1 = 9/4$. Bägge två intervallen har längden $1/2$, så

$$S_n = M_0 \cdot \frac{1}{2} + M_1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9/4 + 4}{2} = \frac{25}{8}$$

och

$$s_n = m_0 \cdot \frac{1}{2} + m_1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 + 9/4}{2} = \frac{13}{8}$$

★

Den sökta arean under funktionskurvan ligger givetvis mellan dessa två areor. Areorna s_n och S_n närmar sig varandra då indelningen blir finare och finare, alltså då antalet delintervall går mot oändligheten. Vi säger att f är **integrerbar** om s_n och S_n går mot samma tal då $n \to \infty$, och detta tal kallas för **integralen av** f.

Integralen av $f(x)$ i intervallet $[a, b]$ betecknas

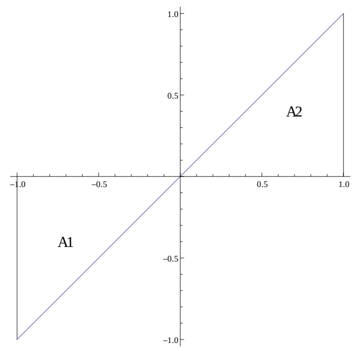
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

I inledningen av detta kapitel antog vi att grafen till funktionen låg ovanför x-axeln, men intergraldefinitionen som arean mellan grafen och x-axeln gäller ändå, om vi tillåter *negativa* areor.

Exempel 4.14. *Integralen av* $f(x) = x$ *på intervallet* $[-1, 1]$ *är noll eftersom den är summan av den negativa arean mellan* -1 *och* 0 *och den positiva arean mellan* 0 *och* 1*, se Figur 53.*

De flesta funktioner du hittills har stött på är integrerbara. I allmänhet gäller att alla kontinuerliga funktioner är integrerbara.

Anmärkning 1. *Observera logiken i påståendet "Alla kontinuerliga funktioner är integrerbara". Det innebär att kontinuerlig är ett* tillräckligt villkor *för att en funktion* $f(x)$ *ska vara integrerbar, men inte något nödvändigt sådant! Det finns funktioner som inte är kontinuerliga men som ändå är integrerbara.*



Figur 53: Integralen av $f(x) = x$ mellan -1 och 1 är noll eftersom areorna $A1$ och $A2$ är lika stora $(1 \cdot 1/2 = 1/2)$ men har ombytta tecken.

Beräkning av integraler

Vi börjar med en definition.

Om f och F är två funktioner sådana att $F'(x) = f(x)$ för alla x i ett intervall I så kallas F för en *primitiv funktion* till f i intervallet I.

Exempel 4.15. *Låt $f(x) = x^2$. Då är $x^3/3$ en primitiv funktion till f eftersom $F'(x) = 3 \cdot x^2/3 = x^2$. Även $x^3/3 + 1$ är en primitiv funktion till f eftersom ettan försvinner vid derivering.*

Som exemplet antyder så finns det oändligt många primitiva funktioner till en funktion f definierad på ett icke-tomt intervall I. Mer precist — om $F(x)$ är en primitiv funktion så är även $F(x) + C$ en primitiv funktion, där C är en godtycklig konstant.

Vid beräkning av integraler använder vi oss av *integralkalkylens huvudsats*.

Om f är en kontinuerlig funktion i intervallet $[a, b]$ och om F är en godtycklig primitiv funktion till f i $[a, b]$ så gäller det att

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Observera att detta resultat blir detsamma vilken primitiv funktion man än väljer eftersom eventuella konstanttermer försvinner vid subtraktionen. Låt till exempel $F + C$ vara en annan primitiv funktion till f. Då är

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Exempel 4.16. *Låt oss verifera att integralen av $f(x) = x$ på intervallet $[-1, 1]$ från Exempel 4.14 verkligen blir noll. $F(x) = x^2/2$ är en primitiv till $f(x) = x$ och alltså gäller det att*

$$\int_{-1}^1 x\,\mathrm{d}x = 1^2/2 - (-1)^2/2 = 1/2 - 1/2 = 0.$$

Funktionsuttrycket $f(x)$ som står under integraltecknet kallas för *integrand*. Ibland skriver man $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ utan integrationsgränser. Man menar då en godtycklig primitiv funktion till $f(x)$.

Några integrationsregler

Låt D beteckna derivatan. Då kan vi från derivationsreglerna

$$D(f+g) = Df + Dg \text{ och } D(kf) = kDf$$

härleda följande regler för integraler:

$$\int (f+g)\,\mathrm{d}x = \int f\,\mathrm{d}x + \int g\,\mathrm{d}x \text{ och } \int kf\,\mathrm{d}x = k\int f\,\mathrm{d}x \tag{4.3.1}$$

där k är en konstant. Man kan alltså integrera termvis och flytta ut konstanter för att göra det lite enklare för sig. Nedan ges primitiva funktioner till några vanligt förekommande funktioner. Observera att man till var och en av de primitiva funktionerna kan addera en konstant.

funktion	primitiv
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
e^x	$e^x + C$
x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert + C$
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, \quad a \neq -1$

För att underlätta beräkningar av integraler har man infört en mellanstegsnotation; man skriver

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

där $F(x)$ är en primitiv till $f(x)$.

Exempel 4.17. *Beräkna*

$$\int x^2\,\mathrm{d}x \textit{ och } \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x.$$

Lösningsförslag: Uttrycket $\frac{x^3}{3} + C$ är en primitv till x. Alltså är

$$\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C.$$

För att lösa den andra delen av uppgiften använder vi mellanstegsnotation ovan.

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

★

Man kan enkelt testa om man funnit rätt primitiv funktion genom att derivera den — då ska man få tillbaka sin ursprungliga funktion.

Exempel 4.18. *Bestäm*

$$\int x^3 + 2x^2 + 1\,\mathrm{d}x$$

och kontrollera beräkningen.

Lösningsförslag: Vi använder räkneregeln i 4.3.1 och får

$$\int x^3 + 3x^2 + 1\,\mathrm{d}x = \int x^3\,\mathrm{d}x + \int 3x^2\,\mathrm{d}x + \int 1\,\mathrm{d}x = x^4/4 + x^3 + x + C.$$

Vi testar att vi verkligen har fått fram en primitiv genom att derivera resultatet. Vi får

$$D[x^4/4 + x^3 + x + C] = x^3 + 3x^2 + 1,$$

vilket är precis vad vi ville ha.

★

Exempel 4.19. *Beräkna*

$$\int_{\ln 1}^{\ln 2} 3e^x \, \mathrm{d}x.$$

Lösningsförslag:

$$\int_{\ln 1}^{\ln 2} 3e^x \, \mathrm{d}x = 3\left[e^x\right]_{\ln 1}^{\ln 2} = 3(e^{\ln 2} - e^{\ln 1}).$$

Eftersom e^x och $\ln x$ är inverser till varandra har vi $e^{\ln 2} = 2$ och $e^{\ln 1} = 1$. Vi får alltså

$$3(e^{\ln 2} - e^{\ln 1}) = 3(2 - 1) = 3.$$

★

Exempel 4.20. *Beräkna*

$$\int_0^{\pi/2} (2\sin x + \cos x) \, \mathrm{d}x.$$

Lösningsförslag:

$$\int_0^{\pi/2} (2\sin x + \cos x) \, \mathrm{d}x = [-2\cos x + \sin 2x]_0^{\pi/2} = -2\cos \pi/2 + \sin \pi + 2 \cdot \cos 0 - \sin 0 = 0 + 0 + 2 + 0 = 2.$$

★

Exempel 4.21. *Beräkna en primitiv till* $\sin x + \cos 2$.

Lösningsförslag: Termen $\cos 2$ är här att betraktas som en konstant och en primitiv blir därför $-\cos x + x\cos 2$. ★

Primitiver av produkter och sammansättningar av funktioner

Integraler är alltså en slags antiderivator, men de är normalt mycket svårare att beräkna. Det finns exempel på integraler som inte har primitiver som kan uttryckas med elementära funktioner. Ett vanligt exempel är e^{-x^2}.

Kuriosa 8. *Att hitta en primitiv till* e^{-x^2} *är alltså omöjligt om vi begränsar oss till de elementära funktionerna. Men det visar sig att för integrationsgränserna* $-\infty$ *och* ∞ *(definitionen av integrationsgränserna* $-\infty$ *och* ∞ *ryms normalt inom grundkurser i matematik på högskolan) är integralen möjlig att bestämma! Det gäller faktiskt att* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$*. Resultaten kommer som en naturlig följdsats från en sats i matematisk statistik.*

I resten av det här kapitlet ska vi studera primitiver av produkter och sammansatta funktioner.

Om vi ska hitta en primitiv till e^{2x} så duger inte e^{2x} eftersom $D[e^{2x}] = 2e^{2x}$. Vi måste kompensera för tvåan och provar $e^{2x}/2$. Derivatan av denna funktion är e^{2x}, och alltså är $\int e^{2x} \, \mathrm{d}x = e^{2x}/2 + C$.

På samma sätt har vi

$$\int \sin 5x \,\mathrm{d}x = \frac{-\cos 5x}{5} + C.$$

och

$$\int 6e^{2x} \,\mathrm{d}x = 3e^{2x} + C.$$

I enklare fall som ovan går det bra att använda magkänslan och prova sig fram. Eftersom man kan derivera sitt svar går det enkelt att kontrollera att man tänkt rätt. Men om funktionen är mer komplicerad måste man vara lite mer systematisk.

När integranden är på formen $f(g(x)) \cdot g'(x)$ så kan vi använda oss av kedjeregeln baklänges. Låt $F(x)$ beteckna en primitiv till $f(x)$. Vi vet att

$$\frac{d}{\mathrm{d}x} F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Genom att integrera båda sidor får vi

$$\int \frac{d}{\mathrm{d}x} F(g(x)) \,\mathrm{d}x = \int f(g(x)) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x.$$

Men

$$\int \frac{d}{\mathrm{d}x} F(g(x)) \,\mathrm{d}x = F(g(x)) + C$$

eftersom integral och derivata är varandras motsatser.

Vi har alltså visat att

$$F(g(x)) + C = \int f(g(x)) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x.$$

Exempel 4.22. *Bestäm* $\int 2x \cdot (x^2 - 1)^5 \,\mathrm{d}x$.

Lösningsförslag: Vi kan skriva integranden på formen $g'(x)f(g(x))$, med $g(x) = x^2 - 1$, $f(x) = x^5$ och $g'(x) = 2x$. Alltså gäller det att $D[F(g(x))] = g'(x)f(g(x))$ där $F(x)$ är $\frac{x^6}{6}$. Det följer alltså att $\int 2x(x^2 - 1)^5 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(x^2 - 1)^6 + C$. ★

Exempel 4.23. *Bestäm* $\int x \cdot \sin x^2 \,\mathrm{d}x$.

Lösningsförslag: Vi har noterat att $D[x^2] = 2x$. Om vi sätter $g(x) = x^2$ och $f(x) = \sin x$ så överensstämmer $x \cdot \sin x^2$ med $f(g(x)) \cdot g'(x) = \sin x^2 \cdot 2x$ så när som på en faktor 2. Det gäller alltså att

$$\int x \cdot \sin x^2 \,\mathrm{d}x = \int \frac{f(g(x)) \cdot g'(x)}{2} \,\mathrm{d}x.$$

Eftersom

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) = F(g(x)) + C = -\cos x^2 + C$$

så är

$$\int x \cdot \sin x^2 \,\mathrm{d}x = -\frac{\cos x^2 + C}{2}.$$

Eftersom konstanten C är godtycklig kan vi också svara $-\frac{\cos x^2}{2} + C$.

★

Exempel 4.24. *Bestäm* $\int \sin^3 x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x$.

Lösningsförslag: Med $g(x) = \sin x$ och $f(x) = x^4$ så gäller det att $f'(g(x)g'(x) = 4\sin^3(x) \cdot \cos x$. Vi får

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \int \frac{f'(g(x)g'(x) \, \mathrm{d}x}{4} = \frac{f(g(x))}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

★

Exempel 4.25. *Beräkna* $\int_0^1 xe^{-x^2} \, \mathrm{d}x$.

Lösningsförslag: Denna integral påminner om den "omöjliga" integralen $\int_0^1 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ i Kuriosa 8. Men tack vare faktorn x framför e^{-x^2} kan vi beräkna integralen. Eftersom $D[x^2] = 2x$ och $D[e^x] = e^x$, så är $D[e^{-x^2}] = -2xe^{-x^2}$. Vi behöver alltså endast kompensera med en faktor minus två för att få

$$\int_0^1 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{x^2}}{2} \right]_0^1 = -\frac{e^{-(1^2)} - e^{0^2}}{2} = \frac{1 - e^{-1}}{2} = \frac{e-1}{2e}.$$

★

Övningar

1. Bestäm alla primitiva funktioner till
   (a) $x + x^2$
   (b) $1/x + 1/x^2$
   (c) e^{3x}
   (d) $\sqrt{x} + 1/\sqrt{x}$
   (e) e^{ax+b}
2. Beräkna integralerna
   (a) $\int_0^1 x^2 + 3 \, \mathrm{d}x$
   (b) $\int_0^{-2} e^x - e \, \mathrm{d}x$
   (c) $\int_1^2 x^{3/2} \cdot x \, \mathrm{d}x$
3. Finn en primitiv funktion till
   (a) $(1 + x)^{15}$
   (b) $4x^3 e^{x^4}$
   (c) $(2 + x^2)^3 2x$
   (d) $(2 + 5x^2)^8 x$

   Beräkna integralerna
   (a) $\int_0^{\pi/4} 2\sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x$
   (b) $\int_{-1}^0 3x^2 \cdot (x^3 + 6)^4 \, \mathrm{d}x$
   (c) $\int_2^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \, \mathrm{d}x$
   (d) $\int_0^1 \frac{3x^2}{(x^3+1)^{3/2}} \, \mathrm{d}x$

5 Facit till övningarna

Kapitel 1

Avsnitt 1.2

1. $1-(5-4)=0$
2. $(-1)^3=-1$
3. $(-1)^{12}=1$
4. $-(a-b-(a+b))+(a+b)=a+3b$
5. $(a+b)(c+d)-c(a+b)=(a+b)d$
6. $(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$
7. $(2^2)^2=2^{2^2}, (2^3)^2=8^2=64\neq 2^{3^2}=2^9=512$
8. $k=15$, $r=2$, det vill säga $107=15\cdot 7+2$.
9. $293-10\cdot 17=123$, $123-7\dot{1}7=4$. Resten är alltså 4.

Avsnitt 1.3

1. 4
2. 2
3. 20
4. 661 är ett primtal, medan $133=19\cdot 7$ och $85=5\cdot 17$. Det följer att 133 har de positiva delarna $1,7,19,133$ och att 85 har de positiva delarna $1,5,17,85$, d.v.s. fyra var.
5. -

Avsnitt 1.4

1. 0
2. 1
3. Måndag
4. 2
5. 7
6. 5
7. Om $s_n, s_{n-1},\ldots,s_1,s_0$ är sifforna i talet t kan vi skriva det som $s_n\cdot 10^n+s_{n-1}10^{n-1}+\cdots s_1\cdot 10+s_0$. Eftersom $10\equiv_3 1$ så är $10^n\equiv_3 1^n=1$ och alltså lämnar talet t och dess siffersumma samma rest vid division med tre.

Avsnitt 1.5

1. 100010_2
2. 13

Avsnitt 1.6

1. 41/42

2. -20/3

3. 5/2

4. Ja, de är lika.

   (a) $\frac{41}{27}$
   (b) -9
   (c) $-\frac{1}{30}$
   (d) $\frac{29}{144}$

Avsnitt 1.7

1. 64

2. 2

3. 8

4. 28/3

5. 27

6. $2 \cdot 2^{\frac{1}{12}}$

7. $-53/24$

Avsnitt 1.8

1. $5 - 3i$

2. $4i + 4$

3. (a) $3 - \frac{2i}{3}$
   (b) $-1 - \frac{4i}{3}$
   (c) $\frac{7}{3} - \frac{5i}{3}$

4. -1

5. $Re(z) = -2, Im(z) = 2.$

Avsnitt 1.9

1. 999996

2. (a) x
   (b) $\frac{x-y}{x+y}$
   (c) $-5 - x$

3. 25

4. $\frac{3}{2} + \frac{5i}{2}$

Kapitel 2
Avsnitt 2.1

1. (a) $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
   (b) $x = 1, x = -\frac{5}{3}$
   (c) $x = 3, x = -4$

2. $a = 8/7, b = 2/7$.

3. $x = -1/2, y = 11/2$.

4. $a = 17/4$ och $b = 3/4$.

Avsnitt 2.2

1. (a) Kvot: $x + 2$, rest: 3.
   (b) Kvot: $3x + 2$, rest: $-14x + 1$.
   (c) Kvot: $3x^2 + 11x + 31$, rest: $105x + 38$.
   (d) Kvot: $x + 1$, rest: 0.
   (e) Kvot: $x - 5$, rest: $17x^2 + 17x + 17$.

2. Sant eftersom $p(2) = 0$.

3. $x^3 + x^2 - 2x - 2 = (x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, rötterna är således $-1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

4. Saknar heltalslösningar.

5. $k = -4$ med kvoten $x^2 - 2x + 8$ eller $k = 2$ med kvoten $x^2 - 2x + 2$.

6. $x = \frac{1}{2}$

7. $1, 2, 3, 4, 5$

Avsnitt 2.3

1. 7!=5040

2. $\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34650$

3. $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

4. $\binom{9}{3} = 84$

5. (a) 35
   (b) 66

6. Summan blir 1, 2, 4, 8, 16, 32,... Sambandet är att summan n i rad i är 2^{i-1}.

7. Välj $x = y = 1$ i binomialsatsen.

Avsnitt 2.4

1. $x = 9/4$.

2. Finns inga lösningar.

3. $x = 2, 6$

4. (a) Ja, alla tal större än 1 är också större än 0.
   (b) Nej, x kan vara ett tal som är större än 0, men mindre än 1, t.ex $1/2$.
   (c) Ja, produkten av två tal som är positiva eller noll garanterar att produkten av dem också är positivt eller 0.
   (d) Ja.

Kapitel 3
Avsnitt 3.1

1. (a) $\{1, 2, 4, 5, 6, 10, 100, 101\}$
   (b) $\{2, 6, 10\}$
   (c) $\{1, 4, 100\}$

2. Ja.

Avsnitt 3.2

1. Värdemängden är $\{a, b\}$ och funktionen är inte injektiv eftersom det finns två element som avbildas på a.

2. Funktionen f är både injektiv och surjektiv.

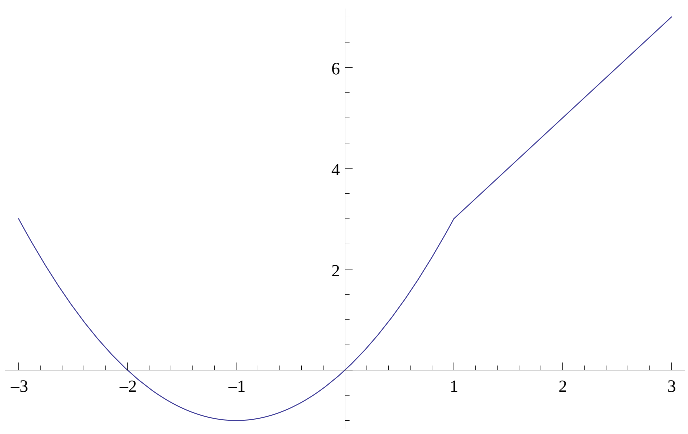
3. $g(a) = a^2$. Funktionen g är inte injektiv, t.ex. är $g(-1) = g(1)$. Funktionen är inte heller surjektiv, t.ex. finns inget a så att $g(a) = -1$.

Avsnitt 3.3

1. (a) Sätt $f(x) = 1 - x$. Då blir mängden av alla punkter (x, y) av reella tal som uppfyller $x + y = 1$ lika med grafen till $f(x)$.
   (b) Eftersom både $(1, 1)$ och $(1, -1)$ ligger i mängden måste det gälla att $f(1) = 1$ och att $f(1) = -1$. Men då är inte f någon funktion och allså kan inte punktmängden vara grafen till någon funktion.
   (c) Eftersom både $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ och $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ ligger i mängden måste det gälla att $f(1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$ och att $f(1/\sqrt{2}) = -1/\sqrt{2}$. Men då är inte f någon funktion och allså kan inte punktmängden vara grafen till någon funktion.

2. Dessa grafer ska ritas: $y = x^2$, $y = (x - 1)^2$, $y = x^2 + 1$ och $y = (-x)^2 (= x^2)$.

3. Se Figur 54.



Figur 54: Grafen till $f(x) = x^2 + 2x$ då $x \leq 1$ och $2x + 1$ då $x > 1$.

4. $f^{-1}(x) = x/2$. Definitionsmängden, värdemängden och målmängden är $\mathbb{R}$.

5. $f^{-1}(x) = (x - 5)/3$. Definitionsmängden, värdemängden och målmängden är $\mathbb{R}$.

6. $y = x/2 + 11/2$.

7. $y = 10x/7 + 65/7$

8. (a) $x = 3$

(b) $x = 1$

9. $\lambda = \ln 2/T$.

10. (a) $x = -1$
    (b) $t = 1$
    (c) saknar lösning.

11. (a) $x = 4$
    (b) $-\frac{1}{2}$
    (c) $x_1 = 2, x_2 = 5$.

12. $65/24$

13. Genom att sätta $x = 0$ får vi ekvationen $y^2 = 0$, vilket ger att $(0, 0)$ är en punkt på kurvan. Genom att sätta $x = -1$ får vi ekvationen $y^2 = -1 + 4 - 1 = 2$, vilket ger att $(-1, \sqrt{2})$, $(-1, -\sqrt{2}$ är punkter på kurvan.

Avsnitt 3.4

1. (a) $x > -7$
   (b) $x < -3$ eller $x > 1$
   (c) $x \geq 2$ eller $x = -2$.

2. Skärningspunkterna är $(-1 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ och $(-1 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$. För $x < -1 - \sqrt{2}$ eller $x > -1 + \sqrt{2}$ gäller att $f(x) > g(x)$.

Avsnitt 3.5

1. -

2. 50 cm^2.

3. 2 cm.

4. (a) $-\frac{1}{2}$
   (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
   (c) 1

5. $\pm 45° + n \cdot 360°, \pm 135° + n \cdot 360°$

6. 1080°, 5 och 45° åt vänster.

7. $\frac{1}{2}$

8. $x = \pm\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$ och $x = \pm\frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$, alternativt $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$.

9. (a) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4})$
   (b) $\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}))$

Kapitel 4
Avsnitt 4.2

1. $\left\{5x^4 + 4x^3 - \frac{1}{x^2} + 6x\right\}$

2. $2\cos(2x) - 2\sin(2x)$

3. 0

4. (a) 2
   (b) 1
   (c) $5 \cdot 4^{10}$
5. (a) Minimum i 10, funktionsvärde -110, maximum i -1, funktionsvärde 11.
   (b) Minimum i 2, funktionsvärde -4, maximum i -10, funktionsvärde 152.

Avsnitt 4.3

1. (a) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$
   (b) $\log(|x|) - \frac{1}{x} + C$
   (c) $\frac{e^{3x}}{3} + C$
   (d) $\frac{2x^{3/2}}{3} + 2\sqrt{x} + C$
   (e) $\frac{e^{ax+b}}{a} + C$
2. (a) $\frac{10}{3}$
   (b) $-1 + \frac{1}{e^2} + 2e$
   (c) $\frac{16\sqrt{2}}{7} - \frac{2}{7}$
3. (a) $\frac{1}{16}(1+x)^{16} + C$
   (b) $e^{x^4} + C$
   (c) $\frac{1}{4}\left(x^2+2\right)^4 + C$
   (d) $\frac{1}{90}\left(5x^2+2\right)^9 + C$
4. (a) $[\frac{2}{3} \cdot \sin^3 x]_0^{\pi/4} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$
   (b) $[\frac{1}{5}(x^3+6)^5]_{-1}^0 = \frac{4651}{5}$
   (c) $[\sqrt{x^2+1}]_2^4 = \sqrt{17} - \sqrt{5}$
   (d) $[\frac{-2}{\sqrt{x^3+1}}]_0^1 = 2 - \sqrt{2}$

Sakregister