Ф. А. Березин

Введение в суперанализ

Издание второе, исправленное и дополненное

Под редакцией Д. А. Лейтеса

Москва
Издательство МЦНМО
2013

УДК 514.74+517.2/.3
ББК 22.151.5+22.161.1
Б48

Ф. А. Березин
Б48 Введение в суперанализ / Издание второе, исправленное и дополненное. Под ред. Д. А. Лейтеса с дополнениями Д. А. Лейтеса, В. Н. Шандера и И. М. Щепочкиной. — М.: МЦНМО, 2013. — 432 с.
ISBN 978-4439-0229-6

Теория суперсимметрий — относительно новое направление в математике. Идеи суперсимметрии, появившиеся, чтобы разрешить некоторые проблемы теоретической физики, долго казавшиеся неразрешимыми по определению, быстро выросли в теорию супермногообразий — богатый сплав дифференциальной и алгебраической геометрий с собственными глубокими и недостаточно пока исследованными проблемами.

Незаконченная рукопись погибшего основоположника теории суперсимметрий — Феликса Александровича Березина — еще раз отредактирована и дополнена результатами, полученными за 30 лет, прошедших с момента ее написания, или ссылками на соответствующие результаты. Отмечены также открытые проблемы разного уровня сложности.

В Дополнении публикуются материалы трудов «Семинара по суперсимметриям».

Книга будет полезна как научным работникам, так и преподавателям и студентам, — как математикам, так и физикам.

ББК 22.151.5+22.161.1

ISBN 978-4439-0229-6

Оглавление

Предисловие редактора

> Я не знаю никакой другой математической работы второй половины XX века, которая оказала влияние на развитие теоретической физики, сравнимое с введением интеграла по антикоммутирующим переменным. Для меня роль грассмановых переменных и их польза в вычислениях сравнима с ролью мнимых чисел.
>
> *К. Ефетов*

> Время неизменно реализует мои замыслы, но злоупотребляет правом использовать меня в качестве заложника.
>
> *В. Ф. Шварцман*, 29.04.1972, из дневника.
> За 15 лет до самоубийства

> Быть честным хочется. Но меньше, чем богатым.
>
> *В. Семенов*. Одностишия.

В 1986 году мне пришлось повозиться, редактируя перевод на английский язык первого издания этой книги [Бер*] и объемистых дополнений, в [Бер*] не вошедших, см. [Ber*]. Если править все как следует, то невычитанную автором рукопись надо в значительной мере переписывать и утроить объем комментариями и дополнениями. Для этого издания я сделал и то, и другое, продолжив с помощью трудов «Семинара по Суперсимметриям» [SoS*] работу, начатую А. А. Кирилловым и В. П. Паламодовым.

Книга [Бер*] заполняла вакуум: никаких учебников по «суперам» на русском языке не было. Позже можно было, правда, почитать книги [ЛПет*] и [МаКП*], но первая вышла ничтожным по тому времени тиражом 1000 экз., была распродана за месяц и до эры интернета с его пиратами-просветителями ее было не достать, а вторая сложновата, да и «суперы» в ней — важный, но не основной объект. После сделанной для этого издания переработки книг [Бер*] и [Ber*] получилось внятное введение в предмет, с полезным справочным материалом; указаны важные открытые задачи (например, связанные с недавними работами Э. Виттена).

Читатель! Отмечая многочисленные исправления, комментарии и дополнения, помните, что именно Ф. А. Березин задолго до других исследователей догадался о существовании «суперматематики как науки» (а не набора отдельных суперпримеров). Поэтому именно *его* заблуждения и поиски особенно поучительны: некоторые из его заблуждений кочуют по текстам до сих пор, а разъяснения (как артефактов типа «правых производных», так и важнейшего понятия — элемента объема), видимо, не всем доступны. Впрочем, имея эти разъяснения, надо их читать и разбирать (например, препринты [SoS*] и даже книга [QFS*] пока мало помогли)...

После доклада Ю. Весса и Б. Зумино (весна 1974 г.) не понимать важность «суперов» стало затруднительно. А ведь следы «суперов» в «обычной» математике отмечали с работ Грассмана: например, Э. Картан переформулировал теорию дифференциальных уравнений в терминах внешних форм (т. е. супералгебры Грассмана); а в 1930-х гг. было замечено, что умножение Уайтхеда в группах гомотопий наделяет прямую сумму этих групп структурой суперкольца Ли, а пространство когомологий многообразия с коэффициентами в конечных полях $\mathbb{F}_q$ — инвариант многообразия, являющийся множеством $\mathbb{F}_q$-точек некоторой супергруппы Ли.

До Ф. А. Березина никто, однако, не предполагал, что, введя «суперы», мы открываем такую картину мира, в которой привычная даже по сегодня математика составляет лишь «меньшую половину». Оказалось, что суперcalled взгляд упрощает и проясняет многое в этой «меньшей половине».

Соглашаясь редактировать это издание, я думал, что ограничусь косметической правкой и процитирую одного из выдающихся математиков, интересно, но мутно читавшего лекции на мехмате, когда я там учился, и на просьбы слабых студентов пояснить рассказываемое отвечавшего: «Вы слушайте не то, **что** я говорю, а то, что я **хочу** сказать!» К сожалению (на редактуру ушло немало времени), выяснилось, что я просто не могу не исправить замеченные неточности и убрать хотя бы часть повторов и очевидные непосредственные вычисления, а также (тем более) те обозначения и утверждения, про которые Ф. А. говорил мне: «хоть и неверные, но физикам так привычнее» и «хоть и неверно, но так понятнее».

Прежде всего я имею в виду обозначение элемента объема — одной из важнейших составных частей в «интеграле Березина». По счастью, я могу опираться не только на свой вкус, но и на авторитет П. Делиня (см. [QFS*]), решительно не понимающего, как можно обозначать одним символом совершенно разные (на супермногообразиях; на многообразиях-то они совпадают) объекты (дифференциальные и интегральные формы), особенно если они могут встречаться одновременно, как, например, при вычислении супераналога характера Черна. Хотя в физических текстах до сих пор «почти все» физики обычно используют противоречивые обозначения, но все-таки это делают не все, а я предпочитаю ориентироваться на П. Делиня и Э. Виттена (тоже ведь физик, согласитесь), чем на невразумительных «почти всех», и того же желаю и вам, читатель.

Кроме того, странно было бы не прокомментировать важные вопросы, если ответы на них полностью, или хотя бы частично, получены (причем некоторые — до 1980 г., летом которого Ф. А. погиб).

В 1974 г. я заинтересовал «суперами» И. Н. Бернштейна. Он поверил в существование ТЕОРИИ супермногообразий, убедившись в мультипликативности березиниана на суперматрицах размера $1|1 \times 1|1$. В 1976 г. мы с ним начали писать книгу–учебник «про суперы». Мы написали первые три главы книги, и я передал копию рукописи Ф. А. Березину для комментариев. Комментариев, однако, не последовало, а занудное, в отличие от захватывающего процесса решения новых задач, писание нашего учебника [CoC1°] притормозили всякие обстоятельства.

В отличие от И. Н. Бернштейна и меня, мурыживших в 1976–80 гг. почти готовый текст первых трех глав книги [CoC1°], ср. [ЛПет*] и [Лусп*], а в 1986–2010 гг. — расшифровку четвертой главы книги [ЛПет*] — труды [SoS*], на Западе были оперативно изданы с десяток книг и тьма статей, посвященных изложению разных (случайных) аспектов теории супермногообразий или суперсимметрий (в основном — супералгебр Ли). Из авторов изданий, вышедших до [QFS*], только Б. ДеВитт прислал нам (Ф. А. и мне) черновик рукописи своей книги [DeW*]; он, несомненно, хотел и получить замечания, чтобы правильно расставить исторические приоритеты и не допустить ошибок (а то, что они в его книге остались, см. [CoC2*], где часть из них исправлена, — это по нашей с Ф. А. лени: мы ему не ответили).

Нецитирование работ Ф. А. и моих по суперсимметриям (или, как это иногда делают и теперь, перечисление их в длинном ряду, среди эпигонских или неверных работ) сильно задевало Ф. А., а ближе к защите моей кандидатской диссертации стало раздражать и меня. И. Н. Бернштейн сказал мне на это: «Плюнь, еще что-нибудь придумаешь» и развлек меня байкой про то, что произошло однажды в конце 1960-х гг., когда некоторые начальники решили по совокупности причин подвергнуть критике Я. Б. Зельдовича (одного из последних физиков-теоретиков «широкого профиля»). Чисто политическая критика была уже не в моде, и в газетах появились разгромные отзывы бывших ученых на учебник Я. Б. Зельдовича по математическому анализу. Но из-за разгула «брежневской демократии» были опубликованы и противоположные отзывы кого-то из известных и все еще работающих ученых. Получалось несолидно. Критика должна была иметь видимость научной. Нужна была поддержка «генеральной линии» со стороны авторитетов. И вот на какой-то конференции к гулявшему по коридору И. М. Гельфанду подошел Некто, чью фамилию я сейчас не помню, и стал агитировать покритиковать книгу Зельдовича по математике для школьников. Гельфанд энтузиазма не выказывал, и Некто стал тихонько рассказывать, что «знаете, в таком-то году Зельдович-то украл такой-то результат у NN...». К смущению Некта, быстро сменившемуся восторгом от показавшегося близким успеха миссии, Гельфанд стал громко созывать народ: «послушайте Некта: он такое интересное про Зельдовича рассказывает». И стал просить повторить на бис. А выслушав еще раз, уже в толпе, сказал: «Очень это некрасиво со стороны Яков Борисыча по отношению к NN. Это же все равно, что отнять у нищего пятак!..»

Однако мне не верилось, что мне повезет в жизни дать определение, сравнимое по важности с определением супермногообразия [1]. Ф. А. Березину, несомненно, тоже, к тому же его никто байками не утешал, а жизнь его делалась все сложнее, см. [Восп*]. Напряжение, сходное с тем, что сломало Ф. Клейна, не выдержавшего соревнования с А. Пуанкаре, сказалось и на рукописи этой книги. Например, Ф. А. в нескольких местах пишет о задачах, не решенных и по сей день, как о сделанных, чтобы (как он мне не раз говорил) получить возможность подумать о них не торопясь.

По разным причинам, говоря о пионерах суперсимметрии, часто называют случайных людей (скажем, Дж. Мартина). Однако видно, что до доклада Ю. Весса и Б. Зумино, внятно показавших некоторые перспективы применения «суперов», никто из тех, кого сейчас обычно числят в пионерах (к примеру, в Wikipedia), не понимал степени важности даже собственных результатов по суперсимметриям; некоторые не понимают этого даже сейчас: иначе бы всё бросили и занимались бы лишь «суперами». Это непонимание особенно заметно в предисловиях Х. Миядзавы и Г. Ставраки к энциклопедии [CoEn*].

Любопытно, что в настоящее время участники дискуссий «наблюдаема ли суперсимметрия?» ни единым звуком не намекают, что речь идет только о физике высоких энергий, в то время как, например, в физике твердого тела положительный ответ известен благодаря работам К. Ефетова, см., например, [Ef*] и его работы (в arXiv'e), особенно те, где вроде бы устанавливается суперсимметричность графена, причем супералгеброй Ли суперсимметрии является одна из тех супералгебр, что возникают в струнных моделях теории поля.

Если бы не все эти результаты К. Ефетова, разговоры о фантастических перспективах приложений суперсимметрий в теоретической физике напоминали бы дискуссии биологов и математиков в 1960-х гг. В то время И. М. Гельфанд стал заниматься математическими методами в биологии и медицине, и на одной из первых советских конференций на эту тему, подводя итоги конференции, он сказал, что, как убедительно показала конференция, теперешние соблазнительные перспективы результатов применения математических методов в биологии и медицине своими успехами и проблемами напоминают ему совокупление слепых в крапиве. (Под крапивой в нашем контексте я имею в виду суперколлайдер.)

Путеводитель по литературе. За 30 лет, прошедших после смерти Ф. А. Березина, кое-что прояснилось из того, что было неясно, когда он по-своему излагал то, о чем написали И. Н. Бернштейн и я. В Дополнениях приводятся некоторые из результатов, полученных участниками семинара «SoS», которым я руководил в 1976—1986 г. в Москве, в 1987—1999 г. в Стокгольме и в 2004—2006 г. в Лейпциге. Даны ссылки и на другие работы, развивающие пионерские наблюдения Ф. А. Березина, см. также часть «О науке» в книге [Восп*].

Значительный объем книги [Ber*] (все ссылки мы приводим по наиболее доступным изданиям) составили слегка отредактированные препринты ИТЭФ'а 1977 г., содержащие описание операторов Лапласа—Казимира и их применения к описанию неприводимых представлений простых конечномерных супералгебр Ли над $\mathbb{C}$ и их близких «родственниц», таких как $\mathfrak{gl}$ по отношению к $\mathfrak{sl}$. С помощью операторов Лапласа—Казимира на супергруппах Ли Ф. А. Березин одним из первых описал условия «типичности» конечномерных представлений (на примере унитарной супергруппы).

Однако работы В. Каца, описавшего типические представления для всех конечномерных супералгебр Ли с неразложимой матрицей Картана, наглядно показали, что алгебраическая техника более адекватна задаче; подход В. Каца вразумительнее изложен и обобщен А. Н. Сергеевым, см. гл. Д 4, а дальнейшие улучшения см. в [SV°].

Немного раньше этих результатов Ф. А. Березина в связи с формулой Стокса, см. [БрЛ1], простеньким методом (индуцируем и ограничиваем) были описаны неприводимые непрерывные представления супералгебры Ли $\mathfrak{vect}(m|n)$ полиномиальных векторных полей, рассматриваемые с естественной топологией (позднейший обзор на эту тему — [GLS2*]); тем же методом, см. [BL1°], были описаны все, включая атипические, неприводимые конечномерные представления супералгебр Ли серий $\mathfrak{gl}(1|n)$ и $\mathfrak{osp}(2|2n)$ («формула Бернштейна—Лейтеса для характеров»). В обзоре [Лобз°] перечислены ответы (описание неприводимых представлений со старшим весом), полученные к 1984 г. участниками семинара «SoS» для разных серий простых супералгебр Ли.

И. Пенков и В. Серганова, см. [Pen1°, Pen2°, PS1°, PS2°, PS3°], разобрали сложный случай атипических конечномерных неприводимых представлений разных типов простых супералгебр Ли (как с матрицей Картана, так и серий $\mathfrak{pe}$ и $\mathfrak{spe}$); их результаты (для конечномерных супералгебр Ли с неразложимой матрицей Картана) суммированы в докладе В. Сергановой на Международном конгрессе математиков в Берлине, 1998 г.

Наилучший на сегодня метод доказательства формулы Пенкова—Сергановой для характеров атипических представлений — это, видимо, подход

---

[1] Сейчас я думаю, что недооценивал благосклонность фортуны. По-моему, определение неголономного аналога тензора кривизны тоже очень важно: о применении к уравнениям супергравитации см. [ГрЛе*, L*] и ссылки, а о возможных применениях к экономике упомянуто в книге [Serg*]. Без этого определения невозможно, как мне представляется, продвинуться в понимании геометрических структур не только супергравитации, но и гравитации и других фундаментальных сил. Это понимание начало брезжить в работе Г. Манделя (видимо, погибшего в конце 1930-х гг.), а В. В. Вагнер почти получил ответ, но эти пионеры несколько опередили время: всем им не хватало некоторых понятий, открытых позже.

Дж. Брандана; см. [Br1*, Br2*]. Другие результаты теории представлений упомянуты в подстрочных примечаниях и Дополнении.

Книга [Ber*] завершалась статьей В. И. Огиевецкого о супергравитации. Через несколько лет после смерти Виктора Исааковича его соавторы подвели итог совместной работы в книге [GIOS*], где рассмотрены N-расширенные супермногообразия Минковского с $N < 4$. В их подходе совершенно неясно, что делать, если $N \geqslant 4$. См. также [ГИФ°].

На мой взгляд, самое главное, что удалось сделать в этом направлении за время, прошедшее со смерти Ф. А. Березина, — это понять (по крайней мере одну) математическую причину затруднений при попытке выписать уравнения супергравитации и предложить подход к их написанию для любого N. А именно, если предположить, что уравнения супергравитации (чем бы она ни была) — условия на аналог тензора кривизны для суперпространства Минковского, то приходится признать, что при таком подходе мы затрудняемся выписать какое бы то ни было условие не из-за нечетных координат, а потому, что все СУПЕРпространства Минковского *неголономны* (т. е. оснащены неинтегрируемым распределением), а что такое неголономный аналог тензора Римана, никто до работ [ГрЛе*, L*] не знал[1] даже на многообразиях, см. в [Serg*] дополнение к переводу интереснейшей книги [Спр*] — написанный А. М. Вершиком обзор математических результатов, описывающих неголономные многообразия. Хотя я уверен, что существует несколько совершенно разных суперизаций уравнений Эйнштейна, определение неголономного тензора кривизны интересно множеством видимых приложений независимо от «супер» проблем. Этой теме должен быть посвящен специальный том трудов семинара «SoS»: она слишком обширна.

А вот то, что можно изложить кратко, и что тоже небезынтересно, — так это выводы из сделанного в 1996 г. наблюдения И. Н. Бернштейна о том, что многообразия и супермногообразия, которые обычно[2] изучают математики, — либо вещественные, либо комплексно-аналитические, в то время как супермногообразия, открытые физиками, принадлежат к «третьему» типу — «вещественно-комплексных» супермногообразий; см. [BGLS*]. И. Н. Бернштейн заметил, что суперпространства Минковского, введенные в пионерских работах физиков, — как раз такие объекты, а не вещественные и не комплексные. Физики ввели вещественно-комплексные СУПЕРмногообразия; однако вещественно-комплексные многообразия тоже существуют, например, проективизации кокасательных расслоений над римановыми многообразиями (но локальные инварианты вроде тензора Римана математики пока не изучали).

Об обозначениях. Очевидно, что принятое определение («левой») частной производной по нечетной переменной можно изменить на знаковый множитель, считая ее «действующей на функцию справа», см. определение на с. 105. Вводя такие «правые производные», можно иногда не писать знаки, зависящие от четности того, что мы дифференцируем. Этот выигрыш сомнителен: если считать, что дифференцирования действуют на функции слева и являются элементами левого модуля над кольцом функций, не требуется гадать, как интерпретировать выражение fD, где f — функция, а D — дифференцирование, когда стрелочка над D потерялась, как это часто случается. Кроме того, при знакомстве с суперанализом, содержащим «правые производные», математика ошарашивает: «почему на $0|q$-мерном супермногообразии частных производных $2q$ штук, в то время как размерность касательного пространства по Зарисскому равна $0|q$?» Итак, никаких «правых производных» на самом деле нет, а есть только левые, но «правые производные» позволяют уменьшить число знаков в рукописях. Впрочем, сложный счет все равно все поручают компьютеру, а программисту не нужно возиться с фантомными сущностями.

Как правило, латинские буквы обозначают что-то четное, а греческие — что-то нечетное. Двухэлементное поле математики обозначают, как правило, символами $\mathbb{F}_2$, или $\mathbb{Z}/2$, или $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, а символом $\mathbb{Z}_2$ обозначают кольцо целых 2-адических чисел. Пусть $\operatorname{diag}_k(a_1, \ldots, a_k)$ — блочно-диагональная матрица из k блоков по главной диагонали, а $\operatorname{antidiag}_k(a_1, \ldots, a_k)$ — блочно-диагональная матрица из k блоков по побочной диагонали, нумеруемых в обоих случаях сверху вниз; $\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел.

Символ $\{e_i\}$ обозначает множество всех элементов e_i, а не одноэлементное множество.

Многие обозначения и понятия перечислены в предметном указателе.

Ссылка на пример 1.3 отправляет к примеру 3 пункта 1 того же параграфа или главы.

Сильно сокращает текст и облегчает понимание формул линейной алгебры в суперпространствах сформулированное в самом начале Правило Знаков, в котором переставляемые элементы **должны быть соседями**:

Если что-то четности p движется мимо чего-то четности q,
то появляется множитель $(-1)^{pq}$.
При этом формулы, определенные (казалось бы) только на однородных
элементах, нужно понимать автоматически продолженными
на неоднородные элементы по линейности.

Спасибо Ф. А. Березину, поставившему мне в 1971 г. задачу «определить аналоги того, что после Весса и Зумино называют супергруппой, суперсхемой и супермногообразием», спасибо И. Н. Бернштейну, а также Ю. И. Манину и А. Л. Онищику, учивших математике меня и участников семинара «SoS». Я благодарю И. М. Щепочкину за огромную помощь, Е. Г. Карпель и В. П. Павлова — за моральную поддержку, а РФФИ — за грант на публикацию книги. За большую TEX-ническую помощь, а также советы при редактировании спасибо В. В. Молоткову и О. Широковой. За разнообразную помощь спасибо Ю. Н. Торхову — главному редактору издательства МЦНМО. А еще большое спасибо П. Я. Грозману и А. Лебедеву.

Сноски (и комментарии, внесенные в текст) редакторов первого и второго изданий помечены соответствующими инициалами.

---

[1] Как часто бывает, если поискать в литературе, то выясняется, что кое-кто знал. Вернее, думал, что знает, но привычка всегда, даже когда в этом нет нужды, записывать тензоры и связности в координатах (к которой до сих пор тяготеют многие физики и которой, имея в виду физиков, придерживался и Ф. А. Березин, в том числе и в рукописи этой книги) затруднила как поиск ошибки, так и возможность выделить правильную часть этих работ, см. [ГрЛе*, L*], где дано и определение неголономного тензора Римана, и обзор литературы.

[2] Последние лет 40 изучают также p-адические многообразия, см., например, [CaOs*].

Предисловие редактора первого издания

Феликс Александрович Березин трагически погиб 13 июля 1980 года во время водного путешествия[1].

В последние годы своей жизни он интенсивно работал над различными математическими проблемами, связанными с идеей суперсимметрии. Формальное исчисление в алгебре Грассмана, которое было развито Ф. А. Березиным в его первой книге «Метод вторичного квантования», привело его к убеждению, что

существует нетривиальный аналог анализа,
в котором на равных правах с обычными переменными
выступают антикоммутирующие переменные.

Эту идею он настойчиво пропагандировал и тщательно подбирал подтверждающие примеры и конструкции. Важнейшие из них — интеграл Березина по антикоммутирующим переменным и так называемый «березиниан» — аналог якобиана при замене антикоммутирующих переменных.

К середине 70-х годов пионерские идеи Ф. А. Березина стали распространяться, и понятия суперпространства, супермногообразия, супергруппы и супералгебры Ли были приняты на вооружение физиками. Появилась надежда, что на языке суперанализа может быть построена единая теория поля.

Ф. А. Березин начал работать над книгой по суперанализу. Эта работа продолжалась несколько лет и осталась незаконченной. Из рукописей и статей Ф. А. Березина, дополненных его друзьями и коллегами, составлена эта книга.

Вошедший в книгу материал в силу сложившихся обстоятельств носит разнородный характер. Часть глав автор успел написать «начисто» и опробовать их на семинарах по математической физике и по теории представлений в МГУ. Другие главы остались в черновиках. Некоторые важные разделы (например, теоретико-полевые приложения) остались ненаписанными.

Опишем более подробно содержание книги. В качестве введения использован текст статьи Ф. А. Березина в журнале «Ядерная физика», которая является записью его обзорного доклада, сделанного в мае 1978 г. на конференции по калибровочной теории поля в Москве.

Первые три главы книги были подготовлены автором для печати и подверглись лишь небольшой правке. В них даются первоначальные сведения об алгебрах Грассмана, дифференцировании и интегрировании функций от антикоммутирующих переменных, развивается аппарат линейной алгебры в $\mathbb{Z}/2$-градуированных пространствах. Весь этот материал изложен подробно, с расчетом на читателя, который впервые знакомится с предметом[1].

---

[1] Вообще-то и дата, и обстоятельства его смерти неясны, см. [Восп*]. — *Прим. Д. Л.*

Далее должна была по замыслу автора излагаться глобальная теория супермногообразий, теория супералгебр и супергрупп Ли и их представлений.

Вторая часть книги должна была быть посвящена приложениям.

Из всего этого материала в готовом виде в рукописях Ф. А. Березина была обнаружена лишь глава, посвященная супералгебрам Ли, и черновая версия главы, посвященной супермногообразиям. Кроме того, несколько лет тому назад Ф. А. Березин изложил часть будущей книги в виде серии из пяти препринтов ИТЭФ.

Для настоящего издания глава[2] 3 была заново написана В. П. Паламодовым. Содержание ее выходит за рамки, намеченные Ф. А. Березиным, в ней есть и новые результаты. В частности, построен пример неретрагируемого[3] комплексного супермногообразия размерности $4|2$. Хотя требования к математической подготовке читателя в этой главе несколько выше, чем в предыдущих, надеюсь, что весь изложенный здесь материал понятен и интересен для физиков-теоретиков.

Авторский текст подвергся лишь небольшой редакционной обработке.

А. А. Кириллов

---

[1] **Путеводитель по литературе: продолжение**. Читателю, ознакомившемуся с введением в предмет в изложении основоположника (т. е. по этой книге), я советую продолжить изучение комплексно-аналитических проблем, включая определения, по книгам Ю. И. Манина [МаКП*, МаАГ*] и статье А. Вайнтроба [Вай*], а дальнейшие подробности можно узнать из работ А. Л. Онищика. Сам А. Л. Онищик говорил мне, что понял разницу между расщепимыми и нерасщепимыми супермногообразиями, ознакомившись со статьями [Gre*, Вай*]: они помогли ему дать некоторую классификацию деформаций супермногообразий с заданным ретрактом, использующую неабелев аналог теоремы Дольбо, см. [On2*]; приложения этих идей к классификации однородных супермногообразий см. в работах [On1*, On3*].

Подробности алгебры и анализа на супермногообразиях изложены в трудах семинара «SoS»: [CoC1°, CoC2*, LJ*], см. также дополнения к английской версии [БШ*].

Развитие специфического подхода Ф. А. Березина к квантованию и применение «квантования по Березину» к разным задачам см. в ярких работах Ю. Неретина.

Недавние работы В. Овсиенко с соавторами обобщают супергеометрию на пространства, окольцованные, например, алгебрами Клиффорда, что позволит, в частности, дать «классическое описание частицы со спином», см. гл. 4, непосредственно на квантовом уровне.

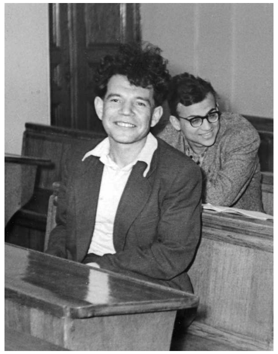
Памяти Ф. А. Березина посвящены сборники [DM1*, DM2*, LMP*, JNMP*], а также [FelB*] и [Восп*]. Недавно найденные и потому не вошедшие в [Восп*] фотографии семинара Ф. А. Березина и Р. А. Минлоса см. на с. 14. — *Прим. Д. Л.*

[2] После того как замеченные повторы были убраны, а содержание линейно упорядочено, нумерация глав изменилась по сравнению с первым изданием; здесь это учтено. — *Прим. Д. Л.*

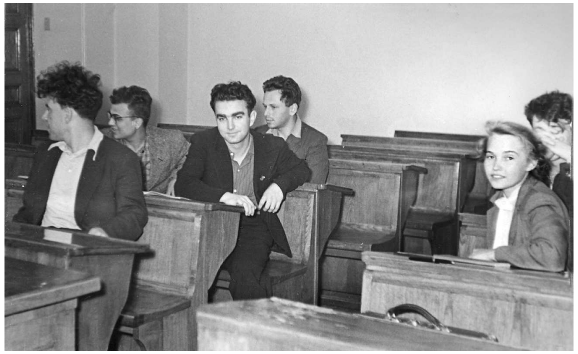
[3] Сейчас говорят *нерасщепимого*. Первая работа об этом — статья [Gre*]. — *Прим. Д. Л.*

Спецсеминар Ф. А. Березина и Р. А. Минлоса по функциональному анализу (1959 г., мехмат МГУ)

Феликс Березин, Раис Исмагилов, Роберт Минлос, Леня Балашов,
Исаак Корнфельд, Эдик Белага



Роберт Минлос, Леня Балашов



Роберт Минлос, Леня Балашов, Исаак Корнфельд,
Феликс Березин, Лера Боднева, Эдик Белага

Фотографии сделаны Леной Ермаковой, участницей семинара.
Подписи Сусанны Каменомостской.

Предварительные сведения

1. Кольца и алгебры. *Кольцом* называется абелева группа A (групповая операция записывается аддитивно, т. е. с помощью символов $+$, $-$) с еще одной операцией — умножением $A \times A \to A$ (записываемым обычно как $(a, b) \mapsto ab$), дистрибутивным относительно сложения (правило раскрытия скобок) и образующим *полугруппу*[1]. Всякому элементу $a \in A$ отвечают гомоморфизмы группы A в себя, действующие либо по формуле $c \mapsto ac$ (левое умножение), либо по формуле $c \mapsto ca$ (правое умножение). Кольцо A называется *ассоциативным* (соответственно *лиевым* или *кольцом Ли*[2]), если для любых его элементов $a, b, c \in A$ выполняются следующие условия (второе из условий в лиевом случае называется *тождеством Якоби*):

$$\begin{array}{ll} a(bc) = (ab)c, & \text{если } A \text{ ассоциативно,} \\ \left.\begin{array}{l} [a, b] = -[b, a], \\ {[a, [b, c]]} = [[a, b], c] + [b, [a, c]], \end{array}\right\} & \text{если } A \text{ лиево.} \end{array}$$

Гомоморфизмом колец $\varphi\colon A \to B$ называется гомоморфизм соответствующих аддитивных групп $\varphi\colon A \to B$, такой что $\varphi(a \cdot a') = \varphi(a) \cdot \varphi(a')$.

Левым идеалом в A называется всякая подгруппа I, инвариантная относительно левого умножения на любой элемент $a \in A$. *Правый идеал* определяется аналогично. Идеал, одновременно и левый, и правый, называется *двусторонним*. Если I — двусторонний идеал в A, то в факторгруппе A/I можно корректно ввести умножение. Кольцо A/I называется *факторкольцом*. Если I — двусторонний идеал кольца A, то гомоморфизм колец $A \to A/I$, действующий по правилу $a \mapsto a + I$, называется *каноническим*.

---

[1] *Полугруппа* отличается от группы (определение которой предполагается известным) тем, что наличие обратного элемента (противоположного, если запись аддитивна) не предполагается. — *Прим. Д. Л.*

[2] Умножение элементов a и b в кольцах (и алгебрах) Ли часто записывают не ab, а $\{a, b\}$, или как коммутатор двух операторов $[a, b]$, даже если лиево кольцо (или алгебра) абстрактное. Это обозначение — дань главному примеру: обозначим пространство операторов в пространстве V над полем $\mathbb{K}$ символом $\mathrm{End}(V)$; это пространство — ассоциативная алгебра относительно последовательного применения операторов ab, которое и принимается за их произведение; положив $[a, b] := ab - ba$, мы снабжаем $\mathrm{End}(V)$ структурой алгебры Ли, которую для ясности обозначают $\mathfrak{gl}(V)$ и называют *общей линейной алгеброй Ли*. Фиксировав базис в пространстве V, можно отождествить операторы с матрицами, и соответствующее пространство матриц обозначают $\mathrm{Mat}(V)$ или $\mathrm{Mat}(n)$, где $n = \dim V$. Соответственно пишут $\mathfrak{gl}(n)$.

Модулем над кольцом A называется множество M вместе с биаддитивным отображением (которое называют *действием*)

$$\mathrm{act}\colon A \otimes M \longrightarrow M, \quad \mathrm{act}(a, m) := am,$$

таким что для любых $a, b \in A$ и $m \in M$ имеем

$$\begin{array}{ll} (ab)m = a(bm), & \text{если кольцо } A \text{ ассоциативно},\\ [a, b]m = a(bm) - b(am), & \text{если кольцо } A \text{ лиево}. \end{array}$$

Нам встретятся также коммутативные и антикоммутативные кольца, в которых для любых двух элементов выполняется соотношение

$$\begin{array}{ll} ab = ba & \text{для коммутативных колец},\\ ab = -ba & \text{для антикоммутативных колец}. \end{array}$$

Коммутативное и ассоциативное кольцо C, все ненулевые элементы c которого обратимы, т. е. существуют элементы c^{-1}, называется *полем*. Модуль над полем называется *векторным пространством*. Над любым коммутативным и над любым антикоммутативным кольцом A любой односторонний модуль M можно сделать двусторонним, положив

$$am = ma \quad \text{для любых } a \in A,\ m \in M.$$

Коммутативное (и ассоциативное) кольцо A называется *локальным*, если в нем имеется единственный максимальный идеал, который обычно обозначается $\mathfrak{m}$. Факторкольцо $A/\mathfrak{m}$ является полем.

Кольцо A называется *алгеброй* над полем $\mathbb{K}$ или $\mathbb{K}$-*алгеброй*, если A — одновременно и кольцо, и $\mathbb{K}$-модуль, причем умножение $\mathbb{K} \times A \to A$ дистрибутивно слева и справа относительно сложения в A и

$$k(a_1a_2) = (ka_1)a_2 \quad \text{для любых } k \in \mathbb{K} \text{ и } a_1, a_2 \in A.$$

Гомоморфизмом $\mathbb{K}$-*алгебр* $A \to B$ называется гомоморфизм колец, который является гомоморфизмом $\mathbb{K}$-модулей.

В этой книге поле $\mathbb{K}$ по умолчанию является множеством $\mathbb{R}$ вещественных или $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Соответственно, алгебра $\mathfrak{A}$ называется *вещественной* или *комплексной*.

Задать действие $\mathrm{act}\colon \mathfrak{g} \times M \to M$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в модуле M, где $\mathfrak{g}$ и M могут быть определены над разными полями, — это то же самое, что задать гомоморфизм алгебр Ли (т. е. аддитивное, а если $\mathfrak{g}$ и M заданы над одним полем $\mathbb{K}$, то $\mathbb{K}$ — линейное отображение, переводящее лиево произведение двух элементов в коммутатор их образов) $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(M)$, который называют *представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве M. Часто говорят не «$\mathfrak{g}$-модуль M», а «представление ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве M» и пишут не $\rho(g)m$, а gm для любых $g \in \mathfrak{g}$ и $m \in M$.

Примеры алгебр. 1) Множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел с операциями сложения и умножения является, очевидно, вещественной алгеброй. Аналогично множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел является комплексной (а также и вещественной) алгеброй.

2) Пусть $\mathfrak{A}$ и M — произвольные множества. Через $\mathfrak{A}^M$ обозначается совокупность всех (как правило, из заранее оговоренного класса: полиномиальных, гладких, непрерывных, и т. д.) функций на M со значениями в $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ является алгеброй над $\mathbb{K}$, то множество $\mathfrak{A}^M$ тоже является алгеброй над $\mathbb{K}$ с естественными операциями сложения, умножения и умножения на скаляр из $\mathbb{K}$: при любых $f, g \in \mathfrak{A}^M$, $x \in M$, $\alpha \in \mathbb{K}$ полагаем

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Очевидно, что если алгебра $\mathfrak{A}$ ассоциативна или коммутативна, то тем же свойством обладает алгебра $\mathfrak{A}^M$. Физики называют такие алгебры *алгебрами токов* на M со значениями в $\mathfrak{A}$.

3) Пусть U — область в $\mathbb{R}^p$. Рассмотрим подалгебру алгебры $\mathbb{K}^U$, состоящую из бесконечно дифференцируемых (синоним: гладких) функций. Эту алгебру обозначим $\mathcal{A}(U)$. Физикам она очень важна, см. [KST*].

4) Всевозможные полиномиальные функции на U образуют подалгебру алгебры $\mathcal{A}(U)$, которую мы обозначим символом $\mathcal{P}(U)$.

5) Рассмотрим $\mathbb{K}^p$ как линейное пространство и обозначим символом $\mathrm{End}(\mathbb{K}^p)$ алгебру (относительно умножения и сумм операторов с коэффициентами из $\mathbb{K}$) всевозможных линейных операторов в $\mathbb{K}^p$. Если в $\mathbb{K}^p$ зафиксирован базис, то алгебру $\mathrm{End}(\mathbb{K}^p)$ можно реализовать матрицами, и эту реализацию мы обозначим $\mathrm{Mat}(\mathbb{K}^p)$ или $\mathrm{Mat}(p; \mathbb{K})$, или кратко $\mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(p)$ или $\mathrm{Mat}(p)$.

Алгебры из примеров 1), 3), 4) ассоциативны и коммутативны, алгебры из примера 5) ассоциативны; они коммутативны при $p = 1$ и некоммутативны при $p > 1$.

Если в алгебре $\mathfrak{A}$ имеется элемент e, такой что

$$e \cdot a = a \cdot e = a \quad \text{для любого } a \in \mathfrak{A},$$

то такая алгебра называется *алгеброй с единицей*, а элемент e называется *единицей* алгебры. Алгебры в примерах 1), 3), 4), 5) являются алгебрами с единицами. Алгебра $\mathfrak{A}^M$ (пример 2) обладает единицей, если этим свойством обладает алгебра $\mathfrak{A}$: единицей алгебры $\mathfrak{A}^M$ служит функция $e(x) \equiv e$, где e — единица в $\mathfrak{A}$.

Существуют также важные для приложений алгебры без единицы. В частности, алгебры Ли никогда не содержат единицу. (Алгебры Ли не ассоциативны. Существуют, разумеется, и ассоциативные алгебры без единицы, например алгебры треугольных матриц с нулевой диагональю.)

2. Образующие. (Здесь $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ — *прим. Д. Л.*) Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра и $\Sigma \subset \mathfrak{A}$ — некоторое множество ее элементов. Символом $\mathfrak{A}(\Sigma)$ обозначим совокупность всех «многочленов» f от элементов множества Σ:

$$f = \sum_{k \geqslant 0} \sum_{i_1, \ldots, i_k} f_{i_1, \ldots, i_k} a_{i_1} \ldots a_{i_k}, \quad a_i \in \Sigma, \quad f_{i_1, \ldots, i_k} \in \mathbb{K} \tag{1}$$

(сумма конечная, поскольку f — многочлен). Очевидно, что $\mathfrak{A}(\Sigma)$ является подалгеброй в $\mathfrak{A}$. Она называется *подалгеброй, порожденной множеством* Σ. Если $\mathfrak{A}(\Sigma) = \mathfrak{A}$, множество Σ называется (*алгебраической*) *системой образующих* алгебры $\mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра со сходимостью. Множество $\Sigma \subset \mathfrak{A}$ называется *топологической системой образующих* алгебры $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{A}$ является замыканием алгебры $\mathfrak{A}(\Sigma)$, т. е. если любой элемент $f \in \mathfrak{A}$ является пределом последовательности элементов алгебры $\mathfrak{A}(\Sigma)$ в некоторой топологии.

В конечномерную алгебру можно ввести сходимость обычным покоординатным образом[1]. Таким образом, конечномерную алгебру всегда можно рассматривать как алгебру со сходимостью.

Отметим следующее важное свойство топологических образующих конечномерной алгебры. Пусть $\mathfrak{A}$ — конечномерная алгебра с покоординатной сходимостью, $\Sigma \subset \mathfrak{A}$ — система ее топологических образующих. Тогда Σ содержит конечное подмножество, являющееся системой алгебраических образующих алгебры $\mathfrak{A}$.

В самом деле, пусть $\Sigma \subset \mathfrak{A}$ — система топологических образующих алгебры $\mathfrak{A}$ и $f_1, \ldots, f_N$ — базис $\mathfrak{A}$ как линейного пространства. По определению $f_\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} f_{\alpha,n}$, где $f_{\alpha,n} \in \mathfrak{A}(\Sigma)$ имеет вид (1). Разложим $f_{\alpha,n}$ по базису из элементов f_α, т. е. $f_{\alpha,n} = \sum\limits_\beta c_{\alpha,\beta}(n) f_\beta$. Соотношение $f_\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} f_{\alpha,n}$ означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} c_{\alpha,\beta}(n) = \delta_{\alpha,\beta}$. Следовательно, $\det(c_{\alpha\beta}(n_0)) \neq 0$ при достаточно большом n_0. В свою очередь, это означает, что элементы f_{α,n_0}, подобно элементам f_α, образуют базис алгебры $\mathfrak{A}$ как линейного пространства. Запишем элемент f_{α,n_0} в виде (1) и отметим элементы $a_i^{(\alpha)} \in \Sigma$, через которые он выражается. Их число конечно при любом α. Объединение элементов $a_i^{(\alpha)}$ при всех i и α обозначим Σ_1. Множество $\Sigma_1 \subset \Sigma$ конечно и служит, очевидно, системой алгебраических образующих алгебры $\mathfrak{A}$: каждый элемент $f \in \mathfrak{A}$ является линейной комбинацией элементов f_{α,n_0} и, тем самым, полиномом от $a_i^{(\alpha)}$.

---

[1] Пусть L — конечномерное линейное пространство, $\{e_i\}$ — базис в L. Последовательность векторов $f_n = \sum a_i(n) e_i$ называется *сходящейся покоординатно* к вектору $f = \sum a_i e_i$, если $a_i = \lim\limits_{n \to \infty} a_i(n)$ при всех i. Несмотря на то что в определении сходимости фигурирует базис e_i, фактически от выбора базиса она не зависит: если $e_i = \sum\limits_k c_{ik} \varepsilon_k$, где ε_k — элементы другого базиса, то $f_n = \sum\limits_i b_i(n) \varepsilon_i$, $f = \sum\limits_i b_i \varepsilon_i$, где $b_i(n) = \sum\limits_k a_k(n) c_{ki}$, $b_i = \sum\limits_k a_k c_{ki}$ и $b_i = \lim\limits_{n \to \infty} b_i(n)$.

Пример, иллюстрирующий разницу между топологическими и алгебраическими образующими для бесконечномерной алгебры. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}(U)$ гладких функций на $U \subset \mathbb{R}^p$. Определим в ней сходимость, считая, что $f_n \to f$, если функции f_n сходятся к f равномерно на любом компакте $V \subset U$ и все частные производные функции f_n тоже равномерно на любом компакте $V \subset U$ сходятся к соответствующим частным производным функции f. Алгебра многочленов $\mathcal{P}(U)$ является алгеброй с p алгебраическими образующими, в качестве которых можно взять декартовы координаты x_i в области U. Алгебра $\mathcal{P}(U)$ плотна в $\mathcal{A}(U)$ в смысле этой сходимости; тем самым, координаты x_i служат топологическими образующими алгебры $\mathcal{A}(U)$.

Можно показать, что в $\mathcal{A}(U)$ не существует конечной системы алгебраических образующих.

3. Пучки[1]**.** Мы предполагаем у читателя знакомство с определениями (только с определениями!) категории и функтора, включая следующие примеры категорий:

1) категория открытых подмножеств данного топологического пространства, где морфизмами являются включения $U \subset V$;

2) категория множеств и их отображений;

3) категория абелевых (т. е. коммутативных) групп;

4) категория векторных пространств над полем $\mathbb{K}$;

5) категория колец и категория алгебр над полем $\mathbb{K}$.

Имеется два определения пучка: пучок как предпучок, удовлетворяющий дополнительным аксиомам, и пучок как расслоенное пространство.

Определение предпучка. Пусть задано топологическое пространство X и некоторая категория C (можно считать, что это одна из категорий 3), 4) или 5)). *Предпучок* на X со значениями в C есть *контравариантный функтор F, действующий из категории открытых подмножеств пространства X в категорию C.* (Научные слова, которые я выделил наклонным шрифтом, означают, говоря по-просту, следующее. — *Прим. Д. Л.*) Предпучок задан, если

I) задан объект $F(U)$ категории C для всякого открытого $U \subset X$;

II) задан морфизм $\rho_V^U \colon F(U) \to F(V)$ для всякой пары $V \subset U$ открытых подмножеств в X; при этом должны выполняться следующие «естественные» условия:

IIa) $\rho_U^U = \mathrm{id}_{F(U)}$ (тождественный морфизм);

---

[1] Для первого знакомства с пучками лучше книги [МаАГ*] ничего нет. Дальнейшие подробности можно найти в книгах Р. Годемана «Алгебраическая топология и теория пучков» (М.: ИЛ, 1961) или М. Касивара, П. Шапира «Пучки на многообразиях» (пер. с англ. и фр. М.: Мир, 1997) и в книге С. И. Гельфанда и Ю. И. Манина «Методы гомологической алгебры. Введение в когомологии и производные категории. Т. 1» (М.: Наука, 1988). — *Прим. Д. Л.*

IIб) $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$ для любых открытых множеств $W \subset V \subset U \subset X$.

Если на одном пространстве X заданы предпучки F и G со значениями в C, то *морфизмом предпучков* $m\colon F \to G$ называется совокупность морфизмов $m(U)\colon F(U) \to G(U)$, такая что $\rho_V^U \circ m(U) = m(V) \circ \rho_V^U$ для всякой пары $V \subset U$.

Аксиомы пучка[1]**.** Предпучок называется *пучком*, если он удовлетворяет следующим дополнительным требованиям: пусть $U = \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$, где U_α — открытые подмножества в X (мощность множества индексов I произвольна). Тогда

IIIа) если $\rho^U_{U_\alpha} f = \rho^U_{U_\alpha} g$ для всякого индекса $\alpha \in I$, то элементы f, $g \in F(U)$ совпадают;

IIIб) если для всякого α задан элемент $f_\alpha \in F(U_\alpha)$, так что выполнено условие «согласованности»

$$\rho^{U_\alpha}_{U_\alpha\cap U_\beta} f_\alpha = \rho^{U_\beta}_{U_\beta\cap U_\alpha} f_\beta \quad \text{для любых } \alpha,\ \beta \in A,$$

то существует элемент $f \in F(U)$, такой что $\rho^U_{U_\alpha} f = f_\alpha$ при всех α.

На интуитивном уровне эти аксиомы означают, что элементы $f \in F(U)$ определяются своими «ограничениями» на областях сколь угодно мелкого покрытия области U. Это ощущение приобретает точный смысл при обращении ко второму (эквивалентному) определению пучка.

Пучок как расслоение. Под *расслоением с базой* X мы понимаем тройку $p\colon E \to X$, где E и X — топологические пространства, а p — непрерывное отображение.

А) *Конструкция расслоения по предпучку* F. Для произвольной точки $x \in X$ рассмотрим несвязное объединение $\coprod\limits_{U\ni x} F(U)$ объектов категории C по всем открытым множествам $U \ni x$. Введем в нем отношение эквивалентности $\sim$, полагая, что $a \sim b$, где $a \in F(U)$, $b \in F(V)$, если существует окрестность $W \subset U \cap V$ точки x, такая что $\rho^U_W a = \rho^V_W b$. Указанное объединение разбивается на классы эквивалентности. Совокупность этих классов (т. е. фактормножество) обозначим символом E_x. Положим $E = \bigcup E_x$, где $p(E_x) = x$. Тем самым, отображение p определено, причем E_x есть его слой над точкой x. Множество E_x называется *слоем пучка* F и может обозначаться также символом F_x.

Введем топологию в E. Выберем произвольно $x \in X$ и элемент $e \in E_x$ и зададим некоторую совокупность множеств, содержащих e, которая будет служить базой окрестностей точки e в искомой топологии. Выберем некоторого представителя $a \in F(U)$ класса смежности, состоящего из элементов множеств $F(U)$, где $U \ni x$. Класс элемента a называется *ростком* в точке x. Объединение этих ростков, содержащее исходный элемент e, есть по определению множество из указанной базы окрестностей. Легко проверить, что p является локальным гомеоморфизмом.

Заметим, что если F — предпучок со значениями в категориях 3), 4) или 5), то множество E_x имеет структуру группы, соответственно векторного пространства или кольца (называемую *индуктивным пределом* групп, пространств или колец $F(U)$ *по фильтру окрестностей* точки x).

Б) *Конструкция пучка по расслоению. Сечением* расслоения $p\colon E \to X$ над открытым подмножеством $U \subset X$ называется любое отображение $s\colon U \to E$, такое что $ps = \mathrm{id}_U$. Символом $\Gamma(U, E)$ обозначим множество всех непрерывных сечений над U. Всякое сечение при ограничении на открытое подмножество $V \subset U$ остается, очевидно, непрерывным сечением. Поэтому определено отображение множеств $\rho^U_V\colon \Gamma(U, E) \to \Gamma(V, E)$. Легко видеть, что совокупность множеств $\Gamma(U, E)$ и отображений ρ^U_V является предпучком и удовлетворяет аксиомам III, поскольку «локальность» элементов из $\Gamma(U, E)$ задана с самого начала. Таким образом, мы получаем пучок $U \mapsto \Gamma(U, E)$ со значениями в категории множеств. Он называется *пучком* (*ростков*) *сечений* расслоения (E, p).

Если каждый слой E_x заданного расслоения имеет структуру группы и групповые операции непрерывны в топологии пространства E, т. е. переводят непрерывные сечения в непрерывные, то пучок называется *пучком групп*. Аналогично определяют *пучки векторных пространств*, *пучки колец и пучки модулей над пучками колец*.

В) *Конструкция пучка по предпучку* F. Применим к F конструкцию А, а к полученному пространству (E, p) — конструкцию Б. В результате мы получим пучок $\widetilde{F}$. Он называется *пучком*, *построенным по предпучку* F. Для всякого открытого множества $U \subset X$ имеется каноническое отображение множеств $\varphi(U)\colon F(U) \to \widetilde{F}(U)$, преобразующее элемент $a \in F(U)$ в сечение над U, значение которого в точке x равно ростку элемента a в этой точке. Непрерывность такого сечения следует из определения топологии в E. Указанные отображения складываются в отображение предпучков, поскольку для всякой пары $V \subset U$ имеем $\tilde{\rho}^U_V \circ \varphi(U) = \varphi(V) \circ \rho^U_V$, где $\tilde{\rho}^U_V$ — отображение ограничения сечений. Конструкцию В можно описать так: для всякого $U \subset X$ множество $F(U)$ сначала расширим так, чтобы удовлетворить аксиоме IIIб), а затем в расширенном множестве проведем факторизацию, с тем чтобы добиться выполнения аксиомы IIIа). Если F — пучок, то отображения $\varphi(U)$ суть изоморфизмы, следовательно, предпучки F и $\widetilde{F}$ изоморфны. Это и означает эквивалентность двух определений пучка.

Если F — произвольный предпучок со значениями в категориях 3), 4) или 5), то согласно приведенным выше замечаниям $\widetilde{F}$ также принимает

---

[1] Здесь и далее мы предполагаем, что C есть подкатегория категории множеств.

значения в этих категориях, а $\varphi(U)$ — морфизмы соответственно групп, векторных пространств и колец.

Пусть F и G — пучки на X. Под *морфизмом* $m\colon F\to G$ понимается морфизм соответствующих предпучков. Если в слоях этих пространств имеется дополнительная структура, то m должно быть послойным гомоморфизмом этих структур.

Если F — пучок на X со значениями в категории коммутативных групп, а G — подпучок пучка F, т. е. $G(U)$ есть подгруппа группы $F(U)$ для всякого $U\subset X$, причем $\rho^U_V(G(U))\subset G(V)$ для всякой пары $V\subset U$, то факторгруппы $F(U)/G(U)$ образуют предпучок, поскольку отображения ρ^U_V порождают гомоморфизмы факторгрупп $F(U)/G(U)\to F(V)/G(V)$. Этот предпучок, вообще говоря, не является пучком. Построенный по нему пучок $\widetilde{F/G}$ называется *факторпучком*; ниже мы часто пишем просто F/G.

Пусть $f\colon Y\to X$ — непрерывное отображение топологических пространств, а F — пучок на X. Образуем расслоенное пространство $p\colon E\to X$ с помощью конструкции А. Рассмотрим расслоенное произведение с топологией, индуцированной топологией прямого произведения:

$$Y\times_X E := \bigl\{(y,\,e)\in Y\times E \mid f(y)=p(e)\bigr\}.$$

Пусть $q\colon Y\times_X E\to Y$ есть ограничение проекции пространства $Y\times E$ на первый сомножитель. Легко видеть, что q есть локальный гомеоморфизм, т. е. задает пучок на Y. Он называется *обратным образом пучка* F при отображении f и обозначается $f^*(F)$. Если Y — открытое подмножество в X, а $f\colon Y\to X$ — тождественное вложение, то пучок $f^*(F)$ называется *ограничением пучка* F на Y и обозначается $F|_Y$. Слой пучка $F|_Y$ в точке $x\in Y$ можно отождествить со слоем пучка F в той же точке. Обратный образ сохраняет структуры пучка групп, векторных пространств или колец.

4. Окольцованные пространства. *Окольцованное пространство* есть пара — топологическое пространство X вместе с пучком колец $\mathcal{O}_X$ на X. Пространство X называется *подстилающим*, а пучок $\mathcal{O}_X$ — *структурным пучком* окольцованного пространства $(X,\,\mathcal{O}_X)$. *Морфизмом окольцованных пространств* $(X,\,\mathcal{O}_X)\to(Y,\,\mathcal{O}_Y)$ объявляется пара $(f,\,\varphi)$, состоящая из непрерывного отображения подстилающих пространств $f\colon X\to Y$ и отображения пучков колец $\varphi\colon f^*(\mathcal{O}_Y)\to\mathcal{O}_X$. (Заметим, что отображение пучков направлено в противоположную сторону, т. е. от Y к X, что есть проявление общей двойственности между пространствами и соответствующими пучками.) По определению слой пучка $f^*(\mathcal{O}_Y)$ над точкой x изоморфен слою пучка $\mathcal{O}_Y$ над $f(x)$. Таким образом, для всякого $x\in X$ имеется гомоморфизм колец

$$\varphi_x\colon \mathcal{O}_{Y,f(x)}\longrightarrow\mathcal{O}_{X,x}. \tag{2}$$

Обратно, если вместе с f задана совокупность гомоморфизмов (2), то определено отображение окольцованных пространств при условии, что семейство (2) непрерывно в следующем смысле. Пусть E_X и E_Y — расслоенные пространства, отвечающие пучкам $\mathcal{O}_X$ и $\mathcal{O}_Y$, и $\Phi\colon E_Y\times_Y X\to E_X$ — отображение, которое в слоях над точкой $x\in X$ действует по формуле (2). Это отображение должно быть непрерывно ($E_Y\times_Y X$ наделено топологией, наведенной из $E_Y\times X$). Это условие можно выразить иначе: для всякого открытого множества $V\subset Y$ и сечения $s\in\mathcal{O}_Y(V)$ совокупность гомоморфизмов (2) преобразует s в сечение $\mathcal{O}_X$ над $f^{-1}(V)$.

Открытым подпространством окольцованного пространства $(X,\,\mathcal{O})$ называется любое открытое подмножество $Y\subset X$, снабженное пучком $\mathcal{O}|_Y$. С таким подпространством связано отображение $(f,\,\varphi)\colon (Y,\,\mathcal{O}|_Y)\to(X,\,\mathcal{O})$, где f есть вложение, а $\varphi\colon f^*(\mathcal{O})\cong\mathcal{O}_Y$ — тождественный изоморфизм.

Пучком идеалов $\mathcal{J}$ в структурном пучке $\mathcal{O}$ окольцованного пространства называется подпучок пучка $\mathcal{O}$, такой что для всякого открытого подмножества $U\subset X$ множество $\mathcal{J}(U)$ есть идеал в кольце $\mathcal{O}(U)$. Иначе говоря, для всякой точки $x\in X$ слой $\mathcal{J}_x$ пучка $\mathcal{J}$ есть идеал в слое $\mathcal{O}_x$ структурного пучка и подмножество $\mathcal{J}\subset\mathcal{O}$ открыто. *Множеством корней* пучка идеалов $\mathcal{J}$ назовем совокупность $Z(\mathcal{J})$ точек $x\in X$, таких что $\mathcal{J}_x\neq\mathcal{O}_x$. Таким образом, $Z(\mathcal{J})$ есть множество точек, в которых слой факторпучка $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ есть ненулевое кольцо.

Предположим, что пучок $\mathcal{O}$ коммутативных колец *унитальный*, т. е. для всякого открытого $U\subset X$ кольцо $\mathcal{O}(U)$ содержит единицу. Нетрудно показать, что в этом случае множество $Z(\mathcal{J})$ замкнуто. Множество $Z(\mathcal{J})$, наделенное топологией, наведенной из X, и снабженное пучком колец $\mathcal{O}/\mathcal{J}$, называется *замкнутым подпространством* окольцованного пространства $(X,\,\mathcal{O})$. С $Z(\mathcal{J})$ канонически связано отображение окольцованных пространств $(Z(\mathcal{J}),\,\mathcal{O}/\mathcal{J})\to(X,\,\mathcal{O})$, состоящее из вложения $Z(\mathcal{J})\subset X$ и отображения, порожденного естественными гомоморфизмами колец

$$\mathcal{O}_x\longrightarrow\mathcal{O}_x/\mathcal{J}_x\cong(\mathcal{O}/\mathcal{J})_x,\qquad x\in Z(\mathcal{J}). \tag{3}$$

Вообще же *подпространством окольцованного пространства* назовем всякое замкнутое подпространство его открытого подпространства.

Окольцованные пространства, включая и супермногообразия, изучаемые в различных геометрических теориях, относятся к классу локальных пространств, определение которых мы сейчас дадим. Пусть фиксировано поле $\mathbb{K}$ (в этой книге это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Топологическое пространство X, снабженное пучком $\mathbb{K}$-алгебр $\mathcal{O}$, назовем $\mathbb{K}$-*окольцованным пространством*. Таким образом, для всякого открытого множества $U\subset X$ множество $\mathcal{O}(U)$ есть $\mathbb{K}$-алгебра с единицей, а для любой пары $V\subset U$ открытых множеств морфизм ограничения $\mathcal{O}(U)\to\mathcal{O}(V)$ есть гомоморфизм $\mathbb{K}$-алгебр. Предположим, что для всякой точки $x\in X$ фиксирован гомоморфизм $\mathbb{K}$-алгебр

$r_x\colon \mathcal{O}_x \to \mathbb{K}$ (*значение в точке*). Его ядро есть максимальный идеал в $\mathcal{O}_x$, он обозначается $\mathfrak{m}_x$. Данное окольцованное пространство называется *локальным*, если каждая алгебра $\mathcal{O}_x$ локальна, т. е. $\mathfrak{m}_x$ есть единственный максимальный идеал в $\mathcal{O}_x$.

Морфизмом $\mathbb{K}$*-окольцованных пространств* называется отображение окольцованных пространств (f, φ), подчиненное дополнительному условию: для всякой точки x отображение (2) есть гомоморфизм $\mathbb{K}$-алгебр. Отсюда легко вывести, что $\varphi_x^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_{f(x)}$.

Как мы увидим ниже, элементы кольца $\mathcal{O}_{X,x}$ нельзя отождествить, вообще говоря, с ростками функций, так как это кольцо может иметь нильпотенты. В таких случаях отображение φ не определяется однозначно по подстилающему отображению.

Опишем ряд конкретных категорий окольцованных пространств, начиная с хорошо известной категории гладких многообразий и кончая категориями супермногообразий. Пусть фиксирована некоторая категория $\mathbb{K}$-окольцованных пространств, подчиненная единственному условию: вместе с пространством она содержит любое его открытое подпространство. Объекты и морфизмы этой категории будем называть *модельными*.

Если фиксирована категория $\mathcal{M}$ модельных пространств, то *категорией* $\mathbb{K}$*-окольцованных пространств типа* $\mathcal{M}$ называется совокупность $\mathbb{K}$-окольцованных пространств $(X, \mathcal{O})$ и их морфизмов, удовлетворяющих следующим условиям.

I. Всякая точка $x \in X$ обладает окрестностью U, такой что имеется изоморфизм $\mathbb{K}$-окольцованных пространств

$$(f, \varphi)\colon (U, \mathcal{O}|_U) \xrightarrow{\sim} (M, \mathcal{O}_M),$$

где $(M, \mathcal{O}_M)$ — некоторое модельное пространство. Этот изоморфизм называется *картой* на X.

II. Пусть имеется еще одна карта $(g, \psi)\colon (V, \mathcal{O}|_V) \to (N, \mathcal{O}_N)$, причем ее область задания V пересекается с U. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& (U \cap V, \mathcal{O}|_{U\cup V}) \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr, "\sim"] & \\
(M', \mathcal{O}_M|_{M'}) \arrow[rr, "(h{,}\chi)"] & & (N', \mathcal{O}_N|_{N'})
\end{tikzcd}$$

где $M' = f(U \cap V)$, $N' = g(U \cap V)$, косые стрелки суть ограничения карт, а морфизм (h, χ) находится однозначно из условия коммутативности. Требуется, чтобы этот морфизм был модельным, т. е. принадлежал категории $\mathcal{M}$. Он называется *склейкой карт*.

Отображение $(F, \Phi)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ окольцованных пространств типа $\mathcal{M}$ назовем *морфизмом типа* $\mathcal{M}$, если любое его изображение с помощью карт на X и Y является модельным. Пусть (f, φ) — карта на $U \subset X$, а (g, ψ) — карта с областью задания $V \subset Y$. Под изображением отображения (F, Φ) в этих картах мы понимаем морфизм (a, α) в следующей диаграмме, который определяется из условия ее коммутативности:

$$\begin{tikzcd}
(U, \mathcal{O}_X|_U) \arrow[r, "(F{,}\Phi)|_U"] \arrow[d, "(f{,}\varphi)"'] & (V, \mathcal{O}_Y|_V) \arrow[d, "(g{,}\psi)"] \\
(M, \mathcal{O}_M) \arrow[r, "(a{,}\alpha)"] & (N, \mathcal{O}_N)
\end{tikzcd}$$

Мы предполагаем, что $F(U) \subset V$; в противном случае следует ограничить карту (f, φ) на $U' = U \cap F^{-1}(V)$.

Легко понять, что пространства и морфизмы типа $\mathcal{M}$ образуют категорию, т. е. при композиции тип сохраняется. Очевидно также, что любое открытое подпространство пространства типа $\mathcal{M}$ имеет тот же тип. Для замкнутых подпространств это не так.

Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — окольцованное пространство. Скажем, что пучок $\mathcal{L}$ на X *имеет структуру* $\mathcal{O}_X$*-модуля*, если для всякой точки $x \in X$ слой $\mathcal{L}_x$ этого пучка имеет структуру $\mathcal{O}_{X,x}$-модуля (левого или правого). При этом требуется, чтобы действие колец $\mathcal{O}_{X,x}$ на $\mathcal{L}_x$ было непрерывным.

Естественным образом вводится понятие *отображения* $\mathcal{O}_X$*-модулей*, *изоморфизма*, *прямой суммы* и т. д. Напомним, что $\mathcal{O}_X$-модуль $\mathcal{L}$ называется *локально свободным*, если для любой точки $x \in X$ имеются окрестность W и целое неотрицательное число k, такие что существует изоморфизм $\mathcal{O}_X|_W$-модулей $\mathcal{L}|_W \cong \mathcal{O}_X^k|_W$. Число k называется *рангом* модуля $\mathcal{L}$ в точке x.

5. Примеры, приводящие к известным геометрическим теориям.

1) На $\mathbb{R}^n$ рассмотрим пучок $\mathcal{E} = \mathcal{E}_n$, значение которого на открытом подмножестве U есть $\mathbb{R}$-алгебра всех $\mathbb{R}$-значных гладких функций в U. Отображения ограничения действуют очевидным образом. Элементы слоя $\mathcal{E}_x$ называются *ростками* гладких функций в точке x. Пара $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}_n)$ есть локальное $\mathbb{R}$-пространство, причем «вычет» $r_x\colon \mathcal{E}_x \to \mathbb{R}$ переводит росток гладкой функции в ее значение в точке x. Рассмотрим категорию $\mathcal{M}_1$, объектами которой являются открытые подпространства $\mathbb{R}$-окольцованных пространств $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}_n)$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, а морфизмами — пары $(f, \varphi)\colon (U, \mathcal{E}_n|_U) \to (V, \mathcal{E}_m|_V)$, в которых подстилающее отображение $f\colon U \to V$ бесконечно дифференцируемо как отображение подмножеств координатных пространств. Отображение $\varphi\colon f^*(\mathcal{E}_m) \to \mathcal{E}_n|_U$ находится однозначно, это *подстановка*:

$$\varphi\colon b \mapsto a = b(f(\cdot)). \tag{4}$$

Категория пространств типа $\mathcal{M}_1$ — это категория (бесконечно) дифференцируемых многообразий и их гладких отображений.

2) Пусть $\mathcal{H}_n$ — пучок ростков голоморфных функций в $\mathbb{C}^n$. Пара $(\mathbb{C}^n, \mathcal{H}_n)$ является локальным $\mathbb{C}$-пространством, причем «вычеты» устроены так же, как в случае 1. Подобным же образом введем категорию $\mathcal{M}_2$: ее объектами являются открытые подпространства пространств $(\mathbb{C}^n, \mathcal{H}_n)$, где $n = 0, 1, 2, \ldots,$ морфизмы суть пары (f, φ), где подстилающее отображение f голоморфно, а φ — подстановка (4). Пространства типа $\mathcal{M}_2$ — это комплексно-аналитические многообразия.

Отметим, что в примерах 1) и 2) не обязательно требовать заранее гладкости (соответственно аналитичности) подстилающего отображения. Это свойство вытекает из того, что отображение сохраняет гладкость (соответственно аналитичность).

3) Категория модельных пространств $\mathcal{M}_3$. Объект $(Z, \mathcal{O}_Z)$ этой категории описывается следующим образом. Пусть на открытом подмножестве $U \subset \mathbb{C}^n$ заданы голоморфные функции $a_1, \ldots, a_k$, а $\mathcal{H}_U$ — ограничение на U пучка $\mathcal{H}_n$. Тогда Z есть множество общих корней этих функций, а $\mathcal{O}_Z = \mathcal{H}_U/\mathcal{J}|_Z$, где $\mathcal{J}$ — пучок идеалов в $\mathcal{H}_U$, каждый слой которого порождается функциями $a_1, \ldots, a_k$. Очевидно, что $\mathbb{C}$-окольцованное пространство $(Z, \mathcal{O}_Z)$ не зависит от выбора окрестности U множества Z в $\mathbb{C}^n$.

Пусть $(W, \mathcal{O}_W)$ — другое модельное пространство. *Модельный морфизм* $(f, \varphi)\colon (Z, \mathcal{O}_Z) \to (W, \mathcal{O}_W)$ — это пара: подстилающее отображение $f\colon Z \to W$, которое продолжается до голоморфного отображения $F\colon U \to V$ из некоторой окрестности $U \supset Z$ в $\mathbb{C}^n$ в некоторую окрестность $V \supset W$ в $\mathbb{C}^m$, и отображение φ, замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
f^*(\mathcal{O}_W) \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{O}_Z \\
F^*(\mathcal{H}_V) \arrow[u] \arrow[r, "\widetilde{F}"] & \mathcal{H}_U \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

в которой вертикальные стрелки суть естественные отображения, а $\widetilde{F}$ действует подстановкой. Для существования такого отображения φ необходимо и достаточно, чтобы $\widetilde{F}$ переводило подпучок $F^*(\mathcal{J})$ в $\mathcal{J}$, где $\mathcal{J} = \operatorname{Ker}\{\mathcal{H}_V \to \mathcal{O}_W\}$. Отображение φ определяется единственным образом по F, но не по f. В этом состоит существенное отличие категории $\mathcal{M}_3$ от категорий $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, в которых морфизмы однозначно задаются подстилающими отображениями. Окольцованные пространства типа $\mathcal{M}_3$ называются *комплексно-аналитическими пространствами*.

Введение. Математические основы суперсимметричных теорий поля[1]

1. Истоки теории супермногообразий. По-видимому, первой работой по суперматематике следует считать статью 1959 г. Дж. Мартина [Mart][2]. В его статье построена алгебра скобок Пуассона для функций от антикоммутирующих переменных

$$[f, g] = \sum \Big(f(x)\overleftarrow{\partial}_{x_i}\Big)\,\omega_{ik}\Big(\overrightarrow{\partial}_{x_k} g(x)\Big), \tag{1}$$

где $\overleftarrow{\partial}_{x_i}$ и $\overrightarrow{\partial}_{x_k}$ означают правую и левую производные соответственно, а (ω_{ik}) — симметрическая матрица: $\omega_{ik} = \omega_{ki}$. (В работе Дж. Мартина ω_{ik} — числа, а не элементы алгебры Λ_n. Алгебру скобок Пуассона можно построить и в случае, когда $\omega_{ik} \in \Lambda_n$. В этом случае матрица (ω_{ik}) должна удовлетворять некоторым условиям; см. сноску 4 на с. 40.) Здесь $f(x)$, $g(x) \in \Lambda_n$, а x_i, где $i = 1, \ldots, n,$ — образующие некоторой алгебры Грассмана Λ_n, т. е. они удовлетворяют соотношениям

$$x_i x_j + x_j x_i = 0 \quad \text{при любых } i, j = 1, \ldots, n, \quad \text{в частности, } x_i^2 = 0. \tag{2}$$

Работа Дж. Мартина возникла в связи с дискуссией о классическом пределе для фермионов, начатой Дж. Швингером в работе [Sch2]. Следует отметить, что в этой же работе Швингер был достаточно близок к введению антикоммутирующих переменных. Он отмечал, что для классического описания фермионов следует пользоваться величинами, удовлетворяющими условиям (2) при $i \neq j$. Случай $i = j$ он не рассматривал вообще: ясно, что *для классического случая равенство $x_i^2 = h$, где h — постоянная Планка, непригодно*; с другой стороны, для того **чтобы написать $x^2 = 0$, следовало преодолеть большой психологический барьер**. Чтение литературы, посвященной дискуссии 50-х гг. о классическом пределе для фермионов, позволяет судить о том, насколько высок был этот барьер.

Другим истоком был метод вторичного квантования. В 1961 г. было обнаружено поразительное совпадение основных формул операторного исчисления в ферми- и бозе-вариантах метода вторичного квантования; см. [Бкп]. Разница заключалась лишь в определении интеграла: для бозе-случая это обычный интеграл, для ферми-случая — интеграл по антикоммутирующим переменным: в сущности — некоторый линейный функционал на алгебре Грассмана. (Полученные в то время результаты были

---

[1] В этом введении Ф. А. Березин предполагал, что основное поле $\mathbb{K}$ есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, если не оговорено противное. — *Прим. Д. Л.*

[2] К сожалению, она мне стала известна лишь в 1976 г., поэтому ссылки на нее отсутствуют в более ранних моих работах на эту тему.

доложены на Всесоюзном математическом съезде 1961 г., см. [БМФ], но подробно опубликованы лишь в 1965 г., см. [Бмет].) Впоследствии интеграл по антикоммутирующим переменным был тщательно изучен. Оказалось, что он обладает рядом свойств, поразительно напоминающих свойства обычного интеграла. Это обстоятельство наводило на мысль о **возможности такого обобщения всех основных понятий анализа, при котором образующие алгебры Грассмана стали бы играть роль, равноправную с вещественными или комплексными переменными**. Основными вехами на этом пути являются работы [Бав, БеК].

Кроме того, в начале 1970-х гг. появились ставшие теперь знаменитыми пионерские работы Гольфанда—Лихтмана и Волкова—Акулова—Сороки, проложившие суперматематике дорогу в квантовую теорию поля; см. [ГоЛ, ВлА, ВлС] [1]. После работы Ю. Весса и Б. Зумино [WZ] интерес к суперматематике стал повсеместным. Первый обзор на эту тему был выполнен Л. Корвиным, Ю. Нееманом, Ш. Штернбергом; см. [CNS]. В настоящее время (т. е. в 1980 г. — *прим. Д. Л.*) наиболее полным математическим изложением суперматематики является работа Б. Костанта [2] [Kos].

---

[1] Добавлю еще, что Рамон (Ramond), а также Невё (Neveu) и Шварц (Schwarz) открыли в 1970/71 гг. простейшие струнные супералгебры Ли — суперизации алгебр Витта и Вирасоро — и показали их полезность в струнных моделях теории поля. — *Прим. Д. Л.*

[2] Предшествующие работы в ней широко используются, но не упоминаются.

(Уже после смерти Ф. А. Березина И. Т. Тодоров спросил Б. Костанта на какой-то конференции, почему в работе [Kos] тот не сослался на статью [БЛ], перевод которой на английский язык вышел в том самом 1975 году, когда, как написано в [Kos], определение супермногообразия пришло Костанту в голову, и был сразу Костанту послан, не говоря уже о заметке [Л*], в которой дано первое определение алгебраического супермногообразия, и после которой стало ясно, что гладкое супермногообразие надо определять аналогично. Б. Костант ответил, что он кратких статей не читает.

Публично сделанный намек Ивана Тодоровича пропал втуне: Б. Костант и потом никогда не ссылался ни на чьи работы по суперсимметриям, кроме своих, соавторов и собственных учеников. Аналогично поступают и некоторые его бостонские коллеги; эта зараза уже дошла до калифорнийских университетов и поражает другие континенты.

Б. Костанту такое отношение к кратким заметкам, а также и длинным статьям других авторов аукнулось: стоило ему выйти на пенсию, и «функцию Костанта» стали называть, как встарь, функцией разбиения.

В статье [БЛ] — гладкой версии текста [Л*] — нет слова «пучок», на основании чего нашелся (один) человек, обвинивший статью [БЛ] в нестрогом определении супермногообразия в отличие от строго и научного определения в терминах пучков, данного в статье [Kos]. Березин говорил, переписывая мой, основанный на пучках (см. [Л*]) черновик статьи [БЛ], что слово «пучок» отпугнет читателей—физиков; поэтому статья написана на языке карт и атласов, что вполне корректно, см. сноску 1 на с. 30.

В 1997 г., когда один из редакторов издательства Birkhäuser предложил мне опубликовать книгу [ЛПет*], уже переведенную на английский язык как часть книги [SoS*], жена Б. Костанта, в то время отвечавшая за выбор рукописей для публикации в Нью-Йоркском отделении Birkhäuser'а, написала мне письмо, в котором выразила надежду, что я сошлюсь на работы ее мужа по супермногообразиям, в частности на [Kos]. Пользуясь случаем, спешу уважить просьбу. — *Прим. Д. Л.*)

2. Супермногообразия. Многообразия являются одним из основных объектов современной математики. Аналогичную роль играют супермногообразия в суперматематике. Напомню, что *многообразием* M называется топологическое пространство, каждая точка которого имеет окрестность, допускающую взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение на открытый шар в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ фиксированной размерности n. Число $n = \dim M$ называется *размерностью* многообразия M; окрестности, упомянутые в определении, называются *координатными*, так как с помощью отображения на шар на них можно перенести евклидовы координаты, имеющиеся в шаре. Получаемые таким путем координаты называются *локальными*.

Пусть U и V — две координатные окрестности, x^i и y^i — локальные координаты соответственно в U и V. На пересечении $U \cap V$ одни координаты являются функциями других: $y^i = f^i(x)$. Если функции f^i дифференцируемы k раз, многообразие называется k раз дифференцируемым, при $k = \infty$ — *бесконечно дифференцируемым* или *гладким*.

Супермногообразие является обобщением гладкого [1] многообразия. В дальнейшем слово «многообразие» означает либо гладкое многообразие над $\mathbb{R}$, либо аналитическое над $\mathbb{C}$.

Пусть $U \subset M$ — открытое множество. Символом $A(U)$ обозначим коммутативную алгебру гладких функций на U с обычными операциями сложения и умножения. В дальнейшем слово «функция» означает либо гладкую функцию (над $\mathbb{R}$), либо аналитическую (над $\mathbb{C}$). Если U — координатная окрестность, то $A(U)$ можно считать алгеброй с n топологическими образующими, которыми служат координаты в U. Если U и V — два открытых множества и $U \subset V$, обозначим символом $\rho_U^V\colon A(V) \to A(U)$ оператор, сопоставляющий каждой функции $f \in A(V)$ ее ограничение на U. Очевидно, что ρ_U^V является гомоморфизмом алгебр. Набор алгебр $A(U)$ и гомоморфизмов ρ_U^V является примером *пучка*; это так называемый *структурный пучок* многообразия M, его стандартное обозначение $\mathcal{O}_M$. С каждой точкой $x \in M$ связан гомоморфизм алгебр $r_x\colon A(M) \to \mathbb{K}$ (*значение в точке* $r_x f = f(x)$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, если $A(M)$ состоит из вещественнозначных функций, и $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, если $A(M)$ состоит из аналитических функций).

---

[1] Это, конечно, неоправданное ограничение. Ниже в книге рассматриваются не столько гладкие, сколько комплексно-аналитические супермногообразия, да и само определение супермногообразия было впервые сформулировано не для гладкого супермногообразия, а для алгебраического, вернее, для суперсхемы над любым полем, см. [Л*], а более подробно об этом говорится в [CoC1°], где стоило заметить, как в [МаКП*], что иногда встречавшееся в литературе утверждение «супермногообразий класса C^k, а тем более непрерывных, не бывает» — непонятно на чем основанное заблуждение. Я предлагаю читателю опровергнуть закавыченное утверждение в качестве несложного упражнения. В крайнем случае можно, как в [МаКП*], вспомнить про обобщенные функции, но можно и без них обойтись: расслоения-то в указанных категориях существуют. — *Прим. Д. Л.*

Далее, если $f \in A(M)$ и $Z \subset \mathbb{K}$ — открытое множество, то множество

$$U(Z,\, f) = \{x \in M \mid r_x f \in Z\} \tag{3}$$

является открытым множеством в M, причем *каждое открытое множество в M представимо в виде объединения $U = \bigcup\limits_{\alpha} U(Z_\alpha,\, f_\alpha)$ конечного или бесконечного числа множеств вида* (3). Семейство открытых множеств с этим свойством называется *базой* открытых множеств.

Оказывается, каждый непрерывный гомоморфизм $r\colon A(M) \to \mathbb{K}$ имеет вид $r = r_x$. Это обстоятельство позволяет восстановить многообразие M по алгебре $A(M)$: зная $A(M)$, мы знаем также множество гомоморфизмов $A(M)$ в $\mathbb{K}$, т. е. восстанавливаем M как множество точек, а с помощью подмножеств $U(Z,\, f)$ мы восстанавливаем M как топологическое пространство.

Перейдем к определению супермногообразия[1]. Пусть M_0 — некоторое многообразие, $\dim M_0 = p$. Каждому открытому подмножеству $U \subset M_0$ сопоставим алгебру $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$ функций на U со значениями в алгебре Грассмана Λ_q, где q одно и то же для всех U. Многообразие M_0 вместе с пучком алгебр $\mathfrak{A}(U)$, который обладает указанным свойством, называется *супермногообразием*[2] [3] M. Это определение введено в работе [Л*], ср. [БЛ].

Многообразие M_0 называется *базой* или *подстилающим многообразием* супермногообразия M. *Размерностью* супермногообразия называется пара чисел, $\dim M = (p,\, q)$[4]. (Подстилающее многообразие супермногообразия M обозначают также символом M_{rd}, где индекс происходит от слова «reduced», см. [CoC1°, МаКП*, МаАГ*] — *прим. Д. Л.*)

---

[1] Эквивалентность трех способов задания конечномерных **гладких** супермногообразий (в терминах функтора точек, значения которого на супералгебрах Грассмана Ф. А. Березин называет «грассмановой оболочкой», или в терминах пучков, или с помощью карт и атласов) — несложное упражнение, о котором я рассказывал, начиная с середины 1970-х гг. на семинарах Э. Б. Винберга—А. Л. Онищика, Ю. И. Манина, А. С. Шварца. Подробности впервые опубликовали практически одновременно А. Воронов [Вов*], Боер и Джитлер [BG*], а еще раньше препринтировал В. Молотков, см. ссылку в книге [CoC2*]. Однако эти три подхода иногда неэквивалентны (например, если многообразия негладкие или над конечным полем, когда о картах и атласах речи нет), подробности см. в книге [CoC2*]. — *Прим. Д. Л.*

[2] Добавлю, что *морфизмом супермногообразий* называется морфизм окольцованных пространств — пар $(M_0,\, \mathcal{O}_M)$, где $\mathcal{O}_M$ — вышеописанный пучок супералгебр Грассмана $\mathfrak{A}(U)$. При этом можно рассматривать две категории: в одной — годятся любые морфизмы пучков супералгебр, в другой — лишь те, что сохраняют четность. — *Прим. Д. Л.*

[3] Это определение шире используемого всюду ниже, где существенна $\mathbb{Z}/2$-градуировка. Связь между этими определениями может быть понята из теоремы 3 гл. 1. — *Прим. А. К.* (Именно в таком, более широком смысле, я и определил суперсхемы в работе [Л*], а ограничение «считать морфизмами супермногообразий лишь те, что сохраняют четность супералгебр функций» идет от физиков и нашего непонимания смысла дополнительных морфизмов, см. главу об алгебрах Воличенко в книге [CoC2*]. — *Прим. Д. Л.*)

[4] Ю. И. Манин предложил яркое обозначение суперразмерности: $p|q$. — *Прим. Д. Л.*

Как и в случае многообразий, при некоторых условиях[1] супермногообразие восстанавливается по алгебре $\mathfrak{A}(M)$, т. е. восстанавливаются все алгебры $\mathfrak{A}(U)$ и все гомоморфизмы ρ_V^U с точностью до естественной эквивалентности.

2.1. Координатные преобразования. Пусть $x_1, \ldots, x_p$ и $\xi_1, \ldots \ldots, \xi_q$ — произвольные, соответственно четные и нечетные, элементы алгебры $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$, обладающие тем свойством, что с их помощью любой элемент $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$ может быть записан в виде

$$f = f(x,\, \xi) = \sum_{k \geqslant 0} \sum_{i_1, \ldots, i_k} f_{i_1, \ldots, i_k}(x_1,\, \ldots,\, x_p)\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k}, \tag{4}$$

где x_i — координаты в U и ξ_j — образующие алгебры Λ_q. В этом случае элементы x_i, ξ_j называются *образующими алгебры* $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$ (соответственно четными и нечетными). В частности, координаты в U и образующие в Λ_q служат образующими в $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$. Коэффициенты $f_{i_1, \ldots, i_k}(x)$ можно рассматривать более широко, как функции от p четных аргументов — элементов из $\Lambda_{\mathfrak{A}}$ со значениями в $\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — некоторая «фантомная» суперкоммутативная супералгебра. Их естественно называть *грассмановым аналитическим продолжением* исходных функций $f_{i_1, \ldots, i_k}(x)$.

2.2. Задание супермногообразий уравнениями. Одним из самых удобных способов описания многообразий является задание их с помощью уравнений в пространстве большого числа измерений:

$$f_1(x_1,\, \ldots,\, x_N) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_L(x_1,\, \ldots,\, x_N) = 0. \tag{5}$$

Если ранг матрицы частных производных $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)$ во всех точках множества, выделяемого уравнениями (5), один и тот же, то из классической теоремы о неявных функциях следует, что это множество — многообразие.

Обратно, хорошо известно, что при широких предположениях[2] многообразие может быть задано уравнениями.

Аналогично обстоит дело с супермногообразиями. Пусть $f_i(x,\, \xi)$ и $\varphi_j(x,\, \xi)$ — соответственно четные и нечетные элементы алгебры $\mathfrak{A}_{PQ}(\mathbb{R}^P)$, где $i = 1,\, \ldots,\, p'$, а $j = 1,\, \ldots,\, q'$. Пусть, далее, во всех точках множества M_0, выделяемого в $\mathbb{R}^P$ уравнениями

$$f_i(x,\, 0) = 0, \tag{6}$$

---

[1] Короче и яснее, чем другие, это изложил (в случае алгебраических многообразий) Ю. И. Манин в книге [МаАГ*]. — *Прим. Д. Л.*

[2] См., например, статьи Дж. Нэша «Проблема вложений для римановых многообразий» (УМН. 1971. Т. 26, вып. 4. С. 173–216) или Ж. Ланна «La conjecture des immersiones» (*Lannes J.* Astérisque. 1982. № 92–93, P.331–346) . — *Прим. Д. Л.*

ранги матриц частных производных $R_1 = (\partial_{x_i} f_j(x, 0))$ и $R_2 = (\partial_{\xi_r} \varphi_s(x, \xi))|_{\xi=0}$ постоянны: $\operatorname{rank} R_1 = m$, $\operatorname{rank} R_2 = n$. В таком случае уравнения

$$f_i(x, \xi) = 0, \quad \varphi_j(x, \xi) = 0 \tag{7}$$

определяют супермногообразие M с базой M_0, и $\dim M = (P - m, Q - n)$.

Следует пояснить, каким образом уравнения (7) определяют супермногообразие.

В суперматематике имеется[1] *теорема о неявной функции*, аналогичная классической. По этой теореме из условий $\operatorname{rank} R_1 = m$ и $\operatorname{rank} R_2 = n$ следует, что каждая точка $x_0 \in M_0$ обладает окрестностью, в которой уравнения (7) могут быть разрешены:

$$x_i = g_i(y, \eta), \quad \xi_j = \psi_j(y, \eta), \tag{8}$$

где $y = (y_1, \ldots, y_p)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_q)$, а $p = P - m$, $q = Q - n$; здесь y_i, η_j — образующие алгебры $\mathfrak{A}_{p,q}(W)$, а $W \subset \mathbb{R}^P$ — некоторая область, которая естественно отождествляется с подобластью в M_0. Формулы (8) определяют гомоморфизм $\rho_W \colon \mathfrak{A}_{PQ}(\mathbb{R}^P) \to \mathfrak{A}_{p,q}(W)$: если $f \in \mathfrak{A}_{PQ}(\mathbb{R}^P)$ имеет вид (4), то

$$(\rho_W f)(y, \eta) = \sum f_{i_1,\ldots,i_k}(g_1, \ldots, g_p)\psi_{i_1} \ldots \psi_{i_k}, \tag{9}$$

где g_i и ψ_j те же, что в формулах (8).

Пусть $V \subset W$, $f \in \mathfrak{A}_{p,q}(W)$, а $\tilde{f}$ — прообраз функции f при гомоморфизме (9) и $g = \rho_V f$. Можно проверить, что элемент g зависит только от f, а не от выбора его прообраза $\tilde{f}$. Таким образом, возникает отображение $\rho_V^W \colon \mathfrak{A}_{p,q}(W) \to \mathfrak{A}_{p,q}(V)$, $g = \rho_V^W f$. Оказывается, ρ_V^W является гомоморфизмом алгебр, и гомоморфизмы ρ_V^W удовлетворяют всем аксиомам пучка.

Многие супермногообразия можно задать уравнениями. Очевидно, что задание супермногообразия уравнениями, как и аналогичное задание многообразия, неоднозначно. Этой неоднозначностью можно воспользоваться, чтобы придать уравнениям супермногообразия простейший вид. Если супермногообразие задано уравнениями (с правой частью, равной 0), то алгебра его глобальных сечений является фактором алгебры $\mathfrak{A}_{PQ}(\mathbb{R}^P)$ по идеалу, порожденному левыми частями этих уравнений.

Супермногообразие[2] M с базой M_0 естественно назвать *тривиальным*, если алгебра его глобальных сечений изоморфна алгебре функций

---

[1] Впервые доказанная И. Н. Бернштейном, см. [ЛПет*, СоС1°]. — *Прим. Д. Л.*

[2] Ф. А. Березин имеет в виду супермногообразия, на которых есть глобальные функции. Но поскольку бывают и другие супермногообразия, на которых глобальных функций может и не быть, сто́ит дать то определение, что предлагалось с самого начала, см. [Л*], с учетом уточнения, сделанного В. П. Паламодовым. ***Расщепимое*** *супермногообразие* M — это окольцованное пространство, представляющее собой пару: многообразие M_0 (его база) и пучок сечений внешней (т. е. грассмановой) алгебры некоторого векторного расслоения E на M_0. Супермногообразие M *тривиально*, если расслоение E тривиально. — *Прим. Д. Л.*

на M со значениями в алгебре Грассмана Λ_q. В частности, *супергруппы*[1] *всегда являются тривиальными супермногообразиями*.

Вот простейший пример нетривиального супермногообразия (выделенного указанными уравнениями):

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0.$$

2.3. Топология супермногообразий. Классификация супермногообразий с точностью до *эквивалентности* (по-видимому, имелось в виду «с точностью до диффеоморфизмов» — *прим. Д. Л.*) является супераналогом топологической классификации многообразий; соответствующие инварианты следует называть *супертопологическими инвариантами*.

Теперь мы в состоянии дать геометрическое определение эквивалентности супермногообразий. Пусть M — некоторое супермногообразие, заданное системой уравнений. Рассмотрим те же уравнения, но переменным x_i и ξ_j придадим новый смысл: вместо четных и нечетных элементов алгебры Грассмана пусть и те и другие будут числами. В результате получатся уравнения, определяющие некоторое многообразие $\widetilde{M}$. Это многообразие имеет специальную структуру, легко усматриваемую из вида уравнений: оно есть коллекция q-мерных плоскостей $(P+Q)$-мерного пространства, помеченных точкой x многообразия M_0 (которое определяется уравнениями (6) в пространстве $\mathbb{R}^P$). Легко видеть, что M_0 совпадает с подстилающим многообразием супермногообразия M. Многообразия с такой структурой называются *векторными расслоениями*, M_0 — *базой расслоения*, плоскость, помеченная точкой $x \in M_0$, — слоем над x.

Два векторных расслоения считаются *эквивалентными*, если существует взаимно однозначное отображение одного из них на другое, переводящее слой в слой. Таким образом, мы приходим к выводу:

1) с каждым супермногообразием M размерности $(p|q)$ и базой M_0 однозначно связано векторное расслоение E с той же базой и слоем, являющемся векторным пространством размерности q;

2) два супермногообразия *эквивалентны*, если эквивалентны в обычном смысле соответствующие им векторные расслоения. (*Как ни удивительно, для комплексно-аналитических супермногообразий этот вывод неверен, как показывает построенный В. П. Паламодовым пример, приведенный ниже в этой книге. А для супермногообразий с особенностями вывод очевидно неверен: пусть функции на одном из них составляют алгебру Грассмана от* > 1 *переменной, а на другом — фактор этой алгебры по идеалу, порожденному произведением всех образующих.*

---

[1] Имеются в виду супергруппы *Ли*. Доказательство этого утверждения см. в гл. 4 книги [СоС2*]. Вообще Ф. А. Березин употреблял в рукописи слово (супер)группа, имея в виду только *лиевы* (супер)группы. — *Прим. Д. Л.*

Кроме того, из сказанного неясно, зачем городить огород и вводить новое слово «супермногообразие», если оно «эквивалентно» понятию векторного расслоения. А вся соль в том, что, хотя между объектами категории гладких супермногообразий и категории (тоже гладких, конечно) векторных расслоений E имеется вышеописанное взаимно однозначное соответствие, ***морфизмов в категории гладких супермногообразий много больше, чем в категории расслоений, только не E, а $\Lambda^{\bullet}(E)$.*** *Сверх того, П. Грин [Gre*] и В. П. Паламодов первыми заметили, что в категориях аналитических супермногообразий над $\mathbb{C}$ объектов тоже больше: одно расслоение может отвечать неизоморфным* ***нерасщепимым*** *супермногообразиям — прим. Д. Л.*)

В топологии хорошо известны инварианты векторных расслоений — это так называемые *характеристические классы* Понтрягина и Черна. Тем самым эти характеристические классы являются одновременно супертопологическими инвариантами, т. е. инвариантами супермногообразий. В настоящее время (по сегодня, в 2013 г. — *прим. Д. Л.*) описать полный набор супертопологических инвариантов — открытая **задача**.

2.4. Грассмановы аналитические многообразия. Пусть $M = M^p$ — супермногообразие, заданное уравнениями (7), и Λ_q — алгебра Грассмана с q образующими. Число q никак не связано с M. Рассмотрим в Λ_q четные и нечетные элементы общего вида

$$x_i = \sum_{k\geqslant 0}\ \sum_{\mathbf{i}=(i_1,\ldots,i_{2k})} u_{i;\mathbf{i}}\,\zeta_{i_1}\ldots\zeta_{i_{2k}}, \qquad \xi_j = \sum_{k\geqslant 0}\ \sum_{\mathbf{j}=(j_1,\ldots,j_{2k+1})} v_{j;\mathbf{j}}\,\zeta_{j_2}\ldots\zeta_{j_{2k+1}}, \qquad (10)$$

где ζ_j — образующие алгебры Λ_q. Подставив x_i и ξ_j вида (10) в уравнения (7), мы получим уравнения на коэффициенты $u_{i;i_1,\ldots,i_{2k}}$, $v_{j;j_1,\ldots,j_{2k+1}}$, которые определяют многообразие M_q. Получаемые таким путем многообразия мы назовем *ассоциированными с супермногообразием M*. В частности, при $q = 0$ получается базисное многообразие M_0. Многообразия M_q обладают важным свойством, которое естественно назвать *грассмановой аналитической структурой*.

1) Многообразие M_q можно покрыть системой координатных окрестностей с локальными координатами $\left\{U^{(\alpha)}_{i;i_1,\ldots,i_{2k}},\ V^{(\alpha)}_{j;j_1,\ldots,j_{2k+1}}\right\}$,

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_{2k}, \quad j_1 < j_2 < \ldots < j_{2k+1}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Это обстоятельство позволяет сопоставить каждой точке $u \in U_\alpha$ набор из p четных и q нечетных элементов алгебры Λ_q:

$$x_i^{(\alpha)} = \sum_{k\geqslant 0}\ \sum_{\mathbf{i}=(i_1,\ldots,i_{2k})} u^{(k)}_{i;\mathbf{i}}\,\sigma_{i_1}\ldots\sigma_{i_{2k}}, \qquad \xi_j^{(\alpha)} = \sum_{k\geqslant 0}\ \sum_{\mathbf{j}=(j_1,\ldots,j_{2k+1})} v^{(\alpha)}_{j;\mathbf{j}}\,\sigma_{j_1}\ldots\sigma_{j_{2k+1}}, \qquad (11)$$

где $\{u^{(\alpha)}_{i;i_1},\ \ldots,\ v^{(\alpha)}_{j;j_1},\ \ldots\}$ — локальные координаты точки u и σ_i — образующие алгебры Λ_q. Элементы $x_i^{(\alpha)}$ и $\xi_j^{(\alpha)}$ мы в дальнейшем называем *локальными грассмановыми координатами* точки u.

2) Каждая точка пересечения $U_\alpha \cap U_\beta$ имеет два набора локальных грассмановых координат $x_i^{(\alpha)}$, $\xi_j^{(\alpha)}$ и $x_i^{(\beta)}$, $\xi_j^{(\beta)}$, связанных соотношением

$$x_i^{(\alpha)} = f_i(x^{(\beta)}, \xi^{(\beta)}), \quad \xi_j^{(\alpha)} = \psi_j(x^{(\beta)}, \xi^{(\beta)}), \quad \text{где } f_i(x, \xi),\ \ \psi_j(x, \xi) \in \mathfrak{A}_{p,q}(U_\alpha \cap U_\beta). \qquad (12)$$

Соотношения (12) являются конденсированной формой обычных координатных преобразований: если подставить в левую часть равенств (12) выражения $x_i^{(\alpha)}$ и $\xi_j^{(\alpha)}$ из формул (11), а в правую часть — аналогичные выражения для $x_i^{(\beta)}$ и $\xi_j^{(\beta)}$ в терминах образующих σ_j, затем разложить обе части соотношений (12) по σ_j и приравнять соответствующие коэффициенты, то получится координатное преобразование в координатах $\{u^{(\alpha)}_{i;\mathbf{i}},\ v^{\alpha}_{j;\mathbf{j}}\}$ и $\{u^{(\beta)}_{i;\mathbf{i}},\ v^{\beta}_{j;\mathbf{j}}\}$.

Таким образом, имеется существенная аналогия между многообразиями M_q и комплексными многообразиями. В связи с этим многообразия M_q в дальнейшем иногда называются *грассмановыми аналитическими многообразиями*. На них могут быть определены *грассмановы аналитические функции*, во многом аналогичные обычным аналитическим функциям. Грассмановы аналитические функции играют важную роль в теории представлений супергрупп, см. [Бун].

3. Интегрирование. Пусть ξ_i — образующие алгебры Грассмана Λ_q, т. е. координаты на $0|q$-мерном супермногообразии. Обозначим символом $\operatorname{vol}(\xi)$ элемент объема в координатах ξ_i. Положим[1)]

$$\int \operatorname{vol}(\xi_i) = 0, \qquad \int \xi_i\ \operatorname{vol}(\xi_i) = 1. \qquad (13)$$

Кратный интеграл понимается как повторный. Пусть $U \subset \mathbb{R}^p$ — некоторая область, x_i — координаты в U. Для (*финитной*, т. е. с компактным носителем, а вовсе не для любой — *прим. Д. Л.*) функции

$$f(x,\ \xi) = f_0(x) + \sum f^{i_1\ldots i_k}(x)\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k} \in \mathfrak{A}_{p,q}(U)$$

определен *интеграл*

$$J_{p,q}(f) := \int f(x,\ \xi)\ \operatorname{vol}(x/\xi) = \int\limits_U f^{1\ldots p}(x)dx. \qquad (14)$$

[1)] Другими словами, интеграл в $0|1$-мерном случае — это (возможно, с точностью до знака) просто частная производная. Сложности появляются в присутствии одновременно и четных, и нечетных координат. — *Прим. Д. Л.*

(Здесь «элемент объема» $\mathrm{vol}(x/\xi)$ есть класс элемента $dx_1 \dots dx_p \partial_{\xi_q} \dots \partial_{\xi_1}$ из фактора неразложимого $\mathfrak{gl}(p|q)$-подмодуля в симметрической алгебре, порожденной элементами внешними 1-формами dx_i, $d\xi_j$ и частными производными ∂_{x_i}, ∂_{ξ_j} при всех i и j, по максимальному подмодулю коразмерности 1, описанному в книгах [CoC1°, QFS*]. — *Прим. Д. Л.*)

Для дальнейшего важно уметь определять *интеграл финитной функции* не только в случае, когда x_i — координаты в U, но и в случае, когда x_i — произвольные четные образующие алгебры $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$, а ξ_j — произвольные ее нечетные образующие. В этом случае

$$\int f\bigl(x(y, \eta), \xi(y, \eta)\bigr) \,\mathrm{sdet}(x, \xi/y, \eta) \,\mathrm{vol}(y/\eta) = \int f(x, \xi) \,\mathrm{vol}(x/\xi), \tag{15}$$

где $\Delta(x, \xi/y, \eta) = \mathrm{sdet}\, R$ — *супердетерминант*[1] матрицы частных производных $R = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где

$$A_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial y_k}, \quad B_{is} = \Bigl(x_i \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \eta_s}\Bigr), \quad C_{jk} = \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k}, \quad D_{js} = \Bigl(\frac{\partial \xi_j}{\partial \eta_s}\Bigr). \tag{16}$$

Напомню определение супердетерминанта. Пусть $K = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ — квадратная матрица, диагональные блоки которой A и D квадратны и состоят из четных элементов алгебры Грассмана $\Lambda := \Lambda_N$, блоки B и C состоят из нечетных элементов алгебры Λ. Множество матриц этого вида, для которых матрицы A и D обратимы и имеют порядки соответственно m и n, обозначим $\mathrm{GL}_\Lambda(m|n)$. Множество $\mathrm{GL}_\Lambda(m|n)$ является группой. *Супердетерминантом* называется функция на $\mathrm{GL}_\Lambda(m|n)$ со значениями в Λ, определяемая равенством

$$\mathrm{sdet}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A - BD^{-1}C) \det D^{-1}. \tag{17}$$

Подобно детерминанту, супердетерминант мультипликативен:

$$\mathrm{sdet}(K_1 K_2) = \mathrm{sdet}\, K_1 \cdot \mathrm{sdet}\, K_2. \tag{18}$$

Это его важнейшее свойство; исследование супердетерминанта см. в [Лдет].

Возможно также интегрирование по части переменных, при этом переменные, не участвующие в интегрировании, рассматриваются как параметры. Пусть функции f и g финитны в U; тогда

$$\begin{aligned} \int f \frac{\partial g}{\partial x_i} \,\mathrm{vol}(x/\xi) &= -\int \frac{\partial f}{\partial x_i} g \,\mathrm{vol}(x/\xi), \\ \int f \Bigl(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \xi_i} g\Bigr) \mathrm{vol}(x/\xi) &= \int \Bigl(f \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_i}\Bigr) g \,\mathrm{vol}(x/\xi). \end{aligned} \tag{19}$$

Отметим, что формула (15) остается в силе, если замена переменных зависит от параметров: $x = x(y, a, \eta, \zeta)$, $\xi = \xi(y, a, \eta, \zeta)$; здесь y_i, $a_{i'}$ и η_j, $\zeta_{j'}$ — совокупность соответственно четных и нечетных образующих алгебры $\mathfrak{A}_{p+p',q+q'}(U \times U')$, где $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant i' \leqslant p'$, $1 \leqslant j \leqslant q$, $1 \leqslant j' \leqslant q'$, а $\dim U = p$, $\dim U' = p'$.

Перейдем от интегрирования по супероблостям к интегрированию на супермногообразиях. Пусть $M^{p,q}$ — супермногообразие с базой M_0, а $U \subset M_0$ — координатная окрестность. Предположим, что каждому набору Σ образующих x_i, ξ_j алгебры $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$ сопоставлен элемент $\rho_{U,\Sigma}(x, \xi)$ этой алгебры, причем при замене образующих $\rho_{U,\Sigma}(x, \xi)$ изменяется по правилу

$$\rho_{U,\Sigma'}(y, \eta) = \rho_{U,\Sigma}(x(y, \eta), \xi(y, \eta)) \Delta(x, \xi/y, \eta), \tag{20}$$

см. формулы (16), где Σ — система образующих x_i и ξ_j, а Σ' — система образующих y_i и η_j. В этом случае величина ρ называется (локальной) *плотностью* в области U. По формуле замены переменных

$$\int \rho_{U,\Sigma}(x, \xi) \,\mathrm{vol}(x/\xi) = \int \rho_{U,\Sigma'}(y, \eta) \,\mathrm{vol}(y/\eta). \tag{21}$$

Если на пересечении окрестностей U_1 и U_2 плотности $\rho_{U_1,\tilde{\Sigma}_1}$ и $\rho_{U_2,\tilde{\Sigma}_2}$ связаны формулами, аналогичными (20), то набор локальных плотностей $\rho_{U,\Sigma}$ задает *глобальную плотность*.

Определим интеграл глобальной плотности ρ по супермногообразию. Пусть U_α — координатные окрестности, покрывающие M_0 и допускающие разбиение единицы:

$$1 = \sum S_\alpha(x), \qquad \text{где} \quad S_\alpha(x) \geqslant 0, \qquad S_\alpha(x) = 0 \quad \text{при } x \notin U_\alpha.$$

Положим

$$\int \rho = \sum \int s_\alpha(x) \rho_{U_\alpha,\Sigma_\alpha}(x, \xi) \,\mathrm{vol}(x/\xi). \tag{22}$$

Несложно проверить, что определенный таким образом интеграл не зависит ни от выбора покрытия $\{U_\alpha\}$, ни от выбора систем образующих алгебры $\mathfrak{A}_{p,q}(U_\alpha)$.

Произведение функции $f \in \mathfrak{A}(M)$ на плотность ρ есть плотность $\tilde{\rho}$, такая что $\tilde{\rho}_{U,\Sigma} = f_U \rho_{U,\Sigma}$, где f_U и $\rho_{U,\Sigma}$ — ограничения функции f и плотности ρ на U. Таким образом, фиксируя плотность ρ, можно определить интеграл любой (финитной) функции по этой плотности:

$$\int f\rho = \sum \int s_\alpha(x) f_\alpha(x, \xi) \rho_{U_\alpha,\Sigma_\alpha}(x, \xi) \,\mathrm{vol}(x/\xi). \tag{23}$$

---

[1] В работе [Лдет] я предложил назвать эту функцию функцией Березина, и название *березиниан* (Ber) прижилось даже на Западе. В статье [Лдет] не только сказано, что березиниан мультипликативен, но и описан K_1-функтор с «супер» позиции. Для тех, кто читал (например, замечательную книгу Э. Артина [АЭ*]) про матрицы с элементами из тел: березиниан — это **не** *детерминант Дьедонне*, а нечто другое. Кроме того, алгебра Грассмана — не тело, раз в ней есть нильпотенты. — *Прим. Д. Л.*

4. Дифференциальная геометрия. Ввиду того что супермногообразие не состоит из точек, понятие касательного пространства для него не является столь же наглядным, как для многообразия. Тем не менее понятие тензорного поля переносится на суперслучай полностью. Определение является формальным, подобно определению плотности. Пусть a_i и b_i — два набора образующих алгебры $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$: четные при $1 \leqslant i \leqslant p$, нечетные при $p+1 \leqslant i \leqslant p+q$. Локальным *тензорным полем* $g^{i_1,\ldots,i_k}_{U,\Sigma;j_1,\ldots,i_\ell}$ называется совокупность элементов алгебры $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$, следующим образом[1] зависящая от системы образующих Σ:

$$g^{i_1,\ldots,i_k}_{U,\Sigma;j_1,\ldots,j_\ell}(a) = \Big(b_{j'_\ell}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial a_{i_k}}\Big)\ldots\Big(b_{j'_1}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial a_{i_1}}\Big)g^{i'_1,\ldots,i'_k}_{U,\Sigma';j'_1,\ldots,j'_\ell}(b)\Big(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial b_{i'_k}}a_{i_k}\Big)\ldots\Big(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial b_{i_1}}a_{i_1}\Big). \tag{24}$$

Здесь и далее, если четные и нечетные образующие алгебр $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$ обозначены так, что разница между ними состоит лишь в индексе, мы будем применять тензорные обозначения, подразумевающие суммирование по повторяющимся индексам. В отличие от тензорных полей на многообразии, порядок сомножителей в формуле (24) важен. Набор локальных тензорных полей называется *глобальным тензорным полем*, если соотношение, аналогичное (24), справедливо в пересечении окрестностей.

В геометрии особую роль играют полностью антисимметричные тензорные поля. Им естественно сопоставляются формальные выражения, называемые *внешними дифференциальными формами*:

$$\omega = \sum \omega_{i_1,\ldots,i_k} da_{i_k} \wedge \ldots \wedge da_{i_1},$$

где $\wedge$ означает, что дифференциалы da^i считаются антикоммутирующими[2].

В суперслучае естественно рассматривать аналогичные образования:

$$\omega = \sum \omega_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_\ell}(x,\,\xi)dx_{i_1}\ldots dx_{i_k}d\xi_{j_1}\ldots d\xi_{j_\ell}, \tag{25}$$

где коэффициенты $\omega_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_\ell}$ антисимметричны по первой группе индексов и симметричны по второй. (При таком определении непонятно, как переставить dx_i и $d\xi_j$, поэтому лучше сказать, что внешние формы (25) образуют алгебру многочленов с q коммутирующими (четными) образующими $d\xi_i$ и p антикоммутирующими (нечетными) образующими dx_j над

---

[1] Гораздо удобнее определить *тензоры* как $\mathrm{GL}(V)$-подмодули в тензорной алгебре прямой суммы тавтологического $\mathrm{GL}(V)$-модуля V и двойственного к нему, а *тензорное поле* — как поле тензоров. Точнее, надо также учитывать смену четностей и возможность подкручивать на представления, заданные степенями березиниана, см. гл. Д3 и [GLS2*]. — *Прим. Д. Л.*

[2] Не менее важна также симметрическая алгебра от дифференциалов над алгеброй функций. Квадратичные по дифференциалам выражения являются *метриками* (возможно, вырожденными), изредка рассматривают и произвольные функции от коммутирующих дифференциалов (это приводит к так называемым *финслеровым структурам*). — *Прим. Д. Л.*

алгеброй функций от x и ξ. — *Прим. Д. Л.*) В алгебре внешних форм[1] действует *внешний дифференциал*

$$d = \sum dx_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum d\xi_i\frac{\partial}{\partial \xi_i} \tag{26}$$

(производные действуют на коэффициенты $\omega_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_\ell}$). Как и в случае многообразий, доказывается[2], что $d^2 = 0$, а из равенства $d\omega = 0$ следует, что локально $\omega = d\omega_1$. Дифференциал d является супердифференцированием алгебры внешних форм:

$$d(\omega_1 \cdot \omega_2) = d\omega_1 \cdot \omega_2 + (-1)^{\alpha(\omega_1)}\omega_1 d\omega_2.$$

Как и на многообразиях, с помощью форм (25) и дифференциала d можно строить теорию когомологий, причем алгебры когомологий являются топологическими инвариантами супермногообразия. В настоящее время, однако, они не вычислены ни для одного нетривиального примера. Поэтому содержательность этого инварианта неясна[3].

Помимо сходства существует также и принципиальное различие между внешними формами на многообразиях и на супермногообразиях. Внешние формы на многообразиях можно не только дифференцировать, но и интегрировать, причем дифференциал и интеграл связаны известной формулой Стокса. В суперслучае — ничего подобного! Внешние формы вообще нельзя интегрировать. Для целей интегрирования здесь служат интегральные

---

[1] Линейное пространство называется $\mathbb{Z}/2$-*градуированным*, если оно представлено в виде прямой суммы двух подпространств: $L = L_0 \oplus L_1$ (Ф. А. Березин *иногда* писал $L = {}^0L \oplus {}^1L$). Подпространство L_0 называется *четным*, L_1 — *нечетным*, как и их элементы. На ненулевых однородных относительно четности элементах $x \in L$ определена функция α (*четность*): $\alpha(x) = 0$ при $x \in L_0$, $\alpha(x) = 1$ при $x \in L_1$. Березин писал: «α является первой буквой греческого слова $\alpha\rho\tau\iota o\sigma$ — четный», но в современных работах функцию четности обычно обозначают буквой p от английского слова *parity*. — *Прим. Д. Л.*

[2] Это утверждение доказано в работе [Лф*], где введены также гомологии и когомологии супералгебр Ли; см. также [БЛ*]. — *Прим. Д. Л.*

[3] Утверждения двух последних предложений неверны. Соответствующие когомологии (они называются *когомологиями де Рама*) изоморфны когомологиям де Рама подстилающего многообразия, поэтому, увы, бессодержательность этого инварианта для супермногообразий ясна. Однако на супермногообразиях неестественно ограничиваться рассмотрением функций, полиномиальных по четным переменным $d\xi_i$. Произвольные гладкие функции от dx и $d\xi$ (а также x и ξ) введены в работе [БрЛ2], где они названы *псевдодифференциальными формами*. В. Шандер (см. [CoC1°]) рассмотрел важные подпространства таких форм (однородные, быстро убывающие, и т. д.), и когомологии ограничения оператора d на эти подпространства уже отражают какие-то аспекты «суперности». К сожалению, до сих пор неизвестно, какие именно аспекты они отражают, а вычисления проведены лишь в паре случаев и толком не опубликованы, см. лишь заметку [ВЗ*] и препринт А. В. Зорича (Параметризационно-инвариантные функционалы действия на пространствах суперповерхностей. Интегрирование на супермногообразиях. Когомологии супермногообразий. ИТЭФ-87-112Р. Киев, 1988) . — *Прим. Д. Л.*

формы, главной из них является плотность, остальные указаны в работах [БрЛ1, БрЛ2]. Для них существует частичный аналог формулы Стокса[1].

Можно построить и аналог *римановой геометрии*. В ее основе лежит суперсимметричное тензорное поле g_{ik}. Другими словами, выражение для элемента длины[2] имеет вид

$$ds^2 = g_{ik}\, da_i\, da_k, \tag{27}$$

где внешний дифференциал считается *четным*, поэтому ds^2 принадлежит алгебре многочленов с p коммутирующими (четными) образующими dx_j и q антикоммутирующими (нечетными) образующими $d\xi_j$ над алгеброй функций от x и ξ.

Аналогично тензорным полям, указав закон преобразования, можно определить связность и тензоры ее кривизны и кручения. Существует формула, позволяющая построить связность без кручения при наличии римановой метрики[3].

Не менее важной, чем риманова, является *симплектическая геометрия*. Она связана с замкнутой (и невырожденной — *прим. Д. Л.*) внешней формой

$$\omega = \omega_{ik} da_i \wedge da_k, \quad d\omega = 0. \tag{28}$$

Рассмотрим матрицу (ω^{ik}), где $\omega^{ik} = (-1)^{\alpha(a_i)+\alpha(a_k)}\tilde{\omega}^{ik}$, а $(\tilde{\omega}^{ik})$ — матрица, обратная к (ω_{ik}). С помощью матрицы (ω_{ik}) можно построить супералгебру скобок Пуассона (1), аналогичную обычной. Элементами этой алгебры служат функции на супермногообразии.

Супералгебра скобок Пуассона (1) является супералгеброй Ли, если форма ω удовлетворяет некоторому условию[4], которое автоматически выполнено для невырожденной и замкнутой формы ω. На основе формулы (1) может быть построен аналог классической механики, квантование которой содержит как бозоны, так и фермионы. В настоящее время возникающие здесь вопросы изучены с той же полнотой[1], что и аналогичные вопросы на многообразиях.

С римановой и гамильтоновой структурами супермногообразия связаны плотности по формулам, естественным образом обобщающим соответствующие формулы на многообразиях[2]:

$$\rho = (\mathrm{sdet}(g_{ik}))^{1/2}, \quad \rho = (\mathrm{sdet}(\omega_{ik}))^{1/2}.$$

Обратите внимание на одно существенное различие между дифференциальной геометрией и супердифференциальной геометрией. На многообразиях плотность является полностью антисимметричным тензорным полем, а на супермногообразиях, как видно из формул (20), она вообще не является тензорным полем[3]! Появление величин, которые, подобно плотности, преобразуются не по тензорным законам, связано с особенностями представлений супергруппы $\mathrm{GL}(p|q)$, которая является супераналогом группы $\mathrm{GL}(n)$. Появление нетензорных величин является наиболее захватывающей особенностью супердифференциальной геометрии.

---

[1] В работах [БрЛ1, БрЛ2] сказано как интегрировать (финитные) *псевдодифференциальные* формы; подробности, в частности, описание **проблемы**: как сформулировать «другую половину» теоремы Стокса, с «надмногообразиями коразмерности $0|-1$» и использовать для этого бесконечное число нечетных параметров, см. в книге [СоС1°]. — *Прим. Д. Л.*

[2] Отметим, что метрики, как и внешние формы, могут быть как четными, так и нечетными. Структуры, связанные с нечетными формами, казавшиеся дикостью, если не извращением, в 1976–77 гг., когда они были обнаружены, см. [Лмех], сейчас вошли в активный рабочий аппарат физиков, см. [GPS°]. — *Прим. Д. Л.*

[3] Нетривиальные подробности, а также случай нечетной метрики изложены в работе [LPS*]. Однако одно из понятий римановой геометрии — тензор кривизны, некоторое условие на который называется *уравнением Эйнштейна*, суперизуется совершенно иначе, и структура, связанная с *супергравитацией*, точнее (кто знает, что такое супергравитация?!) с *супер уравнением Эйнштейна*, — *неинтегрируемое распределение на суперпространстве Минковского*. Неголономный аналог тензора кривизны определен и вычислен в ряде примеров в работах [ГрЛе*, L*, BGLS*]. — *Прим. Д. Л.*

[4] На самом деле для задания скобки Пуассона, т. е. *структуры* (*супер*)*алгебры Ли* на (супер)пространстве (супер)функций, нужна не антисимметрическая форма ω, а бивектор(ное поле) B (если форма ω невырожденна, то матрицы формы и бивектора связаны соотношением $B = \omega^{-1}$). На пространстве поливекторных полей, т. е. пространстве сечений внешней алгебры касательного расслоения, имеется *скобка Схоутена*, называемая также *скобкой Бюттен* (Buttin), $\{\cdot,\cdot\}_{B.b.}$, а условие, о котором идет речь (гарантирующее выполнение тождества Якоби для скобки Пуассона), означает, что $\{B, B\}_{B.b.} = 0$. — *Прим. Д. Л.*

[1] Это преувеличение. Например, если речь идет о квантовании, понимаемого как деформация супералгебры Ли «скобок Пуассона или Бюттен», даже если рассматривать лишь полиномиальные или аналитические функции, то ответ получен лишь недавно, см. [ЛЩ°], а если рассматривать неполиномиальные функции, то неизвестно даже гипотетическое описание деформаций («квантований»?), см. работы С. Е. Конштейна, А. Г. Смирнова и И. В. Тютина за последнее десятилетие, например, [KST*]. — *Прим. Д. Л.*

[2] Вторая из этих формул, несмотря на ее естественность, плотности не задает. Подумать почему — не очень легкое, но очень полезное, по-моему, упражнение. Поэтому я не стал перерисовывать ответ из книги [МаКП*], где, впрочем, он приведен в несколько неявном виде. (Указание, касающееся суперсимплектических структур: почитайте описание инвариантных многочленов на ортосимплектической супералгебре Ли в гл. Д6. А также вспомните, что элемент объема не есть никакая степень внешней 2-формы.) — *Прим. Д. Л.*

[3] Т. е. преобразуется по представлению группы $\mathrm{GL}_\Lambda(p|q)$, матричные элементы которого зависят от элементов матрицы $K \in \mathrm{GL}_\Lambda(p|q)$ неполиномиальным образом. (Это неточное заявление: комплексная (скажем) степень детерминанта задает 1-мерное представлению группы $\mathrm{GL}(n)$, матричные элементы которого также зависят от элементов матрицы $K \in \mathrm{GL}(n)$ неполиномиальным образом. Ф. А. Березин имеет в виду то, что даже в таком естественном представлении, как тензорное произведение нескольких экземпляров тавтологического $(p|q)$-мерного представления супергруппы $\mathrm{GL}(p|q)$ и представления, двойственного тавтологическому и с измененной четностью (заметно, как не хватает обозначения для функтора Π смены четности?), реализуются *приводимые* и *неполиномиальные* представления супергруппы $\mathrm{GL}(p|q)$. Вот для этого действительно нет несуперных аналогов над $\mathbb{C}$ (однако ситуация очень похожа на представления алгебр Ли над полями положительной характеристики). Подробнее о том, какие из конечномерных представлений в тензорной алгебре тавтологического модуля вполне приводимы, см. в работе А. Н. Сергеева [Срг*]. — *Прим. Д. Л.*)

5. Супергруппы Ли и супералгебры Ли. *Супергруппу* можно определить как супермногообразие G, для которого все ассоциированные с ним многообразия [1] G_N, где N — число образующих в алгебре Грассмана Λ_N, являются группами Ли, причем групповая операция в локальных грассмановых координатах задается грассмановыми аналитическими функциями [2].

Алгебру Ли группы G_N обозначим $\mathfrak{g}_N$. Грассманова аналитичность групповой операции приводит к тому, что алгебра Ли $\mathfrak{g}_N$ обладает специальной структурой. Чтобы описать ее, введем некоторые понятия, существенные также в дальнейшем.

Пусть $L = L_0 \oplus L_1$ — $\mathbb{Z}/2$-градуированное линейное пространство, e_i и ε_j — базисные элементы соответственно в L_0 и L_1. Рассмотрим линейное пространство L_N, состоящее из линейных комбинаций элементов e_i, ε_j с грассмановыми коэффициентами:

$$x = \sum a_i e_i + \sum \alpha_j \varepsilon_j,$$

где a_i, α_j — соответственно четные и нечетные элементы алгебры Грассмана Λ_N. Пространство L_N назовем *грассмановой оболочкой пространства L*.

Дополнительная структура алгебры $\mathfrak{g}_N$, о которой говорилось выше, состоит в том, что $\mathfrak{g}_N$ является грассмановой оболочкой некоторого $\mathbb{Z}/2$-градуированного линейного пространства $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$. Из того обстоятельства, что грассмановы оболочки $\mathfrak{g}_N$ пространства $\mathfrak{g}$ при всех N являются алгебрами Ли, следует, [3] что пространство $\mathfrak{g}$ само является алгеброй, причем для однородных элементов x, y операция умножения $[x, y]$ в $\mathfrak{g}$ удовлетворяет тождествам

$$\begin{gathered}[x, y] = -(-1)^{\alpha(x)\alpha(y)}[y, x],\\ [x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{\alpha(y)\alpha(x)}[y, [x, z]] = 0.\end{gathered}\tag{29}$$

Алгебра со свойствами (29) называется *супералгеброй Ли* (или, по устаревшей и внутренне противоречивой терминологии, *$\mathbb{Z}/2$-градуированной алгеброй Ли*; эта терминология внутренне противоречива, потому что элементы алгебр Ли, даже градуированных, удовлетворяют тождеству Якоби, не зависящему от градуировок — *прим. Д. Л.*).

---

[1] Определение многообразий M_N см. в п. 2.4. Это обозначение исключительно неудачно, ибо неясно, например, что такое $\mathfrak{g}_N$ при $N = 0$ и 1: четная и нечетная части супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ или ее «грассмановы оболочки» при соответствующих значениях параметра N?! Надеюсь, читатель поймет из контекста, когда $\mathfrak{g}_0$, будучи «грассмановой оболочкой» при $N = 0$, есть $\mathfrak{g}$, а когда $\mathfrak{g}_0$ есть лишь четная часть супералгебры Ли $\mathfrak{g}$: выправить и это во всем тексте займет слишком много времени. Поэтому лучше обозначать элементы из $\mathbb{Z}/2$ символами $\bar{0}$ и $\bar{1}$. — *Прим. Д. Л.*

[2] Этого недостаточно: надо, чтобы структуры групп на многообразиях G_N были согласованы — соответствовали гомоморфизмам супералгебр Грассмана Λ_N. — *Прим. Д. Л.*

[3] Доказательство этого утверждения см. в [ЛПет*, QFS*]. — *Прим. Д. Л.*

Обратно, легко видеть, что если $\mathfrak{g}$ является супералгеброй Ли, то все ее грассмановы оболочки $\mathfrak{g}_N$ являются алгебрами Ли. Отметим, что четное подпространство $\mathfrak{g}_0$ супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли.

Простые супералгебры Ли некоторых классов классифицированы. Предварительные результаты в этом направлении содержатся в работах [PR, SNR1] (а также в работах Дж. П. Хохшильда, Д. Джоковича и И. Капланского, см. [Kapp°] — *прим. Д. Л.*). Полное описание простых конечномерных супералгебр Ли над $\mathbb{C}$ содержится в работе [Кас1]. Описан большой класс бесконечномерных простых супералгебр Ли над $\mathbb{C}$, см. [Кас1] [1].

Подробная теория супералгебр и супергрупп Ли, рассчитанная на применение к теории представлений, развита в [Ber*]. Там, в частности, найден критерий существования инвариантного интеграла на супергруппе, вычислена в общем виде плотность инвариантного интеграла (если она существует), а также построена теория операторов Лапласа—Казимира. При этом обнаружились любопытные особенности, не имеющие аналогов в случае групп Ли. Например, для супергрупп $\mathrm{U}(p|q)$, имеющих в качестве G_0 компактную группу $\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q)$, оказалось, что $\int dg = 0$, т. е. «суперобъем» супергруппы $\mathrm{U}(p|q)$ равен нулю! По-видимому, аналогично обстоит дело всегда, когда G_0 — компактная группа [2], и поэтому можно говорить о полном суперобъеме. Теория операторов Лапласа—Казимира оказалась существенно более сложной, чем в случае простых групп Ли. Это связано, главным образом, с тем, что для супералгебр Ли несправедлива [3] теорема Шевалле, устанавливающая взаимно однозначное соответствие между инвариантами относительно группы Вейля на подалгебре Картана и инвариантами относительно присоединенного представления на всей супералгебре.

5.1. Представления супералгебр Ли. Пусть $L = L_0 \oplus L_1$ — суперпространство, а $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ — супералгебра Ли. *Представлением су-*

---

[1] Этот класс бесконечномерных простых супералгебр Ли классифицирован в работе [LSh°], а классификации других важных в приложениях классов бесконечномерных простых супералгебр Ли см. в работах [GLS1°] и [CCLL*]. Статья же [Лмех] важна не столько контрпримером к одной из теорем из второй части статьи [Кас1] (в этой части все теоремы неверны, но до недавнего времени этой статье не было замены, более того, от этих ошибок она становилась только более интересной, как детектив; в Дополнениях в этой книге и [Srg*] все эти ошибки исправлены), а интерпретацией скобки Схоутена и соответствующей супералгебры Ли как аналога симплектической структуры. На лекциях в 1976/77 годах я говорил: «Не может быть, чтобы Бог благословил классическую механику и скобку Пуассона и проклял другую скобку. Ей должна соответствовать своя механика!» Через пять лет эту механику переоткрыли И. Баталин и Г. Вилковыский, см. [BV*], но их главное достижение в том, что они нашли ей приложения, см. обзор [GPS°]. — *Прим. Д. Л.*

[2] Для супергруппы $\mathrm{OSp}(1|2n)$ это не так. Компактные формы этой супергруппы сохраняют многие свойства групп Ли, см. препринт [Srg2°] и приведенные в нем ссылки. — *Прим. Д. Л.*

[3] А. Н. Сергеев сформулировал супераналог теоремы Шевалле, см. гл. Д6. — *Прим. Д. Л.*

пералгебры Ли $\mathfrak{g}$ в суперпространстве L называется реализация супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ операторами в L. (Годится не любая реализация $T\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(L)$, а лишь уважающая умножение, т. е. такая, что $T([x, y]) = [T(x), T(y)]$ для любых x, $y \in \mathfrak{g}$, где слева — умножение в $\mathfrak{g}$, а справа — суперкоммутатор в $\mathfrak{gl}(L)$. Ниже в книге Ф. А. Березин и мы пишем иногда не $T(x)$, а T_x. — *Прим. Д. Л.*)

Пусть $\mathfrak{g}_N$ и L_N — грассмановы оболочки супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ и суперпространства L соответственно. Исходя из представления T супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ в L легко построить представление (обозначим его тоже T) алгебры Ли $\mathfrak{g}_N$ в L_N, ибо оно задается на базисных элементах $x \in \mathfrak{g}$. Экспоненцируя, мы получаем представление группы G_N в L_N. Полученное представление при $N = \infty$ можно считать представлением супергруппы[1] G.

Отметим некоторые результаты теории представлений супералгебр Ли. Картановская теория старшего веса переносится на суперслучай почти без изменений[2].

5.1.1. Суперхарактеры и операторы Лапласа—Казимира. *Суперхарактером представления* называется его суперслед, являющийся функцией на G_N со значениями в Λ_N:

$$\chi_s(g) = \operatorname{str} T_g = \operatorname{tr} A_{11}(g) - \operatorname{tr} A_{22}(g). \tag{30}$$

Следует обратить внимание на знак «минус» в правой части формулы (30), отличающий суперхарактер от характера. Для конечномерных неприводимых представлений простых алгебр Ли над $\mathbb{C}$ характер определяет представление с точностью до эквивалентности, а суперхарактер не определяет, что, очевидно, связано со знаком «минус»[3] в правой части формулы (30). Отметим связанную с этим любопытную особенность супергруппы Ли $\mathrm{U}(p|q)$. Для нее, как и для групп Ли, можно определить левое регулярное представление $(T_{g_0}f)(g) = f(g_0^{-1}g)$. Пусть $\chi_s(g) = \operatorname{str} T_g$ (тогда $\chi_s(g)$ существует как обобщенная функция). Оказывается, $\chi_s(g) \equiv 0$! (Для компактных групп $\chi_s(g) = \delta(g)\mu(G)$.)

Каждому неприводимому представлению T_g супергруппы Ли соответствует, как и для групп Ли, набор собственных чисел операторов Лапласа—Казимира[1'] Δ_k. Матричные элементы оператора T_g служат собственными функциями операторов Δ_k. В частности, (супер)характер удовлетворяет уравнениям

$$\Delta_k\chi_s = \lambda_k\chi_s. \tag{31}$$

Назовем представление *невырожденным*[2'], если уравнения (31) обладают единственным решением с точностью до постоянного множителя, и вырожденным — в противном случае. Это определение является общим для групп Ли и для супергрупп. Для групп Ли конечномерные представления всегда невырождены, а вырожденные встречаются только среди бесконечномерных представлений. Для супергрупп Ли и среди конечномерных представлений встречаются вырожденные. Это обстоятельство делает теорию конечномерных представлений супергрупп Ли более похожей на теорию бесконечномерных представлений[3'] групп Ли, чем на теорию их конечномерных представлений.

Характеры невырожденных представлений супергрупп Ли при широких предположениях найдены в работах [Кас2, Ber*], а результат, касающийся супергрупп серии $\mathrm{U}(p|q)$, анонсирован в статье [Бун], там же дан набросок общего метода. В этих работах указана также реализация невырожденных представлений как представлений, индуцированных некоторым представлением группы G_0.

В статье [Кас2] другим методом найдены характеры невырожденных представлений всех простых конечномерных супералгебр Ли с матрицей Картана. Вырожденные представления в настоящее время интенсивно изучаются. С ними связано описание нетензорных геометрических объектов на супермногообразиях, о которых говорилось выше. С наибольшей подробностью в настоящее время изучены представления супергрупп $\mathrm{U}(p|q)$

---

[1] Точнее, представлением группы Λ_∞-точек супергруппы Ли G, см. [СоС2*]. — *Прим. Д. Л.*

[2] Это верно лишь для супералгебр Ли $\mathfrak{g}$, подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ которых не содержит нечетных элементов и представление алгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ диагонализируемо. Но даже для таких супералгебр важный параметр — четность вакуумного (старшего или младшего) вектора — долго оставался неоцененным. Для супералгебр же, подалгебра Картана которых содержит нечетные элементы, суперпространство вакуумных векторов, вообще говоря, многомерно, и описание их неприводимых представлений получено (для некоторых таких супералгебр Ли, как простых, так и «родственниц» простых) совсем недавно, см., например, [ЛЛ*] и приведенные там ссылки; там же рассмотрены простые супералгебры, подалгебры Картана которых хотя и четны, но не диагонализируемы в присоединенном представлении. — *Прим. Д. Л.*

[3] Знак «минус» еще более зловреден, чем здесь написано: из-за него характер иногда НЕ определяет даже неприводимое представление с точностью до эквивалентности, если простая супергруппа Ли (а здесь подразумеваются только они и их центральные расширения) отлична от $\mathrm{OSp}(1|2n)$. Вообще представления супергрупп и супералгебр, даже конечномерные над $\mathbb{C}$, похожи на представления простых алгебр Ли над полями конечной характеристики или над $\mathbb{C}$, но бесконечномерные, т. е. операторы Лапласа—Казимира не разделяют некоторые неприводимые представления, да и полной приводимости, как правило, нет. — *Прим. Д. Л.*

[1'] Индекс k, нумерующий независимые операторы Казимира Δ_k, пробегает конечное множество для простых алгебр Ли и супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(1|2n)$; для остальных простых конечномерных супералгебр Ли множество алгебраически независимых элементов Казимира — образующих центра $Z(U(\mathfrak{g}))$ универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ — бесконечно, если $\mathfrak{g}$ имеет матрицу Картана, но может быть пусто (если центр состоит лишь из констант, см. гл. Д6); адекватную замену центру $Z(U(\mathfrak{g}))$ в таком случае предложила В. Серганова [Se2*]. — *Прим. Д. Л.*

[2'] Сейчас принят удачный термин *типическое* представление, предложенный В. Кацем. А вырожденные представления называются соответственно *атипическими*. — *Прим. Д. Л.*

[3'] А также на теорию представлений алгебр Ли над полями положительной характеристики и, как нас научил ~~Раши~~ В. Г. Дринфельд, на представления квантовых групп. — *Прим. Д. Л.*

и $\mathrm{OSp}(n|2m)$. Первая из них является суПераналогом общей унитарной группы, вторая состоит из обобщенных канонических преобразований на $(2m|n)$-мерном суперпространстве, перемешивающих ферми- и бозе-операторы рождения и уничтожения. Первые систематические результаты, касающиеся представлений суперапгебр Ли, получены в работе [БЛ*], где описаны все представления супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(1|2)$ — ближайшего суПераналога алгебры Ли $\mathfrak{gl}(2)$, и в работе [SNR2], где определено обобщение на суперслучай понятия унитарного представления [1].

5.2. Основные определения. Супералгебру Ли назовем:

простой, если она не содержит идеалов, отличных от нее самой и от нуля (а ее размерность > 1, — *прим. Д. Л.*);

коммутативной, если $[x, y] = 0$ для любых $x, y \in \mathfrak{g}$;

нильпотентной, если существует такое целое $N > 0$, что $(\mathrm{ad}_x)^N(y) = 0$ для любых $x, y \in \mathfrak{g}$;

разрешимой, если в ней есть последовательность идеалов $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_N = 0$, такая что факторалгебры $\mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1}$ коммутативны;

полупростой, если в ней есть цепочка идеалов $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_N = 0$, такая что факторалгебры $\mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1}$ просты.

Эти определения, кроме последнего, копируют определения, хорошо известные из теории групп Ли. Что касается определения полупростоты, то здесь возможно несколько вариантов. Приведенное определение кажется наиболее естественным [2].

Отметим некоторые простейшие следствия определения супералгебр Ли.

1) Подпространство ${}^0\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли.

---

[1] Вообще-то к 1980 г. неприводимые представления с вакуумным вектором (старшего или младшего веса) супералгебр Ли $\mathfrak{gl}(1|q)$ и $\mathfrak{osp}(2|2q)$ были уже полностью описаны; позже И. Пенков и В. Серганова вывели формулу для характеров любых конечномерных неприводимых представлений комплексных супералгебр Ли с неразложимой матрицей Картана (а также супералгебр Ли серий $\mathfrak{spe}$, $\mathfrak{psq}$ и их непростых *«родственниц»* — (супер)алгебр дифференцирований и/или центральных расширений), а в [БЛ*] это проделано для некоторых супералгебр Ли векторных полей с полиномиальными коэффициентами, см. обзор позднейших результатов в [GLS2*]. Доказательство формулы для характеров см. в работах [Br1*, Br2*], а вычисление детерминанта Шаповалова — в работе [ЛЛ*]. Неразложимые конечномерные представления супералгебр Ли $\mathfrak{gl}(1|q)$ и $\mathfrak{osp}(2|2q)$ описаны в работе [Lin*]; для других простых супералгебр Ли, кроме $\mathfrak{osp}(1|2q)$, задача описания всех неразложимых представлений, даже конечномерных, дикая.

Вопрос же о том, какие представления считать унитарными, сложен. Ответы предлагаются в работах [QFS*] и [CoC1°]. Но самое интересное — «какова связь унитарности (особенно с нечетным скалярным произведением) с положительностью энергии и вероятностью, как в классических учебниках по физике?» — открытая до сих пор **проблема**. — *Прим. Д. Л.*

[2] Более осмысленно, однако, стандартное определение полупростой супералгебры Ли как супералгебры Ли с нулевым радикалом, см. п. 4 из гл. Д1. Самое главное, однако, здесь то, что хотя (полу)простые (супер)алгебры Ли, несомненно, очень важны, в приложениях часто не менее важны их «родственницы», см. [Кац2°, LSh°, BGLS*]. — *Прим. Д. Л.*

2) Автоморфизм четности линейного пространства $\mathfrak{g}$ является также автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$ (т. е. $[\mathbf{A}x, \mathbf{A}y] = \mathbf{A}[x, y]$).

3) Пусть $\mathfrak{g} = {}^0\mathfrak{g} \oplus {}^1\mathfrak{g}$ — вещественная супералгебра Ли. Символом $\tilde{\mathfrak{g}} = {}^0\mathfrak{g} \oplus i\,{}^1\mathfrak{g}$ обозначим множество формальных линейных комбинаций вида $x + iy$, где $x \in {}^0\mathfrak{g}$, $y \in {}^1\mathfrak{g}$, а $i = \sqrt{-1}$. В $\tilde{\mathfrak{g}}$ введем естественное умножение:

$$[x_1 + iy_1, x_2 + iy_2] = [x_1, x_2] - [y_1, y_2] + i([x_1, y_2] + [y_1, x_2]). \tag{32}$$

Легко видеть, что $\tilde{\mathfrak{g}}$ также является вещественной супералгеброй Ли, причем комплексные оболочки супералгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\tilde{\mathfrak{g}}$ совпадают. Супералгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ мы назовем *двойственной по Картану* исходной супералгебре Ли $\mathfrak{g}$, ввиду того что ее конструкция является копией конструкции Картана для двойственных вещественных алгебр Ли.

4) Пусть $\mathfrak{z}$ — вещественная супералгебра Ли. Множество формальных линейных комбинаций вида $x + iy$, где $x, y \in \mathfrak{z}$, образует комплексную супералгебру Ли. Полученную алгебру назовем *комплексной оболочкой* супералгебры Ли $\mathfrak{z}$. Комплексную оболочку вещественной супералгебры Ли $\mathfrak{z}$ обозначим $\mathfrak{z}^{\mathbb{C}}$. Если комплексная супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ является комплексной оболочкой вещественной супералгебры Ли $\mathfrak{z}$, то алгебра $\mathfrak{z}$ называется *вещественной формой* супералгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Вообще следует отметить, что существует далеко идущая аналогия между картановской теорией симметрических пространств и теорией супералгебр Ли. При этом ${}^0\mathfrak{g}$ играет роль алгебры Ли стационарной подгруппы симметрического пространства, ${}^1\mathfrak{g}$ — роль пространства трансвенций, а автоморфизм четности — роль инволютивного автоморфизма, выделяющего стационарную подалгебру.

Пусть $T\colon \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ — линейный оператор, такой что

$$T(x + y) = x + iy, \quad x \in {}^0\mathfrak{g}, \quad y \in {}^1\mathfrak{g}. \tag{33}$$

Легко видеть, что для однородных $x, y \in \mathfrak{g}$ выполняется равенство [1]

$$[T(x), T(y)] = (-1)^{\alpha(x)\alpha(y)}T([x, y]).$$

5.3. Связь с ассоциативными алгебрами. Супералгебры Ли связаны с $\mathbb{Z}/2$-градуированными ассоциативными алгебрами, подобно тому как алгебры Ли связаны с ассоциативными алгебрами: операция

$$[x, y] = xy - (-1)^{\alpha(x)\alpha(y)}yx \quad \text{для любых } x, y \in \mathfrak{A} \tag{34}$$

превращает ассоциативную супералгебру $\mathfrak{A}$ в супералгебру Ли, которую мы обозначим $\mathfrak{A}_{SL}$.

---

[1] Эта формула может навести на мысль, что бывают неизоморфные двойственные формы. Напомню, что *изоморфизмом алгебр* называется обратимый гомоморфизм, а приведенная ниже формула показывает, что T — хотя и обратимое линейное преобразование, но не гомоморфизм. Тем удивительнее, что двойственные по Картану супералгебры (как лиевы, так и другие) всегда изоморфны, см. [CoC1°]. — *Прим. Д. Л.*

5.4. Супердифференцирования. Пусть $\mathfrak{A}$ есть $\mathbb{Z}/2$-градуированная супералгебра (ассоциативная или лиева с умножением, записываемым $x, y \mapsto xy$). Оператор $A \in \mathrm{End}(\mathfrak{A})$ называется *супердифференцированием* супералгебры $\mathfrak{A}$, если для любых $x, y \in \mathfrak{A}$ выполняется равенство (напомним, что в подобных формулах прилагательное «однородных» подразумевается)

$$A(xy) = (Ax)y + (-1)^{\alpha(A)\alpha(x)} xAy. \tag{35}$$

Пространство $D(\mathfrak{A})$ всех супердифференцирований алгебры $\mathfrak{A}$ — линейное подпространство в $\mathrm{End}(\mathfrak{A})$, замкнутое относительно суперкоммутирования.

Дифференцирования и автоморфизмы. Если $A(t)$ — однопараметрическая группа автоморфизмов ассоциативной алгебры, то

$$A(t)(xy) = (A(t)x)(A(t)y).$$

Отсюда, дифференцируя по t и полагая затем $t = 0$, получаем, что

$$A'(xy) = (A'x)y + xA'y, \quad \text{где } A' = A'(0).$$

Пусть N — некоторая группа и G — группа (не обязательно всех) автоморфизмов группы N. Группа $G_1 = N \ltimes G$ называется *полупрямым произведением* групп G и N, если ее элементами являются пары (x, g) где $x \in N$, а $g \in G$, а умножение задается формулой

$$(x_1, g_1)(x_2, g_2) = (x_1 \cdot g_1(x_2), g_1 g_2).$$

Если G и N — группы Ли, то группа G является, очевидно, группой автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{n}$ группы N. Действие элемента g на $x \in \mathfrak{n}$ определяется формулой $g \cdot x = \dfrac{d}{dt} g \cdot x(t)\Big|_{t=0}$, где $x \in \mathfrak{n}$ и $x(t) = \exp(tx)$ — соответствующая однопараметрическая подгруппа. Реализация группы G как группы автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{n}$ влечет за собой реализацию ее как алгебры Ли дифференцирований алгебры Ли $\mathfrak{n}$.

Группа $G_1 = N \ltimes G$ также является в этом случае группой Ли. Ее алгебра Ли $\mathfrak{g}_1$ устроена следующим образом: как линейное пространство $\mathfrak{g}_1$ является прямой суммой пространств $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{n}$. Коммутатор в $\mathfrak{g}_1$ определяется формулой

$$[a + x, b + y]_1 = [a, b] + a(y) - b(x) + [x, y], \tag{36}$$

где $a, b \in \mathfrak{g}$, $x, y \in \mathfrak{n}$, $[a, b] \in \mathfrak{g}$ и $[x, y] \in \mathfrak{n}$, а $a(y)$ и $b(x)$ — результаты действий дифференцирований a и b на элементы y и x. Очевидно, что $\mathfrak{n}$ является идеалом в $\mathfrak{g}_1$, а $\mathfrak{g} \mathbin{\ni\!\!\!\!+} \mathfrak{g}_1/\mathfrak{n}$. Определенная таким образом алгебра Ли $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} \mathbin{\ni\!\!\!\!+} \mathfrak{n}$ называется *полупрямой суммой* алгебр Ли $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{g}$. Полупрямые произведения групп и полупрямые суммы алгебр Ли часто встречаются в математическом обиходе физиков. Так, например, группа Пуанкаре является полупрямым произведением группы трансляций и группы Лоренца.

Суперизация конструкций этого пункта непосредственная (иногда с помощью нечетных параметров, см. [CoC1°] — *прим. Д. Л.*).

5.5. Супералгебры Ли с грассмановой структурой. Пусть $\mathfrak{g}$ — супералгебра Ли и Λ — некоторая алгебра Грассмана. Супералгебру Ли $\mathfrak{g}$ назовем *супералгеброй Ли с грассмановой структурой*, если она является левым Λ-модулем [1], а умножение на элементы из Λ связано с коммутатором в $\mathfrak{g}$ следующим способом [2]: при любых $a, b \in \Lambda$, и $x, y \in \mathfrak{g}$ выполняется равенство

$$[ax, by] = (-1)^{\alpha(x)\alpha(b)} ab[x, y], \tag{37}$$

В этом случае супералгебру Ли $\mathfrak{g}$ назовем *супералгеброй Ли с грассмановой структурой*. Алгебру Ли $\mathfrak{z}$ назовем *алгеброй Ли с грассмановой структурой*, если она является четной частью супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ с грассмановой структурой: $\mathfrak{z} = {}^0\mathfrak{g}$; алгебру Ли $\mathfrak{z}$ назовем *алгеброй Ли* супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{z}$ является алгеброй Ли с грассмановой структурой, то группу Ли $Z = \exp \mathfrak{z}$ назовем *группой Ли с грассмановой структурой*.

Алгебры Ли с грассмановой структурой принадлежат к числу основных объектов суперматематики, которые находят применение в современной физике, если они могут быть получены из супералгебр Ли с помощью грассмановых оболочек. Эти алгебры Ли образуют часть всего множества алгебр Ли с грассмановой структурой. Супералгебры, четной частью которых они являются, исчерпывают класс супералгебр Ли с грассмановой структурой, являющихся свободными модулями. Пример алгебры Ли с грассмановой структурой, не относящийся к этому классу, дан ниже.

5.6. Грассманова оболочка супералгебры Ли. Построим с помощью алгебры Грассмана Λ грассманову оболочку супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ и введем в ней умножение, положив

$$[ax, by] = (-1)^{\alpha(x)\alpha(b)} ab[x, y], \tag{38}$$

где $x, y \in \mathfrak{g}$, $a, b \in \Lambda$, а скобка в правых частях формулы (38) означает коммутатор в $\mathfrak{g}$. Легко видеть, что коммутатор (38) превращает грассманову оболочку алгебры $\mathfrak{g}$ в супералгебру Ли с грассмановой структурой. Пусть $\widehat{\mathfrak{g}}(\Lambda)$ — полученная таким путем супералгебра Ли, а $\mathfrak{g}(\Lambda)$ — ее четная часть. Очевидно, что $\mathfrak{g}(\Lambda)$ является алгеброй Ли с грассмановой структурой. Для упрощения речи, а также с целью согласования терминологии с терминологией, принятой в случае ассоциативных алгебр, мы назовем алгебру Ли $\mathfrak{g}(\Lambda)$ грассмановой оболочкой супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. Переход

---

[1] То есть, если определено умножение слева элементов супералгебры $\mathfrak{g}$ на элементы алгебры Λ.

[2] Казалось бы, умножение элементов из $\mathfrak{g}$ на элементы из Λ можно определить и игнорируя Правило Знаков. Но это приведет к противоречиям, см. книгу [QFS*]. — *Прим. Д. Л.*

к грассмановым оболочкам сохраняет основные взаимоотношения между исходными супералгебрами Ли: если $\mathfrak{g}_1$ является подалгеброй или идеалом в $\mathfrak{g}_2$, то же самое справедливо относительно их грассмановых оболочек одного и того же рода и т. п.

Остановимся более подробно на случае, когда супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ является супералгеброй супердифференцирований лиевой или ассоциативной супералгебры $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{A}(\Lambda)$ и $\mathfrak{g}(\Lambda)$ — грассмановы оболочки алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{g}$. Положим

$$aD(bx) = (-1)^{\alpha(D)\alpha(b)} abD(x) \quad \text{для любых } a,\ b \in \Lambda,\ \ x \in \Lambda,\ \ D \in \mathfrak{g}. \tag{39}$$

Легко видеть, что в результате мы получим реализацию алгебры Ли $\mathfrak{g}(\Lambda)$ как алгебры дифференцирований алгебры $\mathfrak{A}(\Lambda)$.

5.7. Три основных способа описания супералгебр Ли и их грассмановых оболочек. Первый способ: абстрактное описание. Супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ задается набором структурных констант c_{ij}^k в некотором базисе.

Второй способ: супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ реализуется как матричная алгебра. Другими словами, если супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(p|q)$, то ее грассманова оболочка состоит из аналогичных матриц, разница состоит лишь в том, что в первом случае матричные элементы блоков A, B, C, D являются числами, во втором случае — элементами алгебры Грассмана Λ, четными в случае блоков A, D и нечетными в случае блоков B, C.

Третий способ: супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ реализуется как алгебра дифференциальных операторов 1-го порядка (или всех порядков — *прим. Д. Л.*):

$$(Xf)(z) = \sum X^i(z)\frac{\partial f}{\partial z^i}(z), \qquad \text{где } f(z),\ X^i(z) \in \Lambda_{p,q}(U), \tag{40}$$

а z^i — однородные образующие в $\Lambda_{p,q}(U)$. На множестве операторов вида (40) вводится $\mathbb{Z}/2$-градуировка: однородными называются такие операторы, у которых однородны коэффициентные функции X^i.

5.8. Примеры супералгебр Ли, интересные для общей теории или физических приложений. Пусть $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(p|q)$ — ассоциативная и $\mathbb{Z}/2$-градуированная алгебра линейных операторов в $\mathbb{K}^{p,q}$. Наряду с алгеброй $\mathrm{End}(p|q)$ мы будем рассматривать изоморфную ей алгебру $\mathrm{Mat}(p|q)$, состоящую из матриц операторов $A \in \mathrm{End}(p|q)$ в стандартном базисе. Из них можно построить супералгебру Ли по общей формуле (34). Полученная супералгебра Ли называется **общей линейной супералгеброй** и обозначается $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(p|q) := \mathfrak{gl}(\mathbb{K}^{p,q})$. **Специальная** (старое название — унимодулярная) **линейная супералгебра Ли** $\mathfrak{sl}(p|q)$ состоит из операторов, удовлетворяющих условию $\mathrm{str}\, A = 0$.

Унитарная супералгебра Ли $\mathfrak{u}(p|q)$. Пусть $*$ обозначает эрмитово сопряжение. Тогда $\mathfrak{u}(p|q)$ состоит из матриц $U \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(p|q)$ вида

$$U = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} + e^{-\pi i/4}\begin{pmatrix} 0 & B \\ -B^* & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = -A^*, \qquad D = -D^*, \tag{41}$$

Очевидно, что $\mathfrak{u}(p|q)$ является вещественной формой супералгебры Ли $\mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(p|q)$. Подсупералгебра Ли $\mathfrak{su}(p|q)$ в $\mathfrak{u}(p|q)$ состоит из матриц с суперследом 0.

Ортосимплектическая супералгебра Ли $\mathfrak{osp}_{\mathbb{K}}(q|2p)$. Эта супералгебра Ли состоит из матриц $\mathcal{A} \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(q|2p)$, таких что

$$\mathcal{A}\mathcal{J} + \mathcal{J}\mathcal{A}^T = 0, \quad \text{где } \mathcal{J} = \begin{pmatrix} J_{2p} & 0 \\ 0 & 1_q \end{pmatrix},\ J_{2p} = \begin{pmatrix} 0 & 1_p \\ -1_p & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A' & -C' \\ B' & D' \end{pmatrix} \tag{42}$$

и где ^{T} — знак супертранспонирования[1], а $'$ — знак транспонирования. Решив уравнение, получаем

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ C & -A' & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & v \\ v' & -\mu' & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{где } B = B',\ \ C = C',\ \ F = -F'. \tag{43}$$

Супералгебра Ли $\mathfrak{osp}_{\mathbb{R}}(q|2p)$ является, очевидно, вещественной формой супералгебры Ли $\mathfrak{osp}_{\mathbb{C}}(q|2p)$ и обе тесно связаны с линейными суперканоническими преобразованиями. Преобразуем матрицы $\mathcal{A} \in \mathfrak{osp}_{\mathbb{R}}(q|2p)$ к виду, удобному для установления этой связи. Положив $\mathcal{B} = L_1\mathcal{A}L_1^{-1}$, где $L_1 = \begin{pmatrix} e^{-\pi i/4}I_{2p} & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$. Очевидно, что

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ C & -A' & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} + e^{-\pi i/4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \\ 0 & -0 & v \\ iv' & -i\mu' & 0 \end{pmatrix}, \tag{44}$$

где A, B, C, F, μ, v те же, что в формуле (43). Легко проверить, что

$$\mathcal{B}\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_1\mathcal{B}^T = 0, \qquad \text{где } \ \mathcal{J}_1 = L_1\mathcal{J}L_1^{-1} = \begin{pmatrix} -iJ_{2p} & 0 \\ 0 & 1_q \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Соотношение (45) является инфинитезимальным аналогом соотношения, характерного для суперканонических преобразований вещественных образующих $\widehat{p}_i$, $\widehat{q}_j$, $\widehat{\gamma}_k$ алгебры $\mathfrak{A}(\Lambda)$.

Укажем инфинитезимальный аналог соотношений, определяющих суперканонические преобразования образующих $\widehat{a}_{k,B}$, $\widehat{a}^*_{k,B}$, $\widehat{a}_{k,F}$, $\widehat{a}^*_{k,F}$ алгебры $\mathfrak{A}(\Lambda)$, которые являются аналогами бозе- и ферми-операторов рождения

---

[1] Мотивировки этих определений (соответствующий переход от матрицы оператора к матрице сопряженного оператора в левом сопряженном базисе и определение таких базисов) см. в книге [CoC1°]. В частности, в рукописи знак минус в супертранспонированной матрице появлялся то у B, то у C. Последовательный выбор описан в [CoC1°]. — *Прим. Д. Л.*

и уничтожения (при нечетном q к образующим $\widehat{a}_{kB}, \ldots, \widehat{a}^*_{kF}$ добавляется γ_q). Образующие $\widehat{p}_i$, $\widehat{q}_j$, $\widehat{\gamma}_k$ связаны с образующими $\widehat{a}_{k,B}, \ldots, \widehat{a}^*_{kF}$ (и γ_q при нечетном q) матрицей $L_2 = \begin{pmatrix} U_{p/2} & 0 \\ 0 & U_{q/2} \end{pmatrix}$ при четном q и матрицей $L_3 = \begin{pmatrix} U_{p/2} & 0 & 0 \\ 0 & U_{(q-1)/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ при нечетном q, где $U_s = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1_s & 1_s \\ i1_s & -i1_s \end{pmatrix}$.

В соответствии с этим инфинитезимальными супераналогами линейных канонических преобразований операторов рождения и уничтожения являются матрицы вида

$$\mathcal{Y} = \begin{cases} L_2 \mathcal{B} L_2^{-1} & \text{при четном } q, \\ L_3 \mathcal{B} L_3^{-1} & \text{при нечетном } q. \end{cases}$$

Из этого описания следует, что матрицы $\mathcal{Y}$ удовлетворяют условию

$$\mathcal{Y}\mathcal{J} + \mathcal{J}\mathcal{Y}^T = 0, \quad \text{где } \mathcal{J} = L\mathcal{J}_1 L^T = \begin{pmatrix} J_{2p} & 0 \\ 0 & S_q \end{pmatrix}, \text{ а } L = \begin{cases} L_2 & \text{при четном } q, \\ L_3 & \text{при нечетном } q, \end{cases} \tag{46}$$

так что матрицы $\mathcal{Y}$ имеют следующий явный вид:

$$\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} + e^{-\pi i/4} \begin{pmatrix} 0 & Q \\ -S_q Q' J_{2p} & 0 \end{pmatrix}, \tag{47}$$

где $M = \begin{pmatrix} U_1 & V_1 \\ \bar{V}_1 & \bar{U}_1 \end{pmatrix}$, а U_i, V_i — квадратные матрицы порядков $\dfrac{p}{2}$ и $\left[\dfrac{q}{2}\right]$ соответственно; ниже α, β — прямоугольные $\left(p \times \left[\dfrac{q}{2}\right]\right)$-матрицы, C и σ — одностолбцовые матрицы:

$$\begin{aligned} &S_q = \begin{pmatrix} 0 & 1_k \\ 1_k & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} U_2 & V_2 \\ \bar{V}_2 & \bar{U}_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{при } q = 2k, \\ &S_q = \begin{pmatrix} 0 & 1_k & 0 \\ 1_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} U_2 & V_2 & C \\ \bar{V}_2 & \bar{U}_2 & \bar{C} \\ -\bar{C}' & -C' & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \sigma \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} & \bar{\sigma} \end{pmatrix} \quad \text{при } q = 2k+1. \end{aligned} \tag{48}$$

Периплектическая[1] **супералгебра Ли $\mathfrak{pe}_{\mathbb{K}}(n)$.** Эта супералгебра Ли состоит из матриц $\mathcal{A} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(n|n)$, удовлетворяющих условию

$$(-1)^{p(\mathcal{A})} \mathcal{A} J_{2n} + J_{2n} \mathcal{A}^T = 0, \quad \text{т. е. } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A' \end{pmatrix}, \quad \text{где } B = -B', \quad C = C'.$$

---

[1] Андре Вейль предложил мне назвать эту супералгебру Ли *периплектической* по аналогии со словом *симплектическая*: «Вы, конечно, понимаете, что эти слова означают на древнегреческом». Отметим, что четная часть ортосимплектической супералгебры Ли состоит из суммы ортогональной и симплектической, а четная часть периплектической есть $\mathfrak{gl}(n)$, поэтому называть ее «ортосимплектической» с какими бы то ни было описанием (например, «2-го рода») нет резона. — *Прим. Д. Л.*

Лоренцева суперконформная алгебра $\mathfrak{u}(2, 2|N)$. Эта супералгебра Ли состоит из комплексных матриц вида

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ C & -A^* & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} + e^{\pi i/4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ -i\beta^* & i\alpha^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } B = B^*, \quad C = C^*, \quad D = -D^*, \tag{49}$$

причем A, B, C — матрицы 2×2, а D — матрица $n \times n$. **Супералгебра Гольфанда—Лихтмана ГЛ(N)** — это подсупералгебра в $\mathfrak{u}(2, 2|N)$, состоящая из матриц вида (49), где $\operatorname{tr} A = 0$, $\beta = 0$, $C = 0$. Четная часть алгебры ГЛ(N) является прямой суммой алгебры Ли группы Пуанкаре и $\mathfrak{u}(N)$.

Евклидова суперконформная супералгебра Ли $\mathfrak{eu}(4|2N)$. Она состоит из матриц вида

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ C & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \gamma & \delta & 0 \end{pmatrix}, \tag{50}$$

где A, B, C, D — матрицы 2×2, имеющие специальный вид $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{C}$, а $(2 \times 2n)$-матрицы α, β, γ, δ составлены из (2×2)-блоков того же вида. Так как матрицы указанного специального вида образуют алгебру кватернионов, то можно сказать, что супералгебра Ли $\mathfrak{eu}(4|2N)$ состоит из кватернионных матриц. Обозначим символом $\mathbb{H}^{p,q}$ кватернионное суперпространство. Элементами суперпространства $\mathbb{H}^{p|q}$ служат вектор-столбцы $(x_1 \ldots x_{p+q})'$, где $x_i \in \mathbb{H}$ — кватернионы. Обозначим $\mathbb{Z}/2$-градуированную алгебру линейных операторов в $\mathbb{H}^{p|q}$ символом $\mathrm{End}_{\mathbb{H}}(p|q)$, а соответствующую супералгебру Ли — $\mathfrak{gl}_{\mathbb{H}}(p|q)$. В этих обозначениях $\mathfrak{eu}(4|2N) = \mathfrak{gl}_{\mathbb{H}}(2|N)$.

Супералгебра Ли $\mathfrak{q}(n)$. Эта супералгебра Ли состоит из матриц $\mathcal{A} \in \mathfrak{gl}(n|n)$, имеющих специальный вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix}. \tag{51}$$

В супералгебре Ли $\mathfrak{q}(n)$ есть идеал $\mathfrak{sq}(n)$, состоящий из матриц вида (51), удовлетворяющих дополнительному условию $\operatorname{tr} B = 0$. Супералгебре $\mathfrak{sq}(n)$ отвечает подгруппа $\mathrm{SQ}_\Lambda(n) \subset \mathrm{GQ}_\Lambda(n)$, состоящая из элементов $\mathrm{GQ}_\Lambda(n)$ с *супердетерминантом 2-го рода*, см. формулу (53) в гл. 1, равным 1. В супералгебре Ли $\mathfrak{sq}(n)$ есть идеал, состоящий из скалярных матриц. В статье [CNS] фактор алгебры $\mathfrak{sq}(n)$ по этому идеалу называется ($\mathfrak{f}$-d)-*супералгеброй Гелл-Манна, Митчелла и Радикати*[1]. Ее

---

[1] Это название длинновато и не прижилось. Упоминание Гелл-Манна и др. намекает на возможные применения супералгебр серий $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{sq}$ и $\mathfrak{psq}$ в физике. А в книге [CoC1°] супералгебра Ли $\mathfrak{q}(n)$ изучена как «странный» аналог алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n)$ и как супералгебра Ли, сохраняющая аналог комплексной структуры, заданной (над полем любой характеристики) нечетным оператором. См. также [Kl*, Lan*, Br1*, Br2*]. — *Прим. Д. Л.*

обозначают $\mathfrak{psq}(n)$. Супералгебру Ли $\mathfrak{psq}(n)$ можно реализовать матрицами вида (51) с дополнительными условиями $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 0$ и суперкоммутатором:

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}]_{\text{new}} = [\mathcal{A}, \mathcal{B}] - \frac{1}{2n}\operatorname{tr}[\mathcal{A}, \mathcal{B}] \cdot 1_{2n}. \tag{52}$$

6. Заключение. В настоящее время, когда суперматематика в основных чертах уже построена и освоена 1), следует еще раз задаться вопросом о том, какую роль она призвана сыграть в физике.

Сейчас суперсимметрии являются по существу вспомогательным аппаратом для получения тождеств Уорда в сложных полевых теориях. Однако если отнестись к ним более серьезно, то они, как мне кажется, содержат намек на существование фундаментальной симметрии между координатами и полями 2). В самом деле, преобразования координат общего вида на супермногообразиях, характерные для суперсимметричных теорий поля, в особенности для супергравитации, в значительной степени лишают координаты их привычного смысла: вместо координат x_i в этих формулах участвуют четные образующие алгебр $\mathfrak{A}_{p,q}(U)$, которые имеют вид

$$x_i = a_i + \sum f_i^{i_1,\ldots,i_{2k}}(a)\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_{2k}}, \tag{53}$$

где a_i — координаты в U, ξ_i — образующие алгебры Грассмана Λ_q. Образующие ξ_i принципиально не наблюдаемы, так как в силу нильпотентности они могут принимать лишь единственное численное значение $\xi_i = 0$.

Таким образом, величины, преобразующиеся по формулам (53), — это странные гибриды наблюдаемых величин (координат) и ненаблюдаемых. Эта странность сразу же исчезает, если считать ξ_i классическими аналогами фермиевских операторов: после квантования правая часть равенства (53) превращается в оператор, который при разумных условиях самосопряжен. При таком подходе формулы (53) показывают, что координаты и поля являются объектами общей (сходной) природы.

В подтверждение высказанной точки зрения я хочу обратить внимание на существование симметрии между координатами и полями в классической максвелловской электродинамике (никакой суперсимметрии!). В самом деле, потенциал $A = \sum A_\mu dx_\mu$ определен с точностью до полного дифференциала. Положим $\Phi = \sum A_\mu x_\mu$. Имеем

$$0 \sim d\Phi = \sum dA_\mu \cdot x_\mu + \sum A_\mu\, dx_\mu. \tag{54}$$

Правая часть формулы (54), очевидно, симметрична относительно замены $A_\mu \longleftrightarrow x_\mu$.

---

1) В трудах семинара «SoS» я постарался показать, что это построение в значительной степени неполное, и перечислил множество открытых проблем, задач и задачек. — *Прим. Д. Л.*

2) Эта идея по существу содержится уже в работе [ВлА].

1. Линейная алгебра в суперпространствах

1. Определение и простейшие свойства алгебр Грассмана. Ассоциативная алгебра с единицей называется *алгеброй Грассмана*, если существует система ее образующих, состоящая из элементов ξ_i, таких что

$$\xi_i\xi_k + \xi_k\xi_i = 0 \quad \text{для любых } i,\ k; \text{ в частности } \xi_i^2 = 0, \tag{1}$$

и любое другое соотношение между элементами ξ_i — является следствием соотношений (1) (т. е. принадлежит идеалу тензорной алгебры с образующими ξ_i, порожденному левыми частями условий (1) — *прим. А. К.*).

Образующие ξ_i с этими свойствами назовем *каноническими*. Грассманову алгебру обозначим буквой Λ. Если нам будет важно указать *систему канонических образующих* алгебры Λ, мы будем пользоваться обозначением $\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_q)$, а если важно знать лишь их число — обозначением Λ_q. Из условий (1) следует, что любой элемент алгебры $\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ является линейной комбинацией одночленов $\xi_{i_1}\ldots\xi_{ir}$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$, и единичного элемента. То обстоятельство, что все соотношения между элементами ξ_i следуют из соотношений (1), означает линейную независимость этих одночленов 1). Следовательно, в совокупности с единичным элементом они образуют базис в Λ_q как в линейном пространстве. Так как их число равно числу непустых подмножеств множества из q элементов, $\dim \Lambda_q = 2^q$. Отсюда следует, что любая система канонических образующих Λ_q, состоит из q элементов.

Таким образом, каждый элемент из $\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ записывается в виде

$$f = f(\xi) = \sum_{k\geqslant 0}\ \sum_{\mathbf{i}=(i_1,\ldots,i_k)} f_{\mathbf{i}}\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k}. \tag{2}$$

Слагаемое, отвечающее $k = 0$, пропорционально единице. Запись $f = f(\xi)$ призвана подчеркнуть, что элемент f выражен в виде функции от образующих ξ_i. В дальнейшем мы увидим, что полиномы $f(\xi)$ обладают многими формальными свойствами обычных функций. Поэтому мы будем их иногда называть *функциями от антикоммутирующих переменных*.

Запись элементов из $\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ в виде (2), вообще говоря, не однозначна. Однако она становится однозначной, если наложить на коэффициенты $f_{i_1,\ldots,i_k}$ дополнительные условия. Например, можно потребовать, чтобы выполнялось равенство $f_{i_1,\ldots,i_k} = 0$, если не выполнено соотношение $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, или чтобы коэффициенты $f_{i_1,\ldots,i_k}$ были кососимметричными по индексам $i_1, \ldots, i_k$ (т. е. меняли знак при перестановке любых

---

1) Доказательство см. например, в [ВдВ*], гл. 13, § 93. — *Прим. А. К.*

двух индексов). Второе условие более удобно[1], и в дальнейшем, если элемент f записан в виде (2) и противное не оговорено, всегда считается, что коэффициенты $f_{i_1,\dots,i_k}$ кососимметричны.

Положив $\deg \xi_i = 1$ при всех i, получаем $\mathbb{Z}$-градуировку в алгебре Λ. Если в записи (2) отличны от нуля только коэффициенты с $k = n$, элемент f назовем *однородным степени n относительно* deg. Очевидно, что свойство элемента f быть однородным относительно deg зависит от выбора системы образующих.

С этой $\mathbb{Z}$-градуировкой связана фильтрация: скажем, что $\operatorname{fil} f \geqslant n$, если минимальная степень одночлена, входящего в неоднородный элемент f, равна n. Степень $\deg f$ зависит от выбора системы образующих, а фильтрация $\operatorname{fil} f$ — нет. В самом деле, пусть ξ_i и η_i — две системы канонических образующих. Обозначим временно степени элемента f относительно них соответственно $\deg_\xi f$ и $\deg_\eta f$. Заметим, что если элемент f *нильпотентен*, т. е. $f^m = 0$ для некоторого m, то $\operatorname{fil}_\xi f \geqslant 1$ и $\operatorname{fil}_\eta f \geqslant 1$. В частности, $\operatorname{fil}_\eta \xi_i \geqslant 1$. Запишем элемент f в виде (2) с помощью образующих ξ_i и аналогично выразим ξ_i через η_k Подставляя $\xi_i = \xi_i(\eta)$ в формулу (2), находим выражение f через η_i. Из того, что $\operatorname{fil}_\eta \xi_i \geqslant 1$, очевидно, следует, что $\operatorname{fil}_\eta f \geqslant \operatorname{fil}_\xi f$. Меняя ролями системы ξ_i и η_i, находим, что $\operatorname{fil}_\eta f = \operatorname{fil}_\xi f$.

Пусть $\Lambda^{(k)}$ — подпространство в Λ, состоящее из элементов, удовлетворяющих условию $\operatorname{fil} f \geqslant k$. Очевидно, что

$$\Lambda = \Lambda^{(0)} \supset \Lambda^{(1)} \supset \Lambda^{(2)} \supset \dots$$

и что если $f \in \Lambda^{(k)}$, $g \in \Lambda^{(\ell)}$, то $fg \in \Lambda^{(k+\ell)}$. Таким образом, $\Lambda^{(k)}$ является идеалом в Λ.

Пусть $f \in \Lambda(\xi_1, \dots, \xi_q)$ имеет вид (2), причем в стоящей в правой части сумме отличны от нуля лишь слагаемые с (не)четными k. В этом случае элемент f называется *(не)четным относительно* системы образующих ξ.

Пусть $\xi = \{\xi_i\}$ — некоторая система канонических образующих алгебры Грассмана Λ. Как четные, так и нечетные относительно ξ элементы образуют линейные подпространства, которые мы обозначим соответственно ${}^0\Lambda(\xi_1, \dots, \xi_q)$ и ${}^1\Lambda(\xi_1, \dots, \xi_q)$. Ниже мы увидим, что пространство ${}^0\Lambda(\xi_1, \dots, \xi_q)$ в действительности не зависит от системы ξ канонических образующих. Поэтому для него будет употребляться сокращенное обозначение ${}^0\Lambda$. В случаях, исключающих недоразумение, мы будем пользоваться также сокращенным обозначением ${}^1\Lambda$. Легко видеть, что ${}^0\Lambda$ является не только подпространством, но и подалгеброй.

Четность алгебры Грассмана является частным случаем следующего более общего понятия четности. Пусть L — некоторое линейное пространство, в котором фиксированы два непересекающихся подпространства, такие, что L является их прямой суммой: $L = {}^0L \oplus {}^1L$. Линейные пространства с такой дополнительной структурой называются *$\mathbb{Z}/2$-градуированными*, а элементы пространств ${}^0L$ и ${}^1L$ называются *однородными*. Мы скажем, что в $\mathbb{Z}/2$-градуированном пространстве *фиксирована четность*, если одно из подпространств объявлено *четным*, другое — *нечетным*. Ненулевые элементы этих подпространств называются соответственно (*однородными*) *четными* и *нечетными*. На ненулевых однородных элементах определена функция *четности*:

$$\alpha(f) = \begin{cases} 0, & \text{если элемент } f \text{ четен,} \\ 1, & \text{если элемент } f \text{ нечетен.} \end{cases} \tag{3}$$

Суммы вида $\alpha(f) + \alpha(g)$ понимаются по модулю 2.

С помощью функции четности вводится линейный оператор $\mathbf{A}$: для однородных элементов

$$\mathbf{A}f = (-1)^{\alpha(f)} f, \tag{4}$$

на элементы общего вида оператор $\mathbf{A}$ распространяется по линейности. Очевидно, что $\mathbf{A}^2 = \mathbf{1}$.

Оператор $\mathbf{A}$, будучи линейным и обратимым, является автоморфизмом линейного пространства L. Если пространство L не обладает дополнительными алгебраическими структурами, четность в нем можно ввести двумя способами: каждое из подпространств ${}^0L$ и ${}^1L$ может быть объявлено четным или нечетным. При наличии дополнительной структуры всегда[1] будет требоваться, чтобы оператор $\mathbf{A}$ был ее автоморфизмом. Это требование может уничтожить симметрию между ${}^0L$ и ${}^1L$. Случай $L = \Lambda$ — пример такой ситуации (дополнительной структурой служит умножение в Λ).

Выясним, в какой степени понятие четности связано с выбором системы канонических образующих. Пусть $\xi = \{\xi_i\}$ — некоторая система канонических образующих алгебры Грассмана Λ. Свойство элемента быть четным не зависит от выбора системы канонических образующих[2]. Иначе обстоит дело с пространством нечетных элементов, как показывает следующий пример.

Пусть $\mu(\xi)$ — фиксированный элемент, нечетный относительно ξ, а

$$\eta_i = \xi_i(1 + \mu(\xi)).$$

---

[1] Это спорное утверждение: в математических работах, а также ниже в этой книге, в том числе, в рукописи Ф. А. Березина, обычно используется первое условие. — *Прим. Д. Л.*

[1] Далеко не всегда: иногда нужно рассмотреть суперпространство супералгебры с разными структурами суперпространств; одна четность может быть согласована с одним умножением, а другая четность, согласованная с другим умножением, противоположна первой: например, антискобка на суперпространстве функций согласована с одной четностью, а умножение функций — с противоположной четностью. А на пространстве $(n \times n)$-матриц четность обычно вводят одним из $[n/2]$ способов, и каждый согласован с суперкоммутатором, который, собственно, и подразумевается под дополнительной структурой. — *Прим. Д. Л.*

[2] Это доказано в [CoC1°]. — *Прим. Д. Л.*

Легко видеть, что элементы η_i удовлетворяют соотношениям (1). Кроме того, они являются образующими. Чтобы убедиться в этом, следует выразить ξ_i через η_i. Заметим, прежде всего, что $\eta_i\eta_j = \xi_i\xi_j$, поэтому если $f(\xi)$ — произвольный нечетный элемент, а $f(\eta)$ — элемент, полученный заменой в выражении (2) для f образующих ξ_i элементами η_i, то $f(\eta) = f(\xi)(1 + \mu(\xi))$. В частности, $\mu(\eta) = \mu(\xi)(1 + \mu(\xi)) = \mu(\xi)$, так как в силу нечетности $(\mu(\xi))^2 = 0$. Поэтому

$$\xi_i = \eta_i(1 + \mu(\eta))^{-1} = \eta_i(1 - \mu(\eta)).$$

Итак, η_i являются каноническими образующими. Как мы видели, пространство ${}^1\Lambda(\eta_1, \ldots, \eta_q)$ состоит из элементов вида

$$f(\xi)(1 + \mu(\xi)), \qquad f \in {}^1\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_q). \tag{5}$$

Таким образом, при $\mu \neq 0$ пространства ${}^1\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ и ${}^1\Lambda(\eta_1, \ldots, \eta_q)$ не совпадают. Ниже мы увидим, что пространство нечетных элементов относительно любой системы канонических образующих состоит из элементов вида (5) при некотором μ.

2. Теорема (системы образующих алгебры Грассмана). 1) *Любая система образующих алгебры Грассмана Λ_q содержит подсистему, состоящую из q элементов и также являющуюся системой образующих. В частности, не существует систем образующих с числом элементов $q' < q$.*

2) *Пусть ξ_i и η_i — нильпотентные элементы алгебры Λ_q при $i, j = 1, 2, \ldots, q$, причем элементы ξ_i служат системой образующих. Для того чтобы и элементы η_i были системой образующих, необходимо и достаточно, чтобы их выражение через ξ_i имело вид*

$$\eta_i = \sum a_{ij}\xi_j + \sigma_i, \qquad \operatorname{fil}\sigma_i > 1, \qquad \det(a_{ik}) \neq 0. \tag{6}$$

Доказательство. 1) Пусть вначале ξ_i — канонические образующие. Пусть, далее, $\Sigma \subset \Lambda_q$ — некоторая система образующих.

Как было показано в п. 1, из конечномерности алгебры Λ_q следует, что Σ содержит конечное подмножество элементов f_i, где $i = 1, 2, \ldots, N$, также являющееся системой образующих.

Воспользуемся формулой (2) и представим каждый элемент f_i в виде $f_i = f_{i,0} + g_i$ где $f_{i,0}$ — число и $\operatorname{fil} g_i \geqslant 1$. Очевидно, что совокупность элементов g_i также служит системой образующих:

$$\xi_i = P_i(f_1, \ldots, f_N) = P_i(f_{1,0} + g_1, \ldots, f_{N,0} + g_N) = Q_i(g_1, \ldots, g_N),$$

где Q_i — некоторый полином. Отделяя в каждом полиноме Q_i линейные члены от членов более высокого порядка, находим

$$\xi_i = \sum_k c_{ik}g_k + \alpha_i, \qquad \operatorname{fil}\alpha_i > 1. \tag{7}$$

Выразим теперь g_k через ξ_i и отделим члены 1-го порядка:

$$g_k = \sum b_{ks}\xi_s + \beta_k, \qquad \operatorname{fil}\beta_k > 1. \tag{8}$$

Подставляя выражения (8) в формулы (7), мы должны получить тождество. Следовательно, $\Sigma c_{ik}b_{ks} = \delta_{is}$. Отсюда вытекает, что $\operatorname{rank}(b_{ks}) \geqslant q$, т. е. $N \geqslant q$.

Предположим для простоты, что первые q строк матрицы (b_{ks}) линейно независимы. Покажем, что в этом случае элементы $g_1, \ldots, g_q$ служат системой образующих. Положим

$$\zeta_i = \sum_s b_{is}\xi_s, \qquad i = 1, 2, \ldots, q.$$

Ввиду обратимости матрицы (b_{is}) элементы ζ_i, подобно ξ_i, служат каноническими образующими. Выражая ξ_i через ζ_i, находим из соотношений (8), что

$$g_k = \zeta_k + \gamma_k(\zeta), \qquad \operatorname{fil}\gamma_k > 1. \tag{9}$$

Покажем теперь, что ζ_i могут быть выражены в виде полиномов от g_k. Пусть

$$\gamma_k(\zeta) = \sum_\ell \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_\ell} \gamma_{i_1,\ldots,i_\ell}\zeta_{i_1}\ldots\zeta_{i_\ell}.$$

Теперь для произвольного набора $a = (a_1, \ldots, a_q)$ элементов из Λ_q определим $\gamma_k(a)$, положив

$$\gamma_k(a) = \sum_\ell \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_\ell} \gamma_{i_1,\ldots,i_\ell}a_{i_1}\ldots a_{i_\ell}.$$

Рассмотрим соотношения (9) как уравнения относительно ζ_k и воспользуемся методом последовательных приближений. Положим

$$\zeta_k^{(0)} = 0, \qquad \zeta_k^{(n)} = g_k - \gamma_k(\zeta^{(n-1)}), \qquad \alpha_k^{(n)} = \zeta_k^{(n)} - \zeta_k^{(n-1)}. \tag{10}$$

Покажем по индукции, что $\operatorname{fil}\alpha_k^{(n)} \geqslant n$. При $n = 1$ это очевидно. Далее,

$$\alpha_k^{(n)} = \gamma_k(\zeta^{(n-2)}) - \gamma_k(\zeta^{(n-1)}) = \gamma_k(\zeta^{(n-2)}) - \gamma_k(\zeta^{(n-2)} + \alpha^{(n-1)}).$$

Ввиду того что $\operatorname{fil}\gamma_k \geqslant 2$, получаем

$$\operatorname{fil}\alpha_k^{(n)} \geqslant \min_i \operatorname{fil}\zeta_i^{(n-2)} + \min_i \operatorname{fil}\alpha_i^{(n-1)}.$$

Из соотношений (10) следует, что $\deg\zeta_i^{(s)} = 1$ при $s \geqslant 1$. Поэтому, учитывая предположение индукции, находим, что $\operatorname{fil}\alpha_k^{(n)} \geqslant n$. Поскольку элемент g_k нильпотентен, существует число n_0, такое что $\alpha_k^{(n)} = 0$ при $n \geqslant n_0$. Другими словами, последовательность $\zeta_k^{(n)}$ стабилизируется: $\zeta_k^{(n)} = \zeta_k^{(n+1)}$ при $n \geqslant n_0$.

Таким образом, $\zeta_k^{(n_0)}$ является решением системы уравнений (9). Очевидно, что $\zeta_k^{(n_0)}$ полиномиально выражаются через g_k. Покажем, что $\zeta_k^{(n_0)} = \zeta_k$. Пусть $\alpha_k = \zeta_k - \zeta_k^{(n_0)}$. Тогда

$$\alpha_k = \gamma_k(\zeta^{(n_0)}) - \gamma_k(\zeta) = \gamma_k(\zeta - \alpha) - \gamma_k(\zeta).$$

Отсюда, повторяя прежнее рассуждение, находим, что если $\alpha_k \neq 0$, то $\operatorname{fil}\alpha_k \geqslant 1 + \min\limits_i \operatorname{fil}\alpha_i$, что невозможно. Следовательно, $\alpha_k = 0$, и тем самым элементы g_k служат системой образующих алгебры Λ_q.

2) Отметим, что одновременно мы получили следующее важное свойство систем образующих. Пусть ξ_i — канонические образующие и Σ — некоторая произвольная система образующих. Система Σ содержит подсистему $\{\eta_i\}$, состоящую из q элементов, которые связаны с ξ_i соотношениями вида (6). Отсюда очевидно следует второе утверждение теоремы. ☐

Рассмотрим теперь более подробно системы канонических образующих.

3. Теорема (Д. Джокович)[1]. *Пусть $\{\xi_i\}$ — система канонических образующих алгебры Грассмана. Справедливы следующие утверждения.*

1) *Набор нечетных относительно ξ элементов $\eta_i \in {}^1\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_q)$, где $i = 1, 2, \ldots, q$, служит системой канонических образующих алгебры Λ_q тогда и только тогда, когда*

$$\eta_i = \sum \psi_{ik}\xi_k + \alpha_i, \quad \det(\psi_{ik}) \neq 0, \quad \operatorname{fil}\alpha_i \geqslant 3. \tag{11}$$

2) *Произвольный набор элементов η_i, где $i = 1, 2, \ldots, q$, служит системой канонических образующих алгебры Λ_q тогда и только тогда, когда*

$$\eta_i = \zeta_i(1 + \mu), \tag{12}$$

где $\{\zeta_i\}$ — система нечетных относительно ξ канонических образующих алгебры Λ_q и μ — элемент, нечетный относительно ξ.

3) *Пусть $\{\xi_i\}$ — некоторая система канонических образующих алгебры Грассмана Λ_q, а $\mu \in {}^1\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_q)$. Пространство ${}^{1,\mu}\Lambda = \{f(1+\mu) \mid f \in {}^1\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_q)\}$ совпадает с пространством нечетных элементов относительно некоторой системы канонических образующих.*

4) *Обратно, пространство нечетных элементов относительно любой системы канонических образующих может быть получено из ${}^1\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ указанным образом.*

---

[1] Первым доказательство этой теоремы опубликовал Д. Джокович и прислал нам с Ф. А. Березиным оттиск. В. Молотков обобщил результат Д. Джоковича, например, на алгебры Грассмана над полями характеристики 2, см. книгу [CoC1°]. — *Прим. Д. Л.*

4. Автоморфизмы четности. Пусть ${}^0\Lambda$, ${}^1\Lambda$ — пространства четных и нечетных элементов алгебры Грассмана Λ относительно некоторой системы канонических образующих. Положим

$$\mathbf{A}f = (-1)^{\alpha(f)}f. \tag{13}$$

Очевидно, что $\mathbf{A}$ является автоморфизмом алгебры Λ, а $\mathbf{A}^2 = \mathbf{1}$ — тождественный изоморфизм. Назовем $\mathbf{A}$ *автоморфизмом четности*. Докажем следующее важное утверждение.

4.1. Теорема. *Пусть $\mathbf{A}$ — автоморфизм алгебры Λ, такой что $\mathbf{A}^2 = \mathbf{1}$. Пространство собственных векторов автоморфизма $\mathbf{A}$ с собственным значением, равным -1, совпадает с пространством нечетных элементов алгебры Λ относительно некоторой системы канонических образующих.*

Доказательство. Пусть $\{\xi_i\}$ — некоторая система канонических образующих, $\eta_i = \mathbf{A}\xi_i$. Из формул (11) и (12) следует, что

$$\eta_i = \zeta_i(1 + \mu), \quad \zeta_i = \sum a_{ik}\xi_k + \sigma_i, \quad \operatorname{fil}\sigma_i \geqslant 3, \tag{14}$$

где μ и σ_i — нечетные относительно ξ элементы.

Рассмотрим элемент $\psi_i = \frac{1}{2}(\xi_i + \eta_i)$. Заметим, что $\mathbf{A}\psi_i = \psi_i$, ввиду того что $\mathbf{A}^2 = \mathbf{1}$. Следовательно, $\psi_i = {}^0\Lambda$.

С другой стороны, по условию (14) имеем

$$\psi_i = \frac{1}{2}\Big(\xi_i + \sum a_{ik}\xi_k\Big) + \frac{1}{2}\rho_i, \quad \text{где } \operatorname{fil}\rho_i \geqslant 2.$$

Так как ${}^0\Lambda$ состоит из четных относительно ξ элементов, получаем, что $a_{ik} = -\delta_{ik}$ и $\rho_i \in {}^0\Lambda_q$. Но $\rho_i = \sum a_{ik}\xi_k\mu + \sigma_i\mu + \sigma_i$. Элемент σ_i нечетен относительно ξ, в то время как все остальные слагаемые являются четными. Следовательно, $\sigma_i = 0$, а

$$\eta_i = -\xi_i(1 + \mu).$$

Положим теперь

$$\varphi_i = \frac{1}{2}(\xi_i - \eta_i) = \xi_i\Big(1 + \frac{\mu}{2}\Big).$$

По теореме 3 элементы φ_i, составляют систему канонических образующих. Очевидно, кроме того, что $\mathbf{A}\varphi_i = -\varphi_i$.

Пусть Λ^- — пространство собственных векторов автоморфизма $\mathbf{A}$ с собственным значением -1. Из включения $\varphi_i \in \Lambda^-$ следует, что ${}^1\Lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_q) \subset \Lambda^-$. С другой стороны, и Λ^- и ${}^1\Lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$ дополняют ${}^0\Lambda$ до Λ. Следовательно, ${}^1\Lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_q) = \Lambda^-$. ☐

5. Автоморфизмы алгебры Грассмана. Теорема 3 позволяет описать все автоморфизмы алгебры Грассмана. Очевидно, что любой автоморфизм T алгебры Грассмана Λ переводит одну систему канонических образующих в другую. Обратно, если заданы две системы канонических образующих $\{\xi_i\}$ и $\{\eta_i\}$ алгебры Грассмана Λ, то по ним может быть построен автоморфизм T, такой что $T\xi_i = \eta_i$, причем автоморфизм T этим свойством однозначно определен. Таким образом, формулы (11), (12), описывающие пары систем канонических образующих, одновременно описывают также все автоморфизмы алгебры Грассмана.

Автоморфизмы алгебры Грассмана Λ образуют группу, которую мы обозначим $\mathrm{Aut}(\Lambda)$. Фиксируем автоморфизм четности $\mathbf{A}$. Через $\mathrm{Aut}^0_{\mathbf{A}}(\Lambda)$ обозначим подгруппу группы $\mathrm{Aut}(\Lambda)$, оставляющую пространство Λ^- инвариантным. Пусть $\xi_i \in \Lambda^-$ — канонические образующие алгебры Λ. Через $\mathrm{Aut}^1_{\mathbf{A},\mu}(\Lambda)$ обозначим подгруппу группы $\mathrm{Aut}(\Lambda)$, состоящую из автоморфизмов вида

$$T\xi_i = \xi_i(1+\mu(\xi)) \quad \text{для фиксированного } \mu(\xi) \in \Lambda^-. \tag{15}$$

Отметим некоторые свойства этих групп.

1) Из формулы (12) следует, что каждый автоморфизм $T \in \mathrm{Aut}(\Lambda)$ представим в виде произведения $T = T_1T_2$, $T_1 \in \mathrm{Aut}^1_{\mathbf{A},\mu}(\Lambda)$, $T_2 \in \mathrm{Aut}^0_{\mathbf{A}}(\Lambda)$. Легко видеть, что это представление однозначно.

2) На четные элементы автоморфизм (15) действует тождественно; это следует из тождества

$$T(\xi_1\xi_2) = \xi_1(1+\mu)\xi_2(1+\mu) = \xi_1\xi_2(1-\mu)(1+\mu) = \xi_1\xi_2.$$

3) Из того же тождества следует, что на нечетные относительно ξ элементы автоморфизм (15) действует по формуле

$$(Tf)(\xi) = f(\xi)(1+\mu(\xi)).$$

4) Группа $\mathrm{Aut}^1_{\mathbf{A},\mu}(\Lambda)$ коммутативна и изоморфна Λ^-, рассматриваемой как группа по сложению: из соотношений (14) следует, что

$$T_1T_2\xi_i = T_1\xi_i(1+\mu_2(\xi)) = \xi_i(1+\mu_2(\xi)+\mu_1(\xi)).$$

5) Группа $\mathrm{Aut}^1_{\mathbf{A},\mu}(\Lambda)$ является нормальным делителем в $\mathrm{Aut}(\Lambda)$.

6) Группы $\mathrm{Aut}^0_{\mathbf{A}}(\Lambda)$, отвечающие различным автоморфизмам четности $\mathbf{A}$, сопряжены.

Свойства 5 и 6 следуют непосредственно из определений групп $\mathrm{Aut}^0_{\mathbf{A}}(\Lambda)$ и $\mathrm{Aut}^1_{\mathbf{A},\mu}(\Lambda)$.

7) Множество элементов $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ вида

$$T\xi_i = \xi_i + u(\xi), \quad \mathrm{fil}\, u \geqslant n,$$

образует нормальный делитель в $\mathrm{Aut}(\Lambda)$, который мы обозначим $\mathrm{Aut}_n(\Lambda)$. В отличие от групп $\mathrm{Aut}^0_{\mathbf{A}}(\Lambda)$ и $\mathrm{Aut}^1_{\mathbf{A},\mu}(\Lambda)$, он не зависит от выбора автоморфизма четности.

Перейдем к индивидуальным автоморфизмам. Пусть $T \in \mathrm{Aut}(\Lambda)$ и $\{\xi_i\}$ — некоторая система канонических образующих. Согласно формулам (11) имеем

$$T\xi_i = \sum \psi_{ik}\xi_k + \alpha_i, \quad \det(\psi_{ik}) \neq 0, \quad \mathrm{fil}\, \alpha_i \geqslant 2. \tag{16}$$

Автоморфизм T_1, такой что $T_1\xi_i = \sum \psi_{ik}\xi_k$, называется *линейной частью* автоморфизма T. В другой системе образующих $\{\eta_i\}$ автоморфизм (16) задается заменой матрицы $\Psi = (\psi_{ik})$ матрицей $\widetilde{\Psi} = (\widetilde{\psi}_{ik})$. Легко видеть, что $\widetilde{\Psi} = C\Psi C^{-1}$, где C — матрица линейной части автоморфизма U, переводящего систему $\{\xi_i\}$, в систему $\{\eta_i\}$, т. е.

$$U\xi_i = \eta_i = \Sigma c_{ik}\xi_k + \beta_i, \quad \text{где } \mathrm{fil}\, \beta_i \geqslant 2.$$

Если в формуле (16) элементы α_i равны нулю, то автоморфизм T называется *линеаризуемым в системе образующих* $\{\xi_i\}$.

5.1. Теорема. *Пусть матрица линейной части автоморфизма T приводится к диагональной форме и ее собственные числа λ_i удовлетворяют условиям*

$$\lambda_i \neq \lambda_{j_1} \ldots \lambda_{j_{2k+1}}, \quad j_1 < \ldots < j_{2k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{17}$$

$$1 \neq \lambda_{j_1} \ldots \lambda_{j_{2k+1}}, \quad j_1 < \ldots < j_{2k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{18}$$

Тогда автоморфизм T линеаризуем.

Если $T \in \mathrm{Aut}^0_{\mathbf{A}}(\Lambda)$ при каком-нибудь автоморфизме четности $\mathbf{A}$, *то для линеаризуемости достаточно условия* (17).

Доказательство. Так как матрица линейной части автоморфизма T приводится к диагональной форме, в подходящей системе канонических образующих он имеет вид

$$T\xi_i = (\lambda_i\xi_i + u_i(\xi))(1+\mu(\xi)), \quad u_i, \mu \in {}^1\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_q), \quad \mathrm{fil}\, u_i \geqslant 3.$$

Рассмотрим образующие

$$\eta_i = \xi_i + a_i(\xi), \quad a_i \in {}^1\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_q), \quad \mathrm{fil}\, a_i = \mathrm{fil}\, u_i;$$

элементы a_i определим явным образом позже. Заметим, что

$$\xi_i = \eta_i - a_i(\eta) + \alpha_i, \quad \mathrm{fil}\, \alpha_i > \mathrm{fil}\, a_i.$$

Отсюда следует, что в образующих η_i автоморфизм T имеет вид

$$T\eta_i = \big[\lambda_i(\eta_i - a_i(\eta)) + u_i(\eta) + a_i(\lambda\eta) + v_i\big](1+\mu),$$

где $\deg v_i > \deg u$ и $\lambda\eta = \{\lambda_1\eta_1, \lambda_2\eta_2, \ldots\}$ Определим $a_i(\eta)$ из условия

$$\lambda_i a_i(\eta) - a_i(\lambda\eta) = u_i(\eta). \tag{19}$$

Уравнения (19) разрешимы в силу условий (17). Таким образом,

$$T\eta_i = (\lambda_i\eta_i + v_i)(1+\mu), \qquad \operatorname{fil} v_i > \operatorname{fil} u_i;$$

продолжая этот процесс, мы через конечное число шагов придем к образующим ζ_i, таким что

$$T\zeta_i = \lambda_i\zeta_i(1+\mu).$$

Положим $\varphi_i = \zeta_i(1 + v(\zeta))$, где $v(\zeta) \in {}^1\Lambda(\zeta)$ мы определим из уравнения

$$v(\zeta) - v(\lambda\zeta) = \mu(\zeta). \tag{20}$$

Уравнение (20) разрешимо в силу условий (18). В системе образующих φ_i автоморфизм T линеен:

$$T\varphi_i = \lambda_i\varphi_i(1 - v(\varphi) + v(\lambda\varphi) + \mu(\varphi)) = \lambda_i\varphi_i. \qquad \square$$

6. Анти-автоморфизмы алгебры Грассмана[1]**.** Напомним, что *автоморфизмом* алгебры A называется обратимое, не обязательно линейное, отображение $\mathcal{T}\colon A \to A$ алгебры в себя, *сохраняющее умножение*, т. е. $\mathcal{T}(ab) = \mathcal{T}(a)\mathcal{T}(b)$ для любых $a, b \in A$. *Анти-автоморфизмом* комплексной алгебры Грассмана A назовем отображение $\mathcal{T}\colon A \to A$ со следующими свойствами[2]:

1) $\mathcal{T}(\lambda f + \mu g) = \bar\lambda\mathcal{T}(f) + \bar\mu\mathcal{T}(g)$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ (антилинейность),
2) $\mathcal{T}(fg) = (-1)^{\alpha(f)\alpha(g)}\mathcal{T}(g)\mathcal{T}(f)$,
3) $\mathcal{T}^2 = T$, где $T\colon A \to A$ — обратимое отображение.

Легко видеть, что образ системы канонических образующих алгебры Грассмана A при анти-автоморфизме также является системой канонических образующих.

Анти-автоморфизмы $\mathcal{T}$, такие что T — или тождественный оператор, или автоморфизм четности, назовем соответственно *инволюцией 1-го рода* и *инволюцией 2-го рода*[3], мы пишем: $\mathcal{T}f = f^*$.

---

[1] Этот длинный пункт не дает, однако, ответ на вопрос «сколько же у алгебры Грассмана над $\mathbb{C}$ вещественных форм?», ср. следствие 6.4 и формулы (26). Нет ответа и в [МаКП*, QFS*]. То, что классов эквивалентных форм только один, доказано в [CoC1°, BGLS*]. — *Прим. Д. Л.*

[2] В оригинале условие 2 было написано без учета Правила Знаков. Игнорирование Правила Знаков рано или поздно обязательно приведет к противоречию, см. [QFS*]. — *Прим. Д. Л.*

[3] На комплексных алгебрах эти «инволюции» отвечают *вещественным* и *кватернионным структурам* соответственно, см. [МаКП*, CoC1°], причем «инволюция 2-го рода» — не инволюция, так как ее квадрат не есть тождественный автоморфизм. Ниже Ф. А. Березин применяет эти «инволюции», правильнее сказать, анти-автоморфизмы, и к вещественным алгебрам. — *Прим. Д. Л.*

6.1. Теорема. 1) *Пусть $\mathcal{T}$ — анти-автоморфизм алгебры Грассмана Λ, такой что автоморфизм $T = \mathcal{T}^2$ линеаризуем. Тогда в Λ существует система канонических образующих $\{\xi_i\}$, такая что*

$$\mathcal{T}\xi_i = \sum a_{ik}\xi_k. \tag{21}$$

2) *Если матрица линейной части автоморфизма T диагонализируема, то образующие ξ_i можно выбрать так, чтобы матрица (a_{ik}) была вещественной.*

Доказательство. 1) Пусть $\{\xi_i\}$ — система канонических образующих, в которых автоморфизм $T = \mathcal{T}^2$ линеен: $T\xi_i = \sum u_{in}\xi_n$. Так как $\{\mathcal{T}\xi_i\}$ также система канонических образующих, по условию (12) имеем

$$\mathcal{T}\xi_i = \sum a_{ik}(\xi_k + \sigma_k)(1+\mu),$$
$$\text{где } \det(a_{ik}) \neq 0, \quad \sigma_k, \mu \in {}^1\Lambda(\xi), \quad \operatorname{fil}\sigma_k > 1. \tag{22}$$

Рассмотрим в Λ вспомогательный анти-автоморфизм $f \to \tilde f$, определяемый равенствами

$$\tilde\xi_i = \sum a_{in}(\xi_n + \sigma_n). \tag{23}$$

Роль этого преобразования состоит в следующем: если f — нечетный относительно ξ элемент, то $\tilde f$ обладает тем же свойством и, как легко видеть,

$$\mathcal{T}f = \tilde f(1+\mu).$$

Вернемся к формуле (22) и воспользуемся соотношением $\mathcal{T}^2 = T$:

$$\begin{aligned} T\xi_i = \sum u_{in}\xi_n = \sum \bar a_{ik}\mathcal{T}(1+\mu)\mathcal{T}(\xi_k + \sigma_k) = \\ = \sum \bar a_{ik}(1 + \tilde\mu(1+\mu))\Big(\sum a_{ks}(\xi_s + \sigma_s)(1+\mu) + \tilde\sigma_k(1+\mu)\Big) = \\ = \sum \bar a_{ik}\Sigma a_{ks}\Big(\xi_s + \sigma_s + \sum \tilde a_{st}\tilde\sigma_t\Big)(1 + \mu - \tilde\mu), \end{aligned}$$

где $\tilde\sigma_t$, $\tilde\mu$ имеют смысл, объясняемый равенством (23), и $(\tilde a_{st}) = (a_{ks})^{-1}$. Приравнивая члены 0-й степени по ξ, получаем отсюда, что $u_{in} = \sum \bar a_{is}a_{sn}$. Учитывая это соотношение, окончательно получаем

$$\xi_s = \Big(\xi_s + \sigma_s + \sum \tilde a_{st}\tilde\sigma_t\Big)(1 + \mu - \tilde\mu). \tag{24}$$

Отделим теперь в формуле (24) члены четные относительно ξ_i от нечетных:

$$\Big(\xi_i + \sigma_i + \sum \tilde a_{in}\tilde\sigma_n\Big)(\mu - \tilde\mu) = 0, \qquad \sigma_i + \sum \tilde a_{ik}\tilde\sigma_k = 0. \tag{25}$$

Рассмотрим новые образующие $\eta_i = \xi_i + \alpha_i$, где α_i — пока неопределенные нечетные элементы, $\operatorname{fil}\alpha_i \geqslant 3$. Применяя анти-автоморфизм $\mathcal{T}$ к η_i, получаем

$$\mathcal{T}\eta_i = \mathcal{T}\xi_i + \mathcal{T}\alpha_i = \sum a_{in}(\xi_n + \sigma_n)(1+\mu) + \tilde{\alpha}_i(1+\mu) = \sum a_{in}(\eta_n + \sigma_n')(1+\mu),$$

где $\sigma_i' = \sigma_i - \alpha_i + \sum \tilde{a}_{in}\tilde{\alpha}_n$. Положим $\alpha_i = \frac{1}{2}\sigma_i$. Из второго равенства (25) следует, что $\sigma_i' = 0$. Таким образом, $\mathcal{T}\eta_i = \sum a_{in}\eta_n(1+\mu)$.

Рассмотрим вспомогательный анти-автоморфизм $f \to \mathring{f}$, аналогичный автоморфизму (23), заданный на образующих соотношениями: $\mathring{\eta}_i = \sum a_{in}\eta_n$. Заметим, что $\mathcal{T}_g = \mathring{g}\ (1+\mu)$ для любого нечетного элемента g. Условие $\mathcal{T}^2 = T$ приводит к соотношению, которое получается из первого равенства (25) при $\xi_i = \eta_i$, $\sigma_i = \widetilde{\sigma}_i = 0$, $\tilde{\mu} = \mathring{\mu}$, а именно, $\eta_i(\mu - \mathring{\mu}) = 0$. Так как это соотношение справедливо при всех i, то $\mathring{\mu} = \mu + c\eta_1 \ldots \eta_q$, где q — число канонических образующих ($c = 0$ в случае четного q). Положим теперь $\zeta_i = \eta_i\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)$. Образующие ζ_i являются искомыми:

$$\mathcal{T}\zeta_i = \mathcal{T}\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)\mathcal{T}(\eta_i) = \left(1 + \frac{\mathring{\mu}}{2}(1+\mu)\right)\sum a_{ik}\eta_k(1+\mu) =$$
$$= \sum a_{ik}\eta_k\left(1 + \mu - \frac{\mathring{\mu}}{2}\right) = \sum a_{ik}\eta_k\left(1 + \frac{\mu}{2} - \frac{c}{2}\eta_1 \ldots \eta_q\right) =$$
$$= \sum a_{ik}\zeta_k\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) = \sum a_{ik}\zeta_k.$$

2) Заметим, что если анти-автоморфизм $\mathcal{T}$ имеет вид (21) в системе канонических образующих $\{\xi_i\}$, то он имеет аналогичный вид в любой системе образующих $\{\eta_i\}$, линейно связанной с $\{\xi_i\}$. При этом если в системе $\{\xi_i\}$ автоморфизм задается матрицей $A = (a_{ik})$, то в системе $\{\eta_i\}$ — матрицей $B = \bar{C}^{-1}AC$, где C — матрица перехода от системы $\{\xi_i\}$ к системе $\{\eta_i\}$. Осталось убедиться в справедливости следующего утверждения.

6.2. Лемма. *Пусть A — комплексная квадратная матрица, такая что* $\det A \neq 0$, *а матрица $U = \bar{A}A$ диагонализируема. Тогда существуют комплексная обратимая матрица C и вещественная матрица W, такие что $A = \bar{C}WC^{-1}$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $U = \bar{A}A$. Она обладает следующими свойствами:

1) по условию $U = XDX^{-1}$ где D — диагональная матрица;

2) коэффициенты характеристического многочлена матрицы U вещественны;

3) $\det U = |\det A|^2 > 0$.

Из свойств 1) и 2) следует представимость матрицы U в виде $U = YVY^{-1}$, где V — вещественная матрица. Из свойства 3) следует, что

$\det V > 0$. Из этих свойств матрицы V вытекает, что из V извлекается квадратный корень в классе вещественных матриц $V = W^2$, где W — вещественная матрица. Итак, $\bar{A}A = YW^2Y^{-1}$. Положим теперь

$$C = YW\theta + \bar{A}\bar{Y}\bar{\theta},$$

где $\theta \in \mathbb{C}$ выберем из условий $|\theta| = 1$ и $\det\ C \neq 0$. Очевидно, что это всегда можно сделать. Далее,

$$\bar{A}\bar{C} = \bar{A}\bar{Y}W\bar{\theta} + YW^2Y^{-1}Y\theta = (\bar{A}\bar{Y}\bar{\theta} + YW\theta)W = CW,$$

что эквивалентно доказываемому. Тем самым теорема 6.1 доказана. ☐

Из теоремы 6.1 вытекает ряд следствий, касающихся инволюций.

6.3. Следствие. *В вещественной алгебре Грассмана Λ_q с инволюцией 1-го рода существует система канонических образующих ξ_i, на которые инволюция действует следующим образом*:

$$\xi_i^* = \varepsilon_i\xi_i, \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant i \leqslant s, \\ -1, & s+1 \leqslant i \leqslant q. \end{cases} \tag{26}$$

Число s зависит только от инволюции.

Доказательство. Пусть $\{\eta_i\}$ — система канонических образующих, на которые инволюция действует по формуле (21) с вещественной матрицей $A = (a_{ik})$. Ввиду того что $(\eta_i^*)^* = \eta_i$, матрица A инволютивна: $A^2 = I$. Следовательно, она приводится к диагональной форме в вещественной области: $A = C^{-1}EC$, где C — вещественная матрица и $E = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q)$, причем $\varepsilon_i = \pm 1$. При надлежащей нумерации числа ε_i имеют тот же вид, что в формуле (26). Образующие $\xi_i = \sum c_{ik}\eta_k$ обладают нужным свойством.

Пусть $\{\xi_i'\}$ — другая система канонических образующих, похожая на систему $\xi_i'^*$, см. формулу (26): $\xi_i'^* = \varepsilon_i'\xi_i'$, $\varepsilon_i' = \pm 1$. Выразим ξ_i' через ξ_i:

$$\xi_i' = \sum b_{ik}\xi_k + \sigma_i, \qquad \text{fil}\,\sigma_i > 1.$$

Поэтому матрицы $E = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q)$ и $E' = \operatorname{diag}(\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_q')$ связаны соотношением $E' = B^{-1}EB$, где $B = (b_{ik})$. Итак, $\operatorname{tr} E = \operatorname{tr} E'$, что эквивалентно доказываемому утверждению. ☐

6.4. Следствие. *Пусть Λ_q — комплексная алгебра Грассмана с инволюцией 1-го рода. В Λ_q существует система канонических образующих $\{\zeta_i\}$, инвариантных относительно инволюции*:

$$\zeta_i^* = \zeta_i.$$

При четном q в Λ_q существует система канонических образующих φ_i, ψ_i, где $1 \leqslant i \leqslant q/2$, на которые инволюция действует следующим *образом*:

$$\varphi_i^* = \psi_i, \quad \psi_i^* = \varphi_i.$$

Доказательство. Прежде всего, так же как в вещественном случае, устанавливаем существование системы канонических образующих $\{\zeta_i\}$ со свойством (26). Затем полагаем $\zeta_k = \begin{cases} \xi_k & \text{при } k \leqslant s, \\ \sqrt{-1}\,\xi_k & \text{при } k > s. \end{cases}$ При четном q полагаем

$$\varphi_k = \zeta_k + i\,\zeta_{k+q/2}, \quad \psi_k = \zeta_k - i\,\zeta_{k+q/2}, \quad 1 \leqslant k \leqslant q/2. \qquad \square$$

6.5. Следствие. 1) *Инволюция 2-го рода в алгебре Грассмана* Λ_q *существует только при четном* q.

2) *Пусть* Λ_q — *алгебра Грассмана с инволюцией 2-го рода* $\mathcal{T}$. *Тогда в* Λ_q *существует система канонических образующих* φ_k, ψ_k, *где* $1 \leqslant k \leqslant q/2$, *на которые инволюция действует по формуле*

$$\mathcal{T}\varphi_k = \psi_k, \quad \mathcal{T}\psi_k = -\varphi_k.$$

Доказательство. 1) Пусть в Λ_q существует инволюция 2-го рода. Пусть $\{\xi_i\}$ — система канонических образующих, на которые инволюция действует по формуле (21) с вещественной матрицей $A = (a_{ik})$. Заметим, что $A^2 = I$. В самом деле, матрица $B = A^2$ является матрицей линейной части автоморфизма четности $A = \mathcal{T}^2$. Поэтому $B^2 = I$. Если же $B \neq -I$, то у B имеется собственный вектор $s = (s_1, \ldots, s_q)$ с собственным значением 1, т. е. $s_k = \sum b_{k\ell} s_\ell$. В этом случае элемент $\xi = \Sigma s_k \xi_k$ инвариантен относительно автоморфизма **A** и, следовательно, четен, что невозможно.

Итак, $A^2 = -I$. Следовательно, собственные числа оператора A равны $\pm i$. Ввиду вещественности оператора A кратности собственных чисел $\lambda = i$ и $\lambda = -i$ должны совпадать. Поэтому q должно быть четным: $q = 2k$.

2) Заметим, что из условия $A^2 = -I$ следует, что матрица обладает полной системой собственных векторов. Пусть $T = \mathrm{diag}_k(J_2, \ldots, J_2)$. Матрица T обладает, подобно матрице A, полной системой собственных векторов, ее собственные числа равны $\pm i$, и их кратности равны. Поэтому существует обратимая комплексная матрица C, такая что

$$A = CTC^{-1}. \tag{27}$$

Ввиду того что матрицы A и T обе вещественны, из существования комплексной матрицы C со свойством (27) вытекает существование вещественной матрицы с тем же свойством[1]. Отсюда, в свою очередь, очевидно следует нужное утверждение. □

---

[1] Пусть $C = C_1 + iC_2$. Из формулы (27) следует, что $AC_1 = C_1T$ и $AC_2 = C_2T$. Полагая $C(\lambda) = C_1 + \lambda C_2$, находим, что $AC(\lambda) = C(\lambda)T$ при любом λ. Выбирая λ вещественным и удовлетворяющим условию $\det\ C(\lambda) \neq 0$, получаем нужное утверждение.

7. Подалгебры и факторалгебры алгебры Грассмана. Алгебра Грассмана обладает значительным количеством разнообразных подалгебр[1]. Наиболее существенными являются следующие два типа.

1) Подалгебры $\Lambda^{(s)}$, состоящие из элементов $f \in \Lambda$, удовлетворяющих условию fil $f \geqslant s$. Все они являются идеалами.

2) Подалгебры, которые сами являются алгебрами Грассмана, и идеалы, факторы по которым являются алгебрами Грассмана.

Из идеалов типа 1) важнейшим является идеал $\Lambda_q^{(1)}$, состоящий из всех нильпотентных элементов алгебры Λ_q (и $\Lambda_q^{(q)}$; очевидно, что $\Lambda_q^{(q)} \simeq \mathbb{K}$ как пространства, не как алгебры — *прим. Д. Л.*) Если Λ является алгеброй над $\mathbb{K}$, то $\Lambda/\Lambda^{(1)} \simeq \mathbb{K}$. Гомоморфизм-проекцию на факторалгебру $\Lambda \to \mathbb{K}$ обозначим буквой m. Он играет в дальнейшем фундаментальную роль. Если $f = f(\xi)$, то $m(f) = f(0)$. Очевидно, что m является единственным гомоморфизмом Λ в $\mathbb{K}$, кроме нулевого (т. е. гомоморфизма φ, такого что $\varphi(f) = 0$ при всех $f \in \Lambda$). Другими словами, $f(0)$ является единственным численным значением, которое может принимать функция от антикоммутирующих переменных. В этом проявляется принципиальное различие между обычными функциями и функциями от антикоммутирующих переменных.

Перейдем к идеалам типа 2). Элементы $\xi_i \in \Lambda_q$, где $i = 1, 2, \ldots, s \leqslant q$, назовем *независимыми*, если порождаемая ими подалгебра изоморфна алгебре Грассмана Λ_s.

Пусть теперь алгебра Грассмана $\widetilde{\Lambda}_s$ служит гомоморфным образом алгебры Λ_q. Пусть $\varphi\colon \Lambda_q \to \widetilde{\Lambda}_s$ — соответствующий гомоморфизм, $N = \mathrm{Ker}\,\varphi$.

7.1. Теорема. 1) *Идеал* N *порожден элементами* $\eta_1, \ldots, \eta_{q-s}$, *которые могут быть включены в систему независимых канонических образующих.*

2) *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_s$ — *элементы, дополняющие* $\eta_1, \ldots, \eta_{q-s}$ *до системы канонических образующих. Их образы* $\widetilde{\xi}_i = \varphi(\xi_i)$ *служат каноническими образующими в* $\widetilde{\Lambda}_s$.

Заметим, что действие гомоморфизма φ на элемент f состоит в следующем: если

$$\begin{aligned} f = f(\xi, \eta) = \sum_k \sum_{i_1,\ldots,i_k} f_{i_1\ldots i_k} \xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k} &+ \\ + \sum_k \sum_{\ell>0} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k,\\ j_1,\ldots,j_\ell}} f_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_\ell}\,\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k}\eta_{j_1}\ldots\eta_{j_\ell}&, \end{aligned} \tag{28}$$

---

[1] Про эти подалгебры и факторалгебры и их применение в решении одной очень трудной задачи интересно почитать в статье [Ге*]. — *Прим. Д. Л.*

то образ имеет вид

$$(\varphi f)(\tilde{\xi}) = f(\tilde{\xi}, 0) = \sum_{k} \sum_{i_1,\ldots,i_k} f_{i_1,\ldots,i_k} \tilde{\xi}_{i_1} \ldots \tilde{\xi}_{i_k}. \tag{29}$$

В частности, существует естественный изоморфизм между факторалгеброй и подалгеброй, порожденной элементами ξ_i. Поэтому эти алгебры могут быть отождествлены.

Доказательство. 1) Пусть $\{\xi_i\}$ — некоторая система канонических образующих алгебры Λ_q, а $\tilde{\xi}_i = \varphi(\xi_i) \in \tilde{\Lambda}_s$ — образ элемента ξ_i при гомоморфизме φ. Очевидно, что набор элементов $\tilde{\xi}_i$ служит системой образующих алгебры $\tilde{\Lambda}_s$. По теореме 2 из него можно выделить s элементов, также служащих системой образующих алгебры $\tilde{\Lambda}_s$. Пусть, для определенности, это $\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_s$. Так как φ — гомоморфизм, то $\tilde{\xi}_i$ удовлетворяют тем же соотношениям (1), что и ξ_i, следовательно, $\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_s$ служат каноническими образующими в $\tilde{\Lambda}_s$.

Пусть $\Lambda_q^{(1)} \subset \Lambda_q$, $\tilde{\Lambda}_s^{(1)} \subset \tilde{\Lambda}_s$ — пространства однородных элементов 1-й степени в смысле $\deg$ относительно $\xi_i \in \Lambda_q$ и $\tilde{\xi}_i \in \tilde{\Lambda}_s$ соответственно при всех i. Заметим, что $\varphi(\Lambda_q^{(1)}) = \tilde{\Lambda}_s^{(1)}$ и что $\dim \Lambda_q^{(1)} = q$, $\dim \tilde{\Lambda}_s^{(1)} = s$. Следовательно, в $\Lambda_q^{(1)}$ должно существовать подпространство размерности $q - s$, аннулируемое отображением φ. Обозначим это подпространство $N_{q-s}^{(1)}$, а подпространство, порожденное образующими $\xi_1, \ldots, \xi_s$, обозначим $\Lambda_s^{(1)}$. Очевидно, что эти подпространства не пересекаются, и, следовательно, их прямая сумма совпадает с $\Lambda_q^{(1)}$. Введем в $N_{q-s}^{(1)}$ каким-нибудь образом базис, обозначим его η_i, где $i = 1, 2, \ldots, q - s$. Очевидно, что совокупность элементов $\xi_1, \ldots, \xi_s, \eta_1, \ldots, \eta_{q-s}$ образует систему канонических образующих алгебры Λ_q. Поэтому любой элемент Λ_q представим в виде (28). Ввиду того что $\varphi(\xi_i) = \tilde{\xi}_i$, $\varphi(\eta_i) = 0$, гомоморфизм φ на произвольный элемент f действует по формуле (29). Таким образом, элементы η_i служат образующими идеала N. Утверждение 1) доказано.

2) Пусть теперь ζ_i, где $i = 1, 2, \ldots, s$, — произвольные элементы, которые в совокупности с η_i составляют систему канонических образующих алгебры Λ_q. Запишем элемент f с помощью ζ_i, η_j аналогично формуле (28) и применим φ. Элемент $\varphi(f)$ выразится через $\tilde{\zeta}_i = \varphi(\zeta_i)$ аналогично формуле (28). Любой элемент $\tilde{\Lambda}_s$ представляется в виде $\varphi(f)$, где $f \in \Lambda_q$, поэтому элементы ζ_i служат системой образующих алгебры $\tilde{\Lambda}_s$. Так как их число равно s и они, подобно ζ_i, удовлетворяют соотношениям (1), следовательно, образующие ζ_i являются каноническими. ☐

8. Грассманова оболочка $\mathbb{Z}/2$-градуированного линейного пространства. Линейное суперпространство суперразмерности $p|q$ удобно обозначать $\mathbb{K}^{p,q}$, аналогично обычному обозначению n-мерного линейного пространства над $\mathbb{K}$ в виде $\mathbb{K}^n$. Четное и нечетное подпространства пространства $\mathbb{K}^{p,q}$ обозначим соответственно 1) $\mathbb{K}^{p,0}$ и $\mathbb{K}^{0,q}$.

Пусть $\{e_i\}$ — базис в $\mathbb{K}^{p,q}$. Нумерацию векторов назовем *стандартной*, если $e_i \in \mathbb{K}^{p,0}$ при $1 \leqslant i \leqslant p$ и $e_i \in \mathbb{K}^{0,q}$ при $p + 1 \leqslant i \leqslant p + q$. Базис в $\mathbb{K}^{p,q}$ со стандартной нумерацией коротко назовем *стандартным базисом*. Каждый линейный оператор в пространстве $\mathbb{K}^{p,q}$ имеет в стандартном базисе матричное представление вида

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad Ax = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

а $x_1 \in \mathbb{K}^{p,0}$, $x_2 \in \mathbb{K}^{0,q}$. В частности, автоморфизм четности в $\mathbb{K}^{p,q}$ имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix},$$

где I_p, I_q — единичные операторы соответственно в $\mathbb{K}^{p,0}$ и $\mathbb{K}^{0,q}$.

Рассмотрим наряду с $\mathbb{Z}/2$-градуированным пространством $\mathbb{K}^{p,q}$ алгебру Грассмана Λ над $\mathbb{K}$. Никакой связи между числами p, q и числом канонических образующих алгебры Λ не предполагается.

Рассмотрим следующую конструкцию. Пусть $\{e_i\}$ — стандартный базис в $\mathbb{K}^{p,q}$. Пусть $\mathbb{K}^{p,q}(\Lambda)$ — множество всевозможных формальных линейных комбинаций вида

$$x = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} a_i e_i + \sum_{p+1 \leqslant i \leqslant p+q} \alpha_j e_j, \tag{30}$$

где a_i, α_j — соответственно четные и нечетные элементы алгебры Λ.

В формуле (30) элементы алгебры Грассмана Λ стоят слева от элементов $\mathbb{K}^{p,q}$. Возможность умножать элементы $\mathbb{K}^{p,q}$ справа на элементы алгебры Λ является большим удобством, от которого не следует отказываться. При этом возникает необходимость связать между собой левое и правое умножения. Видны две возможности:

1) $a_i e_i = e_i a_i$; $\alpha_j e_j = e_j \alpha_j$ при всех i, j;

2) $a_i e_i = e_i a_i$; $\alpha_j e_j = (-1)^{\alpha(e_j)} e_j \alpha_j$ при всех i, j.

В первом случае мы назовем пространство $\mathbb{K}^{p,q}(\Lambda)$ *грассмановой оболочкой 1-го рода* пространства $\mathbb{K}^{p,q}$, во втором случае — *грассмановой оболочкой 2-го рода* 2).

---

1) Эти обозначения предполагают, что $(p + q)$-мерное пространство над $\mathbb{K}$, нейтрально обозначаемое L, явно разбито на два подпространства (четное и нечетное). — *Прим. Д. Л.*

2) Таким образом, грассманова оболочка — это четная часть изоморфных (неканонически) пространств $\Lambda \otimes \mathbb{K}^{p,q} \simeq \mathbb{K}^{p,q} \otimes \Lambda$, а род — способ задать изоморфизм. При этом способ 1) противоречит Правилу Знаков (а значит, приведет, рано или поздно, к противоречию). Поэтому полезное упражнение читателю — обнаружить это противоречие и всегда пользоваться способом 2). Указанный Ф. А. Березиным способ 2) — один из двух возможных, уважающих

Отметим некоторые простые свойства грассмановых оболочек:

1) хотя пространство $\mathbb{K}^{p,q}(\Lambda)$ построено с помощью однородного базиса e_i в $\mathbb{K}^{p,q}$, в действительности оно от этого базиса не зависит: при разных выборах базиса получается одно и то же пространство $\mathbb{K}^{p,q}(\Lambda)$;

2) $\mathbb{K}^{p,q}(\Lambda)$ является не только линейным пространством над $\mathbb{K}$, но и двусторонним модулем над ${}^0\Lambda$ (т.е. элементы $\mathbb{K}^{p,q}(\Lambda)$ можно умножать слева и справа не только на числа, но и на элементы пространства ${}^0\Lambda$);

3) пространство $\mathbb{K}^{p,q}(\Lambda)$ наследует $\mathbb{Z}/2$-градуировку пространства $\mathbb{K}^{p,q}: \mathbb{K}^{p,q}(\Lambda) = \mathbb{K}^{p,0}(\Lambda) \oplus \mathbb{K}^{0,q}(\Lambda)$, где символом $\mathbb{K}^{p,0}(\Lambda)$ обозначено подпространство, состоящее из векторов вида (30) с равными нулю коэффициентами α_j, а символом $\mathbb{K}^{0,q}(\Lambda)$ — подпространство, состоящее из векторов вида (30) с равными нулю коэффициентами a_i;

4) определим отображение $m\colon \mathbb{K}^{p,q}(\Lambda) \to \mathbb{K}^{p,0}$ как покоординатное применение гомоморфизма $m\colon \Lambda \to \mathbb{K}$, определенного в п. 7; в $\mathbb{K}^{p,q}(\Lambda)$ существует подпространство, естественным образом изоморфное $\mathbb{K}^{p,0}$: оно состоит из векторов (30) специального вида $x = \sum a_i e_i$, где $m(a_i) \in \mathbb{K}$; подпространства, аналогично связанного с $\mathbb{K}^{0,q}$, в $\mathbb{K}^{p,q}(\Lambda)$ нет.

В дальнейшем нам удобно будет элементы стандартного базиса $\mathbb{K}^{p,q}$ изображать столбцами: $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)'$, где 1 стоит на i-м месте, а штрих означает транспонирование. Элементы пространств $\mathbb{K}^{p,q}$ и $\mathbb{K}^{p,q}(\Lambda)$ в этом базисе также являются столбцами.

9. Линейные операторы в суперпространствах. Ясно, что $\mathbb{Z}/2$-градуировка пространства $\mathbb{K}^{p,q}$ индуцирует $\mathbb{Z}/2$-градуировку пространства линейных операторов в $\mathbb{K}^{p,q}$. Оператор A *четен*, если он не меняет четность однородного вектора, и *нечетен*, если меняет.

Алгебру всех линейных операторов в $\mathbb{K}^{p,q}$ обозначим $\mathrm{End}(p|q)$. В соответствии с разбиением пространства $\mathbb{K}^{p,q}$ в прямую сумму подпространств $\mathbb{K}^{p,q} = \mathbb{K}^{p,0} \oplus \mathbb{K}^{0,q}$ каждый оператор $A \in \mathrm{End}(p|q)$ записывается в виде блочной операторной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (31)$$

где A_{11} и A_{22} — операторы, действующие соответственно в пространствах $\mathbb{K}^{p,0}$ и $\mathbb{K}^{0,q}$, A_{12} отображает $\mathbb{K}^{0,q}$ в $\mathbb{K}^{p,0}$, A_{21} отображает $\mathbb{K}^{p,0}$ в $\mathbb{K}^{0,q}$. Первое слагаемое в формуле (31) является четной составляющей оператора A, второе — нечетной. Легко видеть, что автоморфизм четности $\mathbf{A}$ действует в $\mathrm{End}(p|q)$ по формуле

$$T \longmapsto \mathbf{A} T \mathbf{A}^{-1}. \qquad (32)$$

Очевидно, что автоморфизм четности (32) является автоморфизмом пространства $\mathrm{End}(p|q)$ не только как линейного пространства, но и как ассоциативной и лиевой (супер)алгебр.

Грассманову оболочку алгебры $\mathrm{End}(p|q)$ обозначим[1] $\mathrm{End}_\Lambda(p|q)$. В стандартном базисе элементы алгебры $\mathrm{End}_\Lambda(p|q)$, подобно элементам алгебры $\mathrm{End}(p|q)$, записываются матрицами вида (31); матричные элементы блоков в случае $\mathrm{End}(p|q)$ являются числами, в случае $\mathrm{End}_\Lambda(p|q)$ — элементами алгебры Грассмана Λ. Совокупность $\mathrm{GL}_\Lambda(p|q)$ обратимых элементов алгебры $\mathrm{End}_\Lambda(p|q)$ образует, очевидно, группу.

10. Алгебры $\mathbf{Mat}\,(p|q)$ и $\mathbf{Mat}_\Lambda\,(p|q)$. Фиксируем стандартный базис в $\mathbb{K}^{p,q}$. Запишем в этом базисе каждый оператор из $\mathrm{End}(p|q)$ и $\mathrm{End}_\Lambda(p|q)$. Мы обозначим полученные множества матриц символами $\mathrm{Mat}(p|q)$ и $\mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)$, соответственно. Отображение, которое оператору $\mathcal{A}$ ставит в соответствие его матрицу A, является изоморфизмом соответствующих алгебр; алгебра $\mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)$ является грассмановой оболочкой алгебры $\mathrm{Mat}(p|q)$.

Гомоморфизм $m\colon \Lambda \to \mathbb{K}$ задает (поэлементно) гомоморфизм алгебр

$$m\colon \ \mathrm{Mat}_\Lambda(p|q) \longrightarrow {}^0\mathrm{Mat}(p|q) = \mathrm{Mat}(p) \oplus \mathrm{Mat}(q).$$

10.1. Теорема. *Матрица $A \in \mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)$ обратима тогда и только тогда, когда обратима матрица $A_0 = m(A)$.*

Доказательство. 1) Положим $A = A_0 + N$. Предположим, что существует A^{-1}, и поступим с A^{-1} аналогичным образом: $A^{-1} = \widetilde{A}_0 + \widetilde{N}$. Из равенства $AA^{-1} = I$ вытекает, что $A_0\widetilde{A}_0 = I$, следовательно, матрица A_0 обратима, а $\widetilde{A}_0 = (A_0)^{-1}$.

2) Предположим теперь, что матрица A_0 обратима, и представим A в виде $A = A_0(I + A_0^{-1}N)$. Матрица $A_0^{-1}N$, очевидно, нильпотентна, поэтому существует

$$A^{-1} = \Bigg(\sum_{0 \leqslant n} (-1)^n (A_0^{-1}N)^n\Bigg) A_0^{-1}.$$

(Ряд в скобках конечен ввиду нильпотентности матрицы $A_0^{-1}N$.) Таким образом, обратимость матрицы A равносильна обратимости матрицы A_0.

Правило Знаков. А вот и второй:

$$\alpha_j e_j = (-1)^{\alpha(e_j)+1} e_j \alpha_j \quad \text{при всех } j.$$

Тонкость заключается в том, что иногда требуется один из этих способов, уважающих Правило Знаков, а иногда — другой. Подробнее об этом написано в [CoC1°]. — *Прим. Д. Л.*

[1] Ф. А. Березин *иногда* изменял стандартное обозначение $\mathrm{End}_\Lambda(n) \simeq \mathrm{Mat}_\Lambda(n)$ пространства линейных операторов (матриц размера $n \times n$ с элементами из алгебры Λ), считая, что пространство $\mathrm{End}_\Lambda(n) \simeq \mathrm{Mat}_\Lambda(n)$ состоит не из всех матриц, а лишь из четных, и тогда он называл $\mathrm{End}_\Lambda(n)$, а на самом деле — $(\mathrm{End}_\Lambda(n))_{\bar{0}}$, «грассмановой оболочкой»; ср. с замечанием 15.2. — *Прим. Д. Л.*

Заметим теперь, что $A_0 = \begin{pmatrix} A_{0,11} & 0 \\ 0 & A_{0,22} \end{pmatrix}$, где $A_{0,11}$ и $A_{0,22}$ — константные члены в разложении матриц A_{11} и A_{22}, см. (31), по образующим алгебры Λ. Повторяя прежние рассуждения, находим, что обратимость матрицы A_{11} равносильна обратимости матрицы $A_{0,11}$, а обратимость матрицы A_{22} равносильна обратимости матрицы $A_{0,22}$. ☐

Если алгебра Грассмана Λ наделена инволюцией $*$, то в $\mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)$ могут быть определены операции $*$ и $\dagger$, аналогичные комплексному и эрмитову сопряжению соответственно:

$$\text{если } A = (a_{ik}), \quad \text{то} \quad A^* = (A^*_{ik}), \quad A^\dagger = \bigl(\bar{A}_{ik}(-1)^{\alpha(i)(\alpha(k)+1)}\bigr).$$

11. Лемма. *Пусть V, W — прямоугольные матрицы с нечетными элементами из Λ, причем V имеет m строк и n столбцов, W имеет n строк и m столбцов. Тогда*

$$\operatorname{tr} WV = -\operatorname{tr} VW, \qquad \det(I + WV) = \det{(I + VW)}^{-1}. \tag{33}$$

Прежде чем доказывать эту лемму, отметим, что для матриц с коммутирующими элементами хорошо известны аналогичные тождества, однако без знака «$-$» в первой формуле (33) и без степени «-1» во второй формуле.

Доказательство. Пусть V_{ik}, W_{ik} — элементы матриц V и W соответственно. Тогда

$$\operatorname{tr} WV = \sum W_{ik} V_{ki} = \sum V_{ki} W_{ik} = -\operatorname{tr} VW.$$

Далее, используя эту формулу, находим

$$\ln\det(I + WV) = \operatorname{tr}\ln(I + WV) = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{tr}((WV)^{n-1} WV) =$$
$$= -\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{tr}(V(WV)^{n-1} W) = -\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{tr}(VW)^n = -\ln\det(I + VW).$$

Экспоненцируя, получаем нужное утверждение. ☐

12. Суперслед и супердетерминант. *Суперследом* называется функция на $\mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)$, равная[1] (в этом пункте $A_{ii}^{-1} := (A_{ii})^{-1}$)

$$\operatorname{str} A = \operatorname{tr} A_{11} - \operatorname{tr} A_{22}, \qquad \text{где } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_\Lambda(p|q). \tag{34}$$

Группу обратимых элементов из $\mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)$, обозначим $\mathrm{GL}_\Lambda(p|q)$. *Супердетерминантом* называется функция на $\mathrm{GL}_\Lambda(p|q)$, равная

$$\operatorname{sdet} A = \det(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) \det A_{22}^{-1}. \tag{35}$$

---

[1] Во-первых, выше неявно предполагается, что разбиение на блоки соответствует стандартному базису. Во-вторых, это определение годится лишь для четных операторов (суперматриц) A; на нечетных операторах (суперматрицах) A имеем $\operatorname{str} A = \operatorname{tr} A_{11} + \operatorname{tr} A_{22}$, см. [CoC1°] и формулу (Д1.4). — *Прим. Д. Л.*

Отметим, что некоторые элементы матрицы $A \in \mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)$ являются нечетными, они антикоммутируют между собой. Поэтому определить детерминант такой матрицы обычной[1] формулой было бы неверно. В то же время матрицы, стоящие под знаком детерминанта в формуле (35), состоят лишь из четных, коммутирующих между собой, элементов. Поэтому детерминанты этих матриц определены.

Суперслед и супердетерминант, очевидно, инвариантны относительно сопряжений четными матрицами. Это дает возможность корректно определить суперслед и супердетерминант для операторов из $\mathrm{End}_\Lambda(p|q)$ и $\mathrm{GL}_\Lambda(p|q)$, соответственно: $\operatorname{str}\mathcal{A} = \operatorname{str} A$, $\operatorname{sdet}\mathcal{A} = \operatorname{sdet} A$, где A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в стандартном базисе.

12.1. Теорема. *Супердетерминант мультипликативен*:

$$\operatorname{sdet}(AB) = \operatorname{sdet} A \cdot \operatorname{sdet} B. \tag{36}$$

Доказательство теоремы основано на леммах, которые будут использоваться также и в дальнейшем.

12.2. Лемма. *Пусть $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ — произвольная блочная обратимая матрица с квадратными обратимыми блоками A_{11} и A_{22}. Тогда обратная матрица A^{-1} имеет вид*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} \\ -A_{22}^{-1} A_{21} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} & (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Доказательство. Непосредственная проверка. ☐

Пусть алгебра Грассмана Λ, используемая для построения $\mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)$, имеет N образующих: $\Lambda = \Lambda_N$. Рассмотрим ее как подалгебру алгебры Грассмана Λ_{N+M}, порожденную N ее образующими. Пусть Z — прямоугольная матрица с p строками и q столбцами, элементы которой z_{ij} суть нечетные элементы пространства Λ_{N+M}, а $\mathbf{Z}$ — множество всех таких матриц. В множестве $\mathbf{Z}$ действует группа $\mathrm{GL}_\Lambda(p|q)$ по формуле

$$Z \longrightarrow G \cdot Z = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \qquad G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{38}$$

---

[1] Видимо, имелось в виду то, что в формуле $\det A = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) A_{1\sigma(1)} \ldots A_{n\sigma(n)}$ нельзя переставлять некоммутирующие сомножители. Но если их порядок в каждом слагаемом зафиксировать, то пока непонятно, чем, собственно, формула плоха. А плоха она тем, что хотя, зафиксировав порядок сомножителей, мы делаем формулу корректной (понимаемой однозначно), заданная ей функция не мультипликативна. — *Прим. Д. Л.*

Легко проверяется, что элемент $G \cdot Z$ представим также в виде

$$G \cdot Z = (\widetilde{A} - Z\widetilde{C})^{-1}(Z\widetilde{D} - \widetilde{B}), \tag{39}$$

где $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$, $\widetilde{D}$ — блоки матрицы G^{-1} — определяются из формулы (37). Положим

$$f_1(G, Z) = (CZ + D)^{-1}, \quad f_2(G, Z) = \widetilde{A} - Z\widetilde{C}. \tag{40}$$

12.3. Лемма. *Матричные функции $f_i(G, Z)$, где $i = 1, 2$, удовлетворяют функциональному уравнению*

$$f_i(G_2G_1, Z) = f_i(G_1, Z)f_i(G_2, G_1 \cdot Z). \tag{41}$$

Доказательство. Согласно формуле (39) имеем

$$\begin{aligned} f_2(G_2G_1, Z) &= \widetilde{A}_1\widetilde{A}_2 + \widetilde{B}_1\widetilde{C}_2 - Z(\widetilde{C}_1\widetilde{A}_2 + \widetilde{D}_1\widetilde{C}_2) = \\ &= (\widetilde{A}_1 - Z\widetilde{C}_1)\widetilde{A}_2 + (\widetilde{B}_1 - Z\widetilde{D}_1)\widetilde{C}_2 = \\ = (\widetilde{A}_1 - Z\widetilde{C}_1)&(\widetilde{A}_2 + (\widetilde{A}_1 - Z\widetilde{C}_1)^{-1})(\widetilde{B}_1 - Z\widetilde{D}_1)\widetilde{C}_2) = f_2(G_1, Z)f_2(G_2, G_1 \cdot Z). \end{aligned}$$

Аналогично исходя из формулы (38) проверяем, что $f_1(G, Z)$ удовлетворяет соотношению (41).

Заметим, что элементы матриц f_i являются четными. Поэтому детерминанты матриц f_i определены. Положим $f(G, Z) = \det f_1(G, \mathbb{Z}) \cdot \det f_2^{-1}(G, Z)$. Из соотношения (41) следует, что

$$f(G_2G_1, Z) = f(G_1, Z) \cdot f(G_2, G_1 \cdot Z). \qquad \square$$

Доказательство теоремы 12.1 завершается леммой 12.4.

12.4. Лемма. *Имеет место равенство $f(G, Z) = \operatorname{sdet} G$, так что функция $f(G, Z)$ не зависит от Z.*

Доказательство. Используя формулу (37), получаем

$$f^{-1}(G, Z) = \det D \det(A - BD^{-1}C)^{-1}.$$

Отсюда следует, что $f(G, Z) = \det(A - BD^{-1}C)\det D^{-1} = \operatorname{sdet} G$. В процессе преобразования использовано второе из равенств (33), согласно которому $\det(I + ZD^{-1}C) = \det(I + CZD^{-1})^{-1}$. □

Замечания. 1) Пусть

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_\Lambda(p|q), \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 12.1 и тождества (37) вытекает другое представление для супердетерминанта:

$$\operatorname{sdet} A = (\det A_{11}^{-1} \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}))^{-1}. \tag{42}$$

2) Пусть $\mathrm{GL}'_\Lambda(p|q)$ и $\mathrm{GL}''_\Lambda(p|q)$ — подмножества множества $\mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)$, состоящие из матриц $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ с обратимыми блоками A_{11} и A_{22} соответственно. Формула (35), определяющая супердетерминант, может быть распространена на $\mathrm{GL}''_\Lambda(p|q)$: для того чтобы она имела смысл, необходима обратимость матрицы A_{22}, но не A_{11}. Очевидно, что $\mathrm{GL}''_\Lambda(p|q)$ является полугруппой и что супердетерминант сохраняет мультипликативность на $\mathrm{GL}''_\Lambda(p|q)$.

Аналогично, формула (42) распространяет $(\operatorname{sdet} A)^{-1}$ с сохранением мультипликативности на $\mathrm{GL}'_\Lambda(p|q)$, а $\mathrm{GL}'_\Lambda(p|q)$ — очевидно, полугруппа.

3) Супердетерминант не может быть распространен на всю алгебру $\mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)$.

13. Вычисление суперследа и супердетерминанта в нестандартном базисе. Пусть $\{e_i\}$ — нестандартный базис в $\mathbb{K}^{p,q}$, а $\mathcal{A} \in \mathrm{End}_\Lambda(p|q)$ — некоторый оператор в $\mathbb{K}^{p,q}(\Lambda)$ и A — его матрица в базисе $\{e_i\}$. Задача состоит в том, чтобы вычислять $\operatorname{str}\mathcal{A}$ и $\operatorname{sdet}\mathcal{A}$, используя непосредственно матрицу A, без перехода к стандартному базису. (Ответ — формула (Д1.4) — *прим. Д. Л.*)

Поскольку e_i — однородные векторы, базис $\{e_i\}$ отличается от стандартного лишь нумерацией. Пусть U — матрица перестановки, превращающая базис $\{e_i\}$ в стандартный: $f_i = \sum e_k U_{ki}$, где $\{f_i\}$ — стандартный базис в $\mathbb{K}^{p,q}$, а U_{ki} — элементы матрицы U.

Пусть B — матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{f_i\}$. Очевидно, что

$$B = U^{-1}AU, \quad \text{причем } \alpha(B_{ij}) = \alpha(e_i) + \alpha(e_j). \tag{43}$$

13.1. Теорема. 1) *Пусть A — матрица оператора $\mathcal{A} \in \mathrm{GL}_\Lambda(p|q)$ в однородном базисе. Разобьем матрицу в A на блоки: $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, где A_{11}, A_{22} — матрицы размера $m \times m$ и $n \times n$ соответственно, а m и n — произвольные числа, удовлетворяющие условию $m + n = p + q$. Тогда*

$$\operatorname{str} A = \operatorname{str} A_{11} + \operatorname{str} A_{22}. \tag{44}$$

Если матрица A_{22} обратима, то

$$\operatorname{sdet} A = \operatorname{sdet}(A_{11} - A_{12}{A_{22}}^{-1}A_{21}) \operatorname{sdet} A_{22}^{-1}. \tag{45}$$

2) *Справедливы соотношения*

$$\operatorname{str} A = \operatorname{str} A^T, \quad \operatorname{sdet} A = \operatorname{sdet} A^T. \tag{46}$$

Заметим, что матрицы A_{11}, A_{22} и $A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ обладают свойством (43). Поэтому они служат матрицами некоторых операторов в пространствах $\mathbb{K}^{p',q'}(\Lambda)$ и $\mathbb{K}^{p'',q''}(\Lambda)$, где p', p'' — количества четных элементов среди e_i при $1 \leqslant i \leqslant m$ и $m + 1 \leqslant i \leqslant m + n$ соответственно, q', q'' — количества нечетных элементов среди e_i, причем $m = p' + q'$, а $n = p'' + q''$. Следовательно, суперслед и супердетерминант матриц A_{11}, A_{22} и $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ определены. Доказательство теоремы — несложное упражнение.

13.2. Теорема Лиувилля. *Пусть* $A(t) \in \mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)$, t *— вещественный параметр. Пусть, далее,* $X(t) \in \mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению с начальным условием*

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad X(0) = I. \tag{47}$$

Тогда $X(t) \in \mathrm{GL}_\Lambda(p|q)$ *при всех* t *и имеет место соотношение*

$$\operatorname{sdet} X = \exp\left(\int_0^t \operatorname{str} A(s)\, ds\right). \tag{48}$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{X}$ — решение дифференциального уравнения с начальным условием

$$\frac{d\widetilde{X}}{dt} = -\widetilde{X}A, \quad \widetilde{X}(0) = I. \tag{49}$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}(\widetilde{X}X) = \frac{d\widetilde{X}}{dt}X + \widetilde{X}\frac{dX}{dt} = -\widetilde{X}AX + \widetilde{X}AX = 0.$$

Учитывая начальные условия, находим что $\widetilde{X}X = I$, откуда получаем, что $X \in \mathrm{GL}_\Lambda(p|q)$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, а $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$. Положим $Y = X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{21}$, а $Z = X_{22}^{-1}$. Из соотношений (47) следует, что

$$\frac{dY}{dt} = (A_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}A_{21})Y, \quad \frac{dZ}{dt} = -Z(A_{21}X_{12}X_{22}^{-1} + A_{22}).$$

Отсюда, используя классическую теорему Лиувилля, получаем, что

$$\frac{d}{dt}\det Y = \operatorname{tr}(A_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}A_{21})\det Y, \quad \frac{d}{dt}\det Z = -\operatorname{tr}(A_{21}X_{12}X_{22}^{-1} + A_{22})\det Z.$$

Далее, по лемме 11 имеем

$$\operatorname{tr}(A_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}A_{21}) = \operatorname{tr}(A_{11} + A_{21}X_{12}X_{22}^{-1}).$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}\operatorname{sdet} X = \left(\frac{d}{dt}\det Y\right) \cdot \det Z + \det Y \frac{d}{dt}\det Z = \\ = \operatorname{tr}(A_{11} - A_{22})\det Y \cdot \det Z = \operatorname{str} A \ \operatorname{sdet} X.$$

Учитывая начальное условие $X(0) = I$, получаем равенство (48). □

13.3. Замечание. Мультипликативность супердетерминанта может быть выведена из теоремы Лиувилля. Пусть X, $Y \in \mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)$. Соединим их гладкими кривыми $X(t)$, $Y(t)$ с единичной матрицей:

$$X(0) = Y(0) = I, \quad X(1) = X, \quad Y(1) = Y.$$

Положим

$$A(t) = \frac{dX(t)}{dt}X^{-1}(t), \quad B(t) = \frac{dY(t)}{dt}Y^{-1}(t).$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}(XY) = (A + B_1)XY, \quad B_1 = XBX^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{sdet}(XY) = \exp\left(\int_0^1 \operatorname{str}(A + B_1)\, dt\right) = \exp\left(\int_0^1 \operatorname{str} A\, dt + \int_0^1 \operatorname{str} B\, dt\right) = \\ = \operatorname{sdet} X \cdot \operatorname{sdet} Y.$$

14. Лемма. *Пусть* U, V *— прямоугольные блочные матрицы, составленные из элементов алгебры Грассмана:*

$$U = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m' & m'' \end{array} \\ & \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{array}{l} n' \\ n'' \end{array} \end{array}, \quad V = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n' & n'' \end{array} \\ & \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{array}{l} m' \\ m'' \end{array} \end{array}.$$

1) *Если диагональные блоки* U_{ii}, V_{ii} *состоят из четных элементов алгебры* Λ, *а внедиагональные* U_{ij} *и* V_{ij}, *где* $i \neq j$, *— из нечетных, то*

$$\operatorname{str} UV = \operatorname{str} VU, \quad \operatorname{sdet}(I + UV) = \operatorname{sdet}(I + VU).$$

2) *Если диагональные блоки состоят из нечетных элементов, а внедиагональные — из четных, то*

$$\operatorname{str} UV = -\operatorname{str} VU, \quad \operatorname{sdet}(I + UV) = \operatorname{sdet}\,(I + VU)^{-1.} \tag{50}$$

Доказательство. Используя лемму 11 и свойства следа для матриц с коммутирующими элементами, находим

$$\operatorname{str} UV = \begin{cases} \operatorname{tr}(U_{11}V_{11} + U_{12}V_{21}) - \operatorname{tr}(U_{21}V_{12} + U_{22}V_{22}) = \\ = \operatorname{tr}(V_{11}U_{11} + V_{21}U_{12}) - \\ \qquad - \operatorname{tr}(V_{12}U_{21} + V_{22}U_{22}) = \operatorname{str} VU & \text{в первом случае,} \\ \operatorname{tr}(U_{11}V_{11} + U_{12}V_{21}) - \operatorname{tr}(U_{21}V_{12} + U_{22}V_{22}) = \\ = \operatorname{tr}(-V_{11}U_{11} + V_{12}U_{21}) - \\ \qquad - \operatorname{tr}(V_{12}U_{21} + V_{22}U_{22}) = -\operatorname{str} VU & \text{во втором случае.} \end{cases}$$

Используя теорему Лиувилля, при достаточно малом α, обеспечивающем сходимость необходимых рядов, получаем

$$\ln \operatorname{sdet}(I-\alpha UV)=\operatorname{str}\ln(I-\alpha UV)=-\sum\frac{\alpha^n}{n}\operatorname{str}((UV)^{n-1}UV)=$$
$$=\begin{cases}-\sum\frac{\alpha^n}{n}\operatorname{str}(V(UV)^{n-1}U)=-\sum\frac{\alpha^n}{n}\operatorname{str}((VU)^n= \\ \qquad =\ln\operatorname{sdet}(I-\alpha VU) \quad \text{в первом случае,}\\ \sum\frac{\alpha^n}{n}\operatorname{str}(V(UV)^{n-1}U)=\sum\frac{\alpha^n}{n}\operatorname{str}((VU)^n= \\ \qquad =\ln\operatorname{sdet}(I-\alpha VU) \quad \text{во втором случае.}\end{cases}$$

Отсюда находим

$$\operatorname{sdet}(I-\alpha UV)=\begin{cases}\operatorname{sdet}(I-\alpha VU) & \text{в первом случае,}\\ \operatorname{sdet}\,(I-\alpha VU)^{-1} & \text{во втором случае.}\end{cases} \tag{51}$$

Тождества (51), будучи справедливыми при достаточно малых α, остаются справедливыми при всех α в силу аналитичности по α левой и правой частей. В частности, они справедливы при $\alpha=-1$. ☐

15. Суперслед и супердетерминант второго рода. Пусть $Q_\Lambda(p)$ — подалгебра в $\mathrm{Mat}_\Lambda(p|p)$, состоящая из матриц вида

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_2 & A_1\end{pmatrix}. \tag{52}$$

Пусть $GQ_\Lambda(p)$ — множество обратимых элементов в $Q_\Lambda(p)$. Легко видеть, что $\operatorname{str}A=0$ для любого $A\in Q_\Lambda(p)$ и $\operatorname{sdet}A=1$ для любого $A\in GQ_\Lambda(p)$. Однако на $Q_\Lambda(p)$ существует и нетривиальная функция, обладающая свойством следа (т. е. равная нулю на суперкоммутаторах элементов из $Q_\Lambda(p)$ — *прим. Д. Л.*), а на $GQ_\Lambda(p)$ — нетривиальная функция, со свойством, похожим на главное свойство детерминанта: он есть гомоморфизм групп. Назовем их соответственно *суперследом и супердетерминантом 2-го рода*[1]. Они определены формулами

$$\widetilde{\operatorname{str}}\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_2 & A_1\end{pmatrix}=\operatorname{tr}A_2,\qquad \widetilde{\operatorname{sdet}}\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_2 & A_1\end{pmatrix}=\operatorname{tr}\,\ln(I+A_1^{-1}A_2). \tag{53}$$

В связи с определением супердетерминанта 2-го рода напомним, что по теореме 10.1 включение $\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_2 & A_1\end{pmatrix}\in GQ_\Lambda(p)$ имеет место, если и только если A_1 — невырожденная матрица. Отметим, что, в то время как значение

---

[1] К настоящему времени устоялись термины *странный след* (queer trace, qtr) и *странный детерминант* (queer determinant, qet), а определены они соответственно на *странной* (*queer*) *супералгебре Ли* $\mathfrak{q}(n)$ и группе Λ-точек $GQ_\Lambda(n)$ соответствующей *странной супергруппы Ли*. — *Прим. Д. Л.*

суперследа является четным элементом алгебры Грассмана Λ, значение суперследа 2-го рода является ее нечетным элементом.

Нечетным элементом является также[1] $\operatorname{tr}\,\ln(I+A_1^{-1}A_2)$. Поэтому $(\operatorname{tr}\,\ln(I+A_1^{-1}A_2))^2=0$ и правая часть второго равенства (53) может быть записана также в виде

$$1+\operatorname{tr}\,\ln(I+A_1^{-1}A_2)=\exp\operatorname{tr}\,\ln(I+A_1^{-1}A_2). \tag{54}$$

15.1. Теорема. 1) *Пусть A, $B\in Q_\Lambda(p)$. Тогда*

$$\widetilde{\operatorname{str}}AB=\widetilde{\operatorname{str}}BA. \tag{55}$$

2) *Пусть A, $B\in GQ_\Lambda(p)$. Тогда*

$$\widetilde{\operatorname{sdet}}(AB)=\widetilde{\operatorname{sdet}}A+\widetilde{\operatorname{sdet}}B. \tag{56}$$

3) *Пусть $A(t)\in Q_\Lambda(p)$ при всех $t\in\mathbb{R}$ и $X(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению и начальному условию*

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X,\qquad X(0)=I. \tag{57}$$

Тогда $X(t)\in GQ_\Lambda(p)$ при всех t и справедлива теорема Лиувилля

$$\ln\,\widetilde{\operatorname{sdet}}X(t)=\int_0^t\widetilde{\operatorname{str}}A(s)\,ds. \tag{58}$$

Доказательство. Утверждение 1) проверяется непосредственно. Докажем утверждение 3), затем выведем из него утверждение 2).

Доказательство включения $X(t)\in GQ_\Lambda(p)$ дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения в теореме 13.2 и поэтому может быть опущено.

Перейдем к доказательству формулы (58). Пусть $A(t)$ имеет вид (52) и $X(t)$ — аналогичный вид. Положим $Z(t)=X_1^{-1}(t)X_2(t)$. Исходя из соотношений (57) получаем для $Z(t)$ уравнение

$$\frac{dZ}{dt}=-X_1^{-1}(A_1X_1+A_2X_2)X_1^{-1}X_2+X_1^{-1}(A_1X_2+A_2X_1)=X_1^{-1}A_2X_1(I-Z^2). \tag{59}$$

---

[1] Если квадратная матрица Z состоит из нечетных элементов алгебры Грассмана Λ, то по лемме 11 имеем

$$\operatorname{tr}Z^{2n}=\operatorname{tr}(Z^{2n-1}\cdot Z)=-\operatorname{tr}(Z\cdot Z^{2n-1})=-\operatorname{tr}Z^{2n}.$$

Следовательно, $\operatorname{tr}Z^{2n}=0$. Поэтому в этом случае

$$\operatorname{tr}\,\ln(1+Z)=\sum(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{tr}Z^n}{n}=\sum\frac{\operatorname{tr}Z^{2n+1}}{2n+1}$$

является нечетным элементом алгебры Грассмана Λ.

Матрица Z состоит из нечетных элементов, поэтому $\operatorname{tr} Z^{2k} = 0$. Кроме того, легко видеть, что $\frac{d}{dt}\operatorname{tr} Z^{2k+1} = (2k+1)\operatorname{tr}\left(\frac{dZ}{dt}Z^{2k}\right)$. Поэтому из формулы (59) выводим уравнение

$$\frac{d}{dt}\operatorname{tr}\ln(I+Z) = \operatorname{tr}\left(\frac{dZ}{dt}(I+Z^2+\ldots)\right) = \operatorname{tr}\left(\frac{dZ}{dt}(I-Z^2)^{-1}\right) = \operatorname{tr} A_2, \tag{60}$$

которое в совокупности с начальным условием $Z(0) = 0$, следующим из (57), эквивалентно соотношению (58).

2) Пусть X, $Y \in \mathrm{GQ}_\Lambda(p)$. Соединим эти матрицы гладкими кривыми $X(t)$ и $Y(t)$ с единичной матрицей I, т. е. пусть $X(0) = I$, $Y(0) = I$, $X(1) = X$, $Y(1) = Y$. Положим $A(t) = \frac{dX}{dt}X^{-1}$, $B(t) = \frac{dY}{dt}Y^{-1}$. Заметим, что

$$\frac{d}{dt}(XY) = \frac{dX}{dt}\cdot Y + X\frac{dY}{dt} = (A + XBX^{-1})XY.$$

Отсюда в силу формулы (60) получаем

$$\frac{d}{dt}\operatorname{tr}\ln(I+Z) = \operatorname{tr}(A + XBX^{-1}) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B.$$

Следовательно,

$$\ln\widetilde{\mathrm{sdet}}(XY) = \int_0^1 \operatorname{tr} A(t)\,dt + \int_0^1 \operatorname{tr} B(t)\,dt = \ln\widetilde{\mathrm{sdet}}X + \ln\widetilde{\mathrm{sdet}}Y,$$

и тем самым $\widetilde{\mathrm{sdet}}(XY) = \widetilde{\mathrm{sdet}}X + \widetilde{\mathrm{sdet}}Y$. □

15.2. Замечание. Пусть $\mathrm{Mat}_\Lambda(p)$ — алгебра **всех** матриц порядка p с элементами из алгебры Грассмана Λ. Алгебра $\mathrm{Q}_\Lambda(p)$ изоморфна $\mathrm{Mat}_\Lambda(p)$, изоморфизм $\varphi\colon\ \mathrm{Q}_\Lambda(p) \to \mathrm{Mat}_\Lambda(p)$ действует по формуле

$$\varphi(A) = A_1 + A_2, \quad \text{где } A \in \mathrm{Q}_\Lambda(p) \text{ имеет вид (52).}$$

Обратный изоморфизм. Пусть $B = B_1 + B_2 \in \mathrm{Mat}_\Lambda(p)$, где B_1 состоит из четных элементов алгебры Λ, а B_2 — из нечетных. Тогда $\varphi^{-1}(B) = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix}$.

16. Нормальная форма матрицы над[1] $\mathbb{C}$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_\Lambda(p|q), \qquad A^0 = mA = \begin{pmatrix} A_{11}^0 & 0 \\ 0 & A_{22}^0 \end{pmatrix},$$

где m — гомоморфизм, описанный в п. 10. Матрицу $A \in \mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)$ назовем матрицей *общего положения*, если все собственные числа матрицы A^0 попарно различны.

---

[1] См. гл. Д 7, где доказаны гораздо более общие результаты. — *Прим. Д. Л.*

16.1. Теорема. *Пусть $A \in \mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)$ — матрица общего положения. Тогда существует матрица $X \in \mathrm{GL}_\Lambda(p|q)$, такая что матрица $E = XAX^{-1}$ диагональна.*

Очевидно, никакая матрица $A \in \mathrm{Q}_\Lambda(p)$, рассматриваемая как элемент множества $\mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)$, не является матрицей общего положения. Однако для алгебры $\mathrm{Q}_\Lambda(p)$ может быть дано свое определение элемента общего положения. Скажем, что матрица $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Q}_\Lambda(p)$ *общего положения*, если матрица $A_1^0 = m(A_1)$ имеет различные собственные числа. Для алгебры $\mathrm{Q}_\Lambda(p)$ справедлива теорема, аналогичная теореме 16.1.

17. Алгебры и группы операторов в пространствах $\mathbb{K}^{p,q}$ и $\mathbb{K}^{p,q}(\Lambda)$. Общие замечания. Свойства ассоциативных алгебр операторов, которые обсуждаются в этом параграфе, переносятся на произвольные множества операторов и в дальнейшем часто используются в применении к совокупностям операторов, отличным от ассоциативных алгебр (например к супералгебрам Ли). Такое перенесение производится по следующему правилу. Пусть $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — некоторое семейство операторов и $\mathfrak{A}$ — порожденная этим семейством ассоциативная алгебра. Пусть, далее, для ассоциативных алгебр определено некоторое свойство X. Мы скажем, что *семейство $\widetilde{\mathfrak{A}}$ (не) обладает свойством X*, если алгебра $\mathfrak{A}$ (не) обладает этим свойством. Например, семейство $\widetilde{\mathfrak{A}}$ неприводимо тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{A}$ неприводима (так обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$ супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ и сама $\mathfrak{g}$ неприводимы одновременно).

18. Неприводимость. Пусть $\mathfrak{A} \subset \mathrm{End}(p|q)$ — некоторая ассоциативная алгебра, действующая в пространстве $\mathbb{K}^{p,q}$. Представление алгебры $\mathfrak{A}$ назовем *градуированно неприводимым*, если в $\mathbb{K}^{p,q}$ нет собственного (подпространство пространства L называется *собственным*, если оно отлично от всего L и от 0) градуированного подпространства, инвариантного относительно всех операторов[1] из $\mathfrak{A}$. Представление алгебры $\mathfrak{A}$ назовем *абсолютно неприводимым*, если в $\mathbb{K}^{p,q}$ нет никакого собственного подпространства, инвариантного относительно $\mathfrak{A}$.

18.1. Теорема. *Пусть алгебра $\mathfrak{A} \subset \mathrm{End}(p|q)$ градуированно неприводима в $\mathbb{C}^{p,q}$. Тогда*

1) *если $p \neq q$, то алгебра $\mathfrak{A}$ абсолютно неприводима в $\mathbb{C}^{p,q}$;*

---

[1] В настоящее время приводимое, но градуированно неприводимое представление называют *Q-неприводимым*, а абсолютно неприводимое представление называют *G-неприводимым*. Отметим, что Ф. А. Березин часто пишет «неприводимая алгебра», а не «неприводимое представление» этой алгебры. Теоремы этого пункта, приведенные в рукописи без доказательств, доказаны в книге [СоС1°], в том числе и над $\mathbb{R}$, где формулировки отличаются от формулировок над $\mathbb{C}$, в частности, бывают и неэквивалентные специальные базисы. — *Прим. Д. Л.*

2) если $p = q$ и алгебра $\mathfrak{A}$ не является абсолютно неприводимой, то существует стандартный базис, в котором матрицы операторов $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}. \tag{61}$$

Базис, в котором матрицы операторов $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ имеют вид (61), в дальнейшем назовем *специальным*.

Замечание. Пусть $p = q$, алгебра $\mathfrak{A}$ градуированно неприводима, но не абсолютно неприводима, а R есть $\mathfrak{A}$-инвариантное подпространство. Тогда

1) R не содержит собственных инвариантных подпространств;

2) в $\mathbb{C}^{p,p}$ существует трансверсальное R инвариантное подпространство $\widehat{R} = \mathbf{A}R$.

В стандартном базисе, в котором операторы из $\mathfrak{A}$ задаются матрицами вида (61), элементы пространств R и $\widehat{R}$ выглядят следующим образом:

$$x = \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} \in R, \quad x = \begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix} \in \widehat{R}, \quad \text{где } u = (u_1, \ldots, u_p)' \in \mathbb{K}^p.$$

Сужения оператора $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ на пространства R и $\widehat{R}$ задаются в этом базисе формулами $u \to (A_1 + A_2)u$ и $u \to (A_1 - A_2)u$ и соответственно, где A_1, A_2 те же, что в формуле (61).

18.2. Теорема (лемма Шура). *Пусть $\mathfrak{A}_1$ — градуированно неприводимая ассоциативная алгебра операторов в пространстве $\mathbb{C}^{p_1,q_1}$, а $\mathfrak{A}_2$ — изоморфная ей градуированно неприводимая алгебра операторов в пространстве $\mathbb{C}^{p_2,q_2}$ и $T\colon \mathbb{C}^{p_1,q_1} \to \mathbb{C}^{p_2,q_2}$ — линейный оператор, такой что*

$$\varphi(B)T = TB, \quad \mathbf{A}_2 T = \varepsilon T \mathbf{A}_1 \quad \textit{для любого} \quad B \in \mathfrak{A}_1,$$

где $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ — операторы четности в пространствах $\mathbb{C}^{p_1,q_1}$ и $\mathbb{C}^{p_2,q}$ соответственно, $\varepsilon = \pm 1$, а $\varphi\colon \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ — изоморфизм алгебр.

Тогда либо $T = 0$, либо оператор T является изоморфизмом пространств и даже суперпространств, возможно, с точностью до изменения четности. Во втором случае $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$ при $\varepsilon = 1$ и $p_1 = q_2$, $q_1 = p_2$ при $\varepsilon = -1$.

При $p = q$ и если алгебра $\mathfrak{A}$ градуированно неприводима, но не абсолютно неприводима, то оператор, перестановочный со всеми элементами $\mathfrak{A}$, имеет вид $\lambda I + \mu\mathfrak{I}$, где I — единичный оператор и $\mathfrak{I}$ — оператор, имеющий в специальном базисе матрицу $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$.

18.3. Теорема Бернсайда (суперверсия над $\mathbb{C}$)[1]. *Пусть $\mathfrak{A}$ — градуированно неприводимая ассоциативная алгебра операторов в $\mathbb{C}^{p,q}$. Тогда*

1) если $p \neq q$, то $\mathfrak{A} = \mathrm{End}(p|q)$;

2) если $p = q$ и алгебра $\mathfrak{A}$ не абсолютно неприводима, то $\mathfrak{A} = \mathrm{Q}(p)$.

Доказательство. 1) Это, очевидно, следствие теоремы 18.1 и *теоремы Бернсайда* (см. [ВдВ*]).

2) Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторая вполне приводимая алгебра операторов в $\mathbb{C}^n$. Через $\bar{\mathfrak{B}}$ обозначим алгебру, состоящую из всех операторов, коммутирующих с каждым $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$. Алгебра $\bar{\mathfrak{B}}$ называется *коммутаторной* относительно $\mathfrak{B}$. По *теореме Веддерберна* (см. [ВдВ*]) имеем $\bar{\bar{\mathfrak{B}}} = \mathfrak{B}$.

В случае $p = q$ и при отсутствии абсолютной неприводимости алгебра $\mathfrak{A}$ вполне приводима и, как уже отмечалось, $\bar{\mathfrak{A}} = \lambda I + \mu\mathfrak{I}$, где λ, $\mu \in \mathbb{C}$. Очевидно, что $\bar{\bar{\mathfrak{A}}} = \mathrm{Q}_{\mathbb{C}}(p)$. Поэтому в силу теоремы Веддерберна имеем $\mathfrak{A} = \bar{\bar{\mathfrak{A}}} = \mathrm{Q}_{\mathbb{C}}(p)$. ☐

19. Грассмановы оболочки неприводимых алгебр. Пусть $\mathfrak{A}$ — градуированно неприводимая алгебра операторов в $\mathbb{C}^{p,q}$. Грассманова оболочка $\mathfrak{A}(\Lambda)$ является, очевидно, алгеброй операторов в $\mathbb{C}^{p,q}(\Lambda)$. Из результатов предыдущего пункта вытекает, что $\mathfrak{A}(\Lambda) = \mathrm{End}_\Lambda(p|q)$ при $p \neq q$, а также при $p = q$ в случае абсолютной неприводимости. При $p = q$ и в отсутствии абсолютной неприводимости имеем $\mathfrak{A}(\Lambda) = \mathrm{Q}_\Lambda(p)$.

Представляют интерес следующие вопросы. Пусть $\mathfrak{B} \subset \mathrm{End}_\Lambda(p|q)$ — подалгебра. В каком случае $\mathfrak{B}$ является грассмановой оболочкой подалгебры $\mathfrak{A} \subset \mathrm{End}(p|q)$? В каком случае алгебра $\mathfrak{B}$, рассматриваемая как линейное пространство, является грассмановой оболочкой некоторого подпространства $\mathfrak{A} \subset \mathrm{End}(p|q)$?

Ответ состоит в следующем. Введем в алгебре Грассмана Λ_n образующие ξ_i, где $1 \leqslant i \leqslant n$, и разложим произвольный элемент из $\mathfrak{B}$ по ним: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \sum \mathcal{A}_i \xi_i + \mathcal{B}$, где $\operatorname{fil} \mathcal{B} \geqslant 2$. Очевидно, что $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_i \in \mathrm{End}(p|q)$, причем $\alpha(\mathcal{A}_0) = \alpha(\mathcal{B}) = 0$, а $\alpha(\mathcal{A}_i) = 1$. Пусть ${}^0\mathfrak{A}$ (соотв. ${}^1\mathfrak{A}$) — подпространства в $\mathrm{End}(p|q)$, порожденные всеми операторами $\mathcal{A}_0(\mathcal{A})$ (соотв. $\mathcal{A}_i(\mathcal{A})$), когда $\mathcal{A}$ пробегает $\mathfrak{B}$. (Очевидно, что ${}^0\mathfrak{A}$ является подалгеброй в $\mathrm{End}(p|q)$.) Положим, далее, $\mathfrak{A} = {}^0\mathfrak{A} \oplus {}^1\mathfrak{A}$. Ясно, что если алгебра $\mathfrak{B}$, рассматриваемая как линейное пространство, служит грассмановой оболочкой какого-нибудь подпространства $\mathrm{End}(p|q)$, то этим подпространством может быть только $\mathfrak{A}$. В частности, если $\mathfrak{B}$ служит грассмановой оболочкой подалгебры, то $\mathfrak{A}$ является этой подалгеброй.

20. Аналоги классических групп. Очевидным аналогом общей и специальной линейных групп $\mathrm{GL}(n)$ и $\mathrm{SL}(n)$ служат группы $\mathrm{GL}_\Lambda(p|q)$

---

[1] Аналог этой теоремы над незамкнутыми и другими полями см. в [СоС1°]. — *Прим. Д. Л.*

и $\mathrm{SL}_\Lambda(p|q)$, состоящие соответственно из всех обратимых операторов в $\mathbb{K}^{p,q}(\Lambda)$ и из всех операторов в $\mathbb{K}^{p,q}(\Lambda)$ с супердетерминантом, равным 1.

При $p=q$ аналогами групп $\mathrm{GL}(n)$ и $\mathrm{SL}(n)$ можно считать также группы $\mathrm{GQ}_\Lambda(p)$ и $\mathrm{SQ}_\Lambda(p)$. Ранее отмечалось, что алгебра $\mathrm{Q}_\Lambda(p)$ изоморфна алгебре всех матриц порядка p, элементы которых суть произвольные элементы алгебры Грассмана Λ. Это обстоятельство наводит на мысль, что группы $\mathrm{GQ}_\Lambda(p)$ служат даже более естественным аналогом классических групп $\mathrm{GL}(n)$, чем группы $\mathrm{GL}(p|q)$. Однако, как мы увидим ниже, группы серии $\mathrm{GQ}_\Lambda(p)$ обладают рядом любопытных особенностей, не имеющих классического аналога и не встречающихся у групп серии $\mathrm{GL}_\Lambda(p|q)$.

Пусть Λ — комплексная алгебра Грассмана с инволюцией 1-го или 2-го рода $*$. Введем в пространстве $\mathbb{C}^{p,q}(\Lambda)$ эрмитово скалярное произведение со значениями в ${}^0\Lambda$, положив

$$(x,\, y) = \sum x_k^* y_k, \tag{62}$$

где $x = \sum x_k e_k$, $y = \sum y_k e_k$ в однородном базисе $\{e_i\}$ суперпространства $\mathbb{C}^{p,q}$. Подгруппу в $\mathrm{GL}_\Lambda(p|q)$, состоящую из всех операторов, сохраняющих скалярное произведение (62) инвариантным, обозначим $\mathrm{U}_\Lambda(p|q)$. Подгруппу в $\mathrm{U}_\Lambda(p|q)$, состоящую из операторов с супердетерминантом, равным 1, обозначим $\mathrm{SU}_\Lambda(p|q)$. Группы $\mathrm{U}_\Lambda(p|q)$ и $\mathrm{SU}_\Lambda(p|q)$ являются супераналогами классических общей унитарной и специальной (унимодулярной) унитарной групп $\mathrm{U}(n)$ и $\mathrm{SU}(n)$. Тот факт, что скалярное произведение (62) сохраняется, эквивалентно матричному тождеству [1]

$$U^* U = I_{p+q}, \quad \text{где } U \in \mathrm{U}_\Lambda(p|q). \tag{63}$$

Группы $\mathrm{U}_\Lambda(p|q)$ и $\mathrm{SU}_\Lambda(p|q)$ являются вещественными формами групп $\mathrm{GL}_\Lambda(p|q)$ и $\mathrm{SL}_\Lambda(p|q)$ соответственно [2].

Пусть $p=2r$ — четно. Рассмотрим в $\mathbb{C}^{p,q}(\Lambda)$ скалярное произведение со значениями в ${}^0\Lambda$:

$$(x,\, y) = \sum_{i=1}^{r} (x_i y_{r+i} - x_{r+i} y_i) + \sum_{k=p+1}^{p+q} x_k y_k. \tag{64}$$

---

[1] Обратим внимание на то, что, в отличие от несуперного случая, если скалярное произведение (62) записать в виде $(x,\, y) = \sum x_k y_k^*$, то условие унитарности изменится: оно будет иметь вид $U^* \mathbf{A} U = \mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — оператор четности.

[2] Вещественная матричная группа G называется *вещественной формой* комплексной матричной группы G_1, если матричные элементы группы G_1 получаются из матричных элементов A группы G аналитическим продолжением по параметрам. Группа G обычно состоит из всех элементов группы G_1, удовлетворяющих неаналитическому уравнению вида $AKA^* = K$ или $A = \bar{A}$, где K — фиксированная матрица.

Тот факт, что скалярное произведение (64) сохраняется, эквивалентно матричному тождеству

$$X^T B X = B, \quad \text{где } B = \begin{pmatrix} -iJ_{2r} & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}, \quad \text{а } X \in \mathrm{GL}_\Lambda(2r|q). \tag{65}$$

Подгруппа в $\mathrm{GL}_\Lambda(2r|q)$, состоящая из всех операторов X, сохраняющих скалярное произведение (64), называется *ортосимплектической*. Она является супераналогом одновременно ортогональной и симплектической классических групп и обозначается $\mathrm{OSp}_\Lambda(q|2r)$.

Эта группа представляет особый интерес для физических приложений, так как обладает вещественной формой, которая может быть интерпретирована как группа суперканонических преобразований, перемешивающих ферми- и бозе-операторы рождения и уничтожения. Поясним это.

Рассмотрим $\mathbb{Z}/2$-градуированную ассоциативную алгебру $\mathfrak{A}$ с единицей и с однородными образующими

$$\widehat{p}_k,\ \widehat{q}_k,\ \widehat{\gamma}_j, \quad \text{где } 1 \leqslant k \leqslant r,\ \ 1 \leqslant j \leqslant q, \quad \alpha(\widehat{p}_i) = \alpha(\widehat{q}_i) = 0, \quad \alpha(\widehat{\gamma}_j) = 1,$$

которые удовлетворяют соотношениям ($i = \sqrt{-1}$, $[\cdot\,,\cdot]$ — суперкоммутатор)

$$\begin{aligned} &[\widehat{p}_k,\, \widehat{p}_{k'}] = [\widehat{q}_k,\, \widehat{q}_{k'}] = 0, \quad && [\widehat{p}_k,\, \widehat{q}_{k'}] = \frac{1}{i}\delta_{kk'}, \\ &[\widehat{p}_k,\, \widehat{\gamma}_s] = [\widehat{q}_k,\, \widehat{\gamma}_s] = 0, \quad && [\widehat{\gamma}_s,\, \widehat{\gamma}_{s'}] = \delta_{ss'}. \end{aligned} \tag{66}$$

Отступление. Образующие $\widehat{p}_k$, $\widehat{q}_k$ удовлетворяют перестановочным соотношениям, характерным для операторов импульса и координаты. Далее мы рассматриваем образующие $\widehat{a}_{k,B}$, $\widehat{a}^*_{k,B}$, $\widehat{a}_{k,F}$, $\widehat{a}^*_{k,F}$, которые обладают перестановочными соотношениями, характерными для бозе- и ферми-операторов уничтожения и рождения. Однако я воздерживаюсь от операторной реализации алгебры $\mathfrak{A}$ и в связи с этим не называю операторами образующие $\widehat{p}_k$, $\widehat{q}_k$ и т. п. Причина этого следующая. У алгебры $\mathfrak{A}$ существует естественная инволюция $*$, определяемая тем, что образующие $\widehat{p}_k$, $\widehat{q}_k$, $\widehat{\gamma}_s$ являются относительно нее инвариантными: $\widehat{p}^*_k = \widehat{p}_k$, $\widehat{q}^*_k = \widehat{q}_k$, $\widehat{\gamma}^*_k = \widehat{\gamma}_s$. У алгебры $\mathfrak{A}$ существует также операторная реализация в гильбертовом пространстве, при которой инволюция переходит в эрмитово сопряжение. Таким образом, при этой реализации $\widehat{p}_k$, $\widehat{q}_k$, $\widehat{\gamma}_s$ являются самосопряженными операторами.

Однако далее нам придется рассмотреть грассманову оболочку $\mathfrak{A}(\Lambda)$ алгебры $\mathfrak{A}$. Алгебра $\mathfrak{A}(\Lambda)$ обладает инволюцией, которая является продолжением инволюции, имеющейся в $\mathfrak{A}$. Однако из-за нильпотентности алгебры Λ алгебра $\mathfrak{A}(\Lambda)$ не может [1] быть реализована операторами в гильбертовом пространстве так, чтобы инволюция переходила в эрмитово

---

[1] В гл. 4 такая реализация, однако, предложена. — *Прим. Д. Л.*

сопряжение. Это обстоятельство мне кажется очень существенным с точки зрения физических приложений.

Положим

$$\widehat{r}_k = \begin{cases} \widehat{p}_k & \text{при } 1 \leqslant k \leqslant r, \\ \widehat{q}_{k-r} & \text{при } r+1 \leqslant k \leqslant p, \\ \widehat{\gamma}_{k-p} & \text{при } p+1 \leqslant k \leqslant p+q. \end{cases}$$

Соотношения (66) эквивалентны следующим соотношениям между операторами $\widehat{r}_k$:

$$\widehat{r}_k\widehat{r}_\ell - (-1)^{\alpha(\widehat{r}_k)\alpha(\widehat{r}_\ell)}\widehat{r}_\ell\widehat{r}_k = B_{k\ell}, \tag{67}$$

где $B = (B_{k\ell})$ — та же матрица, что в формуле (65).

Рассмотрим грассманову оболочку $\mathfrak{A}(\Lambda)$ алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть g — линейный однородный автоморфизм алгебры $\mathfrak{A}(\Lambda)$:

$$\widehat{r}_k \longrightarrow \widetilde{\widehat{r}}_k = g\widehat{r}_k = \sum G_{ks}\widehat{r}_s, \qquad G_{ks} \in \Lambda, \tag{68}$$

Кроме того, из того, что g — однородный автоморфизм, вытекает, что элементы $\widetilde{\widehat{r}}_k$ однородны и что $\alpha(\widetilde{\widehat{r}}_k) = \alpha(\widehat{r}_k)$. Отсюда, в свою очередь, следует, что элементы G_{ks} также однородны и что $\alpha(G_{ks}) = \alpha(\widehat{r}_k) + \alpha(\widehat{r}_s)$. Таким образом, $G = (G_{ks}) \in \mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)$, и соотношение (68) можно записать в матричной форме: $\widetilde{\widehat{r}} = G\widehat{r}$. Заметим теперь, что левая часть соотношения (67) является матричным элементом матрицы $\widehat{r}\,\widehat{r}' - \mathbf{A}(\widehat{r}\,\widehat{r}')^T$. Так как соотношения между элементами $\widetilde{\widehat{r}}_k$ такие же, как и между элементами $\widehat{r}_k$, условие, что G является матрицей градуированного автоморфизма алгебры $\mathfrak{A}(\Lambda)$, имеет вид:

$$B = G^TBG, \tag{69}$$

где B — та же матрица, что в формуле (65). При проведении преобразований использовано тождество $(X^T)^T = \mathbf{A}X\mathbf{A}$. Соотношение (69) эквивалентно условию (65), ввиду того что $B^2 = I$. Таким образом, группа градуированных линейных автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}(\Lambda)$ совпадает с $\mathrm{OSp}_\Lambda(q|p)$.

Алгебра $\mathfrak{A}$ обладает естественной инволюцией $*$, относительно которой образующие $\widehat{p}_k$, $\widehat{q}_k$, $\widehat{\gamma}_s$ инвариантны. Пусть Λ — алгебра Грассмана с инволюцией, которую тоже обозначим $*$. В таком случае в $\mathfrak{A}(\Lambda)$ существует инволюция, порожденная инволюциями в $\mathfrak{A}$ и в Λ. Ввиду того, что $\widehat{r}_k^* = \widehat{r}_k$, условие перестановочности автоморфизма с инволюцией имеет вид

$$(g\widehat{r}_k)^* = \sum \widehat{r}_s^*G_{ks}^* = \sum (-1)^{\alpha(s)(\alpha(k)+\alpha(s))}G_{ks}^*\widehat{r}_s^* = \sum G_{ks}\widehat{r}_s.$$

Отсюда $G_{ks} = (-1)^{(\alpha(k)+1)\alpha(s)}G_{ks}^*$, т. е. $G = \bar{G}$. Учитывая соотношение (65), условие $G = \bar{G}$ можно переписать в эквивалентной форме $\bar{G}^TBG = B$, откуда получим $\mathbf{A}G^*\mathbf{A}\bar{B}G = \bar{B}$. Учитывая, что $\mathbf{A}\bar{B} = -B$, окончательно получаем

$$G^*BG = B. \tag{70}$$

Пусть $\mathrm{OSp}_{\Lambda,*}(q|p)$ — подгруппа в $\mathrm{OSp}_\Lambda(q|p)$, коммутирующая с инволюцией $*$. До сих пор характер инволюции был не важен.

Покажем теперь, что группа $\mathrm{OSp}_{\Lambda,*}(q|p)$ является вещественной формой группы $\mathrm{OSp}_\Lambda(q|p)$, только если $*$ является инволюцией 1-го рода в алгебре Λ. Применим к обеим частям равенства (70) инволюцию $*$. Учитывая, что при инволюции любого рода $J^* = J$, получаем $B^*J(B^*)^* = J$. Это условие эквивалентно равенству (70), только если $(B^*)^* = B$, т. е. если $*$ является инволюцией 1-го рода в алгебре Λ. В этом случае при аналитическом продолжении параметров группы $\mathrm{OSp}_{\Lambda,*}(q|p)$ в комплексную область условие (70) разрушается и группа $\mathrm{OSp}_{\Lambda,*}(q|p)$ превращается в комплексную группу $\mathrm{OSp}_\Lambda(q|p)$.

Если $*$ является инволюцией 2-го рода, условие (70) надо дополнить условием $G^*\mathbf{A}BG = \mathbf{A}B$. В совокупности с (70) оно приводит к тому, что матрица G является блочно-диагональной: $\begin{pmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{pmatrix}$. Условия $G_{12} = G_{21} = 0$ сохраняются при переходе в комплексную область. Поэтому если $*$ является инволюцией 2-го рода в алгебре Грассмана Λ, то группа $\mathrm{OSp}_{\Lambda,*}(q|p)$ не может быть вещественной формой группы $\mathrm{OSp}_\Lambda(q|p)$.

Рассмотрим в алгебре $\mathfrak{A}$ новые образующие

$$\begin{aligned} &\widehat{a}_{k,B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{p}_k - i\widehat{q}_k), && \widehat{a}_{k,B}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{p}_k + i\widehat{q}_k), && \text{где } 1 \leqslant k \leqslant r, \\ &\widehat{a}_{\ell,F} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_{2\ell-1} - i\gamma_{2\ell}), && \widehat{a}_{\ell,F}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_{2\ell-1} + i\gamma_{2\ell}), && \text{где } 1 \leqslant \ell \leqslant \left[\frac{q}{2}\right]. \end{aligned} \tag{71}$$

При нечетном q для получения полной системы образующих алгебры $\mathfrak{A}$ к образующим (71) следует добавить γ_q.

Образующие (71) обладают перестановочными соотношениями, характерными для бозе- и ферми-операторов рождения и уничтожения:

$$\begin{gathered} \left[\widehat{a}_{k,B},\, \widehat{a}_{k',B}^*\right] = \delta_{k,k'}, \quad \left[\widehat{a}_{k,B},\, \widehat{a}_{k',B}\right] = \left[\widehat{a}_{k,B}^*,\, \widehat{a}_{k',B}^*\right] = 0, \\ \{\widehat{a}_{k,F},\, \widehat{a}_{k,F}^*\} = \delta_{k,k'}, \quad \{\widehat{a}_{k,F},\, \widehat{a}_{k',F}\} = \{\widehat{a}_{k,F}^*,\, \widehat{a}_{k',F}^*\} = 0. \end{gathered}$$

Запишем связь между образующими $\widehat{a}_{k,B}, \ldots, \widehat{a}_{k',F}^*$ и $\widehat{r}_k$ в виде

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} \widehat{r}_1 \\ \vdots \\ \widehat{r}_{p+q} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \widehat{a}_{1,B} \\ \vdots \\ \widehat{a}_{[q/2,],F}^* \end{pmatrix}, \quad \text{где } L = \begin{cases} \mathrm{diag}(U_1,\, U_2) & \text{при } q \text{ четном}, \\ \mathrm{diag}(U_1,\, U_2,\, 1) & \text{при } q \text{ нечетном}, \end{cases} \\ U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_r & I_r \\ iI_r & -iI_r \end{pmatrix}, \qquad U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_{[q/2]} & I_{[q/2]} \\ iI_{[q/2]} & -iI_{[q/2]} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{72}$$

Из равенства (72) следует, что если матрица $\widetilde{B}$ сохраняет коммутационные соотношения между $\widehat{r}_k$, то матрица $B = L^{-1}\widetilde{B}L$ сохраняет коммутационные соотношения между $\widehat{a}_{k,B}$, $\widehat{a}^*_{k,B}$, $\widehat{a}_{k,F}$, $\widehat{a}^*_{k,F}$. Условие сохранения имеет вид

$$BJ_1B^T = J_1, \quad \text{где } J_1 = L^{-1}J(L^T)^{-1} = \begin{cases} \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & S_q \end{pmatrix} & \text{при } q \text{ четном,} \\ \begin{pmatrix} J_2 & 0 & 0 \\ 0 & S_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{при } q \text{ нечетном,} \end{cases} \tag{73}$$

см. формулу (48) из Введения. Условие перестановочности с инволюцией переписывается в виде

$$B^*KB = K, \quad \text{где } K = L^*JL = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \tag{74}$$

У группы $\mathrm{OSp}_\Lambda(q|p)$ есть также интересная вещественная форма, связанная с инволюцией второго рода. Форма получается, если условие (74) заменить на

$$B^*\widetilde{K}B = \widetilde{K}, \quad \text{где } \widetilde{K} = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \tag{75}$$

Эту группу обозначим $\widetilde{\mathrm{OSp}}_\Lambda(q|p)$. Положим $C = \sqrt{\mathbf{A}}B(\sqrt{\mathbf{A}})^{-1}$, где $\sqrt{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & e^{-\pi i/2} \end{pmatrix}$, $B \in \widetilde{\mathrm{OSp}}_\Lambda(q|p)$. Матрицы C удовлетворяют условиям

$$C^T\widetilde{J}C = \widetilde{J}, \quad \text{где } \widetilde{J} = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad C^*\widetilde{K}C = \widetilde{K}. \tag{76}$$

Второе условие (76) с учетом первого эквивалентно тому, что $C = \bar{C}$.

Покажем, что группа $\widetilde{\mathrm{OSp}}_\Lambda(q|p)$ является вещественной формой группы $\mathrm{OSp}_\Lambda(q|p)$, только если $*$ является инволюцией второго рода. Учитывая, что $\widetilde{K}^* = \widetilde{K}\mathbf{A}$ при инволюции любого рода, из второго условия (76) получаем

$$C^*\widetilde{K}\mathbf{A}(C^*)^* = \widetilde{K}\mathbf{A}. \tag{77}$$

Очевидно, что это равенство эквивалентно второму условию (76), только если $(C^*)^* = \mathbf{A}C\mathbf{A}$, т. е. при инволюции второго рода. В этом случае аналитическое продолжение по параметрам разрушает второе условие (76), что же касается первого, то оно в комплексном случае, очевидно, эквивалентно условию (65).

При инволюции первого рода $(C^*)^* = C$ и соотношение (77) в совокупности со вторым условием (76) приводит к равенству $C\mathbf{A} = \mathbf{A}C$. Следовательно, C является блочно-диагональной матрицей. Это свойство матрицы C сохраняется при аналитическом продолжении по параметрам и не имеет места, если $\widetilde{\mathrm{OSp}}_\Lambda(q|p)$ является вещественной формой группы $\mathrm{OSp}_\Lambda(q|p)$. Так как матрица $\widetilde{J}$ в отличие от матрицы J из формулы (65) вещественна, условия (76) показывают, что группа $\widetilde{\mathrm{OSp}}_\Lambda(q|p)$ является более непосредственным суперобобщением вещественных симплектической и ортогональной групп, чем $\mathrm{OSp}_{\Lambda,*}(q|p)$.

Таким образом, вещественные симплектические и ортогональные группы имеют два различных, в равной степени естественных суперобобщения: группу $\mathrm{OSp}_{\Lambda,*}(q|p)$, которая сохраняет их свойство быть линейными каноническими преобразованиями, и группу $\widetilde{\mathrm{OSp}}_\Lambda(q|p)$, которая, во всяком случае формально, более полно сохраняет их свойства вещественности[1].

---

[1] Спрашивается, сколько же **всего** у вещественных симплектической, ортогональной и унитарной групп «естественных суперобобщений»?! Как это делали еще Э. Картан и Киллинг, естественно упростить задачу и вместо групп, а тем более, супергрупп, рассмотреть **комплексные супералгебры Ли**, «похожие» на $\mathfrak{sp}(2n)$, $\mathfrak{o}(m)$ и $\mathfrak{gl}(n)$, т. е. $\mathfrak{osp}(m|2n)$, $\mathfrak{pe}(n)$, а также $\mathfrak{gl}(m|2n)$ и $\mathfrak{q}(n)$, и перечислить их вещественные формы. Эту задачу для всех простых конечномерных комплексных супералгебр Ли решила В. Серганова в статье [Сг1°]. Ответ, прямо скажем, неожиданный, см. табл. Д5.3: например, у (псевдо)унитарной алгебры Ли есть минимум *три* супераналога, один из которых сохраняет **нечетную** полуторалинейную форму.

В статье [Сг1°] и гл. Д5 перечислены не только вещественные формы простых комплексных супералгебр Ли, отвечающие инволюциям (1-го рода), но и кватернионные формы, соответствующие «инволюциям 2-го рода». — *Прим. Д. Л.*

2. Анализ на суперобластях

1. Функции со значениями в алгебре Грассмана. Пусть E — гладкое многообразие, Λ — алгебра Грассмана над $\mathbb{K}$, а Λ^E — алгебра гладких функций на E со значениями в Λ. Вместо Λ^E будем иногда писать $\Lambda(E)$ (а в гл. 1 использовано обозначение $E(\Lambda)$ — *прим. Д. Л.*).

Пусть $\{\xi_i\}$ — система канонических образующих $\mathbb{K}$-алгебры Λ. С ее помощью каждый элемент $f \in \Lambda(E)$ может быть записан в виде

$$f = f(x,\, \xi) = \sum_{k \geqslant 0} \sum_{\mathbf{i}=(i_1,\ldots,i_k)} f_{\mathbf{i}}(x)\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k}, \tag{1}$$

где $x \in E$, а $f_{\mathbf{i}}$ — $\mathbb{K}$-значные функции на E.

(Предположим, что $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ — *прим. Д. Л.*) Скажем, что последовательность $f_n \in \Lambda(E)$ *сходится к* $f \in \Lambda(E)$, если все коэффициентные функции $f_{n,\mathbf{i}}$ элементов f_n, сходятся вместе со всеми своими производными, к соответствующим коэффициентным функциям элемента f и их производным равномерно на каждом компакте $F \subset E$. Легко видеть, что, хотя сами коэффициентные функции $f_{n,\mathbf{i}}$ и $f_{\mathbf{i}}$ зависят от выбора канонической системы образующих алгебры Λ, определение сходимости от этого выбора не зависит.

Аргумент ξ в выражении $f(x,\, \xi)$ символизирует систему образующих $\{\xi_i\}$, использованную для записи элемента f в виде (1). В дальнейшем, однако, мы придадим этому аргументу менее формальный смысл.

На алгебры Λ^E переносятся понятия четности, степени и фильтрации элементов, имеющиеся в алгебре Грассмана Λ: элемент $f \in \Lambda^E$ называется *четным*, если $f(x) \in {}^0\Lambda$, и *нечетным*, если $f(x) \in {}^1\Lambda$ при каждом $x \in E$.

Пусть m, n — неотрицательные целые числа. Символом $(\Lambda^E)^{m,n}$ обозначим множество, состоящее из всевозможных наборов m четных и n нечетных элементов:

$$(f_1(x),\, \ldots,\, f_m(x),\, \varphi_1(x),\, \ldots,\, \varphi_n(x)) \in (\Lambda^E)^{m+n}, \quad \text{где } \alpha(f_i) = 0,\ \ \alpha(\varphi_j) = 1.$$

В $(\Lambda^E)^{m,n}$ естественным образом определено сложение, а также умножение элементов множества $(\Lambda^E)^{m,n}$ на элементы множества $({}^0\Lambda)^E$ со свойством дистрибутивности. Таким образом, $(\Lambda^E)^{m,n}$ является модулем над $({}^0\Lambda)^E$. Подмножество множества $(\Lambda^E)^{m,n}$, состоящее из наборов гладких функций $f_i(x)$, $\varphi_j(x)$, обозначим $\Lambda^{m,n}(E)$. Очевидно, что $\Lambda^{m,n}(E)$ является модулем над ${}^0\Lambda(E)$. Пусть $\mathbb{K}^E$ — алгебра всех функций на E со значениями в $\mathbb{K}$. Пусть $m\colon \Lambda^E \to \mathbb{K}^E$ — гомоморфизм

$$m(f) = m(f)(x) = f(x,\, 0) = f_0(x), \tag{2}$$

где $f_0(x)$ — слагаемое в сумме (1), отвечающее $k = 0$.

Отметим, что образом алгебры $\Lambda(E)$ при гомоморфизме (2) служит не вся алгебра $\mathbb{K}^E$, а ее подалгебра $\mathcal{A}(E)$, состоящая из гладких функций. Зафиксировав в формуле (2) точку $x = a$, мы получим гомоморфизм

$$\mu_a\colon \Lambda^E \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \mu_a(f) = m(f)(a) = f_0(a). \tag{3}$$

Можно показать, что всякий гомоморфизм $\mu\colon \Lambda(E) \to \mathbb{K}$ имеет вид (3). Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между точками многообразия E и гомоморфизмами $\Lambda(E) \to \mathbb{K}$.

Пусть $f_1,\, \ldots,\, f_n$ — некоторый упорядоченный набор элементов Λ^E. *Спектром* этого набора назовем множество в пространстве $\mathbb{K}^n$, пробегаемое вектором

$$f(x) = \bigl(m(f_1)(x),\, \ldots,\, m(f_n)(x)\bigr),$$

когда x пробегает E. Спектр упорядоченного набора элементов $f_1,\, \ldots,\, f_n$ обозначим символом $\operatorname{Spec}(f_1,\, \ldots,\, f_n)$.

2. Гомоморфизмы ограничения. Пусть E — гладкое многообразие, V, U — открытые подмножества в E, причем $V \subset U$ и функция $f(x) \in \Lambda(U)$, рассматриваемая только при $x \in V$, называется *ограничением функции* f на V. Очевидно, что ограничение функции f на V является элементом алгебры $\Lambda(V)$. Таким образом, сопоставляя каждому элементу $f \in \Lambda(U)$ его ограничение на V, мы получаем гомоморфизмы алгебр $\rho^U_V\colon \Lambda(U) \to \Lambda(V)$, формирующие пучок Λ-значных функций на E. Используя гомоморфизмы ρ^U_V, можно построить много других семейств гомоморфизмов ограничения с помощью следующего приема. Для каждой супералгебры $\Lambda(U)$ фиксируем некоторый автоморфизм T_U и положим $\tilde{\rho}^U_V = T_V^{-1}\rho^U_V T_U$. Легко проследить, что гомоморфизмы $\tilde{\rho}^U_V$ удовлетворяют всем аксиомам пучка.

Если $U \subset \mathbb{R}^p$ и алгебра $\Lambda = \Lambda_q$ имеет q канонических образующих, мы будем наряду с обозначением $\Lambda(U)$ пользоваться также более детальным обозначением $\Lambda_{p,q}(U)$, указывая декартовы координаты x_i в U и образующие ξ_i алгебры Λ_q. Как мы увидим ниже, элементы 1, x_i и ξ_j, где $1 \leqslant i \leqslant p$, а $1 \leqslant j \leqslant q$, составляют систему топологических образующих алгебры $\Lambda(U)$, причем элементы x_i и ξ_j равноправны.

3. Грассмановы аналитические функции. Пусть $f_i(x,\, \xi) \in \Lambda_{p,q}(U)$, где $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$, — четные элементы. Отделим в f_i слагаемые нулевой степени

$$f_i(x,\, \xi) = a_i(x) + h_i(x,\, \xi), \quad \operatorname{fil} h_i \geqslant 2. \tag{4}$$

Пусть, далее, $g(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, — гладкая функция, в область определения которой входит множество $\operatorname{Spec}(f_1,\, \ldots,\, f_n)$. Определим суперпозицию

$g(f_1, \ldots, f_n) \in \Lambda_{p,q}(U)$ с помощью разложения в ряд Тейлора:

$$g(f_1, \ldots, f_n) = g(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) =$$
$$= g(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{\sum k_i \geqslant 0} \frac{h_1^{k_1} \ldots h_n^{k_n}}{k_1! \ldots k_n!} \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n}}{\partial a_1^{k_1} \ldots \partial a_n^{k_n}} g(a_1, \ldots, a_n). \quad (5)$$

Сумма в формуле (5) конечна в силу нильпотентности элементов h_i.

Пусть теперь $g(y, \eta) \in \Lambda_{m,n}(W)$, а $f_i(x, \xi) \in \Lambda_{p,q}(U)$, где $i = 1, 2, \ldots, m$, и $\varphi_j(x, \xi) \in \Lambda_{p,q}(U)$, где $j = 1, 2, \ldots, n$, причем $\alpha(f_i) = 0$, а $\alpha(\varphi_j) = 1$, и пусть $\operatorname{Spec}(f_1, \ldots, f_m) \subset W$. Положим

$$g(f, \varphi) = \sum g_{\mathbf{i}}(f_1, \ldots, f_m) \varphi_{i_1} \ldots, \varphi_{i_k}, \quad (6)$$

где $g_{\mathbf{i}}$ — коэффициенты в разложении (1) элемента g. Элемент $g(f, \varphi)$ назовем *суперпозицией* элементов g и f_i, φ_j.

Вернемся к формуле (6). Напомним, что всевозможные наборы вида $(f_1, \ldots, f_m, \ \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, где $f_i, \varphi_j \in \Lambda_{p,q}(U)$, образуют пространство, которое обозначается $\Lambda_{p,q}^{m,n}(U)$. Те из них, которые обладают дополнительным свойством $\operatorname{Spec}(f_1, \ldots, f_m) \subset W$, образуют множество, которое мы обозначим $\Lambda_{p,q}^{m,n}(U, W)$. Формула (6) сопоставляет каждому элементу $g \in \Lambda_{m,n}(W)$ функцию на $\Lambda_{p,q}^{m,n}(U, W)$ со значениями в $\Lambda_{p,q}(U)$. Эту функцию мы будем иногда обозначать F_g, где $F_g(f, \varphi) = g(f, \varphi)$. Подчеркнем, что F_g, в отличие от элемента $g \in \Lambda_{m,n}(W)$, является функцией в обычном смысле слова, т. е. отображением. Функции описанного вида назовем *грассмановыми аналитическими*. Грассмановы аналитические функции, определенные алгеброй $\Lambda_{p,q}^{m,n}(U, W)$ и принимающие значения в $\Lambda_{p,q}(U)$, образуют алгебру, которую мы обозначим $\mathfrak{A}_{p,q}^{m,n}(U, W)$.

Алгебра $\mathfrak{A}_{p,q}^{m,n}(U, W)$ является подалгеброй более широкой алгебры $\mathfrak{B}_{p,q}^{m,n}(U, W)$, которая состоит из линейных комбинаций элементов $\mathfrak{A}_{p,q}^{m,n}(U, W)$ с коэффициентами из $\Lambda_{p,q}(U)$. Элементы алгебры $\mathfrak{B}_{p,q}^{m,n}(U, W)$ назовем *грассмановыми аналитическими функциями с грассмановыми коэффициентами*.

Алгебра $\mathfrak{B}_{p,q}^{m,n}(U, W)$ как линейное пространство распадается в сумму двух подпространств:

$$\mathfrak{B}_{p,q}^{m,n}(U, W) = {}^0\mathfrak{B}_{p,q}^{m,n}(U, W) \oplus^1 \mathfrak{B}_{p,q}^{m,n}(U, W),$$

каждое из которых состоит из линейных комбинаций вида

$$u = \sum a_i g_i(f, \varphi)$$

с однородными элементами $a_i \in \Lambda_{p,q}(U)$, $g_i \in \Lambda_{m,n}(W)$. Все рассматриваемые алгебры и пространства играют важную роль в теории представлений супергрупп.

Если $\Lambda_{m,n}(W) \subset \Lambda_{p,q}(U)$, то суперпозицию (6) можно рассматривать как продолжение функции g, первоначально определенной на элементах $x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_n$, где x_i — координаты в W, на произвольный элемент пространства $\Lambda_{p,q}^{m,n}(U, W)$. Получаемое таким образом продолжение назовем *грассмановым аналитическим продолжением функции* g по аналогии с обычным аналитическим продолжением функций.

4. Образующие алгебры $\boldsymbol{\Lambda_{p,q}(U)}$. Пусть $y_i(x, \xi)$, $\eta_j(x, \xi) \in \Lambda_{p,q}(U)$, где $i = 1, \ldots, p'$, а $j = 1, \ldots, q'$, — некоторый набор однородных элементов $\alpha(y_i) = 0$, $\alpha(\eta_j) = 1$. Совокупность y_i, η_j назовем *системой топологических образующих алгебры* $\Lambda_{p,q}(U)$, если:

1) $\operatorname{Spec}(y_1, \ldots, y_{p'})$ является открытой областью в $\mathbb{R}^{p'}$;

2) любой элемент $f \in \Lambda_{p,q}(U)$ может быть записан с помощью y_i, η_j в виде, аналогичном (1):

$$f = \sum_k \sum_{\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k)} f_{\mathbf{i}}(y_1, \ldots, y_{p'}) \eta_{i_1} \ldots \eta_{i_k},$$

где $f_{\mathbf{i}}$ — гладкие функции, определенные в области $\operatorname{Spec}(y_1, \ldots, y_{p'})$.

Вещественные переменные x_i, и образующие ξ_j алгебры Λ_q, с которых мы начали построение алгебры $\Lambda_{p,q}(U)$, служат примером четных и нечетных образующих соответственно.

Пусть x_i, ξ_j, где $1 \leqslant i \leqslant p'$ и $1 \leqslant j \leqslant q'$, — образующие алгебры $\Lambda_{p,q}(U)$;

$$\begin{aligned} y_i = y_i(x, \xi) = a_i(x) + \sum_{k>0} \sum_{s_1, \ldots, s_{2k}} a_i^{s_1, \ldots, s_{2k}}(x) \xi_{s_1} \ldots \xi_{s_{2k}}, \\ \text{где } i = 1, 2, \ldots, p'', \\ \eta_j = \eta_j(x, \xi) = \sum \varphi_{j;s}(x) \xi_s + \sum_{k>0} \sum_{s_1, \ldots, s_{2k+1}} \varphi_j^{s_1, \ldots, s_{2k+1}}(x) \xi_{s_1} \ldots \xi_{s_{2k+1}}, \\ \text{где } j = 1, 2, \ldots, q''. \end{aligned} \quad (7)$$

Найдем условия, при которых набор (y, η) служит системой образующих алгебры $\Lambda_{p,q}(U)$. Очевидно, что эти условия суть условия разрешимости системы уравнений (7) относительно x_i, ξ_j.

4.1. Теорема. *Пусть элементы* $a_i(x)$, $\varphi_{j;s}(x) \in \Lambda_{p,q}(U)$ *определяются равенством* (7). *Для того чтобы набор элементов* y_i, η_j *вида* (7) *служил системой топологических образующих алгебры* $\Lambda_{p,q}(U)$, *необходимо и достаточно, чтобы*:

1) *множество* $\operatorname{Spec}(y_1, \ldots, y_{p''})$ *было областью в* $\mathbb{R}^{p''}$;

2) *система уравнений относительно* $\tilde{x}$

$$\tilde{y}_i = a_i(\tilde{x}), \quad \text{где } \tilde{x} = (m(x_1), \ldots, m(x_{p'})) \in \operatorname{Spec}(x_1, \ldots, x_{p'}), \quad (8)$$

была однозначно разрешима при всех $\tilde{y} \in \operatorname{Spec}(y_1, \ldots, y_{p''})$ *в классе гладких функций*;

3) *матрица* $\varphi_{i;k}(\tilde{x})$ *была обратима при всех* $\tilde{x} \in \operatorname{Spec}(x_1, \ldots, x_{p'})$.

При этих условиях образующие x_i, ξ_j *выражаются через* y_i, η_j *по формулам*

$$\begin{aligned} x_i &= f_i(y) + \sum_{k>0} \sum_{s_1,\ldots,s_{2k}} f_i^{s_1,\ldots,s_{2k}}(y)\eta_{s_1} \ldots \eta_{s_{2k}}, \\ \xi_j &= \sum \psi_{j;s}(y)\eta_s + \sum_{k>0} \sum_{s_1,\ldots,s_{2k+1}} f_j^{s_1,\ldots,s_{2k+1}}(y)\eta_{s_1} \ldots \eta_{s_{2k+1}}, \end{aligned} \tag{9}$$

причем $\tilde{x}_i = f_i(\tilde{y})$ — *решение системы уравнений* (8), $(\psi_{i;s}(a(\tilde{x})))$ — *матрица, обратная к* $(\varphi_{i;s}(\tilde{x}))$.

Доказательство. Пусть элементы y_i, η_j служат образующими. В таком случае $\operatorname{Spec}(y_1, \ldots, y_{p''})$ является областью по определению системы образующих. Далее, элементы x_i, ξ_j могут быть выражены через y_i, η_j по формулам (9) с пока неизвестными гладкими функциями f_i, $f_i^{s_1,\ldots,s_{2k}}$, $\psi_{i;s}$, $\psi_i^{s_1,\ldots,s_{2k+1}}$. Применяя к обеим частям равенств (9) гомоморфизм m, находим, что $\tilde{x}_i = f_i(\tilde{y})$, где $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{p''})$, $\tilde{y}_i = m(y_i) = a_i(\tilde{x})$. Следовательно, уравнения (8) разрешимы, и $\tilde{x}_i = f_i(\tilde{y})$ является решением этих уравнений. Далее, подставляя η_s из формул (7) в соотношение (9), находим, что слагаемое первой степени по совокупности ξ_s в правой части второго равенства (9) имеет вид $\sum\limits_s \psi_{i;s}(y)\varphi_{s;k}(x)\xi_k$. Следовательно, $\sum\limits_s \psi_{i;s}(y)\varphi_{s;k}(x) = \delta_{i,k}$. Аналогично, подставляя ξ_s из формул (9) в соотношение (7), находим, что $\sum\limits_s \varphi_{j;s}(x)\varphi_{s;k}(y) = \delta_{j,k}$. Применяя к этим тождествам гомоморфизм m, получаем, что матрица $(\varphi_{s;k}(\tilde{x}))$ обратима и что $(\psi_{i;k}(\tilde{y})) = (\varphi_{i;k}(\tilde{x}))^{-1}$ при $\tilde{y}_i = a_i(\tilde{x})$.

Перейдем к доказательству достаточности. Подставим формулы (9) в соотношение (7) и приравняем к нулю коэффициенты при $\eta_{i_1}, \ldots, \eta_{i_k}$, где $k > 1$, в обоих равенствах (7). Зная $f_i(y)$ и $\psi_{i;s}(y)$, мы получаем рекуррентные соотношения для $f_i^{s_1,\ldots,s_{2k}}$ и $\psi_j^{s_1,\ldots,s_{2k+1}}$. Эти функции оказываются, очевидно, гладкими в области $\operatorname{Spec}(y_1, \ldots, y_{p''})$. Найдя их, мы выражаем образующие x_i, ξ_j через y_i, η_j. □

Замечания. 1) Пусть U, V — области в пространствах $\mathbb{R}^{p'}$ и $\mathbb{R}^{p''}$ соответственно. Отображение $f\colon U \to V$ называется *диффеоморфизмом*, если оно обладает обратным f^{-1} (т. е. взаимно однозначно) и если оба отображения f и f^{-1} гладкие. (Отображение $x \mapsto y = f(x)$, где $x \in U$, называется *гладким*, если координаты $y_i(x)$ точки $y = f(x) \in V$ являются гладкими функциями координат x_i точки $x \in U$.)

Таким образом, условие (8) теоремы 4.1 состоит в том, что отображение $\tilde{x} \mapsto a(\tilde{x})$ области $\operatorname{Spec}(x_1, \ldots, x_{p'})$ в $\operatorname{Spec}(y_1, \ldots, y_{p''})$ является диффеоморфизмом. Так как диффеоморфизм сохраняет размерность области, $p' = p''$. Поскольку координаты в U являются четными образующими и их число равно $\dim U = p$, получаем, что $p' = p'' = p$. Комбинируя это обстоятельство с третьим утверждением теоремы, получаем в качестве следствия, что во всех системах образующих алгебры $\Lambda_{p,q}(U)$ число четных образующих равно p, число нечетных образующих равно q.

2) Переход от одной системы образующих y_i, η_j к другой системе x_i, ξ_j может быть, очевидно, осуществлен в два этапа:

а) $x_i = x_i(z, \zeta)$, $\xi_i = \zeta_i$,

б) $Z_i = y_i$, $\zeta_i = \zeta_i(y, \eta)$.

3) Теорема 4.1 описывает все сохраняющие четность автоморфизмы супералгебр $\Lambda_{p,q}(U)$. В самом деле, если y_i, η_j — образующие алгебры $\Lambda_{p,q}(U)$, причем y_i — координаты в U, а T — автоморфизм супералгебры $\Lambda_{p,q}(U)$, то элементы $x_i = Ty_i$, $\xi_j = T\eta_j$ также являются образующими алгебр $\Lambda_{p,q}(U)$, причем

$$\operatorname{Spec}(x_1, \ldots, x_p) = \operatorname{Spec}(y_1, \ldots, y_p) = U. \tag{10}$$

Это условие, очевидно, необходимо для того, чтобы автоморфизм T мог быть продолжен с образующих y_i, η_j на произвольный элемент $f(y, \eta)$.

Обратно, пусть (x_i, ξ_j), (y_i, η_j) — произвольные системы образующих, удовлетворяющие условию (10). Каждому элементу $f(x, \xi) \in \Lambda_{p,q}(U)$ сопоставим элемент $(Tf)(x, \xi) = f(y(x, \xi), \eta(x, \xi)) \in \Lambda_{p,q}(U)$. Очевидно, что отображение $f \mapsto Tf$ является сохраняющим четность автоморфизмом супералгебры $\Lambda_{p,q}(U)$. Характерной особенностью автоморфизма является то обстоятельство, что отображение, определяемое формулами (8), является диффеоморфизмом области U.

Из замечания 3) следует, что каждый автоморфизм T алгебры $\Lambda_{p,q}(U)$ представим в виде $T = T_1T_2$, где T_1, T_2 — автоморфизмы специального вида:

$$\begin{aligned} x_i &= T_1y_i = x_i(y, \eta), \qquad & \xi_j &= T_1\eta_j = \eta_j, \\ x_i &= T_2y_i = y_i, & \xi_j &= T_2\eta_j = \xi_j(y, \eta). \end{aligned}$$

4) Особая роль первоначальных образующих x_i, ξ_j, где x_i — декартовы координаты в U, полностью исчерпывается тем, что с их помощью строятся гомоморфизмы ρ_V^U, m и μ_a. Возможно построение теории, при котором эти гомоморфизмы вводятся аксиоматически. При таком подходе выделенных образующих нет. Если стоять на инвариантной точке зрения, при которой в алгебре $\Lambda_{p,q}(U)$ не выделяется никакая система образующих, то роль аргумента U в обозначении $\Lambda_{p,q}(U)$ состоит в указании на то, что в этой алгебре существует такая система образующих x_i, ξ_j, что $\operatorname{Spec}(x_1, \ldots, x_p) = U$.

5. Продолжение систем образующих. Пусть U, $V \subset \mathbb{R}^p$ — открытые множества и $V \subset U$. Рассмотрим алгебры $\Lambda_{p,q}(U)$, $\Lambda_{p,q}(V)$ и гомоморфизм $\rho\colon \Lambda_{p,q}(U) \to \Lambda_{p,q}(V)$. Образ алгебры $\Lambda_{p,q}(U)$ при этом гомоморфизме обозначим $\widetilde{\Lambda}_{p,q}(V)$. Предположим, что алгебра $\Lambda_{p,q}(V)$ обладает системой образующих x_i, ξ_j, каждая из которых продолжима: $x_i, \xi_j \in \widetilde{\Lambda}_{p,q}(V)$. Если элементы x_i, ξ_j обладают такими продолжениями, которые составляют системы образующих алгебры $\Lambda_{p,q}(U)$, то систему образующих x_i, ξ_j назовем продолжимой. Пусть в алгебре $\Lambda_{p,q}(V)$ задана система образующих, состоящая из продолжимых элементов; продолжима ли эта система?

Ответ не всегда положителен, как показывает следующий пример. Пусть $U = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ — круг, а $V = \left\{\frac{1}{2} < x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}$ — кольцо на плоскости x_1, x_2; пусть $\rho = \rho_V^U$ — стандартный гомоморфизм ограничения, ξ_1, ξ_2 — продолжимая система нечетных образующих алгебры $\Lambda_{2,2}(V)$ и

$$\eta_1 = \xi_1 \cos\varphi + \xi_2 \sin\varphi, \qquad \eta_2 = -\xi_1 \sin\varphi + \xi_2 \cos\varphi,$$

где φ — полярный угол вектора $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Элементы η_1, η_2 в силу теоремы 4.1 составляют систему нечетных образующих алгебры $\Lambda_{2,2}(V)$, каждый из них продолжи́м, однако вместе они не продолжаются до системы нечетных образующих алгебры $\Lambda_{2,2}(U)$. В самом деле, положим

$$\eta_1' = a_{11}(x)\xi_1' + a_{12}(x)\xi_2', \qquad \eta_2' = a_{21}(x)\xi_1' + a_{22}(x)\xi_2',$$

где ξ_1', ξ_2' — продолжения элементов ξ_1, ξ_2 до нечетных образующих алгебры $\Lambda_{2,2}(U)$ и

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x), & a_{12}(x) \\ a_{21}(x), & a_{22}(x) \end{pmatrix}$$

— матрица с бесконечно дифференцируемыми элементами. Для того чтобы элементы η_1', η_2' служили продолжением элементов η_1, η_2, матрица $A(x)$ должна удовлетворять условию

$$A(x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{при } x \in V.$$

Если элементы η_1, η_2 продолжаются до нечетных образующих алгебры $\Lambda_{2,2}(U)$, то их продолжения с необходимостью имеют прежний вид, однако матрица $A(x)$ удовлетворяет более жесткому условию $\det A(x) \neq 0$ при $x \in U$. Покажем, что это условие противоречиво. Рассмотрим функции

$$\alpha_1(x) = \frac{\partial_{x_1}(a_{11} + ia_{12})}{a_{11} + ia_{12}}, \qquad \alpha_2(x) = \frac{\partial_{x_2}(a_{11} + ia_{12})}{a_{11} + ia_{12}}.$$

Ввиду того что $\det A(x) \neq 0$, знаменатели не обращаются в нуль, следовательно, функции α_1 и α_2 гладки в U. Кроме того, очевидно, что $\partial_{x_2}\alpha_1 = \partial_{x_1}\alpha_2$. Поэтому для любого замкнутого контура $C \subset U$ имеем

$$\int\limits_C \alpha_1\, dx_1 + \alpha_2\, dx_2 = 0. \tag{11}$$

Выбирая в качестве C окружность $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{3}{4}$, находим, что

$$\int\limits_C \alpha_1\, dx_1 + \alpha_2\, dx_2 = \int\limits_0^{2\pi} \frac{(\partial_{x_1}e^{i\varphi})dx_1 + (\partial_{x_2}e^{i\varphi})dx_2}{e^{i\alpha}} = i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i,$$

что противоречит формуле (11).

Общие условия продолжимости системы образующих непросты, однако для наших целей достаточно следующего признака.

5.1. Теорема. *Пусть* $V \subset U \subseteq \mathbb{R}^p$ *— области,* $\rho\colon \Lambda_{p,q}(U) \to \Lambda_{p,q}(V)$ *— гомоморфизм, имеющий вид* $\rho = T_V^{-1}\rho_V^U T_U$, *где* ρ_V^U *— стандартный гомоморфизм ограничения, а* T_U, T_V *— автоморфизмы алгебр* $\Lambda_{p,q}(U)$ *и* $\Lambda_{p,q}(V)$ *соответственно. Пусть, далее,* x_i, ξ_j *— образующие в* $\Lambda_{p,q}(V)$, *продолжимые до образующих* x_i', ξ_j' *в* $\Lambda_{p,q}(U)$, *а* y_i, $\eta_j \in \Lambda_{p,q}(V)$ *— продолжимые образующие в* $\Lambda_{p,q}(V)$, *связанные с* x_i, ξ_j *соотношениями*

$$y_i = x_i + h_i, \quad \eta_j = \xi_j + \gamma_j, \quad \text{где } \operatorname{fil} h_i \geqslant 2 \text{ и } \operatorname{fil} \gamma_j \geqslant 2.$$

Тогда образующие y_i, η_j *продолжимы до образующих алгебры* $\Lambda_{p,q}(U)$.

Доказательство. Пусть h_i', γ_j' — произвольное продолжение элементов h_i, γ_j на U с сохранением степени. Очевидно, что такое продолжение возможно. Положим $y_i' = x_i' + h_i'$, $\eta_j' = \xi_j' + \gamma_j'$, где x_i', ξ_j' — образующие в $\Lambda_{p,q}(U)$, служащие продолжением элементов x_i, ξ_j. Из теоремы 4.1 следует, что y_i'и η_j' являются образующими в $\Lambda_{p,q}(U)$. ☐

6. Теорема о неявной функции. Пусть f_i, φ_j, где $i = 1, \ldots, p'$, $j = 1, \ldots, q'$, — некоторый набор соответственно четных и нечетных элементов вещественной алгебры $\Lambda_{p,q}(U)$, где $p' \leqslant p$, $q' \leqslant q$.

Рассмотрим систему уравнений

$$f_i(x, \xi) = 0, \quad \varphi_j(x, \xi) = 0. \tag{12}$$

Решением системы (12) назовем всякий набор четных и нечетных элементов x_i и ξ_j соответственно алгебры $\Lambda_{p,q}(U)$, удовлетворяющий этим уравнениям. Мы скажем, что элементы x_i, ξ_j *служат решением системы* (12) в области V, если $\operatorname{Spec}(x_1, \ldots, x_p) \subset V$. Справедлив следующий аналог классической теоремы о неявных функциях.

6.1. Теорема. *Пусть*

$$x_{0,i} = \tilde{x}_{0,i} + \sum_{k>1} \sum_{s_1,\ldots,s_{2k}} x_{0,i}^{s_1,\ldots,s_{2k}} \zeta_{s_1} \ldots \zeta_{s_{2k}}, \quad \text{где } 1 \leqslant i \leqslant p,$$

$$\xi_{0,j} = \sum_{k\geqslant 0} \sum_{s_1,\ldots,s_{2k}} c_j^{s_1,\ldots,s_{2k+1}} \zeta_{s_1} \ldots \zeta_{s_{2k+1}}, \quad \text{где } 1 \leqslant j \leqslant q,$$

— набор четных и нечетных элементов вещественной алгебры Грассмана Λ_q, *такой что*

1) $f_i(x_0, \xi_0) = 0$, $\varphi_j(x_0, \xi_0) = 0$,
2) $\det(\partial_{\tilde{x}_k} f_i(\tilde{x}, 0))|_{i,k=1}^{p'} \neq 0$ *при* $\tilde{x} = (\tilde{x}_{0,1}, \ldots, \tilde{x}_{0,p})$,
3) *функции* $\varphi_j(x, \xi)$ *представимы в виде*

$$\varphi_j(x, \xi) = \sum \varphi_{j;s}(x)\xi_s + \sum_{k>0} \sum_{s_1,\ldots,s_{2k+1}} \varphi_j^{s_1,\ldots,s_{2k+1}}(x)\xi_{s_1}, \ldots, \xi_{s_{2k+1}},$$

$$\text{где} \quad \det(\varphi_{j;s}(\tilde{x}))|_{j,s=1}^{q'} \neq 0 \quad \text{при} \quad \tilde{x} = (\tilde{x}_{0,i}, \ldots, \tilde{x}_{0,p}).$$

Тогда у точки $\tilde{x} = (\tilde{x}_{0,1}, \ldots, \tilde{x}_{0,p})$ *найдется достаточно малая окрестность* $V \subset \mathbb{R}^p$, *такая что существуют область* $W \subset \mathbb{R}^{p-p'}$ *и однозначно определенные грассмановы аналитические функции* g_i, ψ_j *от элементов алгебры* $\Lambda_{p-p',q-q'}(W)$ *со следующими свойствами.*

1) *Каждое решение уравнений* (12) *в области* V *представимо в виде*

$$\begin{aligned} x_i &= g_i(x_{p'+1}, \ldots, x_p; \xi_{q'+1}, \ldots, \xi_q), \quad \text{где } 1 \leqslant i \leqslant q', \\ \xi_j &= \psi_j(x_{p'+1}, \ldots, x_p; \xi_{q'+1}, \ldots, \xi_q), \quad \text{где } 1 \leqslant j \leqslant q', \end{aligned} \tag{13}$$

где $x_{p'+i}$ *и* $\xi_{q'+j}$ — *некоторые элементы алгебры* $\Lambda_{p-p',q-q'}(W)$.

2) *Если* $x_{p'+i}$ *и* $\xi_{q'+j}$ — *произвольные, соответственно четные и нечетные элементы алгебры* $\Lambda_{p-p',q-q'}(W)$, *а элементы* x_i, ξ_j *при* $i \leqslant p'$ *и* $j \leqslant q'$ *связаны с* $x_{p'+i}$ *и* $\xi_{q'+j}$ *соотношениями* (13), *то набор элементов* (x, ξ) *удовлетворяет уравнениям* (12).

Доказательство. Если $x_{p'+i}$ и $\xi_{q'+j}$ — образующие алгебры $\Lambda_{p-p',q-q'}(W)$, а элементы x_i и ξ_j при $i \leqslant p'$ и $j \leqslant q'$ связаны с $x_{p'+i}$ и $\xi_{q'+j}$ соотношениями (13), то решение (x, ξ) уравнений (12) назовем *общим*. Положим для удобства $u_i = x_{p'+i}$, $\mu_j = \xi_{q'+j}$. Разложим функции f_i в ряд по степеням $x - x_0$ и отделим слагаемые первой степени, а функции φ_j разложим в ряд по ξ_i и отделим слагаемые нулевой и первой степеней:

$$\begin{gathered} \sum a_{i,k}(u, \xi, \mu)(x_k - x_{0,k}) + \tilde{f}_i(x, u, \xi, \mu) = 0, \\ \sum \varphi_{j,k}(x, u, \mu)\xi_k + \tilde{\eta}_j(x, u, \mu) + \tilde{\varphi}_j(x, u, \xi, \mu) = 0, \end{gathered} \tag{14}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_{p'})$, а $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{q'})$.

По условию теоремы матрица $(a_{i,k}(u, 0, 0))$ обратима при вещественных u_i, если область V достаточно мала. Пусть $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_{p-p'})$, $\tilde{u}_i = m(u_i)$. Заметим, что $a_{i,k}(u, \xi, \mu) = a_{i,k}(\tilde{u}, 0, 0) + b_{i,k}$, причем элементы $b_{i,k}$ нильпотентны. Поэтому матрица $(a_{i,k}(u, \xi, \mu))$ обратима.

Аналогичное соображение применимо к матрице $(\varphi_{j,k}(x, u, \mu))$.

Пусть $(\tilde{a}_{i,k})$, $(\tilde{\varphi}_{j,k})$ — матрицы, обратные к матрицам $(a_{i,k})$ и $(\varphi_{j,k})$ соответственно. С помощью этих матриц перепишем уравнения (14) в равносильном виде

$$\begin{aligned} &x_k = x_{0,k} + F_k(x, u, \xi, \mu), \quad \xi_j = \eta_j(x, u, \mu) + \Phi_j(x, u, \xi, \mu), \\ &\text{где} \quad F_k = -\sum \tilde{a}_{k,i}\tilde{f}_i, \quad \eta_j = -\sum \tilde{\varphi}_{j,k}\tilde{\eta}_k, \quad \Phi_j = -\sum \tilde{\varphi}_{j,k}\tilde{\varphi}_k. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь Φ_j имеет по ξ_i степень $\geqslant 2$. Заметим, что при вещественных x, u, где $u_i = x_{p'+i}$, выполняется равенство

$$\tilde{f}_k(x, u, 0, 0) = \sum_{i,j}(x_i - x_{0,i})(x_j - x_{0,j})a_{k;i,j(x,u)},$$

где $a_{k;i,j}(x, u)$ — гладкие дифференцируемые функции. Аналогичным свойством обладают функции F_k. Поэтому $\left.\dfrac{\partial F_k(x, u, 0, 0)}{\partial x_j}\right|_{x_i = x_{0,i}} = 0$.

Уточним условия, налагаемые на область V. Мы будем считать область V выпуклой, обеспечивающей существование матриц $(\tilde{a}_{i,k})$, $(\tilde{\varphi}_{j,k})$, и такой, что при вещественных x, u, и некотором $\varkappa < 1$ справедливо неравенство

$$\sum_k \left| \frac{\partial F_k(x, u, 0, 0)}{\partial x_j} \right| \leqslant \varkappa < 1. \tag{16}$$

Пусть W — проекция области V на $\mathbb{R}^{p-p'}$, т. е. $(x^{p'+1}, \ldots, x^p) \in W$, если $(x^1, \ldots, x^p) \in V$. Вместо исходных уравнений (12) будем решать уравнения (15). Воспользуемся методом итераций:

$$\begin{aligned} &x_{n,k} = x_{0,k} + F_k(x_{n-1}, u, \xi_{n-1}, \mu), \\ &\xi_{n,j} = \eta_j(x_{n-1}, u, \mu) + \Phi_j(x_{n-1}, u, \xi_{n-1}, \mu), \\ &\xi_{0,j} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Положим

$$x_{n,k} = r_{n,k}(u) + \sum g_{n,k}^{i_1,\ldots,i_{2s}}(u)\mu_{i_1}\ldots\mu_{i_{2s}}, \quad \xi_{n,j} = \sum \varphi_{n,j}^{i_1,\ldots,i_{2s+1}}(u)\mu_{j_1}\ldots\mu_{j_{2s+1}}. \tag{18}$$

Покажем, что последовательности функций $r_{n,k}$, $\varphi_{n,k}^{i_1,\ldots,i_{2s}}$, $\psi_{n,j}^{j_1,\ldots,j_{2s+1}}$ сходятся равномерно вместе со всеми производными. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть случай, когда элементы u_i являются координатами в области W, а элементы μ_i — нечетными образующими алгебры $\Lambda_{p-p',q-q'}(W)$. Положим $A_k(x, u) = F_k(x, u, 0, 0)$. Полагая $\xi = \mu = 0$ в равенствах (17), получаем рекуррентные соотношения для $r_{n,k}$:

$$r_{n,k} = \tilde{x}_{0,k} + A_k(r_{n-1}, u). \tag{19}$$

Положим

$$\|r\| = \sup_u \sum_{1 \leqslant k \leqslant p'} |r_k(u)|. \tag{20}$$

Рассмотрим семейство функций $\tilde{x}_{0,k} + A_k(r, u)$ как оператор над вектор-функциями $r(u)$ и покажем, что этот оператор является сжимающим в смысле введенной нормы:

$$\sum_k \bigl|A_k(r, u) - A_k(r', u)\bigr| = \sum_k \Bigl| \sum_i \frac{\partial A_k(\tilde{r}, u)}{\partial \tilde{r}_i}(r_i - r'_i) \Bigr| \leqslant \varkappa \sum |r_i - r'_i|,$$

где $\tilde{r}$ — некоторая точка на отрезке, соединяющем r и r'. Применяя *принцип сжатых отображений*, находим, что итерации $r_{n,k}(u)$ сходятся к единственному решению уравнений $r_k = \tilde{x}_{0,k} + A_k(r, u)$. Отметим, что сходимость в смысле нормы (20) является равномерной. Нам удобно доказать сходимость производных $r_{n,k}$ позже. Пусть $d(\mathbf{i}) := m$ — число компонент мультииндекса $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m)$, и пусть $f = \{f_{k;\mathbf{i}}\}$. Положим

$$\|f\| = \sup_{u,\,\mathbf{i}} \sum_k |f_{k;\,\mathbf{i}}(u)|. \tag{21}$$

Пусть $t_{n,k;\mathbf{i}}$ и $\xi_{n,k;\mathbf{j}}$ — однородные слагаемые в правых частях первого и второго равенств (18) соответственно. Предположим, что равномерная сходимость функций $g_{n,k;\mathbf{i}}$ и $\psi_{n,k;\mathbf{j}}$ доказана при $d(\mathbf{i}) < 2s$ и $d(\mathbf{j}) < 2s - 1$.

Пользуясь нильпотентностью элементов $t_{n,k;\mathbf{i}}$ и $\xi_{n,k;\mathbf{j}}$ при $d(\mathbf{i}) \geqslant 2$ и $d(\mathbf{j}) \geqslant 1$, разложим правые части равенств (17) по $t_{n,k;\mathbf{i}}$, $\xi_{n,k;\mathbf{j}}$ и приравняем коэффициенты одинаковой степени по μ_j:

$$g_{n,k;\mathbf{i}} = g_{0,k;\mathbf{i}} + \sum \frac{\partial A_k(r_{n-1},\, u)}{\partial r_{n-1,t}} g_{n-1,t;\mathbf{i}} + b_{n,k;\mathbf{i}}, \qquad \psi_{n,k;\mathbf{j}} = \beta_{n,k;\mathbf{j}}, \tag{22}$$

где $\beta_{n,k;\mathbf{j}}$ — коэффициент при $\mu_{j_1} \ldots \mu_{j_{2s+1}}$ в разложении правой части второго уравнения (17).

Рассмотрим равенства (22) при $d(\mathbf{i}) = 2s$, $d(\mathbf{j}) = 2s - 1$. Очевидно, что $\beta_{n,k;\mathbf{j}}$ является полиномом с не зависящими от n коэффициентами от $g_{n-1,k;\mathbf{i}}$ и $\psi_{n-1,k;\mathbf{j}}$ при $d(\mathbf{i}) < 2s$ и $d(\mathbf{j}) = 2s - 1$. Поэтому по предположению индукции из второго из равенств (22) следует равномерная сходимость $\psi_{n,k;\mathbf{j}}$ при $d(\mathbf{j}) = 2s - 1$.

Перейдем к первому из равенств (22). Заметим, что $b_{n,k;\mathbf{i}}$ — полином с не зависящими от n коэффициентами от $g_{n-1,k;\mathbf{i}}$ при $d(\mathbf{i}) < 2s$ и $\psi_{n-1,k;\mathbf{j}}$ при $d(\mathbf{j}) \leqslant 2s - 1$. Поэтому последовательность $b_n = \{b_{n,k;\mathbf{j}}\}$ имеет предел в смысле нормы (21). Следовательно, $\|b_n\| \leqslant c < \infty$. Учитывая это, из первого уравнения (22) получаем $\|g_n\|\varkappa \leqslant \|g_{n-1}\| + c + \|g_i\|$. Отсюда следует, что

$$\|g_n\| \leqslant \varkappa^n \|g_0\| + \frac{c + \|g_i\|}{1 - x} \leqslant a < \infty.$$

Пусть $b = \{b_{k;\mathbf{i}}\}$ — предел последовательности $b_n = \{b_{n,k;\mathbf{i}}\}$ в смысле нормы (21). Перепишем первое уравнение (22) в виде

$$g_{n,k;\mathbf{i}} = \sum_t \frac{\partial A_k(r,\, u)}{\partial r_t} g_{n-1,t;\mathbf{i}} + a_{k;\mathbf{i}} + c_{n,k;\mathbf{i}}, \qquad r_t = \lim r_{n,t}, \quad a_{k;\mathbf{i}} = b_{k;\mathbf{i}} + g_{0,k;\mathbf{i}},$$
$$c_{n,k;\mathbf{i}} = b_{n,k;\mathbf{i}} - b_{k;\mathbf{i}} + \sum_t \left(\frac{\partial A_k(r_{n-1},\, u)}{\partial r_{n-1,t}} - \frac{\partial A_k(r,\, u)}{\partial r_t} \right) g_{n-1,t;\mathbf{i}}. \tag{23}$$

Заметим, что $\|c_n\| \to 0$. Положим $\varepsilon_n = \sup\limits_{m \geqslant n} \|c_m\|$. Последовательность ε_n монотонно сходится к нулю.

Рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$g'_{n,k;\mathbf{i}} = \sum_t \frac{\partial A_k(r,\, u)}{\partial r_t} g^i_{n-1,t;\mathbf{i}} + a_{k,i}. \tag{24}$$

Оператор в правой части равенства (24) является сжимающим в смысле нормы (21). Поэтому g'_n имеет предел в смысле нормы (21), не зависящий от начальных данных. Положим $g_{n,k;\mathbf{i}} = g_{n,k;\mathbf{i}} - g'_{n,k;\mathbf{i}}$. Из соотношений (23) и (24) следует, что

$$y_{n,k;\mathbf{i}} = \sum_t \frac{\partial A_k(r,\, u)}{\partial r_t} y_{n-1,t;\mathbf{i}} + c_{n,k;\mathbf{i}}.$$

Отсюда получаем $\|y_n\| \leqslant \varkappa\|y_{n-1}\| + \varepsilon_n$ и $\|y_{n+m}\| \leqslant \varkappa^m y_n + \dfrac{\varepsilon_n}{1 - x}$. Будем решать систему (24) при начальном условии $g'_{n,k;\mathbf{i}} = g_{n,k;\mathbf{i}}$. Тогда $\|g'_{n+m} - g_{n+m}\| \leqslant \dfrac{\varepsilon_n}{1 - x}$. Таким образом, последовательность g_n равномерно сходится к пределу в смысле нормы (21).

Дифференцируемость. Дифференцируя соотношения (19) по u_i, получаем

$$\frac{\partial r_{n,k}}{\partial u_i} \sum_t \frac{\partial A_k(r_{n-1},\, u)}{\partial r_{n-1,t}} \frac{\partial r_{n-1,t}}{\partial u_i} + \frac{\partial A_k(r_{n-1},\, u)}{\partial u_i}. \tag{25}$$

Дифференцируя уравнения (22) по u_i, получаем

$$\frac{\partial g_{n,k;\mathbf{i}}}{\partial u_i} = \frac{\partial g_{0,k;\mathbf{t}}}{\partial u_i} + \sum_\alpha \frac{\partial A_k(r_{n-1},\, u)}{\partial r_{n-1,\alpha}} \frac{\partial g_{n-1,0;\mathbf{t}}}{\partial u_i} +$$
$$+ \sum_\alpha \left(\frac{\partial^2 A_k(r_{n-1},\, u)}{\partial r_{n-1,\alpha} \partial u_i} + \sum_\beta \frac{\partial^2 A_k(r_{n-1},\, u)}{\partial r_{n-1,\alpha} \partial r_{n-1,\beta}} \frac{\partial r_{n-1,s}}{\partial u_i} \right) g_{n-1,\alpha;\mathbf{t}} + \frac{\partial b_{n,k;\mathbf{t}}}{\partial u_i}, \tag{26}$$
$$\frac{\partial \psi_{n,k;\mathbf{j}}}{\partial u_i} = \frac{\partial \beta_{n,k;\mathbf{j}}}{\partial u_i}.$$

Рекуррентные соотношения (25) и первое соотношение (26) имеют тот же вид, что первое соотношение (22), а второе соотношение (26) имеет тот же вид, что второе соотношение (22). Поэтому доказательство равномерной сходимости производных $\partial_{u_i} r_{n,k}$, $\partial_{u_i} g_{n,k;\mathbf{t}}$, $\partial_{u_i} \psi_{n,k;\mathbf{t}}$ не отличается от доказательства равномерной сходимости функций $g_{n,k;\mathbf{t}}$, $\psi_{n,k;\mathbf{t}}$.

Равномерная сходимость высших производных устанавливается с помощью очевидной индукции.

Докажем единственность решения системы (15) при произвольных четных u_i и нечетных μ_j. Пусть $\{x'_i, \xi'_j\}$ и $\{x''_i, \xi''_j\}$ — решения системы (15). Применяя к первому уравнению (15) гомоморфизм m, находим

$$\tilde{x}'_k = \tilde{x}_{0,k} + A_k(\tilde{x}',\, \tilde{u}), \qquad \tilde{x}''_k = \tilde{x}_{0,k} + A_k(\tilde{x}'',\, \tilde{u}),$$

где, как обычно, $\tilde{x}_i = m(x_i)$, а $\tilde{u}_i = m(u_i)$. Оператор A сжимающий, следовательно, $\tilde{x}'_k = \tilde{x}''_k$. В алгебре $\Lambda_{p-p',q-q'}(W)$ выразим x'_k, ξ'_j и x''_k, ξ''_j через образующие y_i, ν_j. Пусть $g'_{k;\mathbf{i}}$, $\psi'_{k;\mathbf{j}}$ и $g''_{k;\mathbf{i}}$, $\psi''_{k;\mathbf{j}}$ — коэффициентные функции. В качестве образующих y_i рассмотрим координаты в W. Предположим, что совпадения $g'_{k;\mathbf{i}} = g''_{k;\mathbf{i}}$, $\psi'_{k;\mathbf{j}} = \psi''_{k;\mathbf{j}}$ доказаны при $d(\mathbf{i}) < 2s$ и $d(\mathbf{j}) < 2s - 1$. Положим $g'_{k;\mathbf{i}} = g_{k;\mathbf{i}}$ при $d(\mathbf{i}) < 2s$ и $\psi'_{k;\mathbf{j}} = \psi_{k;\mathbf{j}}$ при $d(\mathbf{j}) < 2s - 1$. Для $g'_{k;\mathbf{i}}$ при $d(\mathbf{i}) < 2s$ и $\psi'_{k;\mathbf{j}}$ при $d(\mathbf{j}) = 2s - 1$ из соотношений (15) следуют уравнения, аналогичные (22):

$$g'_{k;i} = g_{0,k;\mathbf{i}} + \sum \frac{\partial A_k(\tilde{x}, \tilde{u})}{\partial \tilde{x}_e} g'_{e;\mathbf{i}} + b_{k;\mathbf{i}}, \qquad \psi'_{k;\mathbf{j}} = \beta_{k;\mathbf{j}}, \tag{27}$$

причем $\beta_{k;\mathbf{j}}$ — полином от $g_{k;\mathbf{i}}$ при $d(\mathbf{i}) < 2s$ и $\psi_{k;\mathbf{j}}$ при $d(\mathbf{j}) < 2s - 1$. Функции $g''_{k;\mathbf{i}}$ и $\psi''_{k;\mathbf{j}}$ удовлетворяют тем же уравнениям. Следовательно, $\psi''_{k;\mathbf{j}} = \psi'_{k;\mathbf{j}}$ при $d(\mathbf{j}) = 2s - 1$. Положим $\psi'_{k;\mathbf{j}} = \psi_{k;\mathbf{j}}$ при $d(\mathbf{j}) = 2s - 1$. Далее, при $d(\mathbf{i}) = 2s$ функция $b_{k;\mathbf{i}}$ — полином от $g_{k;\mathbf{i}}$ при $d(\mathbf{i}) < 2s$ и $\psi_{k;\mathbf{j}}$ при $d(\mathbf{j}) \leqslant 2s - 1$; оператор в правой части первого уравнения (27) является сжимающим в смысле нормы (21). Следовательно, $g'_{k;\mathbf{i}} = g''_{k;\mathbf{i}}$ при $d(\mathbf{i}) = 2s$.

Из полученных результатов немедленно следуют утверждения теоремы. В самом деле, установлено, что при вещественных u_i, и μ_j, являющихся нечетными образующими в $\Lambda_{p-p',q-q'}(W)$, справедливы тождества

$$\begin{aligned} &g_k(u, \mu) = x_{0,k} + F_k\big(g(u, \mu), u, \psi(u, \mu), \mu\big), \\ &\psi_j(u, \mu) = \eta_j\big(g(u, \mu), u, \mu\big) + \Phi_j\big(g(u, \mu), u, \psi(u, \mu), \mu\big), \end{aligned} \tag{28}$$

причем коэффициентные функции элементов $g_k(u, \mu)$ и $\psi_j(u, \mu)$ гладкие. Тем же свойством обладают и функции $F_k(x, u, \xi, \mu)$, $\eta_j(x, u, \mu)$, $\Phi_j(x, u, \xi, \mu)$. Следовательно, в тождествах (28) возможно грассманово аналитическое продолжение, т. е. они остаются справедливыми при замене u_i произвольными четными, а μ_j — нечетными элементами алгебры $\Lambda_{p-p',q-q'}(W)$.

Далее, пусть u_i — произвольные четные, а μ_j — нечетные элементы алгебры $\Lambda_{p-p',q-q'}(W)$, а (x, ξ) — какое-то решение уравнений (15). По предыдущему (x, ξ), где $x_i = g_i(u, \mu)$, а $\xi_j = \psi_j(u, \mu)$ тоже решение. В силу единственности $x_i = x'_i$, а $\xi_j = \xi'_j$. ☐

7. Производные. Пусть элемент $f(x, \xi) \in \Lambda_{p,q}(U)$ записан в виде (1), где x_i и ξ_j — некоторые образующие алгебры $\Lambda_{p,q}(U)$. Положим по определению

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x, \xi) = \sum_k \sum_{\mathbf{i}=(i_1,\ldots,i_k)} \frac{\partial}{\partial x_i} f_{\mathbf{i}}(x) \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k}, \tag{29}$$

где $\partial_{x_i} f_{\mathbf{i}}(x)$ — производная функции $f_{\mathbf{i}}(x)$ по i-му аргументу. (Напомним, что $f_{\mathbf{i}}(x)$ есть результат подстановки в функцию $f_{\mathbf{i}}(a)$ вместо вещественных переменных a_i образующих x_i, а $\partial_{x_i} f_{\mathbf{i}}(x)$ аналогичным образом получается из $\partial_{a_i} f_{\mathbf{i}}(a)$.)

Производные достаточно определить на произведении образующих. *Левая производная* по ξ_i:

$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \xi_i} \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k} = \delta_{ii_1} \xi_{i_2} \ldots \xi_{i_k} - \delta_{ii_2} \xi_{i_1} \xi_{i_3} \ldots \xi_{i_k} + \ldots. \tag{30}$$

Чтобы вычислить левую производную, надо вынести ξ_i из произведения $\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k}$ налево, воспользовавшись Правилом Знаков, и вычеркнуть. Чтобы вычислить *правую производную*, надо вынести ξ_i направо и вычеркнуть. Если же i не содержится среди чисел $i_1, \ldots, i_k$, то

$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \xi_i} (\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k}) = (\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k}) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_i} = 0.$$

Обычно мы опускаем стрелочку над левой производной. Очевидно, что

$$\frac{\partial f(u(x, \xi), \eta(x, \xi))}{\partial \xi_i} = \sum \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial f}{\partial u_k} + \sum \frac{\partial \eta_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial f}{\partial \eta_k}. \tag{31}$$

Скажем, что *функция f не зависит от* образующей x_i или ξ_j, если $\partial_{x_i} f = 0$ или, соответственно, $\partial_{\xi_j} f = 0$.

8. Интеграл. Определение интеграла финитной функции см. в п. 3 Введения. Аналогично можно определить интеграл, связанный с границей области U. Положим (как обычно, крышечка над символом означает, что символ надо считать, что его вовсе нет)

$$\mathrm{vol}_i(x) = dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_p; \qquad \mathrm{vol}_i(x/\xi) = \mathrm{vol}(x_1 \ldots \widehat{x}_i \ldots x_p/\xi). \tag{32}$$

Пусть $f_i(x, \xi) \in \Lambda_{p,q}(U)$, причем коэффициентные функции $f_{i;j_1,\ldots,j_k}(x)$ элементов $f_i(x, \xi)$ непрерывны вплоть до границы U. Определим интеграл $J_\Gamma(f)$, связанный с границей Γ области U, положив

$$J_\Gamma(f) = \int\limits_\Gamma \sum_i f_i(x, \xi)\ \mathrm{vol}_i(x/\xi) \overset{\mathrm{def}}{=} \int\limits_\Gamma \sum_i f_i(y, \xi)\ \mathrm{vol}_i(y/\xi), \tag{33}$$

где $y = (y_1, \ldots, y_p)$, а $y_i = m(x_i)$.

9. Интегрирование по частям. Пусть Γ — граница области U с ориентацией, индуцированной ориентацией области U. Тогда

$$\int f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \mathrm{vol}(x/\xi) = -\int \frac{\partial f_1}{\partial x_i} f_2 \,\mathrm{vol}(x/\xi) + \int\limits_\Gamma f_1 f_2\ \mathrm{vol}_i(x/\xi). \tag{34}$$

10. Замена переменных. По определению *замена переменных* — это переход от одной системы образующих алгебры $\Lambda_{p,q}(U)$ к другой с сохранением четности:

$$x_i = x_i(y, \eta), \qquad \xi_j = \xi_j(y, \eta). \tag{35}$$

Сопоставим замене переменных (35) матрицу частных производных (см. ее описание (16) во Введении)

$$R(x,\, \xi/y,\, \eta) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Положим

$$\Delta(x,\, \xi/y,\, \eta) = \det(A - BD^{-1}C)\det D^{-1}. \tag{37}$$

При замене переменных в обычных интегралах возникает якобиан. Его аналогом в случае интегралов (33) служит функция $\Delta(x,\, \xi/y,\, \eta)$.

Пусть Γ — граница области $U = \operatorname{Spec}(x_1,\, \ldots,\, x_p)$ а Γ_δ есть δ-окрестность границы Γ. Функцию $f(x,\, \xi) \in \Lambda_{p,q}(U)$ назовем *финитной*, если $f(\tilde{x},\, \xi) = 0$ при $\tilde{x} \in \Gamma_\delta$.

10.1. Теорема. *Пусть* $f(x,\, \xi)$ — *финитная функция. Тогда*

$$\int f(x(y,\, \eta),\, \xi(y,\, \eta))\Delta(x,\, \xi/y,\, \eta)\operatorname{vol}(y/\eta) = \int f(x,\, \xi)\operatorname{vol}(x/\xi). \tag{38}$$

Доказательство см. в п. 11, а пока проиллюстрируем теорему примерами.

1) Простейшая линейная замена переменных:

$$x_i = \sum a_{ik}y_k, \quad \xi_j = \sum d_{jk}\eta_k, \tag{39}$$

где a_{ik}, $d_{ik} \in \mathbb{K}$. В этом случае $B = C = 0$, $\Delta(x,\, \xi/y,\, \eta) = \det A(\det D)^{-1}$. Формула (38) легко следует из основных определений.

Обратим внимание на то, что $\det D$ входит в формулу так, как на многообразия в аналогичной ситуации входит якобиан обратного преобразования.

2) Рассмотрим алгебру $\Lambda_{p+p',q+q'}(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^{p+p'}$, и в ней две системы образующих

$$\begin{matrix} x_1,\, \ldots,\, x_p, & u_1,\, \ldots,\, u_{p'}, & \xi_1,\, \ldots,\, \xi_q, & \sigma_1,\, \ldots,\, \sigma_{q'}; \\ y_1,\, \ldots,\, y_p, & v_1,\, \ldots,\, v_{p'}, & \eta_1,\, \ldots,\, \eta_q, & \zeta_1,\, \ldots,\, \zeta_{q'}. \end{matrix}$$

Пусть эти образующие связаны соотношениями специального вида

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(y,\, v,\, \eta,\, \zeta), & \xi_j &= \xi_j(y,\, v,\, \eta,\, \zeta), \\ u_i &= v_i, & \sigma_j &= \zeta_j. \end{aligned} \tag{40}$$

Матрицы A, B, C, D в этом случае имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} A_{1,ik} &= \frac{\partial x_i}{\partial y_k}, & A_{2,ik} &= \frac{\partial x_i}{\partial v_k}, & B_{1,ik} &= x_i\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \eta_k}, & B_{2,ik} &= x_i\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \zeta_k}, \\ C_{1,ik} &= \frac{\partial \xi_i}{\partial y_k}, & C_{2,ik} &= \frac{\partial \xi_i}{\partial v_k}, & D_{1,ik} &= \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_k}, & D_{2,ik} &= \frac{\partial \xi_i}{\partial \zeta_k}. \end{aligned} \tag{41}$$

Специфика матриц A, B, C, D приводит к тому, что

$$\Delta(x,\, u,\, \xi,\, \sigma/y,\, v,\, \eta,\, \zeta) = \det(A_1 - B_1D_1^{-1}C_1)\det D_1^{-1} = \Delta(x,\, \xi/y,\, \eta).$$

Разумеется, $\Delta(x,\, \xi/y,\, \eta) \in \Lambda_{p+p',q+q'}(U)$, и, вообще говоря, $\Delta(x,\, \xi/y,\, \eta)$ зависит от всех образующих y, η, v, ζ.

Пусть $f = f(x,\, \xi)$ зависит только от образующих $x_1,\, \ldots,\, x_p$ и $\xi_1,\, \ldots,\, \xi_q$, а $g = g(u,\, \sigma)$ зависит только от образующих $u_1,\, \ldots,\, u_{p'}$ и $\sigma_1,\, \ldots,\, \sigma_{q'}$. Применяя общую формулу (38) и учитывая, что $u_i = v_i$, $\sigma_j = \zeta_j$, получаем

$$\begin{aligned} &\int f(x,\, \xi)g(u,\, \sigma)\operatorname{vol}(x,\, u/\xi,\, \sigma) = \\ &= \int f\big(x(y,\, u,\, \eta,\, \sigma),\, \xi(y,\, u,\, \eta,\, \sigma)\big)g(u,\, \sigma)\Delta(x,\, \xi/y,\, \eta)\operatorname{vol}(y,\, u/\eta,\, \sigma). \end{aligned} \tag{42}$$

Так как это тождество справедливо при любом $g = g(u,\, \sigma)$, поэтому

$$\int f\big(x(y,\, u,\, \eta,\, \sigma),\, \xi(y,\, u,\, \eta,\, \sigma)\big)\Delta(x,\, \xi/y,\, \eta)\operatorname{vol}(y/\eta) = \int f(x,\, \xi)\operatorname{vol}(x/\xi). \tag{43}$$

Формула (43) отличается от формулы (40) тем, что в (43) замена переменных и якобиан зависят от образующих u_i, σ_j, которые играют роль параметров. В качестве первой иллюстрации формулы (43) рассмотрим преобразование антикоммутирующих переменных, аналогичное параллельному переносу:

$$\xi_i = \eta_i + \sigma_i, \quad x_i = y_i + r_i(\sigma), \quad m(r_i) = 0.$$

Из формулы (43) следует

$$\int f(x + r,\, \xi + \sigma)\operatorname{vol}(x/\xi) = \int f(x,\, \xi)\operatorname{vol}(x/\xi). \tag{44}$$

3) Рассмотрим линейную замену переменных общего вида:

$$x_i = \sum A_{ik}y_k + \sum B_{is}\eta_s, \quad \xi_j = \sum C_{jk}y_k + \sum D_{js}\eta_s, \tag{45}$$

где A_{ik}, D_{js} — не зависящие от $(y_i,\, \eta_j)$ четные элементы алгебры $\Lambda_{p+p',q+q'}(U)$, а C_{jk}, B_{is} — не зависящие от $(y_i,\, \eta_j)$ нечетные элементы алгебры $\Lambda_{p+p',q+q'}(U)$, и при этом $\det A \neq 0$, $\det D \neq 0$.

Вначале рассмотрим частный случай, когда B_{is}, $C_{jk} = 0$. В результате получается преобразование, отличающееся от преобразования (39) тем, что теперь A_{ik}, D_{js} не числа, а элементы алгебры $\Lambda_{p+p',q+q'}(U)$, не зависящие от $(y_k,\, \eta_s)$ Так же, как в случае преобразования (39), формула (43) в этих условиях легко следует из основных определений.

Перейдем к общему случаю. Преобразуем интеграл, пользуясь попеременно однородными линейными преобразованиями, аналогичными (39), и параллельными переносами:

$$\begin{gathered}\int f(Ay + B\eta,\ Cy + D\eta)\ \mathrm{vol}(y/\eta) = \\ = \int \det A^{-1} \det D f(y + BD^{-1}\eta,\ CA^{-1}y + \eta)\ \mathrm{vol}(y/\eta) = \\ = \int \det A^{-1} \det D f(y + BD^{-1}(\eta - CA^{-1}y),\ \eta)\ \mathrm{vol}(y/\eta) = \\ = \int \det A^{-1} \det D \det \left(1 - BD^{-1}CA^{-1}\right)^{-1} f(y + BD^{-1}\eta,\ \eta)\ \mathrm{vol}(y/\eta) = \\ = \int \det D \det \left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} f(y,\ \eta)\ \mathrm{vol}(y/\eta). \quad (46)\end{gathered}$$

Отметим в заключение, что из формулы (46) вытекает важное следствие.

10.2. Теорема. *Если матрицы* $\mathcal{A}_1$ *и* $\mathcal{A}_2$ *являются матрицами частных производных последовательных замен переменных, то*

$$\mathrm{sdet}(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2) = \mathrm{sdet}\,\mathcal{A}_1 \cdot \mathrm{sdet}\,\mathcal{A}_2. \quad (47)$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$, а A, B, ..., A_i, B_i, ..., — блоки, из которых состоят матрицы $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_i$, где $i = 1, 2$, соответственно. Применяя соотношения (46), получаем

$$\int f(Ay + B\eta,\ Cy + D\eta)\ \mathrm{vol}(y/\eta) = \mathrm{sdet}(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2) \int f(y,\ \eta)\ \mathrm{vol}(y/\eta). \quad (48)$$

Положим $f_1(y,\ \eta) = f(A_1 y + B_1\eta,\ C_1 y + D_1\eta)$. Очевидно, что

$$f(Ay + B\eta,\ Cy + D\eta) = f_1(A_2 y + B_2\eta,\ C_2 y + D_2\eta).$$

Используя это тождество, получаем

$$\begin{gathered}\int f(Ay + B\eta,\ Cy + D\eta)\ \mathrm{vol}(y/\eta) = \int f_1(A_2 y + B_2\eta,\ C_2 y + D_2\eta)\ \mathrm{vol}(y/\eta) = \\ = \int \mathrm{sdet}\,\mathcal{A}_2 f_1(y,\ \eta)\ \mathrm{vol}(y/\eta) = \int \mathrm{sdet}\,\mathcal{A}_2 f(A_1 y + B_1\eta,\ C_1 y + D_1\eta)\ \mathrm{vol}(y/\eta) = \\ = \int \mathrm{sdet}\,\mathcal{A}_2 \cdot \mathrm{sdet}\,\mathcal{A}_1 \int f(y,\ \eta)\ \mathrm{vol}(y/\eta). \quad (49)\end{gathered}$$

Сравнивая формулы (48) и (49), устанавливаем справедливость тождества (47) для случая, когда элементы матриц $\mathcal{A}_i$ принадлежат $\Lambda_{p+p',q+q'}(U)$. Ввиду произвольности p', q', U это тождество остается справедливым и в случае, если элементы матриц $\mathcal{A}_i$ принадлежат Λ. ☐

Супердетерминант является одним из важнейших понятий линейной алгебры в $\mathbb{Z}/2$-градуированных пространствах. Выше приведены два доказательства его мультипликативности. (Читатель, конечно, понимает, что теорема 10.2 доказывает мультипликативность супердетерминанта на всем множестве четных обратимых суперматриц, только над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, но не над конечными полями или произвольной коммутативной алгеброй даже над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$. — *Прим. Д. Л.*)

11. Доказательство теоремы 10.1. Из определения (36) матрицы $R(x,\ \xi/y,\ \eta)$ очевидно следует соотношение мультипликативности, т. е.

$$R(x,\ \xi/y,\ \eta)R(y,\ \eta/u,\ \zeta) = R(x,\ \xi/u,\ \zeta). \quad (50)$$

В силу теоремы 10.2 аналогичным свойством обладает супердетерминант матрицы $R(x,\ \xi/y,\ \eta)$:

$$\Delta(x,\ \xi/y,\ \eta)\Delta(y,\ \eta/u,\ \zeta) = \Delta(x,\ \xi/u,\ \zeta). \quad (51)$$

Эти соотношения позволяют свести доказательство теоремы 10.1 к частным случаям.

Вначале рассмотрим замены переменных вида

$$x_i = x_i(y), \quad \xi_j = \eta_j \quad (52)$$

($x_i(y)$ не зависит от η_i) и

$$x_i = y_i, \qquad \xi_j = \xi_j(\eta). \quad (53)$$

($\xi_i(\eta)$ не зависит от y_i). Случай (52) очевидно сводится к теореме, хорошо известной из анализа на многообразиях.

Перейдем к случаю (53). В этом случае

$$R = R(\xi/\eta) = \left(\frac{\partial\xi_i}{\xi\eta_k}\right), \quad \Delta(\xi/\eta) = \det R^{-1}(\xi/\eta).$$

Рассмотрим вначале преобразование T, которое можно включить в однопараметрическую группу T_t преобразований вида (53). Положим

$$\xi_i(t) = T_t\eta_i, \quad g(t) = \int f(\xi_1(t),\ \ldots,\ \xi_q(t))\Delta(\xi(t)/\eta)\ \mathrm{vol}(\eta_q,\ \ldots,\ \eta_1).$$

Ввиду того что преобразование T_t действует на образующие x_i тождественно, аргумент x у функции $f(x,\ \xi)$ опущен.

Из теории групп Ли следует, что $g(t)$ — аналитическая функция параметра t. Используя соотношение (51), запишем $g(t + s)$ в виде

$$\begin{gathered}g(t + s) = \int f(\xi_1(t + s),\ \ldots,\ \xi_q(t + s))\Delta(\xi(t + s)/\xi(t))\Delta(\xi(t)/\eta)\ \mathrm{vol}(\eta) = \\ = \int f(\zeta_1(s),\ \ldots,\ \zeta_q(s))\Delta(s)\Delta(\xi(t)/\eta)\ \mathrm{vol}(\eta), \quad (54)\end{gathered}$$

где для краткости полагаем $\zeta_j(s) := \xi_j(t + s)$, а $\Delta(s) := \Delta(\xi(t + s)/\xi(t))$. Из формулы (54) следует, что

$$g'(t) = \frac{dg(t + s)}{ds}\bigg|_{s=0} = \int \left(\sum \frac{d\zeta_j}{ds}\frac{\partial f}{\partial\zeta_j}\Delta(s) + f\frac{d\Delta(s)}{ds}\right)_{s=0} \Delta(\xi(t)/\eta)\ \mathrm{vol}(\eta). \quad (55)$$

Заметим теперь, что

$$\Delta(s) = \det R^{-1}(s) = \exp(-\operatorname{tr}\ln R(s)), \quad \text{где } R(s) = R(\zeta(s)/\xi(t)).$$

Поэтому

$$\frac{d\Delta(s)}{ds}\Big|_{s=0} = -\operatorname{tr}\big(R'(s)R^{-1}(s)\big)\exp(-\operatorname{tr}\ln R(s))\big|_{s=0} =$$

$$= -\operatorname{tr} R'(0) = -\sum \frac{d}{ds}\,\frac{\partial\zeta_j}{\partial\xi_j}\Big|_{s=0}. \qquad (56)$$

Следовательно, выражение в квадратных скобках под знаком интеграла в формуле (55) преобразуется к виду

$$\sum_j\Big(\zeta_j'\frac{\partial f}{\partial\xi_j} - f\frac{\partial\zeta_j'}{\partial\xi_j}\Big) = -\sum_j\frac{\partial\zeta_j' f}{\partial\xi_j}, \quad \text{где } \xi_j = \xi_j(t), \quad \text{а } \zeta_j' = \frac{d\zeta_j}{ds}\Big|_{s=0} = \xi_j'(t).$$

Вспомним, что $T_t\eta_j = \xi_j(t)$ — однопараметрическая группа преобразований. Стандартные рассуждения показывают, что функции $\xi_j(t)$ удовлетворяют автономной системе дифференциальных уравнений

$$\xi_j'(t) = -\Phi_j(\xi_1, \ldots, \xi_q), \quad \text{где } j = 1, \ldots$$

Учитывая это, окончательно находим, что

$$g'(t) = \int\sum\frac{\partial\Phi_j f}{\partial\xi_j}\,\Delta(\xi(t)/\eta)\ \operatorname{vol}(\eta). \qquad (57)$$

Из соотношения (57) следует два важных вывода. Во-первых, функция $g'(t)$ имеет тот же вид, что $g(t)$, а разница состоит лишь в замене f на $\sum\partial_{\xi_j}(\Phi_j f)$. Во-вторых, $g'(0) = 0$. В самом деле, при $t = 0$ имеем $\xi_j = \eta_j$ и $\Delta(\xi(t)/\eta) = 1$. Поэтому

$$g'(0) = \int\sum_j\frac{\partial\psi_j(\eta)}{\partial\eta_j}\ \operatorname{vol}(\eta), \qquad \psi_j = \xi_j'(0)f(\eta). \qquad (58)$$

Из формулы (58) и определения интеграла следует, что $g'(0) = 0$. Функция $g'(t)$ имеет тот же вид, что $g(t)$, следовательно, $g''(0) = 0$. Продолжая это рассуждение дальше, находим, что $g^{(n)}(0) = 0$ при любом $n > 0$.

Выше было отмечено, что $g(t)$ — аналитическая функция переменной t. Поэтому из равенств $g^{(n)}(0) = 0$ при $n > 0$ следует, что $g(t) = \text{const}$. Учитывая, что $\int g(0)\,dx$ равен левой части равенства (38), получаем, что это равенство справедливо для преобразований вида (53), входящих в однопараметрическую группу.

Из теории групп Ли следует, что произвольное преобразование T вида (53) можно разложить в произведение конечного числа преобразований $T = T_1 \ldots T_r$, каждое из которых входит в однопараметрическую группу. С помощью этого разложения равенство (38) распространяется на случай произвольного преобразования вида (53).

Случай преобразований более общего вида

$$x_i = y_i, \quad \xi_j = \xi_j(y, \eta) \qquad (59)$$

легко сводится к случаю (53). В самом деле, интеграл (38) можно рассматривать как повторный, имеющий в качестве внутреннего интеграл по ξ_i, а в качестве внешнего — интеграл по x_i. Преобразование (59) является заменой переменных вида (53) во внутреннем интеграле, применяя к которому формулу (38), мы устанавливаем ее справедливость для преобразований вида (59).

Рассмотрим теперь преобразования

$$x_i = x_i(y, \eta), \quad \xi_j = \eta_j. \qquad (60)$$

Рассмотрим вначале частный случай

$$x_i = y_i + tf^{i_1\ldots i_{2k}}(y)\eta_{i_1}\ldots\eta_{i_{2k}}, \quad \xi_j = \eta_j. \qquad (61)$$

Преобразования (61) образуют однопараметрическую группу с параметром t. Повторяя во всех деталях рассуждения, использованные при доказательстве формулы (38) в случае (53), мы приходим к равенству

$$g'(t) = \int\sum\frac{\partial\Phi_i f}{\partial y_i}\,\Delta(x/y)\,dy, \qquad (62)$$

где g и Φ_i, имеют тот же смысл, что выше, а $\Delta(x/y) = \det(\partial_{y_k}x_i)$.

Интегрируя по частям и вспоминая, что $f = 0$ на границе области, находим, что $g'(0) = 0$. Раз $g'(t)$ имеет вид аналогичный $g(t)$, то $g^{(n)}(0) = 0$ при любом $n > 0$. Из аналитичности функции $g(t)$ отсюда следует, что $g(t) \equiv \text{const} = g(0)$.

Заметим теперь, что суперпозицией конечного числа преобразований вида (61) можно получить любое преобразование вида

$$x_i = y_i + \sum_k\sum f^{i_1\ldots i_{2k}}(y)\eta_{i_1}\ldots\eta_{i_{2k}}, \quad \xi_j = \eta_j. \qquad (63)$$

Наконец, суперпозицией преобразований (63) и (52) можно получить любое преобразование вида (60). Вспомним теперь, что замена переменных общего вида может быть получена суперпозицией преобразований (60) и (59). Отсюда, используя мультипликативность супердетерминанта, получаем отсюда утверждение теоремы 10.1 в общем виде. ☐

12. Замена переменных в случае нефинитных функций. Если элемент $f(x, \xi) \in \Lambda_{p,q}(U)$ не является финитным (т. е. с компактным носителем), то формула (38) неверна: появляются граничные члены. Чтобы разобраться в них, предположим, что область U выделяется неравенством $u(x) > 0$ и соответственно ее граница — уравнением $u(x) = 0$. Рассмотрим функцию $\theta(u) = \begin{cases} 1 & \text{при } u > 0, \\ 0 & \text{при } u < 0. \end{cases}$ Аппроксимируем (в смысле интегральной нормы) функцию $\theta(u(x))$ финитными функциями $\theta_\alpha(x)$, т. е. такими что

$$\lim_{\alpha \to 0} \int\limits_{x \in U} |\theta_\alpha(x) - \theta(u(x))|\, dx = 0. \tag{64}$$

Предположим, что коэффициентные функции элемента $f(x, \xi)$ продолжимы до функций в $\mathbb{R}^p$. Рассмотрим элементы $f_\alpha(x, \xi) = f(x, \xi)\theta_\alpha(x) \in \Lambda_{p,q}(U)$. Раз элементы $f_\alpha(x, \xi)$ финитны, для них справедлива формула (38):

$$\int f(x, \xi)\theta_\alpha(x) \operatorname{vol}(x/\xi) = \int f\big(x(y, \eta), \xi(y, \eta)\big)\theta_\alpha(x(y, \eta))\Delta(x, \xi/y, \eta) \operatorname{vol}(y/\eta).$$

Формула (64) позволяет перейти к искомому пределу при $\alpha \to 0$:

$$\int f(x, \xi) \operatorname{vol}(x/\xi) = \int f\big(x(y, \eta), \xi(y, \eta)\big)\theta\big(u(x(y, \eta))\big)\Delta(x, \xi/y, \eta) \operatorname{vol}(y/\eta). \tag{65}$$

Покажем, как возникают поправки к формуле (38). Разложение функции $x(y, \eta)$ в ряд по η приводит к аналогичному разложению функций $u(x(y, \eta))$ и $\theta(u(x(y, \eta)))$. Ограничиваясь первым неисчезающим членом:

$$\begin{aligned} &x_i(y, \eta) = x_i(y) + x_{i,kt}(y)\eta_k\eta_t + \ldots, \\ &u(x(y)) + \sum \frac{\partial u(x(y))}{\partial x_i} x_{i,kt}(y)\eta_k\eta_t + \ldots = v(y) + \sum v_{kt}(y)\eta_k\eta_t + \ldots, \\ &\theta(u(x(y, \eta))) = \theta(v(y)) + \theta'(v(y))\Big(\sum v_{kt}(y)\eta_k\eta_t + \ldots\Big) + \ldots = \\ &\qquad\qquad = \theta(v(y)) + \delta(v(y))(v(y, \eta) - v(y)) + \ldots, \end{aligned}$$

где $v(y) = u(x(y))$, $v_{kt}(y) = \sum \partial_{x_i} u(x(y)) x_{i,kt}(y)$, а многоточие в правой части последнего равенства означает сумму слагаемых, содержащих производные δ-функции. Учитывая определение интеграла, образующие y_i можно считать координатами в $\mathbb{R}^p$. В этих координатах область U выделяется неравенством $v(y) > 0$, а граница — уравнением $v(y) = 0$. Таким образом, правая часть равенства (65) имеет вид

$$\begin{aligned} &\int f\big(x(y, \eta), \xi(y, \eta)\big)\Delta(x, \xi/y, \eta) \operatorname{vol}(y/\eta) + \\ &+ \int f\big(x(y, \eta), \xi(y, \eta)\big)\delta(v(y))\big(v(y, \eta) - v(y)\big)\Delta(x, \xi/y, \eta) \operatorname{vol}(y/\eta) + \ldots, \end{aligned} \tag{66}$$

где многоточие означает сумму слагаемых, каждое из которых содержит под знаком интеграла k-ю производную дельта-функции $\delta^k(v(y))$ при $k \geqslant 1$. Первое слагаемое в формуле (66) имеет тот же вид, что левая часть равенства (38), остальные содержат граничные члены благодаря наличию функции $\delta(v(y))$ и ее производных под знаком интеграла.

---

3. Супермногообразия в целом

Удобно и полезно сводить понятие супермногообразия к более общему определению окольцованного пространства. Язык окольцованных пространств был предложен А. Гротендиком ради единого подхода к различным геометрическим теориям: теории гладких многообразий, алгебраической и аналитической геометриям и т. д. Каждой из этих теорий соответствует некоторая категория окольцованных пространств. Теория супермногообразий также укладывается в эту схему с той лишь разницей, что супермногообразия составляют подкатегорию категории пространств, окольцованных некоммутативными алгебрами — супералгебрами. Впрочем, степень «некоммутативности» супералгебр невелика, и, как мы увидим, к их исследованию применимы методы «коммутативных» геометрических теорий.

§ 1. Супермногообразия

Зафиксируем целые числа $p \geqslant 0$ и $q \geqslant 0$. Пусть Λ_q — вещественная алгебра Грассмана. Зададим в $\mathbb{R}^p$ пучок $\mathfrak{A}^{p,q}$, сечения которого на любом открытом подмножестве $U \subset \mathbb{R}^p$ составляют $\mathbb{R}$-алгебру $\mathfrak{A}^{p,q}(U)$ всех гладких функций в U со значениями в Λ_q. Слой $\mathfrak{A}^{p,q}_x$ этого пучка есть алгебра ростков гладких функций со значениями в Λ_q. Зададим на ней отображение — «вычет» $r_x\colon \mathfrak{A}^{p,q}_x \to \mathbb{R}$ по формуле $r_x(f) = f(x, 0)$, где $f(x, \xi)$ — запись произвольного элемента алгебры Грассмана в виде полинома по ее образующим с коэффициентами из $\mathcal{E}^p_x$. Очевидно, что $\mathfrak{A}^{p,q}_x$ есть локальная $\mathbb{R}$-алгебра, а $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{A}^{p,q})$ — $\mathbb{R}$-окольцованное пространство. Алгебры $\mathfrak{A}^{p,q}(U)$ обладают $\mathbb{Z}$-градуировкой по степеням образующих алгебры Λ_q. Если различать не сами степени, а лишь их четность, то возникает $\mathbb{Z}/2$-градуировка в алгебре $\mathfrak{A}^{p,q}(U)$ и, следовательно, во всяком слое $\mathfrak{A}^{p,q}_x$.

Введем категорию CB, объектами которой являются открытые подпространства окольцованных пространств $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{A}^{p,q})$, где $p, q = 0, 1, 2, \ldots$, а морфизмами — любые отображения этих $\mathbb{R}$-окольцованных пространств, сохраняющие $\mathbb{Z}/2$-градуировку супералгебр сечений их пучков. *Гладким супермногообразием* назовем всякое $\mathbb{R}$-окольцованное пространство локально изоморфное объекту из категории CB. Иными словами, супермногообразие может быть получено в результате склеек *суперобластей* $(U, \mathfrak{A}^{p,q}|_U)$, где U — область в $\mathbb{R}^p$, с помощью отображений, которые совместны со структурами $\mathbb{R}$-окольцованных пространств и сохраняют $\mathbb{Z}/2$-градуировку. Образ модельного супермногообразия при такой склейке есть *карта* на данном супермногообразии, а пара чисел (p, q) называется его *суперразмерностью*, причем p — *четная размерность*, а q — *нечетная размерность*. Отображения склейки могут быть описаны более явным образом. *Координатами* на супермногообразии $(\mathbb{R}^p, \mathfrak{A}^{p,q})$ назовем[1] совокупность координат на подстилающем пространстве $\mathbb{R}^p$ и образующих алгебры Λ_q.

1. Предложение. 1) *Пусть* $(U, \mathfrak{A}^{p,q}|_U)$ *и* $(U', \mathfrak{A}^{p',q'}|_{U'})$ — *суперобласти*, x, ξ — *координаты на первой из них. Тогда четные сечения* $y_i(x, \xi)$, *где* $i = 1, \ldots, p'$, *и нечетные сечения* $\eta_j(x, \xi)$, *где* $j = 1, \ldots, q'$, *пучка* $\mathfrak{A}^{p,q}|_U$, *такие что образ отображения*

$$f\colon U \ni x \mapsto (y_1(x, 0), \ldots, y_{p'}(x, 0)) \in \mathbb{R}^{p'}$$

принадлежит U', *задают морфизм* $(f, \varphi)\colon (U, \mathfrak{A}^{p,q}|_U) \to (U', \mathfrak{A}^{p',q'}|_{U'})$ *категории СВ*: *отображение* φ *действует подстановкой*

$$\varphi\colon b(y, \eta) \mapsto a(x, \xi) = b(y(x, \xi), \eta(x, \xi)). \tag{1}$$

2) *Обратно, всякий морфизм категории СВ записывается таким образом.*

Доказательство. Утверждение 1) очевидно. Проверим утверждение 2). Пусть $y_1, \ldots, y_{p'}$ и $\eta_1, \ldots, \eta_{q'}$ — четные и нечетные образующие алгебры $\mathfrak{A}^{p',q'}|_{U'}$. Положим

$$y_i(x, \xi) = \varphi(y_i), \qquad \eta_j(x, \xi) = \varphi(\eta_j).$$

Формула (1) справедлива для сечений $b = y_i$ и $b = \eta_j$ пучка $\mathfrak{A}^{p',q'}$. Поскольку по условию φ есть морфизм $\mathbb{R}$-алгебр, формула (1) верна также для $b = 1$, а следовательно, и для любого полинома от y_i и η_j с вещественными коэффициентами. Докажем ее для произвольного ростка $b \in \mathfrak{A}^{p',q'}_{f(x^0)}$, где x^0 — любая точка области U. Пусть $\mathfrak{m}'$ — максимальный идеал в $\mathfrak{A}^{p',q'}_{f(x^0)}$. Его образ $\varphi(\mathfrak{m}')$ принадлежит максимальному идеалу $\mathfrak{m}$ алгебры $\mathfrak{A}^{p,q}_{x^0}$. Подберем многочлен $\tilde{b}$ от элементов y_i и η_j так, чтобы разность $b - \tilde{b}$ принадлежала $(\mathfrak{m}')^{q+1}$. Тогда $\varphi(b) - \varphi(\tilde{b}) \in \mathfrak{m}^{q+1}$. Идеал $\mathfrak{m}$ порождается образами сечений $x_i - x_i^0$ и ξ_j, следовательно, $\mathfrak{m}^{q+1}$ порождается однородными полиномами степени $q + 1$ от этих сечений. Так как любой полином такой степени от ξ_j равен нулю, то $\mathfrak{m}^{q+1}$ принадлежит идеалу, порожденному лишь сечениями $x_i - x_i^0$. Из сказанного следует, что

$$\varphi(b)(x^0, \xi) = \varphi(\tilde{b})(x^0, \xi) = \tilde{b}(y(x^0, \xi), \eta(x^0, \xi)).$$

---

[1] Такие координаты до некоторой степени «привилегированы». Их образы при автоморфизмах супералгебр $\mathfrak{A}^{p,q}|_U$ — тоже координаты. Но и эти образы не являются координатами самого общего вида: все они соответствуют лишь $\mathbb{R}$-точкам супергруппы диффеоморфизмов суперобласти $(U, \mathfrak{A}^{p,q}|_U)$, а ведь у супергруппы есть еще нечетные параметры. О том, как учитывать нечетные параметры, см. в книге [СоС1°]. — *Прим. Д. Л.*

С другой стороны, всякий однородный полином степени $q + 1$ от $y_i(x, \xi) - y_i(x^0, \xi)$ и $\eta_j(x, \xi)$ обращается в нуль при $x = x^0$. Поэтому из включения $b - \tilde{b} \in (\mathfrak{m}')^{q+1}$ вытекает, что

$$\tilde{b}(y(x^0, \xi), \eta(x^0, \xi)) = b(y(x^0, \xi), \eta(x^0, \xi)).$$

Два последних равенства доказывают соотношение (1). ☐

В частности, мы вправе заключить, что всякое отображение склейки в структуре супермногообразия имеет вид (1). Обратно, при помощи таких отображений можно сконструировать супермногообразие.

2. Предложение. *Пусть фиксировано некоторое множество* A, *и для всякого элемента* $\alpha \in A$ *выбрано суперпространство* X_α (*т. е. объект категории СВ*). *Пусть, далее, для всякой упорядоченной пары* $\alpha, \beta \in A$ *выделены открытое подпространство* $X_{\alpha\beta}$ *пространства* X_α *и морфизм* $\varphi_{\beta\alpha}\colon X_{\alpha\beta} \to X_{\beta\alpha}$ *категории СВ, так что выполняются следующие условия*:

I) $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\alpha} = \mathrm{id}\,|_{X_{\alpha\beta}}$;

II) $\bar{\varphi}_{\beta\alpha}^{-1}(\bar{X}_{\gamma\beta}) \subset \bar{X}_{\gamma\alpha}$ *для любых* α, β, $\gamma \in A$

(*здесь черта означает переход к подстилающему пространству или отображению*), *и на открытом подпространстве* $X_{\alpha\beta\gamma}$ *пространства* X_α, *таком что* $\bar{X}_{\alpha\beta\gamma} = \bar{\varphi}_{\beta\alpha}^{-1}(\bar{X}_{\gamma\beta})$, *выполняется соотношение* $\varphi_{\gamma\beta}\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_{\gamma\alpha}$. *Тогда существует и единственно с точностью до изоморфизма гладкое супермногообразие* X, *для которого некоторые отображения* $\varphi_\alpha\colon X_\alpha \to X$ *служат картами, а морфизмы* $\varphi_{\beta\alpha}$ — *отображениями склейки.*

Рассмотрим также комплексно-аналитический аналог понятия гладкого супермногообразия. Пусть $p \geqslant 0$ и $q \geqslant 0$ — целые числа, а Λ_q — комплексная алгебра Грассмана. Введем пучок $\mathcal{H}^{p,q}$ на $\mathbb{C}^p$, значение которого на $U \subset \mathbb{C}^p$ есть $\mathbb{C}$-алгебра всех голоморфных функций на U со значениями в Λ_q. Слой $\mathcal{H}^{p,q}_z$ этого пучка есть локальная $\mathbb{C}$-алгебра с «вычетом» r_z, действующим по формуле $r_z(f) = f(z, 0)$. Подобно алгебрам $\mathfrak{A}^{p,q}$, в алгебрах $\mathcal{H}^{p,q}(U)$ вводится $\mathbb{Z}/2$-градуировка. Рассмотрим категорию *СК*, объектами которой являются открытые подпространства пространств $(\mathbb{C}^p, \mathcal{H}^{p,q})$, а морфизмами — любые отображения этих $\mathbb{C}$-окольцованных пространств, сохраняющие $\mathbb{Z}/2$-градуировку. *Комплексно-аналитическим супермногообразием* мы[1] называем всякое $\mathbb{C}$-окольцованное

---

[1] А участники семинара «SoS», Ю. И. Манин и А. Л. Онищик предпочитают определение, предложенное Делинем, см. [Вай*], согласно которому *комплексно-аналитическое супермногообразие* — это супермногообразие, *локально* устроенное как объект категории *СК*. — *Прим. Д. Л.*

пространство типа CK. Формулировки и доказательство предложений 1 и 2 переносятся без изменений на категорию пространств типа CK.

Очевидно, что категория гладких супермногообразий содержит подкатегорию гладких многообразий (пространства типа $\mathcal{M}_1$), см. п. 4 Предварительных сведений: последние можно рассматривать как гладкие супермногообразия нечетной размерности 0. Подобно этому, категорию комплексно-аналитических многообразий можно рассматривать как подкатегорию комплексно-аналитических супермногообразий.

§ 2. Конструкции супермногообразий

1. Подпространство, заданное уравнениями. Пусть $(U,\,\mathfrak{A}^{p,q})$ — суперобласть, а f_i, где $i=1,\,\ldots,\,p'$, — набор четных, а φ_j, где $j=1,\,\ldots,\,q'$, — набор нечетных сечений пучка $\mathfrak{A}^{p,q}$. Рассмотрим подмножество $\Phi\subset\mathfrak{A}^{p,q}$, такое, что для всякой точки $x\in U$ пересечение $\Phi_x=\Phi\cap\mathfrak{A}^{p,q}_x$ есть идеал алгебры $\mathfrak{A}^{p,q}_x$, порожденный ростками сечений f_i и φ_j. Очевидно, что подмножество Φ открыто в топологии пучка $\mathfrak{A}^{p,q}$ и, следовательно, является пучком. Оно называется *пучком идеалов*, порожденным указанными сечениями. Множество его корней X совпадает с множеством точек x, таких что $r_x(\Phi_x)=0$. Согласно примеру 3) п. 4 Предварительных сведений это множество задается уравнениями

$$f_i(x,\,0)=0,\quad \text{где } i=1,\,\ldots,\,p'.$$

Рассмотрим факторпучок колец $\mathfrak{A}^{p,q}/\Phi$. В каждой точке $x\in X$ отображение r_x порождает «вычет» $\tilde r_x\colon(\mathfrak{A}^{p,q}/\Phi)_x\cong\mathfrak{A}^{p,q}_x/\Phi_x\to\mathbb{R}$. Таким образом, $\mathfrak{A}^{p,q}/\Phi|_X$ есть пучок $\mathbb{R}$-алгебр, а $(X,\,\mathfrak{A}^{p,q}/\Phi|_X)$ есть $\mathbb{R}$-окольцованное подпространство пространства $(U,\,\mathfrak{A}^{p,q})$.

Введем в факторпучке $\mathbb{Z}/2$-градуировку таким образом, чтобы естественное отображение пучков $\mathfrak{A}^{p,q}\to\mathfrak{A}^{p,q}/\Phi$ было согласовано с градуировками. Для этого мы объявляем четным (нечетным) элементом факторпучка образ любого четного (нечетного) элемента пучка $\mathfrak{A}^{p,q}$. Нужно лишь проверить непротиворечивость такой конструкции, т. е. показать, что ненулевой элемент факторпучка не может быть одновременно четным и нечетным. Предположим, что такой элемент имеется. Тогда существуют элементы $a,\,b\in\mathfrak{A}^{p,q}$ разной четности, такие что $a-b\in\Phi_x$ при некотором $x\in U$, т. е.

$$a-b=\sum\alpha_i f_i+\sum\beta_j\varphi_j.$$

Разлагая коэффициенты α_i, β_j на четные и нечетные компоненты, мы получим

$$a=\sum\alpha'_i f_i+\sum\beta''_j\varphi_j,$$

откуда следует, что $a\in\Phi_x$, и поэтому $b=0$.

Таким образом, $\mathfrak{A}^{p,q}/\Phi|_X$ есть пучок $\mathbb{Z}/2$-градуированных $\mathbb{R}$-алгебр. Однако он не обязательно является структурным пучком супермногообразия. Необходимые и достаточные условия для этого совпадают с условиями теоремы о неявной функции. Напомним, что эти условия заключаются в том, что при некотором способе нумерации четных и нечетных образующих алгебры сечений $\mathfrak{A}^{p,q}$ выполняются неравенства

$$\det\Bigl(\frac{\partial f_i(x,\,0)}{\partial x_k}\Bigr)\Big|_{i,k=1}^{p'}\neq 0,\qquad \det\Bigl(\frac{\partial\varphi_j(x,\,0)}{\partial\xi_\ell}\Bigr)\Big|_{j,\ell=1}^{q'}\neq 0. \tag{2}$$

1.1. Теорема. *Предположим, что в каждой точке $x\in X$ выполнены условия (2). Тогда окольцованное пространство $(X,\,\mathfrak{A}^{p,q}/\Phi)$ является гладким супермногообразием.*

Аналогичное утверждение справедливо также и в категории комплексно-аналитических супермногообразий.

Доказательство. (Это доказательство применимо также к комплексно-аналитическим супермногообразиям.) Мы покажем, что всякая точка $x_0\in X$ обладает окрестностью X_0, такой что $\mathbb{R}$-окольцованное пространство $(X_0,\,\mathfrak{A}^{p,q}/\Phi|_{X_0})$ изоморфно модельному гладкому супермногообразию (т. е. суперобласти), причем соответствующий изоморфизм пучков сохраняет $\mathbb{Z}/2$-градуировку. Если, воспользовавшись этим изоморфизмом, заменить указанное окольцованное пространство модельным, то мы получим реализацию всего пространства $(X,\,\mathfrak{A}^{p,q}/\Phi)$ как результат склейки модельных пространств с помощью морфизмов, сохраняющих $\mathbb{Z}/2$-градуировки. Согласно изложенному в п. 4 Предварительных сведений это означает, что рассматриваемое окольцованное пространство есть гладкое супермногообразие.

Итак, остается построить изоморфизм вида

$$s\colon(V,\,\mathfrak{A}^{\tilde p,\tilde q})\longrightarrow(X_0,\,\mathfrak{A}^{p,q}/\Phi|_{X_0}).$$

Запишем $\mathbb{R}^p\cong\mathbb{R}^{p'}\oplus\mathbb{R}^{\tilde p}$, где $\mathbb{R}^{p'}$ — подпространство, содержащее p' первых координат, а $\mathbb{R}^{\tilde p}$ — все остальные. Пусть $\zeta\colon X_0\to V$, где $V=\zeta(X_0)$, — ограничение координатной проекции $\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^{\tilde p}$. В силу теоремы о неявной функции если окрестность X_0 достаточно мала, то ζ есть гомеоморфизм и существуют четные (соответственно нечетные) элементы g_i, $\psi_j\in\Gamma(V,\,\mathfrak{A}^{\tilde p,\tilde q})$, такие что при подстановке

$$x_i=g_i(\tilde x,\,\tilde\xi),\quad \text{где } i=1,\,\ldots,\,p',\qquad \xi_j=\psi_j(\tilde x,\,\tilde\xi),\quad \text{где } j=1,\,\ldots,\,q', \tag{3}$$

причем $\tilde x=(x_{p'+1},\,\ldots,\,x_p)$, а $\tilde\xi=(\xi_{q'+1},\,\ldots,\,\xi_q)$, все сечения f_i и φ_j обращаются в нуль. Рассмотрим отображения пучков, заданных на X_0:

$$\zeta^*(\mathfrak{A}^{\tilde p,\tilde q})\xrightarrow{\;i\;}\mathfrak{A}^{p,q}|_{X_0}\xrightarrow{\;\pi\;}\mathfrak{A}^{p,q}/\Phi|_{X_0},$$

где π — естественное отображение, а i задано формулой

$$i\colon a(y,\, \eta) \longrightarrow b(x,\, \xi) \equiv a(\tilde{x},\, \tilde{\xi}).$$

Ясно, что они сохраняют $\mathbb{Z}/2$-градуировку и π есть морфизм $\mathbb{R}$-алгебр. Проверим, что последним свойством обладает также i. Пусть $z \in X_0$, а $\tilde{z} = \zeta(z)$. Тогда $\zeta^*(\mathfrak{A}^{\tilde{p},\tilde{q}}) \cong \mathfrak{A}^{p,q}_{\tilde{z}}$ и для всякого элемента a этой алгебры выполняются равенства

$$r_z(a) = r_{\tilde{z}}(a) = a(\tilde{z},\, 0).$$

В то же время

$$r_z(i(a)) = r_z(b) = b(z,\, 0) = a(\tilde{z},\, 0), \quad \text{т. е. } r_z = r_z \cdot i.$$

1.2. Лемма. *Пусть $z \in X_0$ и $h \in \mathfrak{A}^{p,q}$, причем h обращается в нуль при подстановке $x_i = g_i(\tilde{x},\, \tilde{\xi})$ и $\xi_j = \psi_j(\tilde{x},\, \tilde{\xi})$, см. формулу* (3). *Существуют элементы a^i, $b^j \in \mathfrak{A}^{p,q}_z$, такие что*

$$h = \sum a^i(x_i - g_i) + \sum b^j(\xi_j - \psi_j). \tag{4}$$

Доказательство. Будем писать $x = (x',\, \tilde{x})$ и $\xi = (\xi',\, \tilde{\xi})$, а указанные подстановки запишем в виде $x' = g$, $\xi' = \psi$. Рассмотрим элемент $\tilde{h}(x,\, \tilde{\xi}) := h(x;\, \psi,\, \tilde{\xi})$ и покажем, что он допускает разложение

$$\tilde{h} = \sum a^i(x_i - g_i). \tag{5}$$

Как элемент алгебры Грассмана $\mathfrak{A}^{p,q}_z$ он имеет вид

$$\tilde{h}(x,\, \tilde{\xi}) = \sum h_{i_1,\ldots,i_n}(x)\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_n}.$$

Пусть k — минимальная степень отличных от нуля коэффициентов $h_{i_1,\ldots,i_n}$. По условию $\tilde{h}(g(\tilde{x},\, \tilde{\xi}),\, \tilde{x},\, \tilde{\xi}) = 0$, следовательно, $h_{i_1,\ldots,i_k}(g(\tilde{x},\, 0)) = 0$ для любых $i_1 < \ldots < i_k$. Отсюда по лемме Адамара (см. [CoC1°] — *прим. Д. Л.*) вытекает, что

$$h_{i_1,\ldots,i_k}(x) = \sum_{i=1}^{p'} a^i_{i_1,\ldots,i_k}(x)(x_i - g_i(\tilde{x},\, 0)), \qquad a_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathfrak{A}^{p,q}_z.$$

Поэтому полином

$$\hat{h}(x,\, \tilde{\xi}) = \tilde{h}(x,\, \tilde{\xi}) - \sum_{i,i_1,\ldots,i_k} a^i_{i_1,\ldots,i_k}(x)(x_i - g_i(\tilde{x},\, \tilde{\xi}))\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k}$$

не содержит членов порядка степени $\leqslant k$, причем снова $\hat{h}(g,\, \tilde{x},\, \tilde{\xi}) = 0$. По индукции мы приходим к равенству (5).

Далее, положим $\eta_j = \xi_j - \psi_j(\tilde{x},\, \tilde{\xi})$, или, коротко, $\eta = \xi' - \psi$. Разлагая по степеням η, мы найдем, что

$$h(x,\, \xi) = h(x;\, \eta + \psi,\, \tilde{\xi}) = h(x;\, \psi,\, \tilde{\xi}) + \sum \eta_j l_j(x,\, \xi) =$$
$$= \tilde{h}(x,\, \tilde{\xi}) + \sum(\xi_j - \psi_j(\tilde{x},\, \tilde{\xi}))\ell_j(x,\, \xi)$$

с некоторыми $\ell_j \in \mathfrak{A}^{p,q}_z$. Отсюда из соотношения (5) следует лемма. ☐

1.3. Лемма. *Элементы $x_i - g_i(\tilde{x},\, \tilde{\xi})$ и $\xi_j - \psi_j(\tilde{x},\, \tilde{\xi})$, см. формулу* (3), *суть сечения пучка Φ на X_0.*

Доказательство. Достаточно показать, что во всякой точке $z \in X_0$ ростки этих элементов принадлежат алгебре Φ_z. Согласно формуле (3) и лемме 1.2 имеются разложения

$$\begin{aligned} f_i &= \sum a^k_i(x_k - g_k) + \sum b^\ell_i(\xi_\ell - \varphi_\ell), \\ \varphi_j &= \sum c^k_j(x_k - g_k) + \sum d^\ell_j(\xi_\ell - \psi_\ell), \end{aligned} \tag{6}$$

коэффициенты которых принадлежат $\mathfrak{A}^{p,q}_z$. Из этих разложений мы находим, что

$$\frac{\partial f_i(x,\, 0)}{\partial x_k} = a^k_i(x,\, 0), \qquad \frac{\partial \varphi_j(x,\, 0)}{\partial \xi_\ell} = d^\ell_i(x,\, 0).$$

По условию (2) матрицы $(a^k_i(x,\, \xi))$ и $(d^\ell_i(x,\, \xi))$ обратимы над $\mathfrak{A}^{p,q}_z$. Поэтому обратима также матрица коэффициентов (6), поскольку блоки (b^ℓ_i) и (c^k_j) образованы нечетными элементами, принадлежащими максимальному идеалу $\mathfrak{m}_z$. Обращая разложения (6), получаем утверждение леммы. ☐

1.4. Лемма. *Отображение πi есть изоморфизм.*

Доказательство. Покажем сначала, что отображение πi мономорфно. Пусть $\pi i(a) = 0$, где $a \in \mathfrak{A}^{\tilde{p},\tilde{q}}_z$, т. е.

$$a(\tilde{x},\, \tilde{\xi}) = \sum a^i(x,\, \xi) f_i(x,\, \xi) + \sum b^j(x,\, \xi)\psi_j(x,\, \xi)$$

с некоторыми коэффициентами из $\mathfrak{A}^{p,q}_z$. Полагая здесь $\tilde{x} = g$ и $\tilde{\xi} = \psi$, см. формулу (3), мы не изменим левую часть и обратим в нуль правую. Следовательно, $a = 0$.

Проверим, что πi — эпиморфизм. Для произвольного $a \in \mathfrak{A}^{p,q}_z$ положим $b(\tilde{x},\, \tilde{\xi}) = a(g,\, \tilde{x};\, \psi,\, \tilde{\xi})$. Ясно, что b принадлежит образу отображения i. Покажем, что элемент $a' = a - b \in \Phi_z$. Этого достаточно для завершения доказательства леммы. Мы имеем $a'(g,\, \tilde{x};\, \psi,\, \tilde{\xi}) = 0$. По лемме 1.2 элемент a' имеет вид (4), а в силу леммы 1.3 он принадлежит алгебре Φ_z. Следовательно, отображение $s = (\zeta,\, \pi i)$ — изоморфизм $\mathbb{R}$-окольцованных пространств с $\mathbb{Z}/2$-градуировкой. Лемма, а с ней и теорема 1.1, доказаны. ☐

2. Прямые произведения супермногообразий. Пусть C — некоторая категория, а A и B — ее объекты. *Прямым произведением* этих объектов называется объект $A \times B$ вместе с морфизмами $A \leftarrow A \times B \rightarrow B$, которые обладают следующим «универсальным» свойством: для всякого объекта Γ и его морфизмов в A и B существует и однозначно определен морфизм в $A \times B$, такой что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& A & \\
\Gamma \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & A \times B \arrow[ul] \arrow[dl] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

2.1. Теорема. *В категориях CB и CK определено прямое произведение любых объектов.*

Доказательство. Пусть $(M, \mathcal{O}_M)$ и $(N, \mathcal{O}_N)$ — гладкие или комплексно-аналитические супермногообразия. Возьмем прямое произведение подстилающих пространств $M \times N$ и надстроим над ним супермногообразие. Пусть

$$(f, \varphi)\colon (U, \mathcal{O}_M|_U) \longrightarrow (f(U), \mathfrak{A}^{p,q}), \qquad (g, \psi)\colon (V, \mathcal{O}_N|_V) \longrightarrow (g(V), \mathfrak{A}^{r,s})$$

— карты на исходных супермногообразиях. На открытом подмножестве $U \times V \subset M \times N$ зададим гомеоморфизм

$$f \times g\colon U \times V \longrightarrow f(U) \times g(V) \subset \mathbb{R}^{p+r}(\mathbb{C}^{p+r})$$

по формуле $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$. Образ этого отображения, будучи наделен пучком $\mathfrak{A}^{p+r,q+s}$ (соответственно $\mathcal{H}^{p+r,q+s}$), является модельным гладким (комплексно-аналитическим) супермногообразием. Следовательно, $(U \times V, (f \times g)^*(\mathfrak{A}^{p+r,q+s}))$ есть супермногообразие, а отображение $(f \times g, \mathrm{id})$ есть карта на нем. Структурный пучок $\mathcal{O}_{M\times N}$ мы получим, склеив пучки $(f \times g)^*(\mathfrak{A}^{p+r,q+s})$. Чтобы определить отображения склейки, рассмотрим еще одну карту $(f', \varphi')\colon (U', \mathcal{O}_M|_{U'}) \to (f'(U'), \mathfrak{A}^{p,q})$ на M, связанную с (f, φ) отображением склейки (h, χ); см. пример 2) в п. 5 Предварительных сведений. Склеим модельные прямые произведения

$$(f(U \cap U') \times g(V), \mathfrak{A}^{p+r,q+s}) \xrightarrow{(\tilde{h},\tilde{\chi})} (f'(U \cap U') \times g(V), \mathfrak{A}^{p+r,q+s}),$$

положив $\tilde{h} = h \times 1$. Отображение склейки действует в каждом слое подстановкой

$$\chi(a) = b(x, \xi) \equiv a(x'(x, \xi), \xi'(x, \xi)),$$

где $x'(x, \xi)$ и $\xi'(x, \xi)$ — некоторые четные и нечетные сечения структурного пучка. Положим

$$\tilde{\chi}\colon \alpha(x', y; \xi', \eta) \longrightarrow \beta(x, y; \xi, \eta) := \alpha(x'(x, \xi), y; \xi'(x, \xi), \eta).$$

Подобным образом строим склейки карт на $U \times V$ и $U \times V'$. Непротиворечивость таких склеек легко проверяется.

Определим отображение $\mathrm{pr}_1\colon (M \times N, \mathcal{O}_{M\times N}) \to (M, \mathcal{O}_M)$. На подстилающем пространстве $M \times N$ оно действует как проекция на прямой сомножитель M. Отображение структурных пучков строится следующим образом при помощи карт:

$$\mathrm{pr}_1^*(\mathcal{O}_M)|_{U\times V} \cong \mathrm{pr}_1^*(\mathfrak{A}^{p,q})|_{U\times V} \longrightarrow \mathfrak{A}^{p+r,q+s}|_{U\times V} \cong \mathcal{O}_{M\times N}|_{U\times V}.$$

Аналогично определяется структурное отображение прямого произведения на второй сомножитель. Проверку универсального свойства мы оставляем читателю. □

3. Расслоенные произведения. Пусть снова C — произвольная категория, $A \rightarrow \Delta \leftarrow B$ — ее объекты и морфизмы. *Расслоенным произведением* A и B над Δ называется объект, обозначаемый $A \times_\Delta B$, вместе с такими его морфизмами в A и B, что коммутативен правый треугольник в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dr] & \\
\Gamma \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & A \times_\Delta B \arrow[u] \arrow[d] & \Delta \\
& B \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

обладающий следующим универсальным свойством: для всякого объекта Γ и его морфизмов в A и B, делающих внешний квадрат в диаграмме коммутативным, существует и однозначно определен морфизм объекта Γ в расслоенное произведение, сохраняющий коммутативность всей диаграммы. Прямое произведение есть частный случай расслоенного, если в категории присутствует так называемый финальный объект F, т. е. такой, что всякий объект обладает единственным морфизмом в F. В «геометрических» категориях финальным объектом является точка, наделенная основным полем в качестве алгебры глобальных сечений структурного пучка. В частности, точка, наделенная полем $\mathfrak{A}^{0,0} \cong \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, есть финальный объект в категории CB, соответственно CK. В этих категориях расслоенное произведение, вообще говоря, не существует. Однако справедлива следующая теорема.

3.1. Теорема. *Расслоенное произведение $M \times_L N$, принадлежащее категории $\mathbb{Z}/2$-градуированных $\mathbb{R}$-окольцованных ($\mathbb{C}$-окольцованных) пространств определено для любых морфизмов супермногообразий $M \xrightarrow{m} L \xleftarrow{n} N$.*

Доказательство. Опишем коротко конструкцию произведения $M \times_L N$, оставляя подробности дотошному читателю. Рассмотрим прямое произведение супермногообразий $M \times N$. Структурные морфизмы прямого произведения на сомножители в композиции с морфизмами m и n задают отображения $(\ell_i, \lambda_i)\colon M \times N \to L$. Выделим замкнутое подмножество $P \subset M \times N$ уравнением

$$\ell_1(x, y) = \ell_2(x, y), \quad \text{т. е. } m(x) = n(y),$$

и в любой точке $(x, y) \in P$ рассмотрим идеал $\mathcal{J}_{(x,y)}$ в кольце $\mathcal{O}_{M\times N,(x,y)}$, порожденный элементами $\lambda_1(\zeta_\alpha) - \lambda_2(\zeta_\alpha)$, где ζ_α — четные и нечетные образующие алгебры $\mathcal{O}_{L,m(x)}$. Объединение $\mathcal{J} = \bigcup\limits_P \mathcal{J}_{(x,y)}$ есть подпучок идеалов в пучке $\mathcal{O}_{M\times N}|_P$. Окольцованное пространство $(P, \mathcal{O}_{M\times N}|_P/\mathcal{J})$ есть искомое расслоенное произведение. □

Из теоремы 1.1 вытекает достаточное (оно же и необходимое) условие того, что расслоенное произведение супермногообразий само является супермногообразием. В каждой точке $(x, y) \in P$ должно быть выполнено следующее условие трансверсальности: если $z_1, \ldots, z_k$ — четные, а $\theta_1, \ldots, \theta_s$ — нечетные образующие алгебры $\mathcal{O}_{L,m(x)}$, то

$$\operatorname{rk}\left(\frac{\partial\lambda_1(z_i)}{\partial x_j}\ \frac{\partial\lambda_2(z_i)}{\partial y_{j'}}\right)\Big|_{\xi=0,\ \eta=0} = k, \qquad \operatorname{rk}\left(\frac{\partial\lambda_1(\theta_i)}{\partial \xi_j}\ \frac{\partial\lambda_2(\theta_i)}{\partial \eta_{j'}}\right)\Big|_{\xi=0,\ \eta=0} = s.$$

4. Слой отображения супермногообразий. Пусть $m\colon M \to L$ — отображение супермногообразий, а ℓ — точка супермногообразия L. Наделив ее структурным пучком (над полем $\mathbb{K}$), мы получим нульмерное супермногообразие $(\ell, \mathbb{K})$ и отображение супермногообразий $\lambda\colon (\ell, \mathbb{K}) \to (L, \mathcal{O}_L)$, где $\mathcal{O}_{L,\ell} \to \mathbb{K}$ есть «вычет». Слой отображения m над ℓ есть по определению расслоенное произведение отображений m и λ. Из сказанного выше нетрудно[1] вывести условие, при котором слой отображения сам является супермногообразием.

§ 3. Стратификация супермногообразия

Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — гладкое или комплексно-аналитическое супермногообразие. Выберем точку $x \in X$ и рассмотрим идеал $\mathcal{J}_x$ в $\mathcal{O}_{X,x}$, порожденный всеми нечетными образующими $\xi_1, \ldots, \xi_q$ алгебры $\mathcal{O}_{X,x}$. При другом выборе нечетных образующих $\eta_1, \ldots, \eta_q$ мы получим тот же идеал, поскольку η_i разлагается по нечетным степеням образующих ξ_j и, наоборот, ξ разлагается по η. Объединение $\mathcal{J} = \bigcup \mathcal{J}_x$ есть открытое подмножество пучка $\mathcal{O}_X$, поскольку всякая нечетная образующая в данной точке является таковой и в близких точках. Следовательно, $\mathcal{J}$ есть подпучок идеалов пучка $\mathcal{O}_X$. Сказанное относится и к его степеням $\mathcal{J}^k = \bigcup \mathcal{J}^k_x$, где $k = 2, 3, \ldots$ Отметим, что множество корней любого из пучков $\mathcal{J}^k$ есть все подстилающее пространство. По определению при любом k окольцованное пространство $X_k = (X, \mathcal{O}_X/\mathcal{J}^{k+1})$ есть замкнутое подпространство как пространства X_{k+1}, так и супермногообразия $X_\infty = (X, \mathcal{O}_X)$. Таким образом, мы имеем цепь вложений окольцованных пространств

$$X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow X_k \hookrightarrow X_{k+1} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow X_\infty. \tag{7}$$

Пространство X_0 назовем *подстилающим многообразием* данного супермногообразия, а X_k — *k-й инфинитезимальной окрестностью* подстилающего многообразия в супермногообразии X_∞. Цепь (7) назовем *инфинитезимальной стратификацией* этого супермногообразия. Заметим, что если число Q больше нечетной размерности супермногообразия в каждой его точке, то $X_Q = X_\infty$.

1. Предложение. *Пространство X_0 изоморфно гладкому над $\mathbb{R}$ (соответственно комплексно-аналитическому над $\mathbb{C}$) многообразию.*

Доказательство. Установим локальный изоморфизм пространства X_0 и модельного пространства из категории $\mathcal{M}_1$ (соответственно $\mathcal{M}_2$). Пусть $(f, \varphi)\colon (U, \mathcal{O}_X|_U) \longrightarrow (V, \mathfrak{A}^{p,q})$ — любая карта на X. Так как гомоморфизм φ сохраняет $\mathbb{Z}/2$-градуировку, он изоморфно отображает пучок $\mathcal{J}|_U$ на аналогичный пучок $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{A}^{p,q}/V$ и, следовательно, порождает изоморфизм окольцованных пространств:

$$(U, \mathcal{O}_X/\mathcal{J}|_U) \xrightarrow{\ \sim\ } (V, \mathfrak{A}^{p,q}/\mathfrak{J}|_V).$$

Таким образом, мы получаем карту на многообразии X_0. Согласно п. 5 Предварительных сведений нет необходимости проверять гладкость (аналитичность) отображений склейки этих карт. Другой способ проверки дает предложение 1, согласно которому склейки задаются отображениями $x \mapsto y = (y_1(x, 0), \ldots, y_p(x, 0))$. □

Более интересную информацию о супермногообразии X_∞ несет первая его инфинитезимальная окрестность X_1. Для ее описания необходимы дополнительные понятия.

2. Предложение. *Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — гладкое или комплексно-аналитическое супермногообразие. Пучок $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ имеет структуру локально свободного $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$-модуля. Его ранг в точке равен нечетной размерности супермногообразия $(X, \mathcal{O}_X)$ в этой точке.*

---

[1] «Нетрудно» — понятие субъективное, см. гл. 4 в [CoC2*], где это проделано. — *Прим. Д. Л.*

Имеется простой способ образовать векторное расслоение над многообразием X_0 по локально свободному пучку $\mathcal{L}$. Слой этого расслоения над точкой x есть векторное пространство $\mathcal{L}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{L}_x$ над полем $\mathcal{O}_{X_0,x}/\mathfrak{m}_x$, где $\mathfrak{m}_x$ означает максимальный идеал в алгебре $\mathcal{O}_{X_0,x}$, а $\mathfrak{m}_x\mathcal{L}_x$ есть образ отображения $\mathfrak{m}_x \times \mathcal{L}_x \to \mathcal{L}_x$. Локальная свобода пучка $\mathcal{L}$ обеспечивает локальную тривиальность расслоения. Применив эту конструкцию к пучку $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$, мы получим векторное расслоение $N^* \to X_0$. Оно тривиально над всяким подмножеством $U \subset X$, на котором определена карта, а его ранг равен нечетной размерности супермногообразия. Образы $\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_q$ в пучке $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2|_U$ нечетных образующих $\xi_1, \ldots, \xi_q$ порождают в каждой точке $x \in U$ базис пространства $N_x^* = (\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)_x/\mathfrak{m}_x(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)_x$. При переходе к другой системе образующих $\eta_1, \ldots, \eta_q$ новые базисные элементы выражаются через первый базис по следующему линейному правилу:

$$\bar{\eta}_j = \sum \frac{\partial \eta_j(x, 0)}{\partial \xi_i} \bar{\xi}_i. \tag{8}$$

Эти формулы суть линейные части преобразований от ξ_i к η_j.

Сказанное приводит к следующей геометрической картине: первая инфинитезимальная окрестность носителя, т. е. пространство X_1, есть локально-тривиальное конечномерное гладкое (соответственно комплексно-аналитическое) векторное расслоение N^* на многообразии X_0.

§ 4. Ретракция и первое препятствие

Векторное расслоение N^*, построенное в предыдущем параграфе, естественно называть *конормальным расслоением* на носителе супермногообразия ввиду понятной аналогии с конструкцией конормального расслоения в случае многообразий 1). Рассмотрим теперь в некотором смысле обратную конструкцию: по многообразию X_0 и локально тривиальному векторному расслоению N^* на X_0 построим супермногообразие; обозначим его (X_0, N^*). Коротко говоря, структурный пучок этого супермногообразия есть пучок ростков функций на X_0 со значениями во внешней алгебре расслоения N^*. Мы имеем в виду гладкие или комплексно-аналитические функции в зависимости от категории многообразия и расслоения. Иными словами, этот структурный пучок можно получить путем склейки модельных пучков $\mathfrak{A}^{p,q}|_U$, если отображение склейки преобразует четные образующие этих пучков так же, как преобразует отображение склейки многообразия X_0 координатные функции, а нечетные образующие заменяются по формуле (8).

Супермногообразие вида (X_0, N^*) мы считаем *простым* в том смысле, что оно полностью задается многообразиями X_0 и N^*. Рассмотрим следующую задачу: при каких условиях супермногообразие X изоморфно некоторому простому? На основе сказанного выше можно дать ответ: всякая точка должна обладать окрестностью U, такой что в пучке $\mathcal{O}_X|_U$ можно выделить систему координат $\{x_i, \xi_j\}$, обладающую следующим свойством: если система координат $\{y_k, \eta_s\}$ выделена в пересекающейся окрестности, то эти координаты связаны формулами

$$y_k = y_k(x_1, \ldots, x_p), \qquad k = 1, \ldots, p, \tag{9}$$

$$\eta_s = \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} a_s^j(x_1, \ldots, x_p)\xi_j, \quad s = 1, \ldots, q, \tag{10}$$

где $y_k(x)$, $a_s^j(x)$ — гладкие (комплексно-аналитические) функции на пересечении, т. е. четные образующие преобразуются независимо от нечетных, а нечетные — линейно.

Ответ в такой форме неудобен в разных отношениях. Наша задача теперь состоит в том, чтобы дать его в инвариантной форме и в терминах геометрии. Сейчас мы займемся отдельно условием (9). Его инвариантный смысл — существование ретракции супермногообразия на его носитель. Напомним, что всегда имеется каноническое вложение $i\colon X_0 \to X$. *Ретракцией* X на X_0 мы называем отображение супермногообразий $r\colon X \to X_0$, такое что композиция ri есть тождественное преобразование носителя.

1. Предложение. *Существование четных образующих, удовлетворяющих условию* (9), *необходимо и достаточно для того, чтобы существовала ретракция супермногообразия на его носитель.*

Доказательство. *Необходимость.* Ретракция означает существование отображения σ пучков $\mathbb{K}$-алгебр, такого что композиция

$$\mathcal{O}_{X_0} \cong \mathcal{O}_X/\mathcal{J} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_X/ \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_X/\mathcal{J}$$

есть тождественное отображение. Пусть $U \subset X_0$ — координатная окрестность, $x_1, \ldots, x_p$ — координаты в U. Элементы $\sigma(x_i)$ суть сечения $\mathcal{O}_X$ над U, причем $\pi\sigma(x_i)$ суть координатные функции. Отсюда легко заключить, что сечения $\sigma(x_i)$ могут служить четными образующими в пучке $\mathcal{O}_X|_U$. Другие координатные функции y_j связаны с x_i формулой вида (9). Так как σ есть отображение пучков алгебр, получаем, что $\sigma(y_j) = y_j(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_p))$.

Достаточность. Построим отображение σ. Пусть $\{x_i\}$ — выделенная система четных образующих в окрестности U. Сечения $\pi(x_i)$ могут служить локальными координатами в окрестности любой точки $z \in U$.

---

1) На самом деле это более чем аналогия. Пусть T_X — касательное расслоение к X (т. е. расслоение, слой которого в точке есть пространство дифференцирований $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathbb{K}$). Нормальное расслоение N к X_0 есть по определению коядро (т. е. фактор по образу) канонического вложения $T_{X_0} \to T_X$, Легко проверить, что расслоение N^* двойственно расслоению N.

Поэтому всякий элемент $a \in \mathcal{O}_{X_{0,z}}$ можно записать в виде ростка функции $\tilde{a}(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_p))$. Положим $\sigma(a) = \tilde{a}(x_1, \ldots, x_p)$. Ясно, что $\sigma\colon \mathcal{O}_{X_{0,z}} \to \to \mathcal{O}_{X,z}$ — отображение алгебр. Оно не зависит от выбора выделенной системы образующих, так как $\pi(y_j) = y_j(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_p))$, т. е. координатные функции преобразуются по тому же закону, что и образующие. □

Теперь наша задача приобрела инвариантное звучание: когда существует ретракция супермногообразия на носитель? Для решения мы воспользуемся инфинитезимальной стратификацией (7). Будем решать нашу задачу последовательно для пространств X_k, где $k = 1, 2, \ldots$, аналогично тому, как решают уравнения, разлагая неизвестную функцию в ряд Тейлора.

С помощью рассуждений, подобных предложению 1, нетрудно установить, что ретракция $X_k \to X_0$ существует в том и только том случае, когда существуют выделенные системы четных образующих, удовлетворяющие условию (9) по модулю пучка $\mathcal{J}^{k+1}$, т. е. с точностью до слагаемых, не содержащих степеней ниже $k+1$. Так как для любой системы четных образующих формула (9) верна по модулю $\mathcal{J}^2$, ретракция $X_1 \to X_0$ всегда существует. Этот вывод согласуется с тем, что структурный пучок на X_1 можно отождествить с пучком сечений расслоения $E \oplus N^*$, где E — тривиальное линейное расслоение на X_0.

Дальнейший план действий таков: попытаемся продолжить ретракцию $X_1 \to X_0$, которую мы нашли, до ретракции $X_2 \to X_0$, затем, если это удастся, продолжим ее на X_3 и т. д. После конечного числа попыток мы либо остановимся из-за невозможности продолжить ретракцию с X_k на X_{k+1}, либо получим ретракцию всего супермногообразия (предполагая, что его нечетная размерность конечна). Сначала рассмотрим первый нетривиальный шаг: продолжение ретракции с X_1 на X_2. Пусть T — касательное расслоение к носителю.

2. Теорема. *Для всякого супермногообразия X однозначно определен элемент $n_1 \in H^1(X_0, T \otimes \Lambda^2 N^*)$, такой что ретракция $X_2 \to X_0$ существует тогда и только тогда, когда $n_1 = 0$.*

Этот элемент мы назовем *первым препятствием* к построению ретракции $X \to X_0$.

3. Теорема. *Пусть* $(\mathrm{id}, \rho)\colon X_2 \to X_0$ *— некоторая ретракция, и пусть $\tau \in H^0(X_0, T \otimes \Lambda^2 N^*)$. Тогда определена ретракция* $(\mathrm{id}, \rho + \tau)$, *действующая по формуле*

$$\mathcal{O}(X_2) \ni s \longmapsto \rho(s) + \tau(s) \in \mathcal{O}(X_2),$$

где τ понимается как векторное поле на X_0, переводящее сечения пучка $\mathcal{O}(X_0)$ в сечения пучка $\mathcal{J}^2/\mathcal{J}^3$. Всякая ретракция $X_2 \to X_0$ имеет вид $(\mathrm{id}, \rho + \tau)$ *с некоторым* $\tau \in H^0(X_0, T \otimes \Lambda^2 N^*)$.

Иными словами, множество ретракций $X_2 \to X_0$ есть однородное пространство, на котором транзитивно действует группа $H^0(X_0, T \otimes \Lambda^2 N^*)$.

Доказательство теоремы 2. Выберем какой-нибудь атлас $\mathcal{A}$ на супермногообразии X, т. е. совокупность карт, области определения которых покрывают подстилающее многообразие. Он порождает, в частности, атлас $\mathcal{A}_0$ на многообразии X_0. Пусть (f, φ) и (g, ψ) — любые карты из атласа $\mathcal{A}$, определенные на U, соответственно $V \subset X_0$, а $\{x_\alpha, \xi_j\}$ — образующие модельного пучка $\mathfrak{A}^{p,q}|_{f(U)}$. Если (s, σ) — отображение склейки этих карт, а y_β, где $\beta = 1, \ldots, p$, — четные образующие на $g(V)$, то $\sigma(y_\beta)$ суть четные сечения модельного пучка над $f(U \cap V)$, т. е.

$$\sigma(y_\beta) = y_\beta(x, \xi) \equiv y_\beta(x, 0) + \sum y_\beta^{ij}(x)\xi_i\xi_j + \ldots$$

На открытом подмножестве $f(U \cap V) \subset \mathbb{K}^p$ рассмотрим векторное поле

$$t_{U,V} = \sum y_\beta^{ij}(x)\bar{\xi}_i \wedge \bar{\xi}_j \frac{\partial}{\partial y_\beta}.$$

Напомним, что под $\bar{\xi}_i$ мы понимаем образ элемента ξ_i в пучке $\mathcal{J}$. В каждой точке $x \in f(U \cap V)$ выражение $y_\beta^{ij}(x)\bar{\xi}_i \wedge \bar{\xi}_j$ есть элемент векторного пространства $\Lambda^2 N_x^*$, а следовательно, $t_{U,V}$ можно рассматривать как векторное поле со значениями в расслоении $\Lambda^2 N^*$ или как сечение над $U \cap V$ расслоения $T \otimes \Lambda^2 N^*$. Таким образом, каждой упорядоченной паре карт из атласа отвечает сечение $t_{U,V}$ указанного расслоения. Эти сечения связаны следующим образом.

1) Если (h, χ) — еще одна карта с областью W, то $t'_{U,W} = t'_{U,V} + t'_{V,W}$, где штрихи означают ограничения этих сечений на $U \cap V \cap W$.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим склейки модельных пространств

$$\begin{tikzcd} & h(U \cap V \cap W) & \\ f(U \cap V \cap W) \arrow[ur] \arrow[rr] & & g(U \cap V \cap W) \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{11}$$

которые связывают все три карты. Понятно, что эта диаграмма коммутативна. Пусть z_γ, где $\gamma = 1, \ldots, p$, — координатные функции (четные образующие) в $h(W)$, пусть $z_\gamma(y, \eta)$ — сечения пучка $\mathfrak{A}^{p,q}|_{g(V \cap W)}$, а $\tilde{z}_\gamma(x, \xi)$ — сечения пучка $\mathfrak{A}^{p,q}|_{f(U \cap W)}$ — образы сечений z_γ под действием указанных связывающих отображений. Из коммутативности диаграммы (11) вытекает равенство

$$\tilde{z}_\gamma(x, \xi) = z_\gamma(y(x, \xi), \eta(x, \xi)). \tag{12}$$

Пренебрегая членами, принадлежащими $\mathcal{J}^4$, мы запишем равенство (12) в виде

$$\tilde{z}_\gamma(x,\,0)+\sum\tilde{z}^{ij}_\gamma(x)\xi_i\xi_j\equiv z_\gamma(y(x,\,0),\,0)+\sum\frac{\partial z_\gamma(x,\,0)}{\partial y_\beta}\,y^{ij}_\beta(x)\xi_i\xi_j+\\ +\sum z^{kl}_\gamma(y(x,\,0))\,\frac{\partial\eta_k(x)}{\partial\xi_i}\,\frac{\partial\eta_\ell(x)}{\partial\xi_j}\,\xi_i\xi_j \bmod \mathcal{J}^4.$$

Приравнивая члены второго порядка по ξ, мы находим, что

$$\sum\tilde{z}^{ij}_\gamma\bar{\xi}_i\wedge\bar{\xi}_j\frac{\partial}{\partial y_\gamma}=\sum\frac{\partial z_\gamma}{\partial y_\beta}\,y^{ij}_\beta\bar{\xi}_i\wedge\bar{\xi}_j\frac{\partial}{\partial z_\gamma}+\sum z^{kl}_\gamma\,\frac{\partial\eta_k}{\partial\xi_j}\,\frac{\partial\eta_\ell}{\partial\xi_j}\,\bar{\xi}_i\wedge\bar{\xi}_j\frac{\partial}{\partial z_\gamma}=\\ =\sum\frac{\partial z_\gamma}{\partial y_\beta}\,y^{ij}_\beta\,\bar{\xi}_i\wedge\bar{\xi}_j\frac{\partial}{\partial y_\beta}+\sum z^{kl}_\gamma\,\frac{\partial z_\gamma}{\partial y_\beta}\,\bar{\eta}_k\wedge\bar{\eta}_\ell\frac{\partial}{\partial z_\gamma},$$

откуда вытекает свойство 1).

2) Справедливо равенство $t_{V,U}=-t_{U,V}$.

Это соотношение вытекает из свойства 1), если учесть, что $t_{U,U}=0$. Из сказанного следует, что набор $\{t_{U,V}\mid U,\ V\in\mathcal{A}\}$ есть коцикл на покрытии $\mathcal{A}$ со значениями в расслоении $T\otimes\Lambda^2N^*$.

3) Класс t коцикла $t_{U,V}\in H^1(\mathcal{A}_0,\ T\otimes\Lambda^2N^*)$ зависит лишь от атласа $\mathcal{A}_0$.

Действительно, если, скажем, карту $(g,\,\psi)$ мы заменяем картой $(h,\,\chi)$ с областью определения $W=V$, то для всякой третьей карты $U\in\mathcal{A}_0$ в силу свойства 1) имеем $t_{U,W}=t_{U,V}+t'_{V,W}$, где $t'_{V,W}$ — ограничение на $U\cap V$ сечения $t_{V,W}$, заданного в V. Следовательно, после указанного преобразования атласа $\mathcal{A}_0$ коцикл t заменяется на когомологичный.

Искомый элемент n_1 мы определяем как образ коцикла t при каноническом отображении $H^1(\mathcal{A}_0,\ T\otimes\Lambda^2N^*)\to H^1(X_0,\ T\otimes\Lambda^2N^*)$. Этот образ не зависит от выбора атласа $\mathcal{A}_0$. Действительно, если $\mathcal{A}'_0$ — другой атлас, а t' — соответствующий класс когомологий, то описанная конструкция, примененная к атласу $\mathcal{A}_0\cup\mathcal{A}'_0$, приводит к коциклу t'', ограничение которого на $\mathcal{A}_0$ совпадает с t, а ограничение на $\mathcal{A}'_0$ равно t'. Таким образом, препятствующий коцикл корректно определен.

Проверим требуемые свойства. Пусть $n_1=0$. Это означает, что существует такой атлас $\mathcal{A}$ на X, что соответствующий коцикл t на $\mathcal{A}_0$ когомологичен нулю, т. е. на каждой карте U атласа $\mathcal{A}_0$ определено сечение t_U расслоения $T\otimes\Lambda^2N^*$, такое что на пересечении любых элементов U и V этого атласа выполняется равенство $t_{U,V}=t'_U-t'_V$. Пусть $(f,\,\varphi)$ — карта атласа $\mathcal{A}$ с областью определения U. С ее помощью представим t_U как векторное поле на $f(U)$ со значениями в расслоении Λ^2N^* и запишем t_U в виде

$$t_U=\sum t^{ij}_\alpha(x)\bar{\xi}_i\wedge\bar{\xi}_j\frac{\partial}{\partial x_\alpha}.$$

Положим

$$t_\alpha(x,\,\xi)=\sum t^{ij}_\alpha(x)\xi_i\xi_j,\qquad t_U(x,\,\xi)=(t_1(x,\,\xi),\,\ldots,\,t_p(x,\,\xi)).$$

Ясно, что композиция отображения пучков $\mathbb{Z}/2$-градуированных алгебр

$$\mathfrak{A}^{p,q}/\mathcal{J}|_{f(U)}\longrightarrow\mathfrak{A}^{p,q}/\mathcal{J}^3|_{f(U)},\qquad a(x)\longrightarrow\tilde{a}(x,\,\xi)=a(x+t_U(x,\,\xi)) \bmod \mathcal{J}^3,\quad(13)$$

с каноническим отображением $\mathfrak{A}^{p,q}/\mathcal{J}^3\to\mathfrak{A}^{p,q}/\mathcal{J}$ есть тождественный гомоморфизм над областью $f(U)$. Таким образом, отображение (13) задает на U ретракцию $X_2\to X_0$. Эти ретракции склеиваются в глобальную ретракцию, поскольку отображения (13) объединяются непротиворечивым образом в единый морфизм пучков алгебр $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}\to\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^3$. Это означает, что если элемент $a\in\mathfrak{A}^{p,q}/\mathcal{J}|_{f(U)}$ склеен с элементом $b\in\mathfrak{A}^{p,q}/\mathcal{J}|_{g(V)}$, т. е. если $a(x)=b(y(x,\,0))$, то $\sigma(\tilde{b})=\tilde{a} \bmod \mathcal{J}^3$, как следует из выкладки, основанной на равенстве $t_{U,V}=t'_U-t'_V$:

$$\sigma(\tilde{b})\equiv\tilde{b}(y(x,\,\xi),\,\eta(x,\,\xi))\equiv b(y(x,\,\xi)+t_V(y(x,\,\xi),\,\eta(x,\,\xi)))\equiv\\ \equiv b(y(x,\,0))+\sum\frac{\partial b}{\partial y_\beta}\big(y^{ij}_\beta(x)\xi_i\xi_j+t^{kl}(y(x,\,0))\eta_k(x,\,0)\eta_\ell(x,\,0)\big)\equiv\\ \equiv a(x)+\sum\frac{\partial b}{\partial y_\beta}\,\frac{\partial y_\beta}{\partial x_\alpha}\,t^{ij}_\alpha(x)\xi_i\xi_j\equiv a(x+t_U(x,\,\xi))\equiv\tilde{a} \bmod \mathcal{J}^3.$$

Остается проверить, что если ретракция $(\mathrm{id},\,\rho)\colon X_2\to X_0$ существует, то $n_1=0$. Выберем атлас $\mathcal{A}$ на X и для каждой области $U\in\mathcal{A}_0$ рассмотрим следующую диаграмму отображения $\mathbb{K}$-окольцованных пространств:

$$\begin{tikzcd}(U,\,\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^3|_U) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "(1{,}\rho)_U"'] & (f(U),\,\mathfrak{A}^{p,q}/\mathcal{J}^3) \arrow[d, "(1{,}\tau_U)"] \\ (U,\,\mathcal{O}_X/\mathcal{J}|_U) \arrow[r, "\sim"] & (f(U),\,\mathfrak{A}^{p,q}/\mathcal{J})\end{tikzcd}\qquad(14)$$

где $(\mathrm{id},\,\rho)_U$ — ограничение ретракции на U, а морфизм τ_U делает эту диаграмму коммутативной. Пусть снова x_α, где $\alpha=1,\,\ldots,\,p$, — координатные функции в области $f(U)$. Так как $(\mathrm{id},\,\tau_U)$ — ретракция, то $\tau_U(x_\alpha)\equiv x_\alpha \bmod \mathcal{J}^2$. Таким образом,

$$\tau_U(x_\alpha)=x_\alpha+\sum t^{ij}_\alpha(x)\xi_i\xi_j \bmod \mathcal{J}^3,$$

где функции t^{ij}_α суть сечения пучка $\mathfrak{A}^{p,0}|_{f(U)}$. Рассмотрим выражение $\sum t^{ij}_\alpha\xi_i\wedge\xi_j\partial_{x_\alpha}$ как сечение над U расслоения $T\otimes\Lambda^2N^*$. Это сечение обозначим t_U. Поскольку отображения происходят из глобально заданного морфизма, должно выполняться условие склейки

$$\sigma(\tau_V(b(y)))=\tau_U(b(y(x,\,0))),\qquad b\in\mathfrak{A}^{p,q}|_{g(V)},$$

для любых двух карт. В применении к координатным функциям y_β на $g(V)$ из него получаем соотношения

$$y_\beta(x,\,0)+\sum y_\beta^{ij}(x)\xi_i\xi_j+\sum t_\beta^{kl}\eta_k\eta_\ell\equiv y_\beta(x,\,0)+\sum\frac{\partial y_\beta}{\partial x_\alpha}\,t_\alpha^{ij}\,\xi_i\xi_j \bmod \mathcal{J}^3,$$

т. е. $t_{U,V}+t'_V=t'_U$. Следовательно, $n_1=0$. ☐

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим произвольную ретракцию (id, ρ) и элемент $\tau\in H^0(X_0,\,T\otimes\Lambda^2N^*)$. Последний представляет собой сечение расслоения $T\otimes\Lambda^2N^*$ и в любой карте U на X_0 может быть записан в виде $\sum t_\alpha^{ij}\xi_i\wedge\xi_j\partial_{x_\alpha}$.

Рассмотрим диаграмму (14) и зададим новый морфизм пучков $\mathbb{Z}/2$-градуированных алгебр $\tau'_U\colon\mathfrak{A}^{p,q}/\mathcal{J}\to\mathfrak{A}^{p,q}/\mathcal{J}^3$ по формуле

$$\tau'_U(a)=\tau_U(a)\frac{\partial a}{\partial x_\alpha}t_\alpha^{ij}\,\xi_i\xi_j. \tag{15}$$

Легко проверить, что эти морфизмы склеиваются в глобальный морфизм $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}\to\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^3$, который является ретракцией.

Пусть ρ и ρ' — любые ретракции X_2 на X_0. Рассмотрим отображение $\rho'-\rho$ пучков на X_0. Его образ принадлежит $\mathcal{J}$, так как ρ' и ρ суть ретракции. Образ любой координатной функции x_α является четным элементом и, следовательно, принадлежит $\mathcal{J}^2$. Запишем

$$(\rho'-\rho)(x_\alpha)\equiv\sum t_\alpha^{ij}\,\xi_i\xi_j \bmod \mathcal{J}^3. \tag{16}$$

Образуем сечение $t_U=\sum t_\alpha^{ij}\,\xi_i\wedge\xi_j\partial_{x_\alpha}$ расслоения $T\otimes\Lambda^2N^*$ над U. Нетрудно заметить, что эти сечения образуют нульмерный коцикл, т. е. отвечают некоторому элементу $\tau\in H^0(X_0,\,T\otimes\Lambda^2N^*)$. Остается проверить, что отображения ρ' и ρ связаны формулой (15), коэффициенты которой определены соотношением (16). Эта формула легко проверяется на полиномах a, а затем переносится на любые элементы пучка $\mathfrak{A}^{p,0}|_{f(U)}$ (или $\mathcal{H}^{p,0}|_{f(U)}$) с помощью рассуждения, аналогичного доказательству предложения 1. ☐

§ 5. Высшие препятствия

Рассмотрим следующие инфинитезимальные шаги в конструкции ретракции супермногообразия на его носитель. Если первое препятствие равно нулю, то ретракцию можно продолжить не только на X_2, но и на X_3, так как в этом случае выделены системы локальных четных образующих $\{x_i\}$, $\{y_j\}$, …, связанные между собой формулами вида

$$y_j=y_j(x,\,0)+\sum y_j^{i_1,i_2,i_3,i_4}(x)\xi_{i_1}\xi_{i_2}\xi_{i_3}\xi_{i_4}+\ldots$$

(членов третьего порядка по ξ не может быть из-за четности образующих). На X_4 ретракция может не продолжаться из-за наличия членов четвертого порядка в этих разложениях. Повторяя конструкцию теоремы 4.2, можно построить элемент $n_2\in H^1(X_0,\,T\otimes\Lambda^4N^*)$, отвечающий за такое продолжение, и т. д. В результате мы приходим к следующему результату.

1. Теорема. *Пусть* $k\geqslant 1$. *Ретракция* $r\colon X_{2k-2}\to X_0$ *всегда продолжается до ретракции* $X_{2k-1}\to X_0$, *и такое продолжение единственно. Определен элемент* $n_k\in H^1(X_0,\,T\otimes\Lambda^{2k}N^*)$ (называемый k-м препятствием), *такой что ретракция* r *продолжается до ретракции* $X_{2k}\to X_0$ *тогда и только тогда, когда* $n_k=0$.

Следствие. *Для того чтобы супермногообразие* X *ретрагировалось на свой носитель, достаточно, чтобы все препятствия* n_1, n_2, … (*определяемые по индукции*) *были равны нулю.*

Заметим, что это условие не является необходимым, так как высшее препятствие зависит от выбора ретракции на предыдущем шаге.

2. Теорема. *Пусть* $\tilde r\colon X_{2k}\to X_0$ *— некоторое продолжение ретракции* r, *а* $\tau\in H^0(X_0,\,T\otimes\Lambda^{2k}N^*)$. *Тогда определена ретракция* $r'\colon X_{2k}\to X_0$, *действующая по формуле*

$$\mathcal{O}_{X_0}\ni s\longmapsto\tilde\rho(s)+\tau(s)\in\mathcal{O}_{X_{2k}}, \tag{17}$$

которая также является продолжением ретракции r. *Всякая ретракция* $X_{2k}\to X_0$, *продолжающая ретракцию* r, *имеет вид* (17).

Доказательство подобно рассуждениям из доказательства теоремы 4.2. Подчеркнем, что эти результаты справедливы для обеих категорий *CB* и *CK*. Однако они приводят к разным следствиям.

Следствие. *В случае гладкого супермногообразия* X *всякая ретракция* $X_{2k-2}\to X_0$ *может быть продолжена до ретракции* X_{2k}, $k=1,\,2,\,\ldots$ *В частности, всякое гладкое супермногообразие ретрагируется на свой носитель.*

Это следует из того, что в любой положительной размерности когомология пучка ростков гладких сечений любого локально тривиального расслоения равна нулю. Этот факт легко доказывается с использованием гладких разбиений единицы[1] на X_0.

---

[1] Доказательство несложно для тех, кто понимает, что такое пучок: этот вопрос возник в конце семинара (в 1974 г.), и А. А. Кириллов предложил обсудить его, спускаясь наперегонки по лестнице с 14 этажа (на мехмате МГУ) в столовую. А. А. Кириллов и А. Н. Рудаков получили ответ, не достигнув уровня земли, и пошли в профессорскую столовую на 2 этаже, а я, будучи студентом, спустился ниже, в студенческую столовую под первым этажом, запомнив ответ и идею доказательства. Никому не приходило в голову это публиковать. А через несколько лет появилась подробная статья про это М. Бэтчелор, аспирантки Б. Костанта, см. [Bat*], и результат получил название «теоремы Бэтчелор». — *Прим. Д. Л.*

§ 6. Примеры неретрагируемых супермногообразий

Рассмотрим два примера комплексно-аналитических супермногообразий, не ретрагируемых из-за присутствия первых препятствий.

1. Пример. Рассмотрим расширенную комплексную плоскость (сферу Римана) $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ с координатой z на ее конечной части и еще один экземпляр расширенной плоскости S^2 с координатой w. Пусть, далее, H — модельное супермногообразие размерности $0|4$ с координатами ξ_1, ξ_2, η_1, η_2. Образуем прямое произведение супермногообразий $Y = S^2 \times S^2 \times H$ и выделим в нем замкнутое[1] подсупермногообразие системой уравнений, где (z, w) — координаты на $S^2 \times S^2$,

$$z\eta_i - w\xi_i = 0, \quad \text{где } i = 1, 2, \qquad wz = 1 + \frac{\xi_1}{z} \cdot \frac{\xi_2}{z}. \tag{18}$$

Как легко видеть, дифференциалы левых частей первых двух равенств (18) независимы в каждой точке, а дифференциал третьего равенства не обращается в нуль. Поэтому по теореме 1 супермногообразие X является комплексно-аналитическим размерности $1|2$. Носителем его является комплексная проективная прямая, на которой z и w — координаты карт со склейкой $wz = 1$. Слои конормального расслоения N^* над этими картами порождаются независимыми векторами ξ_1 и ξ_2 (соответственно η_1 и η_2), причем связь между этими базисами в силу первых двух соотношений (18) имеет вид

$$\eta_i = \frac{1}{z^2}\xi_i, \quad \text{где } i = 1, 2.$$

Отсюда нетрудно усмотреть, что расслоение N^* изоморфно прямой сумме двух экземпляров канонического расслоения K на $\mathbb{C}P^1$, пучок сечений которого есть[2] $\mathcal{O}(-2)$. Поэтому $\Lambda^2 N^*$ изоморфно квадрату канонического расслоения, а $T \otimes \Lambda^2 N^*$ изоморфно K.

Первое препятствие к построению ретракции $X \to \mathbb{C}P^1$ задается коциклом $t_{U,V}$, где U и V суть указанные карты на $\mathbb{C}P^1$, а

$$t_{U,V} = \frac{\bar{\xi}_1 \wedge \bar{\xi}_2}{z^3} \frac{\partial}{\partial w}.$$

Перейдем к однородным координатам (z_0, z_1) на $\mathbb{C}P^1$, т. е. $z = \dfrac{1}{w} = \dfrac{z_1}{z_0}$. Изоморфизм $T \otimes \Lambda^2 N^* \cong K$ строится с помощью соответствий $\xi_i \mapsto z_0^{-2}$, $\partial_w \mapsto z_1^2$. При этом $t_{U,V}$ соответствует коциклу $\zeta_{U,V} = \dfrac{1}{z_0 z_1}$ со значениями в пучке $\mathcal{O}(-2)$. Последний, очевидно, не когомологичен нулю. По теореме 4.2 супермногообразие X не ретрагируемо.

2. Пример. Реализуем компактифицированное комплексное пространство Минковского, см. [МаКП*] как невырожденную квадрику Q в $\mathbb{C}P^5$. В подходящей однородной системе координат $(z_0, \ldots, z_5)$ она задается уравнением $\sum z_i^2 = 0$. Покроем $\mathbb{C}P^5$ аффинными картами $U_\alpha = \{z \mid z_\alpha \neq 0\}$ и рассмотрим комплексно-аналитические супермногообразия $Q_\alpha = Q \cap U_\alpha \times H^{0|2}$, где $H^{0|2}$ — модельное супермногообразие размерности $0|2$. Для всякой пары (α, β), где $\alpha \neq \beta$, склеим пространство Q_α с пространством Q_β над областью $Q \cap U_\alpha \cap U_\beta$ при помощи следующих формул, в которых $x_\gamma = \dfrac{z_\gamma}{z_\alpha}$, $y_\gamma = \dfrac{z_\gamma}{z_\beta}$, а ξ_1 и ξ_2 — образующие в Q_α, а η_1 и η_2 — образующие в Q_β:

$$\begin{aligned} y_\gamma(x, \xi) &= \frac{x_\gamma}{x_\beta}\Big(1 + \frac{\xi_1}{x_\beta} \cdot \frac{\xi_2}{x_\beta}\Big), && \text{где } \gamma \neq \alpha, \beta, \\ y_\alpha(x, \xi) &= \frac{1}{x_\beta}\Big(1 + \xi_1\xi_2 + \frac{\xi_1}{x_\beta} \cdot \frac{\xi_2}{x_\beta}\Big), && \\ \eta_i &= \frac{\xi_i}{x_\beta}, && \text{где } i = 1, 2. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что эти склейки непротиворечивы, а следовательно, задают комплексно-аналитическое супермногообразие размерности $4|2$ с носителем Q.

Опишем первое препятствие. Конормальное расслоение N^* изоморфно прямой сумме двух линейных расслоений L, отвечающих пучку $\mathcal{O}(1)|_Q$, а $T = T_Q$ есть касательное расслоение к квадрике. Следовательно, коциклу $\{t_{U_\alpha, U_\beta}\}$ отвечает некий коцикл $\zeta_{\alpha,\beta}$ со значениями в расслоении $T_Q \otimes L \otimes L$. Непосредственная выкладка показывает, что коцикл $\zeta_{\alpha,\beta}$ может быть представлен в виде

$$\Big\{\zeta_{U_\alpha U_\beta} = \Big(\frac{1}{z_\alpha}\frac{\partial}{\partial z_\alpha} - \frac{1}{z_\beta}\frac{\partial}{\partial z_\beta}\Big)\Big|_Q\Big\}.$$

Нетрудно показать, что он не когомологичен нулю. Это означает, что первое препятствие отлично от нуля и поэтому ретракции $X_2 \to Q$ не существует.

§ 7. $\mathbb{Z}_+$-градуировка и условия простоты супермногообразия

Мы назвали *простым* супермногообразие X, изоморфное супермногообразию (X_0, N^*), где X_0 — подстилающее многообразие супермногообразия X, а N^* — конормальное расслоение к X_0. Сейчас мы дадим описание простых супермногообразий в иных терминах.

---

[1] Определение открытого подсупермногообразия очевидно, а кроме того, это очевидное определение и корректно, и осмысленно. А вот определение замкнутого подсупермногообразия совсем не очевидно; это определение с мотивировками см. в [CoC1°]. — *Прим. Д. Л.*

[2] Определение расслоения K и пучков $\mathcal{O}(n)$ на $\mathbb{C}P^1$ см. в [МаАГ*, МаКП*]. — *Прим. Д. Л.*

Скажем, что $\mathbb{K}$-алгебра A имеет $\mathbb{Z}_+$-*градуировку*, если указан изоморфизм $\mathbb{K}$-векторных пространств $A \cong \bigoplus\limits_{k\geqslant 0} A^k$, такой что произведение любых элементов $a \in A^k$ и $b \in A^\ell$ принадлежит $A^{k+\ell}$. Градуировку назовем *конечной*, если существует число k_0, такое что $A^k = 0$ при $k > k_0$.

Пусть, далее, $(M, \mathcal{O}_M)$ — окольцованное пространство. Под $\mathbb{Z}_+$-*градуировкой* этого пространства мы будем понимать разложение структурного пучка в прямую сумму подпучков $\mathcal{O}_M \cong \bigoplus\limits_{k\geqslant 0} \mathcal{O}_M^k$, которое порождает $\mathbb{Z}_+$-градуировку каждого слоя $\mathcal{O}_{M,m} \cong \bigoplus\limits_{k\geqslant 0} \mathcal{O}_{M,m}^k$. Скажем, что *степень* морфизма $\mathbb{Z}_+$-градуированных пространств $(f, \varphi)\colon (M, \mathcal{O}_M) \to (N, \mathcal{O}_N)$ равна l, если φ переводит $f^*(\mathcal{O}_N^k)$ в $\mathcal{O}_M^{k+l}$ для всех допустимых k и l. Эта $\mathbb{Z}_+$-градуировка естественно индуцирует $\mathbb{Z}/2$-градуировку.

1. Теорема. *Супермногообразие X является простым тогда и только тогда, когда структурный пучок на нем обладает $\mathbb{Z}_+$-градуировкой, такой что*:

А) *она конечна в каждом слое*,

Б) *она порождает исходную $\mathbb{Z}/2$-градуировку*,

В) *пучок $\mathcal{O}_X^1$ есть локально свободный $\mathcal{O}_X^0$-модуль, ранг которого равен нечетной размерности супермногообразия.*

Доказательство (набросок). *Необходимость.* Структурный пучок (X_0, N^*) есть по определению пучок ростков функций на X_0 со значениями в расслоении $\Lambda^\bullet(N^*)$. Через $\mathcal{O}^k$ обозначим его подпучок, образованный функциями со значениями в $\Lambda^k(N^*)$. Полученная градуировка, очевидно, удовлетворяет всем условиям.

Достаточность. Пусть задана $\mathbb{Z}_+$-градуировка $\mathcal{O}_X \cong \bigoplus\limits_{k\geqslant 0} \mathcal{O}^k$, подчиненная условиям А, Б и В. Установим изоморфизм

$$\mathcal{J}_x \cong \bigoplus_{k\geqslant 1} \mathcal{O}_X^k \quad \text{для любого } x \in X_0. \tag{19}$$

Правая часть есть идеал в алгебре $\mathcal{O}_{X,x}$ и по условию Б содержит все нечетные элементы. Поэтому она содержит идеал $\mathcal{J}_x$, который порождается такими элементами. Обратно, в силу условия А всякий элемент α правой части нильпотентен. Пусть a — сечение пучка $\mathcal{O}_X$ над некоторой окрестностью точки x, росток которого в точке x равен α. Некоторая степень этого сечения обращается в нуль в некоторой окрестности $U \ni x$. Следовательно, $r_y(a) = 0$ для $y \in U$, где r_y — «вычет» в точке y, т. е. $a(y, 0) = 0$. Поэтому $\alpha \in \mathcal{J}_x$, что завершает проверку соотношения (19). Из соотношения (19) вытекает, в частности, что $\mathcal{O}^0 \cong \mathcal{O}_X/\mathcal{J}$, следовательно, вложение прямого слагаемого $\mathcal{O}^0 \to \mathcal{O}_X$ задает ретракцию X на X_0. Из соотношения (19) следует, что $\mathcal{J}^2 \subset \bigoplus\limits_{k\geqslant 2} \mathcal{O}^k$. Поэтому определен эпиморфизм $\mathcal{O}^0$-модулей $p\colon \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \to \mathcal{O}^1$. По предложению 3.2 модуль $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ локально свободен и имеет тот же ранг, что и $\mathcal{O}^1$ (условие В). Отсюда ввиду локальности пучка $\mathcal{O}^0$ вытекает, что p есть изоморфизм. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_q$ — образующие $\mathcal{O}^0$-модуля $\mathcal{O}^1$ над некоторым открытым подмножеством $U \subset X$. Согласно сказанному они порождают систему образующих $\mathcal{O}^0$-модуля $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ и, следовательно, порождают над U пучок идеалов $\mathcal{J}$. Если $\eta_1, \ldots, \eta_q$ — другая система образующих $\mathcal{O}^0$-модуля $\mathcal{O}^1$ над U, то $\eta_i = \sum a_i^j \xi_j$, где a_i^j — некоторые сечения пучка $\mathcal{O}^0|_U$, т. е. соотношения (10) имеют место. □

Предположим теперь, что супермногообразие X ретрагируется на X_0 носитель. Проанализируем достижимость условия (10) по методу из § 6. Препятствие к выполнению этого условия состоит в том, что нечетные образующие преобразуются, вообще говоря, по нелинейному закону

$$\eta_\ell = \sum a_\ell^j \xi_j + \sum a_\ell^{j_1 j_2 j_3} \xi_{j_1} \xi_{j_2} \xi_{j_3} + \ldots \tag{20}$$

С помощью рассуждения из доказательства предыдущей теоремы можно показать, что существование систем нечетных образующих, для которых в формулах (20) отсутствуют нелинейные члены степени $\leqslant k$, эквивалентно тому, что пространство X_k обладает $\mathbb{Z}_+$-градуировкой, удовлетворяющей условиям А, Б и В.

2. Теорема. *Пусть пучок на супермногообразии X_{2k-1}, где $k \geqslant 1$, обладает $\mathbb{Z}_+$-градуировкой, удовлетворяющей условиям А, Б и В. Тогда существует элемент $m_k \in H^1(X_0, N \otimes \Lambda^{2k+1} N^*)$ со следующим свойством*: *для того чтобы структурный пучок на суперпространстве X_{2k+1} имел $\mathbb{Z}_+$-градуировку, удовлетворяющую условиям А, Б, В, и такую, что каноническое вложение $X_{2k-1} \to X_{2k+1}$ согласовано с $\mathbb{Z}_+$-градуировками пучков, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $m_k = 0$.*

Доказательство параллельно рассуждениям из доказательства теоремы 4.2. Искомый элемент m_k есть класс, содержащий коцикл

$$m_{U,V} = \sum a_\ell^{j_1 \ldots j_{2k+1}} \xi'_\ell \cdot \xi_{j_1} \ldots \xi_{j_{2k+1}},$$

где $\{\xi'_\ell\}$ — базис в слое расслоения N, двойственный базису $\{\xi_\ell\}$. Элемент m_k естественно назвать *k-м препятствием к продолжению $\mathbb{Z}_+$-градуировки.*

Следствие. 1) *Если X ретрагируется на X_0 и все элементы $m_1, m_2, \ldots$ обращаются в нуль, то X простое.*

2) *Всякое гладкое супермногообразие простое.*

В заключение отметим связь между препятствиями n_k и m_k. Ограничимся простейшим случаем. Рассмотрим билинейное отображение расслоений

$$T\otimes\Lambda^2N^*\times N\otimes\Lambda^3N^*\longrightarrow T\otimes\Lambda^4N^*,$$

которое в каждом слое на разложимых тензорах задается формулой

$$(t\otimes\xi_1\wedge\xi_2)\circ(\xi'\otimes\eta)=t\otimes\big(\xi'(\xi_1)\eta\wedge\xi_2+\xi'(\xi_2)\xi_1\wedge\eta\big).$$

С его помощью можно определить умножение в когомологиях

$$H^0(X_0,\,T\otimes\Lambda^2N^*)\times H^1(X_0,\,N\otimes\Lambda^3N^*)\longrightarrow H^1(X_0,\,T\otimes\Lambda^4N^*),$$

которое на коциклах выглядит так:

$$\{t_\alpha\}\circ\{s_{\alpha\beta}\}=\{t_\alpha\circ s_{\alpha\beta}\}.$$

Корректность этого определения легко проверить.

3. Предложение[1]. *Пусть X — комплексно-аналитическое супермногообразие, для которого $n_1=0$, а $\rho\colon X_2\to X_0$ — некоторая ретракция, m_1 — первое препятствие к продолжению $\mathbb{Z}_+$-градуировки структурного пучка, а τ — произвольный элемент пространства $H^0(X_0,\,T\otimes\Lambda^2N^*)$. Тогда второе препятствие к существованию ретракции зависит от ретракции ρ, построенной на первом шаге по формуле*

$$n_2(\rho+\tau)=n_2(\rho)+\tau\circ m_1,$$

где сумма $\rho+r$ описана в теореме 4.3.

---

[1] См. книгу [МаКП*]. Удивительно, что везде: и в первой работе [Gre*], и в последующих — в [МаКП*], в более поздних работах, даже в статье [On1*], описание нерасщепимых (т. е. неретрагируемых) супермногообразий дано лишь на уровне $\mathbb{C}$-точек, т. е. пропущены нечетные параметры препятствий, отвечающие элементам пространств $H^0(X_0,\,T\otimes\Lambda^{2k-1}N^*)$ и $H^1(X_0,\,N\otimes\Lambda^{2k}N^*)$. Описать эти препятствия — открытая, таким образом, **задача**. — *Прим. Д. Л.*

4. Динамика частицы со спином как пример классической механики на супермногообразиях[1]

§ 1. Введение

1. Предварительные сведения из физики. В течение нескольких последних лет в физике высоких энергий появилось новое понятие — «антикоммутирующие c-числа». Математики хорошо знают формализм алгебры Грассмана и уже довольно давно его используют. Анализ на алгебре Грассмана был разработан и систематически использовался в применениях метода производящих функционалов к теории вторичного квантования [Бмет]. Этот метод использовался также в теории фермионных полей в учебнике Ржевуского [Rze]. Первой, по-видимому, физической работой, имеющей дело с антикоммутирующими числами в применении к фермионам, была работа Мэтьюза и Салама [MaSa]. Антикоммутирующие c-числа и «алгебра Ли с антикоммутаторами» (т. е. супералгебра Ли) — это те инструменты, которые Жерве и Сакита [GeSa] применили к теории дуальных моделей. Эти авторы открыли подход с точки зрения двумерных теорий поля к фермионным дуальным моделям (предложенных Рамоном, а также Невё и Шварцем) и использовали симметрию относительно преобразований с антикоммутирующими параметрами («суперкалибровочные» преобразования) для доказательства отсутствия духов. Естественно, что антикоммутирующие классические поля необходимы для построения струнной картины фермионных дуальных моделей; весьма умелый подход к этой проблеме продемонстрировали Ивасаки и Киккава [IwKi]. Интерес к новому понятию необыкновенно возрос благодаря новым потрясающим результатам, полученным в 1974 г. и развивающим суперсимметрию четырехмерия, ранее открытую Гольфандом и Лихтманом [ГоЛ], а также формализм суперпространства (см., например, обзор Зумино [Zum], а в особенности — работу Огиевецкого и Мезинческу [OгMe], где даны ссылки на основные работы на эту тему).

Мы опишем применение анализа на алгебре Грассмана к такой почтенной проблеме как гамильтонова динамика классической частицы со спином. Мы рассмотрим как нерелятивистскую, так и релятивистскую ситуации. Первая попытка рассмотреть классический релятивистский волчок восходит к 1926 г. и принадлежит Френкелю [Френ, Фре]. Обзор после-

---

[1] Эта глава — версия статьи Ф. А. Березина и М. С. Маринова [БМар].

дующих работ в этом направлении дал Барут [Baru]. Однако в рамках классического подхода (на многообразиях) проблема оказалась далека от удовлетворительного решения. Свидетельством тому — статья Хансона и Редже [HaRe], где можно найти дальнейшие ссылки. Наш подход существенно отличается от вышеописанного, так как мы для описания спиновых степеней свободы используем алгебру Грассмана. Кроме конкретных физических приложений к динамике частиц со спином, предлагаемая теория может быть интересна как пример обобщения гамильтоновой динамики и подходящих процедур квантования.

2. Математические основания. Чтобы описать абстрактную классическую механику, требуется три основных объекта.

1) Дифференцируемое многообразие[1] $\mathcal{M}$, т. е. фазовое пространство. На $\mathcal{M}$ всегда можно ввести локальные координаты x. В принципе глобальных координат может не существовать, а даже если они и существуют, разумного (естественного) деления на пары координата-импульс может и не быть.

2) Алгебра $\mathfrak{A}(\mathcal{M})$ комплекснозначных гладких функций на $\mathcal{M}$.

3) Структура алгебры Ли скобок Пуассона на пространстве $\mathfrak{A}(\mathcal{M})$, заданная с помощью антисимметрического (четного в этой главе) тензорного поля $\omega_{kl}(x)$ (по повторяющимся индексам предполагается суммирование)

$$\{f, g\}_{P.b.} = \omega_{kl}(x)\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial g}{\partial x_l} \tag{1}$$

для любых $f, g \in \mathfrak{A}(\mathcal{M})$. Поле $\omega_{kl}(x)$ должно удовлетворять условию[2]

$$\omega_{mn}\frac{\partial \omega_{kl}}{\partial x_n} + \omega_{ln}\frac{\partial \omega_{mk}}{\partial x_n} + \omega_{kn}\frac{\partial \omega_{lm}}{\partial x_n} = 0, \tag{2}$$

эквивалентное тождеству Якоби для скобки Пуассона. Физически наблюдаемые суть вещественные элементы алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{M})$. Динамика с гамильтонианом $H(x)$ задается непрерывной однопараметрической группой, действующей на $\mathfrak{A}(\mathcal{M})$ с помощью уравнения

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}_{P.b.} \tag{3}$$

для любой функции $f(x)$, где «время» t есть параметр на группе.

Одним из способов обобщить понятие классической механики является отказ от многообразия $\mathcal{M}$, «материальной базы» механики, рассматривая лишь структуры ассоциативной и лиевой алгебр на $\mathfrak{A}(\mathcal{M})$. Грассманов вариант является простым примером такой «идеальной механики», в котором умножение в ассоциативной алгебре не коммутативно. Это обобщение достаточно прямолинейно, поскольку хотя элементы алгебры Грассмана и не являются функциями в прямом смысле слова, к ним имеет смысл применять такие понятия обычного анализа как дифференцирование, интегрирование и строить с их помощью аналоги групп Ли типа введенных в работе [БеК] (имеются в виду супергруппы Ли; см. также обзор [CNS]).

---

[1] Ниже подразумевается, как правило, бесконечно дифференцируемое вещественное многообразие, но можно и комплексное (и тогда не гладкое, а аналитическое), а в последние лет 40 рассматривают и p-адические многообразия, см., например, [CaOs*]. — *Прим. Д. Л.*

[2] См. сноску 4 на с. 40. — *Прим. Д. Л.*

Проквантовать идеальную механику — значит построить ассоциативную[1] алгебру операторов в гильбертовом пространстве, связанную с классической алгеброй и обладающую некоторыми общими свойствами, как обсуждается в статье [Bgen], причем все это можно сформулировать чисто алгебраически, независимо от существования материального фазового пространства. Мы увидим, что в чисто грассмановом случае с «плоской» скобкой Пуассона (т. е. когда ω_{kl} — числовая матрица) алгебра операторов имеет конечномерное представление.

3. Результаты и дискуссия. Основная идея нашего подхода — рассмотреть элементы алгебры Грассмана в качестве классических динамических переменных, т. е. функций на фазовом пространстве. Мы определим функционал действия, Гамильтониан, скобку Пуассона, а также некоторые другие понятия классической механики. Проквантовать — значит заменить скобку Пуассона канонических переменных на антикоммутатор соответствующих операторов (как обычно, деленных на $-i\hbar$). Таким образом, после квантования алгебра Грассмана превращается в алгебру Клиффорда[2].

Алгебра Грассмана с тремя образующими, преобразующимися как компоненты 3-вектора относительно пространственных вращений, приводит к нерелятивистской динамике точки со спином. Проквантованные динамические переменные представлены матрицами Паули. Для описания релятивистского спина необходима алгебра Грассмана с пятью образующими — аксиальным 4-вектором и псевдоскаляром. Проквантованные переменные выражаются в терминах матриц Дирака. В релятивистском случае на систему, описывающую частицу, наложена связь как в спиновом фазовом пространстве, так и в орбитальном фазовом пространстве. Спиновая связь есть в точности уравнение Дирака. Таким образом, после

---

[1] На мой взгляд естественнее считать, что «проквантовать идеальную механику» — значит построить алгебру Ли, деформирующую скобку (3), см. выделенный мной текст в следующем абзаце. По крайней мере, лишь при таком понимании квантования удалось проквантовать антискобку, да и для скобки Пуассона на $\mathbb{R}^{2n}$ ответ получается согласованный с ожидаемым, см. [ЛЩ°]. — *Прим. Д. Л.*

[2] Я считаю, что такая подмена понятий, отчего-то укоренившаяся, неоправданна: мы ведь квантовали скобку Пуассона, т. е. деформировали **лиеву** супералгебру, а не ассоциативные (супер)алгебры Грассмана или Клиффорда. То, что на одном пространстве можно реализовать все три алгебры, не имеет к делу отношения, см. также сноску 1 на с. 271. — *Прим. Д. Л.*

квантования предлагаемая схема воспроизводит хорошо известную теорию Паули—Дирака электрона со спином. Краткое изложение наших результатов было опубликовано в [БМар] [1].

Впервые квантовое действие для антикоммутирующих канонических переменных было выписано Швингером [Sch2], который назвал их «переменными второго типа». Швингер не рассматривал, однако, ни классическую механику, ни теорию релятивистской частицы со спином; для его формулировки квантовой электродинамики Швингер имел в виду необходимость квантованных полей электронов. В работах Швингера нет никакого ясного указания на то, что классические переменные не только антикоммутируют, но и их квадраты равны нулю. Он также привел аргументы в пользу того, что число «переменных второго типа» должно быть четно (заметим, что в наших построениях фазовое пространство нечетномерно) чтобы можно было определить комплексно-сопряженные пары координата—импульс. Швингер не рассматривал никакой конкретной механической системы. Мы надеемся, что наша теория полезна в качестве простого примера швингеровской вариационной формулировки квантовой теории поля [2].

Идея построения классической механики на кольце функций с произвольными образующими была высказана Мартином [Mart], описавшим нерелятивистский волчок в качестве примера механики на алгебре функций с антикоммутирующими переменными. К сожалению, когда мы публиковали краткие результаты этой работы [БМар], мы не знали этой интересной работы Мартина. Прогресс теории суперсимметрий возбудил интерес к классической механике на суперпространстве, другими словами, к теории групп автоморфизмов алгебр Грассмана; свидетельство тому — заметка ДеВитта [DeWi] [3].

В § 2 рассмотрена нерелятивистская частица со спином, сформулировано классическое действие и развита динамика пространства—времени,

---

[1] О теории струны со спином, построенной в качестве прямого обобщения подхода, развитого в настоящей главе для точечной частицы, говорится в статье [Мар]. (Естественное действие в струнных моделях — это площадь поверхности, заметаемой струной, когда она движется по пространству-времени. В статье [Мар] М. Маринов предложил аналог такого действия для 1|1-мерной суперструны с дополнительной (контактной) структурой. В то время, когда М. Маринов писал обзор [Мар], не было ни классификации простых «струнных» супералгебр Ли (см. [GLS1°]), ни связи с физикой (суперпространствами Тейхмюллера) тех из «струнных» супералгебр Ли, у которых есть нетривиальные центральные расширения), см. гл. Д3, § 8. Продолжить работу М. Маринова с учетом этих результатов — интересная **открытая проблема**.). — *Прим. Д. Л.*

[2] Лагранжевый формализм частиц со спином развивающий швингеровский вариационный принцип, был построен Волковым и Пелетминским [ВлП].

[3] Вторая половина этой фразы загадочна: не ясно, какое отношение автоморфизмы алгебры Грассмана имеют к «супермеханике». По-видимому, имелись в виду автоморфизмы лиевой алгебры (Пуассона) на том же пространстве, ср. [BelK*] . — *Прим. Д. Л.*

основанное на уравнении Лиувилля. Рассмотрено каноническое квантование и показано, как реконструировать привычный формализм. Определен интеграл по путям в грассмановом фазовом пространстве; с его помощью вычислена квантовая функция Грина для прецессии спина в постоянном поле. Теория релятивистской частицы со спином представлена в § 3.

Показано, что в инвариантном описании свободной частицы имеется две симметрии: «калибровочная» и «суперкалибровочная». Проведено квантование и выведено уравнение Дирака. Рассмотрен также случай внешнего поля и в классической механике выведено уравнение Баргмана—Мишеля—Телегди. В дополнениях приведены некоторые нужные нам известные результаты. Дополнение А содержит некоторые факты из суперанализа. Дополнения В и С содержат представления в фазовом пространстве квантовых операторов и интеграл по путям в фазовом пространстве для функции Грина в обычной теории.

§ 2. Динамика нерелятивистской частицы со спином

1. Принцип классического действия и уравнения движения. Предположим, что динамические переменные, описывающие динамику нерелятивистской частицы со спином, являются элементами алгебры Грассмана Λ_3 с тремя вещественными образующими ξ_k, где $k = 1, 2, 3$. Определим траекторию $\xi(t)$ в фазовом пространстве как нечетный элемент алгебры Λ_3, зависящий от параметра t (времени). Введем классическое действие как функционал на $\xi(t)$ и предположим, что оно — четный вещественный элемент алгебры Λ_3. Запишем его в виде, аналогичном гамильтоновому действию, см. уравнение (82),

$$\mathcal{A}_\xi(t_i, t_f) = \int\limits_{t_i}^{t_f} dt\Big(\frac{1}{2}\tilde{\omega}^{kl}\xi_k\dot{\xi}_l - H(\xi)\Big), \tag{4}$$

где $H(\xi)$ — четная вещественная функция от ξ — гамильтониан, $\dot{\xi} = \dfrac{d\xi}{dt}$, а $\tilde{\omega}$ — симметричная антиэрмитова (как и в привычной механике) матрица. С помощью линейных преобразований матрицу $\tilde{\omega}$ можно привести к простейшему виду

$$\tilde{\omega}^{kl} = i\delta_{kl}. \tag{5}$$

Заметим, что первое слагаемое в подынтегральном выражении в (4) не является полной производной, поскольку ξ и $\dot{\xi}$ антикоммутируют. Как любой элемент из Λ_3, гамильтониан $H(\xi)$ является многочленом степени не больше 3. В подынтегральном выражении могут присутствовать только четные члены, поэтому опуская несущественные константы, мы запишем гамильтониан в самом общем виде, положив

$$H(\xi) = -\frac{i}{2}\varepsilon_{klm}b_k\xi_l\xi_m, \tag{6}$$

где b_k — вещественные числа.

Уравнения движения получаются из условия, что вариация действия $\mathcal{A}$ равна нулю:

$$\dot{\xi}_k = iH\overleftarrow{\partial}_k = \varepsilon_{klm}b_k\xi_m, \quad \text{где} \quad \overleftarrow{\partial}_k = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\xi_k}. \tag{7}$$

Решение этого уравнения очевидно:

$$\xi(t) = R(t)\xi(0), \tag{8}$$

где R — ортогональная матрица, описывающая вращение с угловой скоростью $\mathbf{b}$. Это решение можно проинтерпретировать как прецессию спина во внешнем магнитном поле $\mathbf{B}$, где $\mathbf{b} = \varkappa\mathbf{B}$, а $\varkappa$ — магнитный момент. Явная зависимость угловой скорости $\mathbf{b}$ от времени тоже возможна. Гамильтониан (6) — билинейная функция на фазовом пространстве — является аналогом осциллятора. Формальная эквивалентность между прецессией спина и фермиевским осциллятором была ранее отмечена в другом контексте в [ПеПо].

В соответствии с уравнениями (7) зададим скобку Пуассона любой пары динамических переменных, положив

$$\{f(\xi),\, g(\xi)\}_{P.b.} \equiv i(f\overleftarrow{\partial}_k)(\overrightarrow{\partial}_k g), \tag{9}$$

$$\dot{f} = \{H,\, f\}_{P.b.}. \tag{10}$$

Скобка (9) задает супералгебру Ли и для канонических образующих имеем

$$\{\xi_k,\, \xi_l\}_{P.b.} = i\delta_{kl}. \tag{11}$$

Группа вращений в грассмановом фазовом пространстве порождена спиновым угловым моментом

$$S_k = -\frac{i}{2}\varepsilon_{klm}\xi_l\xi_m \equiv -\frac{i}{2}(\xi \times \xi)_k, \tag{12}$$

$$\{S_k,\, \xi_l\}_{P.b.} = -\varepsilon_{klm}\xi_m. \tag{13}$$

Классическая механика нерелятивистской частицы со спином строится в фазовом «суперпространстве», координатами на котором служат координаты шестимерного орбитального пространства $(q_k,\, p_k)$ и базис трехмерного спинового пространства — образующие алгебры Грассмана. Наиболее общее действие, описывающее частицу в локальном внешнем поле, имеет вид

$$\mathcal{A}(t_i,\, t_f) = \int\limits_{t_i}^{t_f} dt\Big(\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} + \frac{i}{2}\xi\dot{\xi} - \frac{p^2}{2m} - V_0(\mathbf{q}) - (\mathbf{LS})V_1(\mathbf{q}) - \mathbf{SB}(\mathbf{q})\Big), \tag{14}$$

где $L_k = \varepsilon_{klm}q_lp_m \equiv (\mathbf{q} \times \mathbf{p})_k$ — орбитально-угловой момент, $V_0(\mathbf{q})$ и $V_1(\mathbf{q})$ — потенциальные функции, а $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ — векторное поле. Член с V_1 в интеграле (14) отвечает за спин-орбитальное взаимодействие. Уравнения движения, выведенные из вариационного принципа — суть

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \frac{\mathbf{p}}{m} + (\mathbf{S} \times \mathbf{q})V_1, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\nabla V_0 - (\mathbf{LS})\nabla V_1 + (\mathbf{S} \times \mathbf{p})V_1 - \nabla(\mathbf{SB}), \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} &= (\mathbf{L} \times \boldsymbol{\xi})V_1 + (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\xi}). \end{aligned} \tag{15}$$

Замечательно, что в присутствии спин-орбитального взаимодействия орбитальное подпространство не инвариантно, поэтому $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ не просто вещественные векторы. Алгебра динамических переменных является алгеброй с шестью коммутирующими и тремя антикоммутирующими переменными. Уравнения упрощаются в случае сферической симметрии. Это рассмотрено более подробно в п. 5 ниже.

2. Обобщенные функции на фазовом пространстве и наблюдаемые. Взаимоотношение между абстрактной механикой и наблюдаемыми величинами определяется с помощью обобщенной функции на фазовом пространстве. Как и в привычной механике, динамический принцип можно сформулировать в грассмановом варианте как задачу Коши на обобщенную функцию $\rho(\xi,\, t)$. Уравнение Лиувилля имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \{H,\, \rho\}_{P.b.} = 0, \tag{16}$$

а уравнения движения (7) суть его характеристические уравнения. Для любой динамической переменной $f(\xi)$ наблюдаемо его среднее значение — число

$$\langle f\rangle = i\int f(\xi)\rho(\xi,\, t)\,\mathrm{vol}\,\xi. \tag{17}$$

Естественно предположить, что распределение является нечетным вещественным элементом алгебры Λ_3:

$$\rho(\xi) = -\frac{i}{6}(\xi\xi\xi) + \mathbf{c}\xi, \quad \text{где} \quad (\xi\xi\xi) = \varepsilon_{klm}\xi_k\xi_l\xi_m. \tag{18}$$

Распределение нормализовано, и $\mathbf{c}$ является средним спиновом моментом:

$$\langle 1\rangle = 1, \quad \langle\mathbf{S}\rangle = \mathbf{c}, \quad \langle\xi\rangle = 0. \tag{19}$$

В случае движения, заданного формулой (8), вектор $\mathbf{c}$ зависит от времени t и эта зависимость дается той же матрицей вращения R. Поэтому произвольный вектор спина подвержен, вообще говоря, прецессии.

Чтобы быть честным распределением, функция $\rho(\xi)$ должна быть в каком-то смысле неотрицательной. Обычный способ обобщить понятие положительности — это потребовать, чтобы интеграл от ρff^* был бы неотрицателен для любой функции f. Мы видим, что случае это выполняется лишь в тривиальном случае $\mathbf{c} = 0$. Это обстоятельство — причина того, почему грассманов вариант классической механики неприменим к реальному миру. Он становится физически осмысленным только после квантования.

3. Каноническое квантование. В соответствии с общим правилом квантования [Дир1] мы заменяем в грассмановом случае скобки Пуассона канонических переменных на антикоммутаторы соответствующих операторов деленных на $-i\hbar$:

$$[\hat{\xi}_k, \hat{\xi}_l]_+ = \hbar\delta_{kl}. \qquad (20)$$

Мы получаем алгебру Клиффорда[1] с тремя образующими, которые, при подходящей нормировке операторов, удовлетворяют соотношениям

$$\hat{\xi}_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\,\hat{\sigma}_k, \qquad [\hat{\sigma}_k, \hat{\sigma}_l]_+ = 2\delta_{kl}. \qquad (21)$$

Единственное неприводимое представление этой алгебры двумерно; оно эквивалентно тому, которое реализовано матрицами Паули. Следовательно

$$\hat{S}_k = -\frac{i}{2}\varepsilon_{klm}\hat{\xi}_l\hat{\xi}_m = \frac{1}{2}\hbar\hat{\sigma}_k, \qquad [S_k, S_l]_- = i\hbar\varepsilon_{klm}S_m. \qquad (22)$$

Заметим, что в классической теории углового момента исходным пунктом является коммутатор, в то время как простейшая форма антикоммутатора возникает лишь в спинорном представлении, описывающем спин $\frac{1}{2}$. В нашем подходе все наоборот: антикоммутатор (20) постулируется, а поэтому лишь спинорное представление и возникает.

Оператор, отвечающий распределению (18) в фазовом пространстве пропорционален обычной матрице плотности

$$\hat{\rho} = 2\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\mathbf{c}\hat{\boldsymbol{\sigma}}}{\hbar}\right), \qquad (23)$$

в то время как интеграл по фазовому пространству заменяется взятием следа соответствующей матрицы. Заметим, что если $|c| \leqslant \frac{\hbar}{2}$, то матрица ρ положительная. Вот таким образом квантовая природа спина снова заявила о себе.

Гейзенберговы уравнения движения получаются из уравнений (7) прямой подстановкой. Чтобы перейти к картине Шрёдингера, введем спинорную функцию ψ, «факторизующую» матрицу плотности $\hat{\rho}(t) = \psi(t) \times \psi^*(t)$. Ее эволюция по времени определяется уравнением Паули. Таким образом, воссоздается обычная теория нерелятивистской частицы со спином $\frac{1}{2}$.

---

[1] Назовем ее Cliff(3). — *Прим. Д.Л.*

Теперь самое время рассмотреть случай алгебры Грассмана с любым числом образующих Λ_n. Очевидно, что конструкцию классической механики, описанную для Λ_3 можно прямо распространить на Λ_n. Квантование определено уравнением (20), где $\hat{\xi}_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\,\hat{\sigma}_k$ при $k = 1, \ldots n$ и где $\hat{\sigma}_k$ суть образующие алгебры Клиффорда Cliff(n). Известно, что у алгебры Cliff(n) есть лишь одно неприводимое эрмитово матричное представление[1]. Его размерность равна $d = 2^m$ при $n = 2m$ или $n = 2m + 1$, где m — целое число. Случай четного n очень похож на привычную теорию, так как можно ввести пары сопряженных канонических (комплексных) переменных (q_r, p_r), положив $q_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_r + i\xi_{m+r})$, $p_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\xi_r + \xi_{m+r}) = iq_r^*$, где $r = 1, \ldots, m$. Квантовые антикоммутационные соотношения имеют вид

$$[\hat{q}_r, \hat{q}_s]_+ = [\hat{p}_r, \hat{p}_s]_+ = 0, \qquad [\hat{q}_r, \hat{p}_s]_+ = i\hbar\delta_{rs}. \qquad (24)$$

Именно этот случай и рассмотрел Швингер [Sch2]. Для наших целей интересен случай нечетного n. Замечательной чертой алгебры Cliff(n) при нечетном n является то, что в матричном представлении образующие не независимы, а удовлетворяют соотношению $\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\cdots\hat{\sigma}_n = \pm i^m$. Действительно, это произведение коммутирует с любым элементом $\hat{\sigma}_k$, его квадрат равен $(-1)^m$, а знак «+» или «−» отвечает за выбор между двумя классами эквивалентности представлений (правые или левые базисы). Таким образом, чтобы получить классический аналог квантового оператора однозначно, следует предать ему определенную четность как элементу из Cliff(n).

По аналогии с квантовой механикой (см. § 5, Дополнение В) представим квантовые операторы их символами: любой оператор $\hat{g}$ можно записать в виде полинома

$$\hat{g} = \sum_{\nu=0}^{n}\ \sum_{\mathbf{k}=(k_1,\cdots,k_\nu)} g_\nu^{k_1\cdots k_\nu}\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_\nu},$$

где $g_\nu^{\mathbf{k}}$ суть «c-числовые» полностью антисимметрические тензоры. Для нечетных n такая форма записи однозначна, если присутствуют лишь члены однородные относительно четности. Таким образом, любой элемент $\hat{g}$ имеет два эквивалентных разложения: четное и нечетное. Определим аналог символа Вейля оператора, положив

$$\hat{g} \longrightarrow g(\xi) = \sum_{\nu,\mathbf{k}=(k_1,\cdots,k_\nu)} g_\nu^{k_1\cdots k_\nu}\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_\nu}. \qquad (25)$$

---

[1] Теория представлений алгебр Клиффорда развита в прославленной работе Брауэра и Вейля [ВейС]. (См. более доступную книгу [ВдВ*], а также [QFS*, CoC1°]. — *Прим. Д.Л.*)

У каждого оператора есть два символа: четный и нечетный. Можно показать, что они связаны преобразованием Фурье. Как и в обычной теории, преобразование Фурье можно использовать, чтобы описать квантование Вейля. Взаимоотношение между оператором и его символом дается в интегральном виде:

$$\widehat{g} \longrightarrow g(\xi) = \int \exp i(\xi\rho)\tilde{g}(\rho)\,\mathrm{vol}(\rho), \tag{26}$$

$$\widehat{g} = \int \widehat{\Omega}(\rho)\tilde{g}(\rho)\,\mathrm{vol}(\rho), \qquad \widehat{\Omega}(\rho) = \exp i(\xi\rho). \tag{27}$$

Здесь $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ — образующие алгебры Грассмана $\widetilde{\Lambda}_n$, антикоммутирующие с ξ и $\widehat{\xi}$. Свойства оператора $\widehat{\Omega}(\rho)$ похожи на свойства оператора $\widehat{\Omega}(r)$, рассмотренные в § 5, Дополнении В:

$$\begin{gathered} \widehat{\Omega}(\rho_1)\widehat{\Omega}(\rho_2) = \exp\Big(\frac{1}{2}\hbar(\rho_1\rho_2)\Big)\widehat{\Omega}(\rho_1+\rho_2), \\ \mathrm{Tr}\,\widehat{\Omega}(\rho) = d\Big(1 + i\Big(\frac{\hbar}{2}\Big)^{n/2}\rho_1\cdots\rho_n\Big). \end{gathered} \tag{28}$$

(Мы обсуждаем сейчас случай нечетного n, а $d = 2^{(n-1)/2}$ есть размерность). Используя эти формулы, мы легко получаем, что

$$\mathrm{Tr}\big(\widehat{\Omega}(-\rho)\widehat{g}\big) = d\Big(i\Big(\frac{\hbar}{2}\Big)^{n/2}\tilde{g}(\rho) + g\Big(\frac{1}{2}i\hbar\rho\Big)\Big).$$

Этот результат позволяет найти символ оператора $\widehat{g}$, как только выбрана четность (заметим, что четности элементов $g(\xi)$ и $\tilde{g}(\xi)$ противоположны). Умножение символов получается из уравнения (28)

$$\begin{gathered} \widehat{g}_1\widehat{g}_2 = \widehat{g} \longrightarrow g(\xi) = \int W(\xi_1, \xi_2, \xi)g_1(\xi_1)g_2(\xi_2)\ \mathrm{vol}(\xi_1)\,\mathrm{vol}(\xi_2), \\ W(\xi_1, \xi_2, \xi) = \Big(\frac{\hbar}{2}\Big)^n \exp\Big(\frac{2}{\hbar}\big((\xi_1\xi_2) + (\xi_2\xi) + (\xi\xi_1)\big)\Big). \end{gathered} \tag{29}$$

Здесь ξ_1, ξ_2, ξ рассматриваются как три разных набора образующих в алгебре Грассмана Λ_{3n}.

Суммируем. В грассмановой механике у квантовых операторов имеется два представления: одно — матрицами операторов в конечномерном пространстве, а другое — элементами алгебры Грассмана. Это очень похоже на обычную квантовую механику, где операторы можно представлять либо функциональными ядрами (скажем, в координатном пространстве) или символами, т. е. функциями на фазовом пространстве.

4. Интеграл по путям для функции Грина. В этом пункте мы получим явное выражение для оператора

$$\widehat{G}(t) = \exp\Big(-\frac{i}{\hbar}t\widehat{H}\Big) \tag{30}$$

в грассмановом случае. Наш метод — вычислить символ $G(\xi)$ этого оператора в виде интеграла по путям в фазовом пространстве. Этот метод — прямое обобщение подхода, примененного к квантовой механике в работе [Бкои], см. также § 5, Дополнение В. Использовать такой метод естественно еще и потому, что в грассмановом фазовом пространстве нет возможности говорить на языке координат и импульсов и невозможно поэтому определить аналог фейнмановского интеграла по путям в пространстве координат (или импульсов).

Представим оператор $\widehat{G}(t)$ как бесконечное произведение бесконечно малых временны́х сдвигов: $\widehat{G}(t) = \lim\limits_{N\to\infty}\Big(\widehat{G}\Big(\frac{t}{N}\Big)\Big)^N$. Переписывая эту формулу в терминах символов и используя закон умножения (29), получаем $G(\xi;\, t) = \lim\limits_{N\to\infty} G^{(N)}(\xi;\, t)$, где

$$G^{(N)}(\xi;\, t) = \Big(\frac{\hbar}{2}\Big)^{nN}\int\Bigg(\frac{1}{\hbar}\sum_{\nu=1}^{N}\Big(2(\xi_\nu\eta_\nu) + 2(\eta_\nu\xi_{\nu+1}) + 2(\xi_{\nu+1}\xi_\nu) - iH(\eta)\frac{t}{N}\Big)\Bigg)\times \\ \times\prod_{\nu=1}^{N}\mathrm{vol}(\xi_\nu)\,\mathrm{vol}(\eta_\nu) \tag{31}$$

с граничным условием $\xi_{N+1} = \xi$. Заметим, что следует рассматривать ξ, $\xi_1, \ldots, \xi_N$ и $\eta_1, \ldots, \eta_N$ как независимые наборы образующих алгебр Грассмана. Следует сравнить эту формулу с уравнением (84). Проинтегрировав по $\xi_1, \ldots, \xi_N$, получаем аналог формулы (87) и запишем формальное выражение

$$G(\xi,\, t) = \int \mathcal{D}(\eta(\tau))\exp\Big(\frac{i}{\hbar}\mathcal{A}_{\mathrm{cl}}(\eta(\tau)) + \frac{1}{\hbar}((\xi\eta_0) + (\eta_0\eta_t) + (\eta_t\xi))\Big),$$

где $\mathcal{A}_{\mathrm{cl}}(\eta(\tau)) = \int\limits_0^t\Big(\frac{i}{2}(\eta\dot{\eta}) - H(\eta)\Big)d\tau$, $\mathcal{D}(\eta(\tau)) = \lim\limits_{N\to\infty}\Big(\frac{\hbar}{2}\Big)^{nN/2}\prod\limits_{\nu=1}^{N}\mathrm{vol}(\eta_\nu)$, а $\eta_0 = \eta(0)$, $\eta_t = \eta(t)$. Однако лишь равенство (31) раскрывает настоящее значение функционального интеграла и полезно для дальнейшего анализа.

Применим подход к интегралу по путям к простому примеру — спиновой прецессии в постоянном магнитном поле. Гамильтониан заданный формулой (6) нужно переписать в виде $H(\xi) = \mathbf{bS}$, где $\mathbf{S}$ — спиновый момент (12). Используя сходство с гармоническим осциллятором, мы продолжаем тем же способом, что и при выводе формулы (92). В нашем случае получаем

$$G(\xi,\, t) = \cos\Big(\frac{1}{2}bt\Big)\exp\Big(-\frac{2i}{\hbar}(\mathbf{Sn})\,\mathrm{tg}\Big(\frac{1}{2}bt\Big)\Big) = \cos\Big(\frac{1}{2}bt\Big) - \frac{2i}{\hbar}(\mathbf{Sn})\sin\Big(\frac{1}{2}bt\Big),$$

где $b = |\mathbf{b}|$, $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{b}}{b}$ и где использовано, что $(\mathbf{Sn})^2 = 0$. Чтобы получить это выражение, мы вычислили гауссовы интегралы по грассманову фазовому пространству с помощью выражения (64). Заметим, что косинус входит теперь в числитель в отличие от формулы (92). Используя символ и формулу (22) легко показать, что

$$\widehat{G}(t) = \cos\Big(\frac{1}{2}bt\Big) - i(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{n})\sin\Big(\frac{1}{2}bt\Big), \tag{32}$$

воспроизведя таким образом результат, который можно получить, вычислив значение выражения $\exp\Big(-\frac{i}{2}\mathbf{b}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{n}\Big)$ обычным образом.

Немало авторов уже пользовались понятием интеграла по путям в пространстве антикоммутирующих функций: Халатников [Хала], Мэтьюз и Салам [MaSa], Кандлин [Cand], Мартин [Mart] и другие. С другой стороны, некоторые авторы описывали динамику частиц со спином с помощью фазовых пространств с коммутирующими переменными: Шульман [Schl], Безак [Bez] (оба рассматривали интегралы по путям), Березин [Bgen], Тарский [Tars], Хэнсон и Редже [HaRe]. Подход, принятый нами в этой работе, представляется нам наиболее адекватным, а спин электрона находит «простое и готовое к употреблению представление» в методе интеграла по путям, отсутствовавшее прежде, как было замечено Фейнманом и Гиббсом [ФеГи, с. 355].

5. Движение в центральном потенциале со спин-орбитальными силами. В качестве простого примера рассмотрим движение частиц со спином, вызванное силами, представленными действием (14), предположив, что $\mathbf{B} = 0$ и что потенциальные функции зависят лишь от $R = |\mathbf{q}|$. Интегралы движения суть полный угловой момент $\mathbf{I} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, L^2 и $\Lambda = \mathbf{LS}$ (заметим, что $S^2 \equiv 0$ и $\Lambda^2 \equiv 0$). Из уравнений (15) мы получаем для радиального движения следующие уравнения:

$$\dot{R} = \frac{P}{m}, \quad \dot{P} = -V_0'(R) + \frac{L^2}{mR^3} - \Lambda V_1'(R). \tag{33}$$

Задача свелась, таким образом, к движению с эффективным потенциалом $U(R) = V_0 + \frac{L^2}{2mR^2} + \Lambda V_1$, где в последнее слагаемое входит нильпотентное возмущение. Очевидно, что решение можно записать в виде

$$R(t) = r(t) + \Lambda a(t), \quad P(t) = p(t) + \Lambda b(t),$$

где r, p, a и b суть числовые функции. Подставив это решение в уравнения (33), мы видим, что $r(t)$ и $p(t)$ являются как раз решениями задачи, не зависящими от спин-орбитального потенциала, в то время как a и b удовлетворяют линейным уравнениям

$$\dot{a} = \frac{b}{m}, \quad \dot{b} = -g(t)a - f(t), \quad \text{где } g(t) = V_0''(r) + \frac{3L^2}{mr^4}, \quad f(t) = V_1'(r). \tag{34}$$

Если орбита устойчива относительно малых возмущений в классическом смысле, то $g(t) > 0$, а (34) — уравнение для осциллятора с частотой $(g(t))^{1/2}$ и движущей силой $f(t)$, которые в случае круговой орбиты являются константами. Таким образом, решение тождественно обычной теории возмущений в Λ. Однако это решение точное, поскольку высшие степени элемента Λ тождественно равны нулю. Чтобы получить «наблюдаемую» траекторию, следует усреднить по спиновым переменным, т. е. проинтегрировать $R(t)$ с плотностью (18). В окончательном выражении следует заменить Λ на константу $\langle\Lambda\rangle = (\mathbf{cL})$, определяемую начальными условиями.

Что касается угловых координат и спина, то их движение определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}} &= V_1(\mathbf{L}\times\boldsymbol{\xi}) \equiv V_1(\mathbf{I}\times\boldsymbol{\xi}),\\ \dot{\mathbf{S}} &= V_1(\mathbf{L}\times\mathbf{S}) \equiv V_1(\mathbf{I}\times\mathbf{S}),\\ \dot{\mathbf{L}} &= V_1(\mathbf{S}\times\mathbf{L}) \equiv V_1(\mathbf{I}\times\mathbf{L}), \end{aligned} \tag{35}$$

где $V_1 = V_1(r(t))$ есть функция от t. Заменить R на r в аргументе функции V_1 в уравнениях (35) можно, поскольку $\Lambda S \equiv 0$, $(\mathbf{S}\times\boldsymbol{\xi}) \equiv 0$ и $\Lambda(\mathbf{L}\times\boldsymbol{\xi}) \equiv 0$. Векторы $\boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{S}$ и $\mathbf{L}$ прецессируют вокруг одной и той же фиксированной оси $\mathbf{I}$ с той же угловой скоростью, которая в случае круговой орбиты постоянна.

§ 3. Релятивистский спин и уравнение Дирака

1. Классическое действие и симметрии. Для релятивистской частицы со спином построим действие, инвариантное относительно групп Пуанкаре и имеющее нерелятивистский предел, рассмотренный в п. 1. Предположим, что спинорные переменные являются компонентами 4-вектора $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Введение новой координаты ξ_0 в фазовое пространство не является, однако, безобидным делом по двум причинам: во-первых, в нерелятивистском пределе возникает «второй спин» $(\xi_0\xi_1, \xi_0\xi_2, \xi_0\xi_3)$ и представление группы вращений становится приводимым. Второй и более серьезной причиной является то, что такую систему невозможно[1] проквантовать: метрика Минковского не знакоопределена. Чтобы получить согласованную схему (и воспроизвести теорию Дирака) мы предполагаем, что у действия есть дополнительная симметрия, которая фактически исключает ξ_0 из уравнений движения, несмотря на то, что уравнения Лоренц-инвариантны.

Для начала рассмотрим свободное действие

$$\mathcal{A}_{\text{free}} = \int\limits_{\tau_i}^{\tau_f} \Big(-mz + \frac{i}{2}\big((\xi\dot{\xi}) + (u\xi)(u\dot{\xi})\big)\Big)d\tau, \quad z = \sqrt{-(\dot{q})^2}, \quad u_\mu = \frac{\dot{q}_\mu}{z}. \tag{36}$$

---

[1] Формально-то возможно. Но операторы не будут самосопряженными, энергия не будет ограничена с одной стороны и т. д. — *Прим. Д. Л.*

Здесь τ — монотонный параметр, нумерующий точки на мировой линии частицы, $q_\mu(t)$ — координаты точки, $\dot{q}_\mu = \frac{dq_\mu}{d\tau}$, $\dot{\xi}_\mu = \frac{d\xi_\mu}{d\tau}$, а скорость света есть $c = 1$. Заметим, что ξ_μ суть элементы пространства–времени, а действие (36) можно рассматривать как форму Рута (Routh) для действия. Мы считаем, что сигнатура метрики имеет вид $(-, +, +, +)$, так что $u^2 = -1$. Действие инвариантно относительно репараметризации траектории $\tau \to \tilde{\tau} = \varphi(\tau)$, где $\varphi(\tau)$ — любая монотонная функция.

Спаривание между ξ и $\dot{\xi}$ в формуле (37) вырождено (чтобы это увидеть, вынесите за скобки $\xi_\alpha \dot{\xi}_\beta$), поэтому для продольной (вдоль $\dot{q}$) компоненты вектора ξ уравнение движения отсутствует. Чтобы сформулировать динамику, требуется дополнительная связь, а чтобы сделать эту связь очевидно инвариантной, введем новую грассманову переменную ξ_5, и тогда связь примет вид

$$(u\xi) + \xi_5 = 0. \tag{37}$$

Чтобы получить явно ковариантный канонический формализм для системы с вырожденным лагранжианом, применим метод Дирака (общий подход был предложен Дираком в [Дир2], а современные применения к динамике релятивистской частицы можно найти в работах Хансона и Редже [HaRe] и Касальбуони и др. [CGL]). Добавив связь (37) с (антикоммутирующим) множителем Лагранжа λ к первоначальному лагранжиану, получаем

$$\mathcal{A}_{\text{free}} = \int\limits_{\tau_i}^{\tau_f} \Big(- mz + \frac{i}{2}\big((\xi\dot{\xi}) + (\xi_5\dot{\xi}_5) - ((u\xi) + \xi_5)\lambda\big)\Big) d\tau. \tag{38}$$

Канонический импульс имеет вид

$$p^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\mu} = mu^\mu - \frac{i}{2}\big(\xi^\mu + (u\xi)u^\mu\big)\frac{\lambda}{z}, \tag{39}$$

а связи в фазовом пространстве суть

$$p^2 + m^2 = 0, \quad (p\xi) + m\xi_5 = 0. \tag{40}$$

Принимая во внимание связи, получаем гамильтоново действие:

$$\mathcal{A}_{\text{free}} = \int\limits_{\tau_i}^{\tau_f} \Big((p\dot{q}) - l(p^2 + m^2) + \frac{i}{2}\Big((\xi\dot{\xi}) + (\xi_5\dot{\xi}_5) - (p\xi + m\xi_5)\frac{\lambda}{m}\Big)\Big) d\tau, \tag{41}$$

где l другой (коммутирующий) лагранжев множитель. Уравнения движения, полученные из принципа действия, имеют вид

$$\dot{q}_\mu = 2lp_\mu + i\xi_\mu \frac{\lambda}{2m}, \quad \dot{p}_\mu = 0, \quad \dot{\xi}_\mu = p_\mu \frac{\lambda}{2m}, \quad \dot{\xi}_5 = \frac{1}{2}\lambda. \tag{42}$$

Уравнение относительно q согласовано с (39), если

$$l = \frac{1}{2m}\Big(z - i\xi_5 \frac{\lambda}{2m}\Big),$$

и уравнение принимает вид

$$\dot{q}_\mu = \frac{p_\mu z}{m} + \frac{i}{2}\Big(\xi_\mu + \frac{p_\mu (p\xi)}{m^2}\Big)\frac{\lambda}{m}. \tag{43}$$

Появление второго члена в уравнении (43) можно было предвидеть: это классический аналог шредингеровского Zitterbewegung'а («Zitterbewegung» примерно переводится как «дрожащее движение»; обсуждение этого понятия смотри в работе Дирака [Дир1, §69], его алгебраические аспекты рассмотрены Йорданом и Мукундой [JoMu]). Заметим, что временная эволюция перемешивает координаты и спиновые степени свободы в аккурат как в нерелятивистском случае со спин-орбитальным потенциалом (ср. (15)), а всем фазовым пространством релятивистской частицы со спином является «суперпространство».

Связи (40) происходят из инвариантности действия относительно двух типов преобразований. Первый уже упоминался. Это «калибровочная» группа преобразований $\tau \to \tilde{\tau} = \varphi(\tau)$. Бесконечно-малыми преобразованиями второго типа являются преобразования

$$\xi_\mu \longrightarrow \tilde{\xi}_\mu = \xi_\mu + u_\mu\eta, \quad \xi_5 \longrightarrow \tilde{\xi}_5 = \xi_5 + \eta, \quad q_\mu \longrightarrow \tilde{q}_\mu = q_\mu + i\xi_\mu\frac{\eta}{m}, \tag{44}$$

где $\eta(\tau)$ — антикоммутирующий «параметр», произвольным образом зависящий от τ. По аналогии с преобразованиями, введенными в дуальных моделях Жерве и Сакитой [GeSa], мы называем супергруппу, порожденную инфинитезимальными преобразованиями (44) «суперкалибровочной» супергруппой. Вариация действия (38), индуцированная преобразованиями (44), имеет вид

$$\delta\mathcal{A} = i\int\limits_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \frac{d(\xi_5\eta)}{d\tau}. \tag{45}$$

Она обращается в нуль, если $\eta(\tau_i) = \eta(\tau_f) = 0$. Замечательно, что, в отличие от групп Пуанкаре, оба типа преобразований — калибровочные и суперкалибровочные — изменяют масштабный множитель z.

Чтобы зафиксировать решение уравнений движения (42), (43), следует выбрать каким-нибудь образом неопределенные множители λ и z (или l), т. е. зафиксировать и суперкалибровку, и калибровку). Что касается параметра z, то в отсутствие спина используются два варианта:

(i) $z = 1$, причем τ является собственным временем;

(ii) $z = \frac{m}{p_0}$, тогда $\tau = q_0$ является «лабораторным» временем.

Подходящий выбор параметра λ не так очевиден. В фазовом пространстве имеется лишь два Пуанкаре-инвариантных антикоммутирующих элемента: ξ_5 и $(p\xi\xi\xi) \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} p_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma \xi_\delta$. Если положить $\lambda \sim \xi_5$, то T-инвариантность[1] уравнения движения не очевидна. Лучше выбрать

$$\lambda = ikz(p\xi\xi\xi), \tag{46}$$

где k — вещественная константа размерности (действие)$^{-2}$. Заметим, что если $z = \mathrm{const}$, то λ тоже сохраняется. Такой выбор довольно удобен, поскольку второе слагаемое в (43) тождественно обращается в нуль, и движение свободной частицы приобретает довольно простой вид:

$$q_\mu(\tau) = q_\mu(0) + \tau p_\mu \frac{z}{m}, \qquad \xi_\mu(\tau) = \xi_\mu(0) + \tau p_\mu \frac{\lambda}{2m}. \tag{47}$$

Дефект выбора параметров в виде (46) заключается в том, что он нарушает симметрию относительно пространственных отражений. Как и в нерелятивистском случае, прежде чем квантовать, следует решить считать ли, что ξ — аксиальный вектор (а ξ_5 — псевдоскаляр) или вектор (а ξ_5 — скаляр). Однако четность элемента λ, заданная условием (46), противоположна четности элемента ξ_5 в обоих случаях. Чтобы отождествить параметр τ с лабораторным временем q_0 можно положить

$$l = (2p_0)^{-1}, \qquad \lambda = fm\xi_0, \tag{48}$$

где f — скалярная функция размерности (действие)$^{-1}$.

2. Квантование и уравнение Дирака. Действие (41) приводит к каноническим скобкам Пуассона

$$\{p_\mu, q_\nu\}_{P.b.} = g_{\mu\nu}, \qquad \{\xi_\mu, \xi_\nu\}_{P.b.} = ig_{\mu\nu}, \qquad \{\xi_5, \xi_5\}_{P.b.} = i,$$

где $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$, а остальные скобки равны нулю. Коммутационные соотношения для квантовых операторов имеют вид

$$[\hat{p}_\mu, \hat{q}_\nu]_- = -i\hbar g_{\mu\nu}, \qquad [\hat{\xi}_\mu, \hat{\xi}_\nu]_+ = \hbar g_{\mu\nu}, \qquad [\hat{\xi}_5, \hat{\xi}_5]_+ = \hbar, \tag{49}$$

а связи (40) переходят в условие на физические состояния

$$(p^2 + m^2)\psi = 0, \tag{50а}$$

$$\big((\hat{p}\hat{\xi}) + m\hat{\xi}_5\big)\psi = 0. \tag{50б}$$

Операторы $\hat{\xi}_\mu$, $\hat{\xi}_5$ являются образующими алгебры Клиффорда Cliff(5), чье неприводимое представление четырехмерно и дается матрицами Дирака—Паули:

$$\hat{\xi}_\mu = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\,\gamma_5\gamma_\mu, \qquad \hat{\xi}_5 = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\,\gamma_5, \tag{51}$$

---

[1] Т. е. инвариантность относительно отражения $t \to -t$. — *Прим. Д. Л.*

где, как обычно,

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = -2g_{\mu\nu}, \qquad \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \qquad \gamma_5^2 = 1,$$

γ_0 и γ_5 эрмитовы, а γ_1, γ_2, γ_3 антиэрмитовы. Умножив (50б) на $\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{-1/2}\gamma_5$, мы получаем уравнение Дирака $(p\gamma + m)\psi = 0$. Условия (50а) и (50б) согласованы, что можно (и следует) проверить непосредственно. Заметим, что без условия (50б) квантование было бы противоречивым, поскольку ввиду условий (49) имеем $\hat{\xi}_0^2 = -\hbar$, и возникает незнакоопределенная метрика.

Построим генераторы $J_{\mu\nu}$ группы Лоренца по обычным правилам:

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}.$$

В классической теории имеем

$$\begin{aligned} &L_{\mu\nu} = q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu, && S_{\mu\nu} = -i\xi_\mu\xi_\nu, \\ &\{L_{\mu\nu}, q_\lambda\}_{P.b.} = g_{\nu\lambda}q_\mu - g_{\mu\lambda}q_\nu, && \{S_{\mu\nu}, \xi_\lambda\}_{P.b.} = g_{\nu\lambda}\xi_\mu - g_{\mu\lambda}\xi_\nu. \end{aligned} \tag{52}$$

Чтобы получить квантовые операторы, необходимо проделать (анти)симметризацию

$$\hat{L}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\hat{q}_\mu\hat{p}_\nu + \hat{p}_\nu\hat{q}_\mu - \hat{q}_\nu\hat{p}_\mu - \hat{p}_\mu\hat{q}_\nu),$$

$$\hat{S}_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}(\hat{\xi}_\mu\hat{\xi}_\nu - \hat{\xi}_\nu\hat{\xi}_\mu) \equiv \frac{i}{4}\hbar(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu).$$

Чтобы построить релятивистское распределение по фазовому пространству подобное распределению (18), заметим, что компоненты $(p\xi)$ и ξ_5 не являются наблюдаемыми, а были введены лишь для того, чтобы сделать формализм инвариантным. Предположим поэтому, что

$$\rho(\xi) = \delta\left(\frac{p\xi}{m}\right)\delta(\xi_5)\tilde{\rho}(\xi),$$

где функция $\tilde{\rho}$ зависит лишь от поперечных компонент вектора ξ и нечетна. Из определения интеграла очевидно следует, что дельта-функция имеет вид $\delta(\xi) = \xi$. Учитывая все выше сказанное, запишем распределение по фазовому пространству в форме пригодной для квантования:

$$\rho(\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{(p\xi)}{m} + \xi_5\right)\tilde{\rho}(\xi)\left(\frac{(p\xi)}{m} - \xi_5\right), \qquad \text{где } \tilde{\rho}(\xi) = (v\xi) - ib(p\xi\xi\xi), \tag{53}$$

где v — вещественный 4-вектор, $(vp) = 0$ и $b = (6m)^{-1}$, что следует из условия нормализации

$$\int \rho(\xi)\,\mathrm{vol}(\xi) = 1, \qquad \mathrm{vol}(\xi) = -i\,\mathrm{vol}(\xi_5\xi_3\xi_2\xi_1\xi_0). \tag{54}$$

Мы записали функцию $\tilde{\rho}(\xi)$ в форме, инвариантной относительно суперкалибровочных преобразований (44). Вектор v — классический аналог вектора Паули—Любанского; он определяет среднее значение момента спина определенного формулой (52)

$$\langle S_{\mu\nu}\rangle \equiv \int S_{\mu\nu}\rho(\xi)\,\mathrm{vol}(\xi) = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}v^{\lambda}p^{\rho}. \tag{55}$$

Для свободной частицы вектор v постоянный, как следует из уравнения Лиувилля для $\rho(\xi)$.

Чтобы получить квантовую матрицу плотности, подставим операторы (51) в выражение (53)

$$\widehat{\rho} = 2\Big(\frac{\hbar}{2}\Big)^{5/2}\frac{(p\gamma)-m}{2m}(1+\gamma_5(a\gamma))\frac{(p\gamma)-m}{2m}, \quad \text{где} \quad a_{\mu} = \frac{2v_{\mu}}{\hbar}. \tag{56}$$

Это в точности форма, введенная Мишелем и Уайтманом [MiWi].

3. Частица во внешнем поле. Чтобы описать взаимодействие заряженной частицы с электромагнитным полем $A^{\mu}(q)$, запишем действие в виде суммы $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathrm{free}} + \mathcal{A}_{\mathrm{int}}$, где свободное действие $\mathcal{A}_{\mathrm{free}}$ задано формулой (36), а

$$\mathcal{A}_{\mathrm{int}} = \int\limits_{\tau_i}^{\tau_f}\big(eA^{\mu}(q)\dot{q}_{\mu} - i\varkappa zF^{\mu\nu}(q)\xi_{\mu}\xi_{\nu}\big)\,d\tau. \tag{57}$$

Здесь $F^{\mu\nu} = \dfrac{\partial A^{\nu}}{\partial q_{\mu}} - \dfrac{\partial A^{\mu}}{\partial q_{\nu}}$, e — заряд, $\varkappa$ — (полный) магнитный момент. Взаимодействие спина с полем записано в виде $(F^{\mu\nu}S_{\mu\nu})$ Френкелем [Френ]. Такая форма записи была также проанализирована Барутом [Baru] и Хэнсоном и Редже [HaRe]. (Среди многих других работ, посвященных движению спиновой частицы в поле, отметим работы Сатторпа и де Гроота [SuGr] и Эллиса [Ell].) Имея дело с грассмановыми переменными, мы избегаем некоторые трудности, которые встречались в предыдущих подходах.

Канонический импульс имеет вид

$$p^{\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_{\mu}} = P^{\mu} + eA^{\mu}, \quad P_{\mu} = \big(m + i\varkappa(F\xi\xi)\big)u_{\mu} - \frac{i}{2}\big(\xi_{\mu} + (u\xi)u_{\mu}\big)\frac{\lambda}{z}, \tag{58}$$

а уравнения движения суть

$$\dot{P}^{\mu} = eF^{\mu\nu}\dot{q}_{\nu} + \varkappa z\Big(\frac{\partial F^{\sigma\nu}}{\partial q_{\mu}}\Big)S_{\sigma\nu}, \quad \dot{\xi}_{\mu} = u_{\mu}\frac{\lambda}{2} + 2\varkappa zF_{\mu\nu}\xi^{\nu}, \quad \dot{\xi}_5 = \frac{\lambda}{2}. \tag{59}$$

Кроме Zitterbewegung'а, который присутствует даже в отсутствие внешнего поля, спиновые (нечетные) переменные приводят к следующим двум эффектам на траектории по пространству времени: к нормализации массы и тому, что силы оказываются пропорциональны производным поля.

Чтобы получить уравнения Баргмана—Мишеля—Телегди [BMiT] описывающее прецессию спина в однородном поле, представим распределение (53) по пространству—времени в виде

$$\rho(\xi) = \Big((v\xi) - \frac{i}{6}(u\xi\xi\xi)\Big)(u\xi)\xi_5, \tag{60}$$

где u — решение уравнения $m\dot{u}_{\mu} = eF_{\mu\nu}\dot{q}_{\nu}$, и применим к этому распределению уравнение Лиувилля в переменных ξ

$$\begin{aligned} -\dot{\rho} &= \{H,\,\rho\}_{P.b.} = ig_{\mu\nu}\Big(H\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\xi_{\mu}}\Big)\Big(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\xi_{\mu}}\rho\Big) + i\Big(H\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\xi_5}\Big)\Big(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\xi_5}\rho\Big),\\ H &= i\varkappa z(F\xi\xi) + \frac{i}{2}(u\xi + \xi_5)\lambda. \end{aligned} \tag{61}$$

Из условия связи $(u\xi) + \xi_5 = 0$ следует, что это уравнение эквивалентно следующему известному результату [BMiT]

$$\dot{v}^{\mu} = 2\varkappa F^{\mu\nu}v_{\nu} + 2\Big(\varkappa - \frac{e}{2m}\Big)u^{\mu}(Fvu). \tag{62}$$

Лагранжиан взаимодействия (57) лоренц-инвариантен и калибровочно инвариантен. Но он нарушает суперкалибровочную симметрию. Вариация первого слагаемого относительно преобразований (44) имеет вид

$$\delta(A\dot{q}) = \frac{d(A\delta q)}{dt} - (F\dot{q}\delta q), \quad \delta q_{\mu} = i\xi_{\mu}\frac{\eta}{m}. \tag{63}$$

Заметим, что нарушение симметрии в каком-то смысле «минимально», т. е. пропорционально старшей степени переменных ξ при условии, что аномального магнитного момента нет, а $\varkappa = \dfrac{e}{2m}$. Можно также уменьшить нарушение суперкалибровочной симметрии, записав первое слагаемое в формуле (57) в «суперпространственном» виде $eA^{\mu}(Q)\dot{q}_{\mu}$, где $Q = q_{\mu} - i\xi_{\mu}\dfrac{\xi_5}{m}$. Теперь $\delta Q_{\mu} = iu_{\mu}\xi_5\eta$ и вариации (63) обращаются в нуль.

§ 4. Заключительные замечания

Мы представили грассманов вариант гамильтоновой механики и применили общую теорию к простейшей системе — релятивистской для частиц со спином. Перечислим некоторые другие физические объекты, которые можно рассматривать сходным образом.

Высшие спины. Квантование следующее нашей схеме приводит лишь к частицам со спином $\dfrac{1}{2}$. Чтобы получить высшие спины c, следует рассматривать алгебру Грассмана с $2c$ образующими. После квантования возникает волновая функция частиц со спином, а в релятивистском случае мы воспроизводим формализм Баргмана и Вигнера [BaW] (его связь с другими формализмами рассмотрена, например, в [Mari]).

Внутренняя симметрия. Если образующие алгебр Грассмана являются компонентами вектора во внутреннем «изопространстве», то квантование приводит к мультиплету частиц. Таким образом, мы непосредственно получаем группы внутренних симметрий $\mathrm{SO}(n)$, а простейшим примером является группа изотопии $\mathrm{SO}(3) \simeq \mathrm{SU}(2)$. Другая возможность — рассмотреть грассмановы переменные, снабженные парой индексов, одна — пространственная, а другие — относящиеся к внутренней симметрии.

Теория поля. В сущности, классическая теория поля, имеющая дело с антикоммутирующими полями, была сформулирована Швингером в его работах [Sch2, Sch1], развивающих квантовый динамический принцип для электродинамики. Однако исследовать классическую теорию в этом случае нет необходимости, поскольку квантование достаточно простое. Более изощренный пример — теория релятивистской струны со спином [IwKi, Reb]. Лагранжианы нелинейного поля и классические решения в последнее время интенсивно исследуются (см., например, обзор Раджарамана [Raja]). В этой связи расширение области применений классической теории поля представляет интерес.

Имея в виду все вышеизложенное, мы уверены, что алгебра Грассмана и «антикоммутирующие c-числа» не являются «ненужной добавкой к математической физике», как заявил Клаудер [Kla].

§ 5. Приложения

А. Алгебра Грассмана. В вычислениях часто бывает полезен «гауссов интеграл». Можно показать, что

$$\int \exp\Bigl(\sum a_{jk}\xi_j\xi_k\Bigr)\ \mathrm{vol}(\xi_n \cdots \xi_1) = (\det(2a_{jk}))^{1/2}, \qquad a_{jk} = -a_{kj}, \tag{64}$$

т. е. квадратный корень из определителя кососимметрической матрицы (пфаффиан) является полиномиальной функцией своих аргументов.

Преобразование Фурье. Пусть G_n и H_n суть алгебры Грассмана с образующими ξ_k и η^k, где $k = 1, \ldots, n$, соответственно. Рассмотрим линейное отображение $g = \mathcal{F}(h)$, где $g \in G_n$, $h \in H_n$, определенное формулами

$$h(\eta) = \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\mathbf{j}=(j_1,\ldots,j_\mu)} h^{\mu}_{j_1\ldots j_\mu}\eta^{j_1}\cdots\eta^{j_\mu}, \quad \text{где} \quad g^{k_1\cdots k_\nu}_{\nu} = \frac{\varepsilon_\nu}{\nu!} \sum_{\mathbf{j}=(j_1,\ldots,j_\mu)} \varepsilon^{k_1\cdots k_\nu j_1\cdots j_\mu} h^{\mu}_{j_1\cdots j_\mu},$$

а $\mu + \nu = n$, причем $\varepsilon_\nu = 1$ для четного ν и $\varepsilon_\nu = i$ для нечетного ν. Обратное преобразование имеет вид

$$h^{\mu}_{j_1\cdots j_\mu} = \frac{\varepsilon_\mu}{\varepsilon_n \mu!} \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{j_1\cdots j_\mu k_1\cdots k_\nu} g^{k_1\cdots k_\nu}_{\nu}.$$

Это отображение замечательно, поскольку $\dfrac{\partial g}{\partial \xi_k} = \mathcal{F}(i\eta^k h(\eta))$. Его можно представить также с помощью интеграла следующим образом

$$g(\xi) = \int \exp\Bigl(i\sum_k \xi_k\eta^k\Bigr) h(\eta)\,\mathrm{vol}(\eta^n \ldots \eta^1),$$
$$h(\eta) = \frac{1}{\varepsilon_n}\int \exp\Bigl(-i\sum_k \xi_k\eta^k\Bigr) g(\xi)\,\mathrm{vol}(\xi_n \ldots \xi_1),$$

Преобразование $\mathcal{F}$ является, таким образом, обобщением на нечетные переменные преобразования Фурье. Доказательство и дальнейшую информацию можно найти в [Бмет].

Б. Операторы и их символы. Операторы квантовой механики суть элементы алгебры Ли Гейзенберга с образующими $\widehat{q}_j$, $\widehat{p}_j$, где $j = 1, \ldots, f$, а f — число степеней свободы, удовлетворяющих следующим каноническим коммутационным соотношениям:

$$[p_j, q_k]_- = -i\hbar\delta_{jk}. \tag{65}$$

Хорошо известно, что эти операторы можно представить с помощью функций на фазовом пространстве с подходящим законом умножения. А именно, пусть x — вектор в фазовом пространстве, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $n = 2f$, и пусть представление имеет вид $\widehat{g}_1 \to g_1(x)$, $\widehat{g}_2 \to g_2(x)$, тогда

$$\widehat{g}_1\widehat{g}_2 = \widehat{g} \longrightarrow g(x) = \int W(x_1, x_2, x) g_1(x_1) g_2(x_2)\, d^n x_1\, d^n x_2. \tag{66}$$

Ядро $W(x_1, x_2, x)$ интегрального преобразования определяет представление. Алгебра операторов ассоциативна, поэтому

$$\int W(x_1, x_2, x) W(x, x_3, x_4)\, d^n x = \int W(x_1, x, x_4) W(x_2, x_3, x)\, d^n x. \tag{67}$$

Естественно потребовать, чтобы выполнялся принцип соответствия: в классическом пределе $g(x)$ совпадает с классической динамической переменной, отвечающей оператору $\widehat{g}$: $\lim\limits_{\hbar\to 0} g(x) = g_{\mathrm{cl}}(x)$. При этом в классическом пределе закон умножения следующий: $g_{\mathrm{cl}}(x) = g_1(x) g_2(x)$ и

$$\lim_{\hbar\to 0} W(x_1, x_2, x) = \delta^n(x - x_1)\delta^n(x - x_2). \tag{68}$$

Можно потребовать также, чтобы выполнялось условие $\widehat{1} \to 1$, тогда

$$\int W(x_1, x_2, x)\, d^n x_1 = \int W(x_2, x_1, x)\, d^n x_1 = \delta^n(x - x_2). \tag{69}$$

Конечно такое представление неоднозначно. Рассмотрим сейчас вейлевское представление. Для большей симметрии мы не будем делить компоненты вектора x на координаты и импульсы, а запишем коммутационные соотношения (65) в виде

$$[\widehat{x}_k, \widehat{x}_l]_- = i\hbar\omega_{kl}, \tag{70}$$

где ω_{kl} постоянная кососимметрическая матрица (обратная к фундаментальной симплектической форме). Определим симметрическое произведение $(\widehat{x}_{k_1} \cdots \widehat{x}_{k_\nu})$ с помощью производящей функции

$$(r\widehat{x})^\nu \equiv \left(\sum_{k=1}^{n} r^k \widehat{x}_k\right)^\nu = \sum_{\mathbf{k}} r^{k_1} \cdots r^{k_\nu} (\widehat{x}_{k_1} \cdots \widehat{x}_{k_\nu}), \tag{71}$$

где r — вектор из (двойственного) фазового пространства. Мономы $(\widehat{x}_{k_1} \cdots \widehat{x}_{k_\nu})$ образуют полный базис в алгебре операторов. Любой оператор $\widehat{g}$ можно представить в виде формального ряда

$$\widehat{g} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{k}} g_\nu^{k_1 \cdots k_\nu} (\widehat{x}_{k_1} \cdots \widehat{x}_{k_\nu}),$$

где $g_\nu^{\mathbf{k}}$ суть «c-числовые» полностью симметрические тензоры. Представление Вейля определяется с помощью такого разложения следующим образом:

$$\widehat{g} \longrightarrow g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{k}} g_\nu^{k_1 \cdots k_\nu} x_{k_1} \cdots x_{k_\nu}. \tag{72}$$

Очевидно, что соответствие взаимно-однозначно. Представление Вейля можно описать эквивалентным образом и непосредственно, пользуясь определением (71); именно это и требовалось в первоначальном рецепте [Вейл]. Рассмотрим преобразование Фурье

$$g(x) = \int e^{i(xr)} \tilde{g}(r)\, d^n r. \tag{73}$$

Соответствующий оператор $\widehat{g}$ строится с помощью экспоненциального оператора $\widehat{\Omega}$:

$$\widehat{g} = \int \widehat{\Omega}(r) \tilde{g}(r)\, d^n r, \quad \text{где } \widehat{\Omega}(r) = \exp i(\widehat{x}r) \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{i^\nu}{\nu!} (\widehat{x}r)^\nu. \tag{74}$$

Теперь мы можем найти ядро закона умножения (66). Заметим, что в силу коммутационного уравнения (70) оператор $\widehat{\Omega}(r)$ задает представление группы сдвигов:

$$\widehat{\Omega}(r_1)\widehat{\Omega}(r_2) = \exp\left(-\frac{i}{2}\hbar \sum_{kl} \omega_{kl} r_1^k r_2^l\right) \widehat{\Omega}(r_1 + r_2). \tag{75}$$

Полезны также следующие равенства:

$$\widehat{\Omega}^{-1}(r) \widehat{x}_k \widehat{\Omega}(r) = \widehat{x}_k - \hbar \omega_{kl} r^l, \tag{76}$$

$$\frac{\partial \widehat{\Omega}(r)}{\partial r^k} = i\left(\widehat{x}_k + \frac{1}{2}\hbar \omega_{kl} r^l\right) \widehat{\Omega}(r), \tag{77}$$

$$\operatorname{Tr} \widehat{\Omega}(r) = (2\pi\hbar)^{-n/2} \delta^n(r). \tag{78}$$

Подставляя выражения (74) и используя преобразования Фурье, обратное преобразованию (73), получаем

$$W(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\omega(\pi\hbar)^n} \exp\left(\frac{2i}{\hbar}((x_1 \circ x_2) + (x_2 \circ x_3) + (x_3 \circ x_1))\right), \tag{79}$$

где $\omega = \det(\omega_{kl})$ и где

$$(x \circ y) = -(y \circ x) = \tilde{\omega}^{kl} x_k y_l, \quad \tilde{\omega}^{k'l} \omega_{kl} = \delta_k^{k'}, \tag{80}$$

т. е. $\tilde{\omega}$ — матрица, обратная матрице ω. Замечательно, что в случае одной степени свободы ($n = 2$) билинейная форма в показателе степени в (77) имеет простой геометрический смысл. Она пропорциональна площади треугольника с вершинами в точках (x_1, x_2, x_3) на фазовом пространстве.

Несколько более привычный способ представления операторов в терминах их ядер, скажем, в координатном базисе, выглядит так:

$$\widehat{g}_1 \widehat{g}_2 = \widehat{g} \longrightarrow \langle q''|g|q'\rangle = \int \langle q''|g_1|q\rangle \langle q|g_2|q'\rangle\, d^f q.$$

Такой закон умножения гораздо проще, чем выражение (66), однако связь с классической механикой не так очевидна. Чтобы получить соотношение между символом и ядром, необходимо вычислить ядро оператора $\widehat{\Omega}(r)$. Вернемся к обычным координатам и импульсам и заметим, что благодаря условию (75), имеем

$$\widehat{\Omega}(u, v) = \exp(iu\widehat{q} + iv\widehat{p}) = e^{(i/2)iu\widehat{q}} e^{iv\widehat{p}} e^{(i/2)u\widehat{q}}.$$

Мы видим, что

$$\langle q''|g|q'\rangle = (2\pi\hbar)^{-f} \int g\left(\frac{1}{2}q' + \frac{1}{2}q'', p\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p(q' - q'')\right) d^f p.$$

В заключение отметим два приятных свойства символа Вейля, которые сохраняются при суперизации. Во-первых, эрмитово сопряжение операторов индуцирует комплексное сопряжение символов $\widehat{g} \to g(x)$, $\widehat{g}^+ \to g^*(x)$. Во-вторых,

$$\operatorname{Tr} \widehat{g} = (2\pi\hbar)^{-n/2} \int g(x)\, d^n x. \tag{81}$$

Представление квантовых операторов функциями на фазовом пространстве было развито Вейлем [Вейл] и Вигнером [Wign] и глубже исследовалось Мойалом [Моу]. Обобщение на бесконечное число степеней свободы, а также на фермиевский случай и детали доказательств см. в [Бкои, Б]. Наиболее свежей статьей на эту тему является работа Шмутца [Schm].

В. Представление функций Грина с помощью интеграла по путям в фазовом пространстве. Рассмотрим классическую механическую систему с гамильтонианом $H(x)$, где x — вектор в фазовом пространстве.

Запишем классическое действие в симметричной форме

$$\mathcal{A}_{\text{cl}}(x(\tau)) = \int\limits_0^t \Big(\frac{1}{2}(x \circ \dot{x}) - H(x)\Big)\,d\tau, \tag{82}$$

где $(x \circ \dot{x}) \equiv p\dot{q} - q\dot{p}$ в обозначениях из дополнения Б (формула (78)). Это действие появляется в представлении пропагатора (т. е. оператора Грина) в виде интеграла по путям в фазовом пространстве.

Пусть $\widehat{H}$ — оператор Гамильтона квантованной системы, а $H(x)$ — символ Вейля оператора $\widehat{H}$ и $\widehat{G}(t) = \exp\Big(-it\dfrac{\widehat{H}}{\hbar}\Big)$ — пропагатор. Вычислим символ Вейля оператора $\widehat{G}(t)$, т. е. функцию $G(x;\, t)$ на фазовом пространстве. Для этого рассмотрим сперва бесконечно малый промежуток времени δt. Очевидно, что

$$\widehat{G}(\delta t) \approx 1 - i\delta t\frac{\widehat{H}}{\hbar} \longrightarrow 1 - i\delta t\frac{H(x)}{\hbar}, \quad G(x;\, \delta t) = \exp\Big(-i\delta t\frac{H(x)}{\hbar}\Big) + O(\delta t^2). \tag{83}$$

Для конечного t оператор $\widehat{G}(t)$ можно вычислить с помощью предельного процесса, представляющего пошаговую эволюцию системы $\widehat{G}(t) = \lim\limits_{N\to\infty}\Big(\widehat{G}\Big(\dfrac{t}{N}\Big)\Big)^N$. Чтобы получить символ $G(x;\, t)$, применим закон умножения (66) с ядром (77) к символам $G\Big(x,\, \dfrac{t}{N}\Big)$, заданным формулой (83). В результате получим $G(x,\, t) = \lim\limits_{N\to\infty} G^{(N)}(x;\, t)$, где

$$G^{(N)}(x;\, t) = \big(\omega(\pi\hbar)^n\big)^{-N} \int \prod_{\nu=1}^{N} d^n x_\nu\, d^n y_\nu \times$$
$$\times \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{\nu=1}^{N}\Big(2(x_\nu \circ y_\nu) + 2(y_\nu \circ x_{\nu+1}) + 2(x_{\nu+1} \circ x_\nu) - H(y_\nu)\frac{t}{N}\Big)\right), \tag{84}$$

где $x_{N+1} = x$. Можно представлять себе систему, развивающуюся в фазовом пространстве под действием своих гамильтонианов в точках y_ν, причем наблюдаем мы ее в точках x_ν.

Формально выражение (84) является представлением пропагатора с помощью «двойного» континуального интеграла

$$G(x;\, t) = \iint \mathcal{D}(x(\tau))\mathcal{D}(y(\tau)) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int\limits_0^t \big(2(y \circ \dot{x}) - 2(x \circ \dot{x}) - H(y)\big)\,d\tau\right),$$
$$\mathcal{D}(f(\tau)) \equiv \lim_{N\to\infty}\big(\omega(\pi\hbar)^n\big)^{-N/2}\prod_{\nu=1}^{N} d^n f_\nu, \quad f_\nu \equiv f(\nu\frac{t}{N}), \tag{85}$$

где подразумеваются граничные условия $x(t) = x$. Однако чтобы вычислить значения этого выражения, необходимо рассмотреть выражение (84).

Интеграл по x_ν гауссов и может быть вычислен точно. Подставим $x_\nu = u_\nu + z_\nu$, где z_ν — новые переменные интегрирования, а билинейная форма в показателе степени имеет экстремум при $x_\nu = u_\nu$. Уравнения на u_ν имеют вид

$$\begin{gathered} u_{\nu+1} - u_{\nu-1} = y_\nu - y_{\nu-1}, \quad \nu = 2,\, \ldots,\, N-1, \\ u_2 = y_1, \quad u_{N-1} = x + y_{N-1} - y_N. \end{gathered} \tag{86}$$

Теперь, предположив, что N — четное число, получаем

$$\int \prod_{\nu=1}^{N} d^n z_\nu \exp\left(\frac{2i}{\hbar}\sum_{\nu=1}^{N-1}(z_{\nu+1} \circ z_\nu)\right) = \big(\omega(\pi\hbar)^n\big)^{N/2},$$

$$G^{(N)}(x;t) = \big(\omega(\pi\hbar)^n\big)^{-N/2}\int\prod_{\nu=1}^{N} d^n y_\nu \times$$
$$\times \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(2\sum_{\varkappa=1}^{N/2}(u_{2\varkappa} \circ (y_{2\varkappa} - y_{2\varkappa-1})) + 2(x \circ (u_N - u_N)) - \sum_{\nu=1}^{N} H(y_\nu)\frac{t}{N}\right)\right). \tag{87}$$

В пределе уравнения (86) для $u_{2\varkappa}$ принимают вид

$$\dot{u} = \frac{1}{2}\dot{y}, \quad u(0) = y(0), \tag{88}$$

так что $u(\tau) = \dfrac{1}{2}(y(\tau) + y(0))$ и

$$G(x;\, t) = \int \mathcal{D}(y(\tau)) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{A}_{\text{cl}}(y(\tau)) + \frac{i}{\hbar}((x \circ y_0) + (y_0 \circ y_t) + (y_t \circ x))\right),$$
$$y_0 = y(0), \quad y_t = y(t), \tag{89}$$

где $\mathcal{A}_{\text{cl}}$ — классическое действие, определенное формулой (82). Эта форма интеграла по путям в фазовом пространстве достаточно симметрична и нет нужды различать координаты и импульсы, а также требовать, как в стандартном подходе (см. работу Гарро [Garr]), чтобы траектории были кусочно-линейны по q и кусочно-постоянны по p. Однако точное значение функционала $\int (y \circ \dot{y})\,dt$ ясно лишь до перехода к пределу при $N \to \infty$ и дается формулой (87).

В некоторых приложениях представление (84) более полезно, чем (87) или (89). Например, чтобы получить исходный фейнмановский интеграл по путям в координатном пространстве, введем переменные $(p,\, q) = y$, $(p',\, q') = x$, положим $H(y) = \dfrac{p^2}{2m} + V(q)$ и проинтегрируем (84) сперва по p, а затем по q' и p'. Рассмотрим теперь изотропный гармонический осциллятор $H(y) = ky^2$. Интегрируя выражения (84) по y_ν, мы получим

$$G^{(N)}(x;\, t) = (i\pi\hbar\delta)^{-nN/2}\int \exp\left(\frac{2i}{\hbar}\sum_{\nu=1}^{N}\Big((x_{\nu+1} \circ z_\nu) + \frac{z_\nu^2}{2\delta}\Big)\right)\prod_{\nu=1}^{N} d^n x_\nu, \tag{90}$$

где $z_\nu = x_\nu - x_{\nu+1}$, $\delta = \frac{kt}{N}$. После интегрирования по $x_1, \ldots, x_M$, где $1 < M \leqslant N$, интеграл принимает вид

$$C_M = \int \exp\left(\frac{2i}{\hbar}\left((x_{\nu+1} \circ z_\nu) + \frac{z_\nu^2}{2\delta}\right) - \frac{i}{\hbar} A_M x_{M+1}^2\right) \prod_{\nu=M+1}^{N} d^n x_\nu, \tag{91}$$

причем для констант A_M и C_M имеются следующие рекуррентные формулы:

$$A_M = A_{M-1} + \delta \frac{1 + A_{M-1}^2}{1 - \delta A_{M-1}}, \qquad A_0 = 0,$$
$$C_M = \left(\frac{i\pi\hbar\delta}{1 - \delta A_{M-1}}\right)^{n/2} C_{M-1}, \qquad A_0 = 1.$$

В пределе при $\delta \to 0$ имеем $A_M = A\left(\frac{Mt}{N}\right)$, $C_M = (i\pi\hbar\delta)^{+nM/2} F\left(\frac{Mt}{N}\right)$, где функции $A(\tau)$ и $F(\tau)$ получаются решением дифференциальных уравнений

$$\frac{dA}{d\tau} = k(1 + A^2), \qquad \frac{d\ln F}{d\tau} = \frac{1}{2} nkA, \qquad A(0) = 0, \qquad F(0) = 1.$$

Таким образом, функция Грина для осциллятора имеет вид

$$G(x;\, t) = (\cos kt)^{-n/2} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} x^2 \operatorname{tg} kt\right). \tag{92}$$

Применяя формулу, связывающую символ оператора с его матричными элементами мы видим, что наш результат находится в согласии с результатом из [ФеГи].

Интегралы по путям в фазовом пространстве были введены Фейнманом [Fey] и обсуждались во множестве работ (см. например [Davi, Garr, Фад]). Наше изложение следует работе [Бкои].

Замечание при корректуре статьи [BMar]. После того как эта статья (версия данной главы) была принята к печати, мы узнали, что похожие методы были предложены и другими авторами[1], хотя их подход и не тождествен нашему. Мы благодарны докторам Р. Касальбуони и Л. Бринку за эти сообщения.

---

[1] См.: *Barducci A.*, *Casalbuoni R.*, *Lusanna L.* Supersymmetries and the pseudoclassical relativistic electron // Nuovo Cimento. 1976. V. 35A, № 3. P. 377–399;

Brink L., *Deser S.*, *Zumino B.*, *DiVecchia P.*, *Howe P.* Local supersymmetries for spinning particles // Phys. Lett. 1976. V. B64. P. 435–438;

Casalbuoni R. The classical mechanics for Bose—Fermi systems // Nuovo Cimento. 1976. V. 33A, № 3. P. 389–431;

Casalbuoni R. On the quantization of systems with anticommuting variables // Nuovo Cimento. 1976. V. 33A, № 1. P. 115–125;

Casalbuoni R. Relativity and supersymmetries // Phys. Lett. 1976. V. 62B. P. 49–54.

Литература

[Бкп] *Березин Ф. А.* Канонические преобразования в представлении вторичного квантования // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 2. С. 311–314.

[Бмет] *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. 2-е изд., доп. / Под ред. М. К. Поливанова. М.: Наука, 1986.

[Б] *Березин Ф. А.* Об одном представлении операторов с помощью функционалов // Труды ММО. 1967. Т. 17. С. 117–196.

[Бав] *Березин Ф. А.* Автоморфизмы грассмановой алгебры // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 3. С. 269–273.

[Бкои] *Березин Ф. А.* Невинеровские континуальные интегралы // Теор. и матем. физика. 1971. Т. 6, № 2. С. 194–212.

[Бун] *Березин Ф. А.* Представления супергруппы U(p, q) // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10, № 3. С. 70–71.

[БеК] *Березин Ф. А.*, *Кац Г. И.* Группы Ли с коммутирующими и антикоммутирующими параметрами // Матем. сб. 1970. Т. 82 (124), № 3. С. 343–359.

[БЛ] *Березин Ф. А.*, *Лейтес Д. А.* Супермногообразия // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224. С. 505–508.

[БМар] *Березин Ф. А.*, *Маринов М. С.* Классический спин и алгебра Грассмана // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 21. С. 678–680.

[БМФ] *Березин Ф. А.*, *Минлос Р. А.*, *Фаддеев Л. Д.* Некоторые математические вопросы квантовой механики систем с большим числом степеней свободы // Труды IV Всесоюзного математического съезда. Т. II. 1961. С. 532–541.

[БрЛ1] *Бернштейн И. Н.*, *Лейтес Д. А.* Интегральные формы и формула Стокса на супермногообразиях // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11, № 1. С. 55–56.

[БрЛ2] *Бернштейн И. Н.*, *Лейтес Д. А.* Как интегрировать дифференциальные формы на супермногообразиях // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11, № 3. С. 70–71.

[ВейС] *Вейль Г.* Спиноры размерности n // Избранные труды: Математика. Теоретическая физика / Под ред. В. И. Арнольда. М.: Наука, 1984. С. 224–245.

[Вейл] *Вейль Г.* Теория групп и квантовая механика. М. Наука, 1986.

[ВлА] *Волков Д. В.*, *Акулов В. П.* Об иниверсальном взаимодействии нейтрино // Письма в ЖЭТФ. 1972. Т. 16. № 11. С. 621–624; Is the neutrino a Goldstone particle? // Phys. Lett. 1973. V. B46. P. 109–112.

[ВлП] *Волков Д. В.*, *Пелетминский С. В.* О лагранжевом формализме для спиновых переменных // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. С. 170–178.

[ВлС] *Волков Д. В.*, *Сорока В. А.* Эффект Хиггса для голдстоуновских частиц со спином 1/2 // Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 18. С. 529–532.

[ГоЛ] *Гольфанд Ю. А.*, *Лихтман Е. П.* Расширение алгебры генераторов группы Пуанкаре и нарушение P-инвариантности // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13, вып. 8. С. 452–455; Симметрии между бозонами и фермионами и суперполя // Проблемы теоретической физики. М.: Наука, 1972. С. 37.

[Дир1] *Дирак П. А. М.* Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979.

[Дир2] *Дирак П. А. М.* Лекции по квантовой механике. Ижевск: РХД, 1998.

[Лдет] *Лейтес Д. А.* Об одном аналоге определителя // Успехи матем. наук. 1975. Т. 35, № 3. С. 156–157.

[Лмех] *Лейтес Д. А.* Новые супералгебры Ли и механика // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236, № 4. С. 804–807.

[Мар] *Маринов М С.* Релятивистские струны и модели сильных взаимодействий // Успехи физ. наук. 1977. Т. 121, вып. 3. С. 377–425.

[ОгМе] *Огиевецкий В.И.*, *Мезинческу Л.* Симметрии между бозонами и фермионами и суперполя // Успехи физ. наук. 1975. Т. 117, № 4. С. 637–683.

[ПеПо] *Переломов А.М.*, *Попов В.С.* Групповые аспекты задачи об осцилляторе с переменной частотой // Теор. и матем. физика. 1969. Т. 1, № 3. С. 360–374.

[Фад] *Фаддеев Л.Д.* Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов // Теор. и матем. физика. 1969. Т. 1, № 1. С. 3–18.

[ФеГи] *Фейнман Р.*, *Гиббс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.

[Френ] *Френкель Я.И.* Электродинамика вращающегося электрона // Собрание избранных трудов. Т. II. Научные статьи. М.-Л.: АН СССР, 1958. С. 460–476.

[Фре] *Френкель Я.И.* Электродинамика. Л.-М.: ОНТИ, 1934.

[Хала] *Халатников И.М.* Некоторые вопросы нерелятивистской гидродинамики // ЖЭТФ. 1954. Т. 27, № 5. С. 529–541.

[BaW] *Bargmann V.*, *Wigner E.P.* Group theoretical discussion of relativistic wave equations // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1948. V. 34, № 5. P. 211–223.

[BMiT] *Bargmann V.*, *Michel L.*, *Telegdi V.L.* Precession of the polarization of particles moving in a homogeneous electromagnetic field // Phys. Rev. Lett. 1959. V. 2. P. 435–436.

[Baru] *Barut A.O.* Electrodynamics and classical theory of fields and particles. New York: Benjamin, 1964.

[Bgen] *Berezin F.A.* General concept of quantization // Comm. Math. Phys. 1975. V. 40. P. 153–174.

[BMar] *Berezin F.A.*, *Marinov M.S.* Particle spin dynamics as the Grassmann analog of classical mechanics // Ann. Phys. 1977. V. 104, № 2. P. 336–362.

[Bez] *Bezak V.* A path-integral formulation of the Pauli equation using two real spin coordinates // Int. J. Theor. Phys. 1974. V. 11, № 5. P. 321–339.

[Cand] *Candlin D.J.* On sums over trajectories for systems with fermi statistics // Nuovo Cimento. 1956. V. 4. P. 231–239.

[CGL] *Casalbuoni R.*, *Gomis J.*, *Longhi G.* The relativistic point revisited in the light of the string model // Nuovo Cimento. 1974. V. 24A. P. 249.

[CNS] *Corwin L.*, *Ne'eman Y.*, *Sternberg S.* Graded Lie algebras in mathematics and physics // Rev. Modern Phys. 1975. V. 47. P. 543–603.

[Davi] *Davies H.* Hamiltonian approach to the method of summation over Feynman histories // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1963. V. 59. P. 147–155.

[DeWi] *DeWitt B.S.* New games for relativists: Differential geometry on Z_2-graded algebras // Bull. Amer. Phys. Soc. 1975. V. 20. P. 70.

[Ell] *Ellis J.R.* Force and couple exerted on a moving electromagnetic dipole // J. Phys. 1970. V. A3. P. 251–262; A classical description of spinning particles // J. Phys. 1971. V. A4. P. 583–596; Motion of a classical particle with spin // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1975. V. 78. P. 145–156.

[Fey] *Feynman R.P.* An operation calculus having applications in quantum electrodinamics // Phys. Rev. 1951. V. 84, № 1. P. 108–128.

[Garr] *Garrod C.* Hamiltonian path-integral methods // Rev. Mod. Phys. 1966. V. 38. P. 483–494.

[GeSa] *Gervais J.L.*, *Sakita B.* Field theory interpretation of supergauges in dual models // Nucl. Phys. B. 1971. V. 34, № 2. P. 632–639.

[HaRe] *Hanson A.J.*, *Regge T.* The relativistic spherical top // Ann. Physics. 1974. V. 87. P. 498–566.

[IwKi] *Iwasaki Y.*, *Kikkawa K.* Quantization of a string of spinning material // Phys. Rev. 1973. V. D8. P. 440–449.

[JoMu] *Jordan T.F.*, *Mukunda N.* Lorentz-covariant position operators for spinning particles // Phys. Rev. 1963. V. 132. P. 1842–1848.

[Kac1] *Kac V.G.* Lie superalgebras // Advances in Math. 1977. V. 26. P. 8–96.

[Kac2] *Kac V.G.* Characters of typical representations of classical Lie superalgebras // Comm. in Algebra. 1977. V. 5, № 8. P. 889–897.

[Kla] *Klauder J.R.* The action option and the Feynman quantization of spinor fields in terms of ordinary *c*-numbers // Ann. Physics. 1960. V. 11. P. 123–168.

[Kos] *Kostant B.* Graded manifolds, graded Lie theory, and prequantization. Berlin et al.: Springer, 1977. (Lect. Notes Math.; V. 570). P. 177–306.

[Mari] *Marinov M.S.* Construction of invariant amplitudes for interactions of particles with any spin // Ann. Physics. 1968. V. 49, № 3. P. 357–392.

[Mart] *Martin J.L.* Generalized classical dynamics and the «classical analogue» of a Fermi oscillator // Proc. Roy. Soc. 1959. V. A251. P. 536–542.

[MaSa] *Matthews P.T.*, *Salam A.* Propagators of quantized fields // Nuovo Cimento. 1955. V. 2. P. 120–134.

[MiWi] *Michel L.*, *Wightman A.S.* A covariant formalism describing the polarization of spin one-half particles // Phys. Rev. 1955. V. 98, № 4. P. 1190.

[Moy] *Moyal J.E.* Quantum mechanics as a statistical theory // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1949. V. 45. P. 99–124.

[PR] *Pais A.*, *Rittenberg V.* Semisimple Lie algebras // J. of Math. Phys. 1975. V. 16. P. 2062–2070.

[Raja] *Rajaraman R.* Some non-perturbative semi-classical methods in quattum field theory (a pedagogical review) // Phys. Rep. 1975. V. 21C. P. 227–318.

[Reb] *Rebbi C.* Dual models and relativistic quantum strings // Phys. Reports. 1974. V. 12C. P. 1–73.

[Rze] *Rzewuski J.* Field theory II. London: Iliffe Books Ltd., 1969.

[SNR1] *Scheunert M.*, *Nahm W.*, *Rittenberg V.* Classification of all simple graded Lie algebras whose Lie algebra is reductive. I, II // Journ. of Math. Phys. 1976. V. 17, № 9. P. 1626–1639; P. 1640–1644.

[SNR2] *Scheunert M.*, *Nahm W.*, *Rittenberg V.* Graded Lie algebras: generalization of Hermitian representations // Journ. of Math. Phys. 1977. V. 18, № 1. P. 146–154.

[Schm] *Schmutz M.* Generalized phase-space descriptions as linear representations of operators // Nuovo Cimento. 1975. V. 25B. P. 337–347.

[Schl] *Schulman L.* A path integral for spin // Phys. Rev. 1968. V. 176, № 5. P. 1558–1569.

[Sch1] *Schwinger J.* The theory of quantized fields // Phys. Rev. 1951. V. 82. P. 914–927; The theory of quantized fields. 2 // Phys. Rev. 1953. V. 91. P. 713–728.

[Sch2] *Schwinger J.* A note on the quantum dynamical principle // Phil. Mag. 1953. V. 44., № 3. P. 1171–1193.

[SuGr] *Suttorp L.G.*, *de Groot S.R.* Covariant equations of motion for a charged particle with a magnetic dipole moment // Nuovo Cimento. 1970. V. 65A. P. 245–274.

[Tars] *Tarski J.* Phase spaces for spin and their applicability // Acta Phys. Austriaca. 1976. V. 45. P. 337–344.

[Wign] *Wigner E.P.* On the quantum correction for thermodynamic equilibrium // Phys. Rev. 1932. V. 40. P. 749–759.

[WZ] *Wess J.*, *Zumino B.* Supergauge transformations in four dimensions // Nucl. Phys. V. B70. № 1. 1974. 39–50; Supergauge invariant extension of quantum electrodynamics // Nucl. Phys. 1974. V. B70, № 1. P. 1–13.

[Zum] *Zumino B.* Fermi—Bose supersymmetry // Proceedings of the XVII International Conference on High Energy Physics (London, July 1974) / J. R. Smith (ed.). Chilton, Didcot: Rutherford Laboratory, 1974. P. 1–254.

Дополнения

Семинар по суперсимметриям

Том 1 $^1/_2$

Гл. Д1, Д2, Д5, Д6 — Д. А. Лейтес;

гл. Д3, Д4 — Д. А. Лейтес и И. М. Щепочкина;

гл. Д7 — В. Н. Шандер

Д1. Общие сведения: сводка результатов

Мы пользуемся обозначениями и соглашениями из книги [CoC1°], а кроме того:

V — *тавтологический* $\mathfrak{g}$-модуль над линейной супералгеброй Ли $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(V)$; соответствующее представление тоже назовем *тавтологическим*;

$\mathbb{1}$ — тривиальный 1-мерный четный модуль;

ad — присоединенные модуль и действие (супер)алгебры Ли.

Символ $\mathfrak{i}\subplus\mathfrak{d}$ или $\mathfrak{d}\supplus\mathfrak{i}$ обозначает *полупрямую сумму*, в которой супералгебра $\mathfrak{i}$ является идеалом.

Элементы множества $\mathbb{Z}/2$ мы обозначаем $\bar{0}$ и $\bar{1}$, чтобы отличить их от целых чисел; это особенно важно, когда нужны одновременно и $\mathbb{Z}/2$ и $\mathbb{Z}$. Напомним, что *суперпространством* называется $\mathbb{Z}/2$-градуированное пространство; для любого суперпространства $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$ обозначим символом $\Pi(V)$ другую копию того же суперпространства: со сдвинутой четностью, т. е. $(\Pi(V))_{\bar{i}}=V_{\bar{i}+\bar{1}}$. *Суперразмерностью* пространства V назовем $\dim V=p+q\varepsilon$, где $\varepsilon^2=1$, а $p=\dim V_{\bar{0}}$, $q=\dim V_{\bar{1}}$. (Обычно $\dim V$ записывают в виде пары (p, q) или $p|q$. Такая запись затемняет тот факт, что $\dim V\otimes W=\dim V\cdot\dim W$, а в терминах ε он очевиден.)

Структура суперпространства на V индуцирует структуру суперпространства в пространстве $\operatorname{End}(V)$. *Базисом суперпространства* всегда называется базис, состоящий из *однородных* векторов; пусть $\mathrm{Par}=(p_1, \ldots$ $\ldots, p_{\dim V})$ — упорядоченное множество их четностей. Мы называем множество Par *форматом* базиса суперпространства V. Квадратная *суперматрица* формата Par (т. е. размера $\mathrm{Par}\times\mathrm{Par}$) — это $\dim V\times\dim V$-матрица, i-я строка и i-й столбец в которой имеют ту же самую четность $p_i\in\mathrm{Par}$.

Обычно рассматривают один из простейших форматов Par, например, формат $\mathrm{Par}_{st}=$ $=(\bar{0}, \ldots, \bar{0}, \bar{1}, \ldots, \bar{1})$ называется *стандартным*. Без нестандартных форматов невозможно обойтись при классификации систем простых корней конечномерных простых супералгебр Ли, в частности, читателю они могут быть интересны, например, в связи с приложениями к q-квантованию таких супералгебр Ли. Системы простых корней, соответствующие разным нестандартным форматам, связаны между собой так называемыми «изотропными отражениями».

Пусть четность матричной единицы E_{ij} равна p_i+p_j, а скобка суперматриц (одного и того же формата) определена по **Правилу Знаков**.

Напомним, что в «обычной» математике понятия антисимметричности и кососимметричности совпадают. В линейной супералгебре типов симметрии четыре. Вот точные определения[1]:

$$
\begin{aligned}
ba &= (-1)^{p(b)p(a)}ab && \text{(суперсимметричность)}, && \text{(с)}\\
ba &= -(-1)^{p(b)p(a)}ab && \text{(суперантисимметричность)}, && \text{(ас)}\\
ba &= (-1)^{(p(b)+1)(p(a)+1)}ab && \text{(суперкососимметричность)}, && \text{(кс)}\\
ba &= -(-1)^{(p(b)+1)(p(a)+1)}ab && \text{(суперантикососимметричность)}, && \text{(ак)}
\end{aligned}
$$

«Симметричность» алгебр часто называется словом «коммутативность», поэтому супералгебры с вышеперечисленными симметриями называются соответственно *суперкоммутативной*, *суперантикоммутативной*, *суперкососокоммутативной*, *суперантикососокоммутативной*.

Имея суперкоммутативную супералгебру $\mathcal{F}$ «функций» от переменных x, определим суперкоммутативную супералгебру Ω внешних дифференциальных форм как супералгебру многочленов над $\mathcal{F}$ от переменных dx, где $p(d) = \bar{1}$. Поскольку элемент dx четен для любого нечетного x, мы можем рассмотреть не только многочлены от dx. Гладкие или аналитические, или еще какие-нибудь функции от дифференциалов переменных x называются (внешними) *псевдодифференциальными формами* на супермногообразии с координатами x, см. [БЛ*]. Они нам потребуются для интерпретации супералгебр $\mathfrak{b}_\lambda(n)$. Внешний дифференциал определен на пространстве псевдодифференциальных форм суперправилом Лейбница и формулами

$$d(x_i) = dx_i \quad \text{и} \quad d^2 = 0. \tag{Д1.1}$$

Производная Ли определена (с учетом того же правила) формулой

$$L_D(df) = (-1)^{p(D)}d(D(f)). \tag{Д1.2}$$

В частности, для любого элемента λ из основного поля $\mathbb{K}$ положим

$$L_D\big((df)^\lambda\big) = \lambda(-1)^{p(D)}d(D(f))(df)^{\lambda-1} \quad \text{для любых } D \in \mathfrak{der}\,\mathbb{K}[x] \text{ и } f \in F_{\bar{1}}.$$

Общая линейная супералгебра Ли всех суперматриц размера Par обозначается символом $\mathfrak{gl}(\mathrm{Par})$ и обычно $\mathfrak{gl}(\bar{0}, \ldots, \bar{0}, \bar{1}, \ldots, \bar{1})$ кратко записывают как $\mathfrak{gl}(\dim V_{\bar{0}} | \dim V_{\bar{1}})$. Любая суперматрица из $\mathfrak{gl}(\mathrm{Par})$ может быть однозначно представлена в виде суммы своей четной и нечетных частей; в стандартном формате это записывается в следующем блочном виде:

$$\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & D\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B\\ C & 0\end{pmatrix}, \quad p\left(\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}\right) = \bar{0}, \quad p\left(\begin{pmatrix} 0 & B\\ C & 0\end{pmatrix}\right) = \bar{1}. \tag{Д1.3}$$

---

[1] Определения согласованы с теми, что приняты в пакете `SuperLie` (см. [Gr°]): приставка «анти» отмечает перемену знака, т. е. появление минуса, а приставка «косо» отмечает случай, который можно выпрямить, поменяв четности. Мы говорим о суперантисимметричных операторах и билинейных формах именно в этом смысле.

Суперследом называется отображение

$$\mathrm{str}\colon \mathfrak{gl}(\mathrm{Par}) \longrightarrow \mathbb{C}, \ \ (A_{ij}) \longmapsto \sum (-1)^{p_i}A_{ii}, \quad \text{где} \quad \mathrm{Par} = (p_1, \ldots). \tag{Д1.4}$$

Так как $\mathrm{str}[x, y] = 0$, то суперпространство суперматриц с суперследом 0 составляет подсупералгебру Ли. Она называется *специальной линейной* и обозначается $\mathfrak{sl}(\mathrm{Par})$.

Имеется по крайней мере две суперверсии алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n)$, а не одна. Другая версия называется *странной* супералгеброй Ли и определена как супералгебра матриц, сохраняющая комплексную структуру, заданную *нечетным* оператором J, т. е. как суперцентрализатор $C(J)$ оператора J:

$$\mathfrak{q}(n) = C(J) = \{X \in \mathfrak{gl}(n|n) \mid [X, J] = 0\}, \quad \text{где} \ \ J^2 = -\,\mathrm{id}\,. \tag{Д1.5}$$

Ясно, что заменой базиса мы можем привести J к виду $J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n\\ -1_n & 0\end{pmatrix}$ и тогда элементы из $\mathfrak{q}(n)$ имеют вид (в стандартном формате) $\begin{pmatrix} A & B\\ B & A\end{pmatrix}$, где $A, B \in \mathfrak{gl}(n)$. На $\mathfrak{q}(n)$ определен *странный след* $\mathrm{qtr}\colon \begin{pmatrix} A & B\\ B & A\end{pmatrix} \mapsto \mathrm{tr}\,B$. Обозначим символом $\mathfrak{sq}(n)$ супералгебру Ли матриц со странным следом 0.

Третьим аналогом алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n)$ является супералгебра Ли (Пуассона) $\mathfrak{po}(0|n)$, которая деформируема (физики называют ее деформацию *квантованием*); при квантовании $\mathfrak{po}(0|n)$ переходит в $\mathfrak{gl}(2^{k-1}|2^{k-1})$ при $n = 2k$ или в $\mathfrak{q}(2^{k-1})$ при $n = 2k-1$, а след на $\mathfrak{po}(0|n)$ — интеграл Березина от производящих функций — переходит в str или qtr.

Заметим, что тавтологические представления супералгебр $\mathfrak{q}(V)$ и $\mathfrak{sq}(V)$ в V, хотя и неприводимы в суперсмысле, приводимы в неградуированном смысле: возьмем однородные (относительно четности) и линейно независимые векторы $v_1, \ldots, v_n$ из V, тогда $\mathrm{Span}(v_1 + J(v_1), \ldots, v_n + J(v_n))$ является инвариантным подпространством в V, которое не является подсуперпространством.

Представление называется *абсолютно неприводимым*, или G-неприводимым, если оно не содержит никаких инвариантных подпространств, если же оно содержит инвариантное подпространство, не являющееся подсуперпространством, то оно называется *Q-неприводимым*.

Замечание о (супер) следах. Для любой супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ положим

$$\mathfrak{g}^{(0)} := \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{(i+1)} := [\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(i)}] \tag{Д1.6}$$

— производные супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. **Любая** функция, обращающаяся в нуль на $\mathfrak{g}^{(1)}$, называется следом, или, для пущей выразительности, суперследом. Если $\dim\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{g}^{(1)} > 1$, то следов может быть несколько, и их четность может быть любой. Такое встречается в модулярном, т. е. над полями положительной характеристики, и бесконечномерном случаях.

1. Супералгебры Ли, сохраняющие билинейные формы: два типа. Линейному отображению $F\colon V\to W$ суперпространств отвечает сопряженное отображение $F^*\colon W^*\to V^*$ двойственных суперпространств. В базисе, состоящем из векторов v_i формата Par, формула

$$F(v_j)=\sum_i v_iA_{ij}$$

сопоставляет оператору F суперматрицу A. В двойственном базисе оператору F^* отвечает *супертранспонированная* суперматрица A^{st}:

$$(A^{st})_{ij}=(-1)^{(p_i+p_j)(p_i+p(A))}A_{ji}. \tag{Д1.7}$$

Суперматрицы $X\in\mathfrak{gl}(\mathrm{Par})$, такие что

$$X^{st}B+(-1)^{p(X)p(B)}BX=0 \quad \text{для однородной суперматрицы } B\in\mathfrak{gl}(\mathrm{Par}),$$

составляют супералгебру Ли $\mathfrak{aut}(B)$, которая сохраняет билинейную форму B^f на V, матрица B которой задана формулой

$$B_{ij}=(-1)^{p(B^f)p(v_i)}B^f(v_i,\,v_j),\qquad \text{где } v_i\text{ — базисные векторы.}$$

Напомним, что однородная форма B^f называется *суперсимметричной*, если ее матрица удовлетворяет условию $B^U=B$, где

$$B^U=\begin{pmatrix}R^t & (-1)^{p(B)}T^t\\ (-1)^{p(B)}S^t & -U^t\end{pmatrix},\qquad \text{если } B=\begin{pmatrix}R & S\\ T & U\end{pmatrix}.$$

Аналогично, B называется *суперантисимметричной*, если $B^U=-B$. Таким образом, мы видим, что *переворачивание* (upsetting) билинейных форм $U\colon \mathrm{Bil}(V,\,W)\to\mathrm{Bil}(W,\,V)$, которое в случае *пространств*, а не суперпространств, таких что $V=W$, выражается транспонированной матрицей, является новой операцией.

Наиболее популярными нормальными формами невырожденных суперсимметрических билинейных форм являются те, суперматрицы которых в стандартном формате имеют следующий вид:

$$B'_{ev}(m|2n)=\begin{pmatrix}\Pi_m & 0\\ 0 & J_{2n}\end{pmatrix},\quad \text{где } \Pi_m=\begin{cases}\begin{pmatrix}0 & 1_k\\ 1_k & 0\end{pmatrix} & \text{при } m=2k,\\ \begin{pmatrix}0 & 0 & 1_k\\ 0 & 1 & 0\\ 1_k & 0 & 0\end{pmatrix} & \text{при } m=2k+1,\end{cases} \tag{Д1.8}$$

или

$$B_{ev}(m|2n)=\begin{pmatrix}\mathrm{antidiag}_m(1,\,\ldots,\,1) & 0\\ 0 & J_{2n}\end{pmatrix}, \tag{Д1.9}$$

или

$$B''_{ev}(m|2n)=\begin{pmatrix}1_m & 0\\ 0 & J_{2n}\end{pmatrix}. \tag{Д1.10}$$

Привычное обозначение супералгебры $\mathfrak{aut}(B_{ev}(m|2n))$ — это $\mathfrak{osp}(m|2n)$ или, более точно, $\mathfrak{osp}^{sy}(m|2n)$. Заметим, что переход от V к $\Pi(V)$ переводит суперсимметричные формы в суперантисимметричные, сохраняемые «симплектико-ортогональной» супералгеброй Ли $\mathfrak{osp}^a(m|2n)$, которая изоморфна супералгебре Ли $\mathfrak{osp}^{sy}(m|2n)$, но имеет другую матричную реализацию. Мы никогда не используем обозначение $\mathfrak{spo}$.

В стандартном формате суперматричная реализация орто-симплектических супералгебр следующая:

$$\mathfrak{osp}(m|2n)=\left\{\begin{pmatrix}E & Y & X^t\\ X & A & B\\ -Y^t & C & -A^t\end{pmatrix}\right\};\quad \mathfrak{osp}^a(m|2n)=\left\{\begin{pmatrix}A & B & X\\ C & -A^t & Y^t\\ Y & -X^t & E\end{pmatrix}\right\}, \tag{Д1.11}$$

где $\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A^t\end{pmatrix}\in\mathfrak{sp}(2n)=\mathfrak{aut}(J_{2n}),\quad E\in\mathfrak{o}(m)=\mathfrak{aut}(\Pi_m)$.

Невырожденную суперсимметричную нечетную билинейную форму $B_{odd}(n|n)$ можно привести к нормальному виду с матрицей в стандартном формате, равной J_{2n}. Нормальный вид суперантисимметричной нечетной невырожденной формы в стандартном формате — Π_{2n}. Привычное обозначение для супералгебры $\mathfrak{aut}(B_{odd}(\mathrm{Par}))$ — это $\mathfrak{pe}(\mathrm{Par})$. Переход от V к $\Pi(V)$ устанавливает изоморфизм $\mathfrak{pe}^{sy}(\mathrm{Par})\cong\mathfrak{pe}^a(\mathrm{Par})$. Эта супералгебра Ли называется по предложению А. Вейля *периплектической*. Матричные реализации этих супералгебр в стандартном формате суть

$$\begin{aligned}\mathfrak{pe}^{sy}(n)&=\left\{\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A^t\end{pmatrix},\ \text{где } B=-B^t,\ C=C^t\right\};\\ \mathfrak{pe}^{a}(n)&=\left\{\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A^t\end{pmatrix},\ \text{где } B=B^t,\ C=-C^t\right\}.\end{aligned} \tag{Д1.12}$$

Заметим, что хотя супералгебры Ли $\mathfrak{osp}^{sy}(m|2n)$ и $\mathfrak{osp}^a(m|2n)$, также как и $\mathfrak{pe}^{sy}(n)$ и $\mathfrak{pe}^a(n)$, изоморфны, разница между ними иногда очень существенна, см., например, [Щ5ис°].

Специальная периплектическая супералгебра — это

$$\mathfrak{spe}(n)=\{X\in\mathfrak{pe}(n)\mid \mathrm{str}\,X=0\}. \tag{Д1.13}$$

Нам также будет нужна супералгебра

$$\mathfrak{spe}(n)_{a,b}:=\mathfrak{spe}(n)\subsetplus\mathbb{C}(az+bd),\qquad \text{где } z=1_{2n},\ d=\mathrm{diag}(1_n,\,-1_n). \tag{Д1.14}$$

2. Что такое супералгебра Ли. Работая с супералгебрами, иногда бывает полезно знать их определение. Супералгебры Ли были выделены как самостоятельный объект в топологии примерно в 30-е годы, если не раньше (под неудачным, как уже говорилось, именем «градуированные алгебры Ли»). Поэтому, когда кто-то предлагает «лучшее, чем обычно» определение для понятия, которое вроде бы было установлено лет 70 тому назад, это может показаться по меньшей мере странным. Еще страннее, что ответ на вопрос «что такое супералгебра Ли?» не является до сих пор хорошо известным.

Действительно, наивный способ: «применить Правило Знаков к определению алгебры Ли», очевидно, недостаточен для того, чтобы рассматривать супермногообразия с особенностями, которые пробегают параметры деформаций супералгебр Ли или применять теорию представлений к математической физике, например, чтобы изучать коприсоединенное представление супергруппы Ли. Ведь супергруппа Ли (объект категории супермногообразий) может действовать на супермногообразии, но никак не на линейном суперпространстве — объекте другой категории. Поэтому, чтобы деформировать супералгебры Ли или применять теоретико-групповые методы в «супер»-ситуациях, мы должны уметь восстанавливать супермногообразие по векторному суперпространству и наоборот.

Адекватное определение супералгебр Ли следующее. Супералгеброй Ли в категории супермногообразий, соответствующей «наивно определенной» супералгебре Ли $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$, называется *линейное супермногообразие* $\mathcal{L} = (L_{\bar{0}}, \mathcal{O})$, структурный пучок функций $\mathcal{O}$ которого состоит из функций на $L_{\bar{0}}$ со значениями в супералгебре Грассмана на пространстве $L^*_{\bar{1}}$. Это супермногообразие должно быть таким, что для «по любой» (скажем, конечно порожденной или из какой-либо другой подходящей категории) суперкоммутативной супералгебры C пространство $\mathcal{L}(C) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, C, \mathcal{L})$, которое называется *пространством C-точек* супермногообразия $\mathcal{L}$, было бы алгеброй Ли, а соответствие $C \to \mathcal{L}(C)$ было бы функтором на категории суперкоммутативных супералгебр. (А. Вейль ввел этот подход в алгебраическую геометрию примерно в 1953, а в супернауке он называется *языком точек* или *семейств*.) Это определение может показаться ужасно сложным, но к счастью, соответствие $\mathcal{L} \longleftrightarrow L$ является взаимно-однозначным, а алгебра Ли $\mathcal{L}(C)$, которую можно обозначить также и символом $L(C)$, допускает очень простое описание: $L(C) = (L \otimes C)_{\bar{0}}$. Ф. А. Березин сказал бы: «Пусть C — алгебра Грассмана, тогда $L(C)$ — грассманова оболочка супералгебры Ли L». В простейших вопросах можно действительно ограничиться только алгебрами Грассмана, а не рассматривать «произвольные» суперкоммутативные супералгебры C, см. [CoC2*].

Гомоморфизм супералгебр Ли $\rho\colon L_1 \to L_2$ в этих терминах — это морфизм функторов, т. е. набор гомоморфизмов алгебр Ли $\rho_C\colon L_1(C) \to L_2(C)$, согласованный с морфизмами суперкоммутативных супералгебр $C \to C'$. В частности, *представлением* супералгебр Ли L в суперпространстве V называется гомоморфизм $\rho\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$, т. е. набор гомоморфизмов алгебр Ли $\rho_C\colon L(C) \to (\mathfrak{gl}(V) \otimes C)_{\bar{0}}$.

Пример. Рассмотрим представление $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Касательное пространство к суперпространству модулей деформаций представления ρ изоморфно $H^1(\mathfrak{g};\, V \otimes V^*)$. Например, если $\mathfrak{g}$ — это $0|n$-мерная (т. е. чисто нечетная) супералгебра Ли с единственно возможной скобкой, а именно: нулевой, то ее единственные неприводимые представления суть тривиальное $\mathbb{1}$ и $\Pi(\mathbb{1})$. Очевидно, что $\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}^* \simeq \Pi(\mathbb{1}) \otimes \Pi(\mathbb{1})^* \simeq \mathbb{1}$, и так как супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ коммутативна, то дифференциал в коцепном комплексе тривиален, т. е. равен 0. Поэтому $H^1(\mathfrak{g};\, \mathbb{1}) = E^1(\mathfrak{g}^*) \simeq \mathfrak{g}^*$, где E^i есть i-я внешняя степень. Таким образом, имеется $\dim \mathfrak{g}$ нечетных параметров деформации тривиального представления. Если же мы рассмотрим $\mathfrak{g}$ «наивно», то пропустим все эти параметры.

Какие из такого рода бесконечно малых деформаций можно продолжить до глобальных — это отдельный и гораздо более сложный вопрос, обычно решаемый *ad hoc*, ср. [БЛВ*]. Деформация с нечетным параметром всегда продолжаема до глобальной.

Примеры, которые наглядно показывают, почему следует помнить, что супералгебра Ли — не просто суперпространство, а линейное супермногообразие — это продеформированные с нечетным параметром супералгебры Ли $\tilde{\mathfrak{s}}\mathfrak{vect}(2n+1)$ и $\widetilde{\mathfrak{sb}}_{\mu}(2^{2n} - \bar{1}|2^{2n})$, см. гл. Д3. В категории супермногообразий результаты таких деформаций являются простыми супералгебрами Ли.

3. Проективизация. Если $\mathfrak{s}$ является алгеброй Ли скалярных матриц, а $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n|n)$ — супералгебра Ли, содержащая $\mathfrak{s}$, то *проективной* супералгеброй Ли типа $\mathfrak{g}$ называется $\mathfrak{pg} = \mathfrak{g}/\mathfrak{s}$. Проективизация иногда приводит к новым супералгебрам Ли, например, $\mathfrak{pgl}(n|n)$, $\mathfrak{psl}(n|n)$, $\mathfrak{pq}(n)$, $\mathfrak{psq}(n)$, в то время как $\mathfrak{pgl}(p|q) \cong \mathfrak{sl}(p|q)$, если $p \neq q$.

4. Что такое полупростая супералгебра Ли. Супералгебра Ли без собственных идеалов и размерности > 1 называется *простой*. Примеры: $\mathfrak{sl}(m|n)$ при $m > n \geqslant 1$, $\mathfrak{psl}(n|n)$ при $n > 1$, $\mathfrak{psq}(n)$ при $n > 2$, $\mathfrak{osp}(m|2n)$ при $mn \neq 0$ и $\mathfrak{spe}(n)$ при $n > 2$.

Мы скажем, что супералгебра $\mathfrak{h}$ *почти проста*, если ее можно заключить между простой супералгеброй $\mathfrak{s}$ и супералгеброй $\mathfrak{der}\,\mathfrak{s}$ дифференцирований супералгебры $\mathfrak{s}$, т. е. если $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{der}\,\mathfrak{s}$. Допуская вольность речи, мы назовем *почти простой супералгеброй* также и каждое слагаемое в сумме (Д1.15).

По определению, $\mathfrak{g}$ *полупроста*, если ее радикал равен 0. Буквально следуя данному Р. Блоком описанию конечномерных полупростых алгебр Ли над полями простой характеристики, дадим следующее описание полупростых супералгебр Ли.

Гипотеза. *Пусть $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_k$ — простые супералгебры Ли, а $n_1, \ldots, n_k$ — какие-то* пары *неотрицательных целых чисел $n_j = (n_j^{\bar{0}}, n_j^{\bar{1}})$. Пусть $\mathcal{F}(n_j)$ — суперкоммутативная супералгебра полиномов от $n_j^{\bar{0}}$-четных и $n_j^{\bar{1}}$-нечетных переменных, и пусть $\mathfrak{s} = \bigoplus\limits_j (\mathfrak{s}_j \otimes \mathcal{F}(n_j))$. Тогда*

$$\mathfrak{der}\,\mathfrak{s} = \bigoplus_j ((\mathfrak{der}\,\mathfrak{s}_j) \otimes \mathcal{F}(n_j) \subplus \mathrm{id}_{\mathfrak{s}_j} \otimes \mathfrak{vect}(n_j)). \qquad (Д1.15)$$

Пусть $\mathfrak{g}$ *— подалгебра в* $\mathfrak{der}\,\mathfrak{s}$, *содержащая* $\mathfrak{s}$. *Если проекция супералгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *на* $\mathrm{id}_{\mathfrak{s}_j}\otimes\mathfrak{vect}(n_j)_{-1}$ *является* **эпиморфизмом** *при каждом* j, *то* $\mathfrak{g}$ *полупроста, и все полупростые супералгебры Ли имеют указанный вид.*

Эта гипотеза верна, видимо, для (супер)алгебр Ли над полями любой характеристики, если (супер)алгебра конечномерна или хоть и бесконечномерна, но «устроена примерно как алгебра полиномов». Доказать эту гипотезу и точно определить область ее применимости — **открытая задача**, ср. [Che°].

5. Центральное расширение супералгебры Ли $\mathfrak{spe}(4)$. В 1970-х А. Сергеев доказал, что у $\mathfrak{spe}(n)$ при $n>2$ имеется лишь одно нетривиальное центральное расширение. Оно существует только при $n=4$. Мы обозначим его символом $\mathfrak{as}$. Представим произвольный элемент $A\in\mathfrak{as}$ в виде пары $A=x+d\cdot z$, где $x\in\mathfrak{spe}(4)$, $d\in\mathbb{C}$, а z — центральный элемент. Скобка в $\mathfrak{as}$ имеет вид

$$\left[\begin{pmatrix} a & b\\ c & -a^t\end{pmatrix}+d\cdot z,\ \begin{pmatrix} a' & b'\\ c' & -a'^t\end{pmatrix}+d'\cdot z\right]=\left[\begin{pmatrix} a & b\\ c & -a^t\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a' & b'\\ c' & -a'^t\end{pmatrix}\right]+\operatorname{tr}\, c\tilde{c}'\cdot z, \tag{Д1.16}$$

где операция $\tilde{}$, заданная на матрицах $c_{ij}=E_{ij}-E_{ji}$ формулой

$$\tilde{c}_{kl}=c_{ij}\quad\text{для любой четной перестановки } (1234)\longrightarrow(ijkl), \tag{Д1.17}$$

продолжена на все пространство матриц c по линейности.

Супералгебру Ли $\mathfrak{as}$ можно также описать с помощью спинорного представления. Рассмотрим $\mathfrak{po}(0|6)$, т. е. супералгебру Ли, чье суперпространство можно отождествить с супералгеброй Грассмана $\Lambda(\xi,\eta)$, порожденной элементами ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, η_2, η_3, а умножение задано скобкой Пуассона. В гл. Д3 мы увидим, что $\mathfrak{h}(0|6)=\mathrm{Span}(H_f\mid f\in\Lambda(\xi,\eta))$. Заметим теперь, что супералгебру $\mathfrak{spe}(4)$ можно вложить в $\mathfrak{h}(0|6)$, а положив $\deg\xi_i=\deg\eta_i=1$ при всех i, мы задаем на $\Lambda(\xi,\eta)$ ту $\mathbb{Z}$-градуировку, которая в свою очередь индуцирует $\mathbb{Z}$-градуировку вида $\mathfrak{h}(0|6)=\bigoplus\limits_{i\geqslant -1}\mathfrak{h}(0|6)_i$. Поскольку $\mathfrak{sl}(4)\cong\mathfrak{o}(6)$, мы можем отождествить $\mathfrak{spe}(4)_0$ с $\mathfrak{h}(0|6)_0$.

Нетрудно видеть, что элементы степени -1 в стандартных градуировках супералгебр $\mathfrak{spe}(4)$ и $\mathfrak{h}(0|6)$ составляют изоморфные $\mathfrak{sl}(4)\cong\mathfrak{o}(6)$-модули. Непосредственно проверяется, что подпространство $\mathfrak{spe}(4)_1$ элементов степени 1 можно вложить в $\mathfrak{h}(0|6)_1$.

Расширение $\mathfrak{as}$, открытое А. Сергеевым, — это результат ограничения на $\mathfrak{spe}(4)\subset\mathfrak{h}(0|6)$ коцикла, который превращает $\mathfrak{h}(0|6)$ в ее центральное расширение $\mathfrak{po}(0|6)$. Квантование деформирует $\mathfrak{po}(0|6)$ в $\mathfrak{gl}(\Lambda(\xi))$, а сквозные отображения

$$T_\lambda\colon \mathfrak{as}\longrightarrow\mathfrak{po}(0|6)\longrightarrow\mathfrak{gl}(\Lambda(\xi))$$

являются (спинорными) представлениями супералгебры Ли $\mathfrak{as}$ в $4|4$-мерных модулях spin_λ, которые все изоморфны друг другу при $\lambda\neq 0$. Явный вид представления T_λ следующий:

$$T_\lambda\colon \begin{pmatrix} a & b\\ c & -a^t\end{pmatrix}+d\cdot z\mapsto\begin{pmatrix} a & b-\lambda\tilde{c}\\ c & -a^t\end{pmatrix}+\lambda d\cdot 1_{4|4}, \tag{Д1.18}$$

где $1_{4|4}$ — единичная матрица, $\tilde{c}$ определена формулой (Д1.17). Ясно, что представления T_λ неприводимы при всех λ.

Д2. Супералгебры Ли с матрицей Картана

Основное поле — $\mathbb{C}$.

За «точку отсчета» при описании простых бесконечномерных алгебр Ли В. Кац выбрал $\mathbb{Z}$-градуированные алгебры, причем не любые, а «похожие по строению на алгебру многочленов». Эти алгебры достаточно интересны сами по себе, не говоря уж об их «деформах», т. е. результатах деформаций, а также центральных расширениях и прочих «родственницах».

В статье [Кац1°] В. Кац рассмотрел не любые $\mathbb{Z}$-градуированные алгебры Ли $\mathfrak{g} = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$, а такие, что $\dim \mathfrak{g}_i < \infty$ при всех i: для них можно определить *рост*

$$\operatorname{grt}(\mathfrak{g}) := \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln\dim \bigoplus\limits_{|i|\leqslant n} \mathfrak{g}_i}{\ln n}. \qquad (Д2.1)$$

В. Кац показал, что рост замечательно отделяет один самый близкий к конечномерным класс бесконечномерных простых алгебр Ли:

$$\operatorname{grt}(\mathfrak{g}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \dim\mathfrak{g} < \infty;\\ 1, & \text{если } \mathfrak{g} \text{ — алгебра петель, } \mathfrak{vect}(1) \text{ или } \mathfrak{witt};\\ n, & \text{если } \mathfrak{g} \text{ — алгебра Ли полиномиальных}\\ & \text{векторных полей на } \mathbb{C}^n;\\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad (Д2.2)$$

Недавно стало ясно, что хотя некоторые алгебры бесконечного роста принадлежат к «противному» случаю, они и могут быть описаны, и интересны в приложениях, см. [ГН*, CCLL*].

Однако даже среди алгебр Ли полиномиального роста[1] есть, оказывается, широкий класс интересных фильтрованных алгебр Ли, ассоциированные с которыми $\mathbb{Z}$-градуированные алгебры Ли не просты, поэтому эти фильтрованные алгебры Ли невозможно найти, начав с $\mathbb{Z}$-градуированных, см. [GL°, Kst°] и ссылки[2].

§ 1. Матрицы Картана

На заре развития теории простых алгебр Ли Э. Картан сообразил, что каждую простую конечномерную алгебру Ли над $\mathbb{C}$ можно задать

---

[1] Скажем, что *фильтрованная алгебра растет полиномиально*, если полиномиально растет ассоциированная с ней градуированная алгебра.

[2] Супералгебры, как ассоциативные, так и лиевы, типа описанных в [Kst°], обнаружены М. Васильевым в конце 1980-х (см. [KV°]) в связи с моделью Калоджеро; эти алгебры популярны в последнее время под названиями «рациональные алгебры Чередника» и «алгебры симплектических отражений» (symplectic reflection algebras) П. Этингофа, см. [Et°].

с помощью одной довольно разреженной матрицы, а лет через 30 после этого Е. Б. Дынкин предложил кодировать такие матрицы простенькими графами, ранее появившимися по другому поводу у Г. С. М. Коксетера. Конечно, для описания алгебр Ли вроде $\mathfrak{sl}(n)$, когда «и так все понятно», без матриц Картана или графов Дынкина можно обойтись, но с их помощью проще разбираться в строении всех простых алгебр Ли, а ведь кроме «классических» серий есть еще пять исключительных алгебр Ли которые трудно себе представить явно. Кроме того, в терминах *корней*, с помощью которых строятся матрицы Картана, эти разборки можно проводить единообразно.

Странно, что **доказательство** того, что матрица Картана (или граф Дынкина) и вправду **однозначно** задает алгебру Ли, было опубликовано лишь в 1960-х; Ж.-П. Серр сделал это, описав соотношения между специальными удобными образующими, носящими имя К. Шевалле. Описание матриц Картана и графов Дынкина (см. [Бу3°]) проходит с небольшими изменениями и для любой алгебры петель (т. е. функций на окружности) со значениями в простой конечномерной алгебре Ли. Вернее, так часто говорят, но это неправда: алгебра петель, хоть и проста (как $\mathbb{Z}$-градуированная; рассматриваемая как абстрактная она не проста: множество функций, обращающихся в 0 в фиксированной точке окружности, образует идеал), и тем мила сердцу математика, но у нее матрицы Картана НЕТ.

Матрица Картана есть зато у ассоциированной с алгеброй петель *аффинной алгебры Каца—Муди*[1]. Так как супералгебры Ли, даже конечномерные, многими своими свойствами напоминают бесконечномерные алгебры Ли, то не удивительно, что описание алгебр Каца—Муди похоже на описание супералгебр Ли с матрицей Картана. Но есть и нюансы, которые мы опишем.

Осторожно! У $\mathfrak{psl}(n|n)$ нет матрицы Картана. Матрицы Картана нет и у $\mathfrak{sl}(n|n)$. Наиболее правильное определение матрицы Картана для алгебр Ли над $\mathbb{C}$ см. в книге [Кац2°]. С малыми изменениями оно переносится на алгебры Ли над полями конечной характеристики и суперизуется,

---

[1] Пусть $\mathfrak{g}^{(1)} := \mathbb{C}[t^{-1}, t] \otimes \mathfrak{g}$ — алгебра функций на окружности разлагающихся в многочлены Лорана ($t = \exp(i\alpha)$, где α — угловой параметр на окружности) со значениями в простой конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{C}$. *Аффинная алгебра Каца—Муди*, построенная по $\mathfrak{g}$, есть $\tilde{\mathfrak{g}}_{\varphi}^{(k)} := \hat{\mathfrak{g}}^{(1)} \niplus \mathbb{C}t\frac{d}{dt}$, где $\hat{\mathfrak{g}}^{(1)}$ — единственное нетривиальное центральное расширение алгебры $\mathfrak{g}^{(1)}$. У алгебр петель бывают и «скрученные» версии вида $\mathfrak{g}_{\varphi}^{(k)}$, являющиеся неподвижными точками автоморфизма алгебры Ли $\mathfrak{g}^{(1)}$, отвечающего внешнему автоморфизму φ порядка k алгебры Ли $\mathfrak{g}$, см. [Кац2°] и гл. Д5; им отвечают скрученные алгебры Каца—Муди.

Аффинные **супералгебры** Каца—Муди определяются аналогично, однако у супералгебры петель может быть как несколько (даже бесконечно много) нетривиальных центральных расширений, так и ни одного, и матрицы Картана тоже может не быть ни у самой супералгебры петель, ни у какой бы то ни было из ее «родственниц».

но до работ [BGLL°, CCLL*] такое определение не было опубликовано. Опубликованные версии определения имели недочеты, а, кроме того, некоторым простым суперsucc алгебры Ли, не имеющим матрицы Картана, ошибочно приписывали матрицу Картана, принадлежащую их непростым родственницам.

1.1. Пусть $A = (A_{ij})$ — произвольная матрица размера $n \times n$ и ранга $n - l$ с элементами из основного поля $\mathbb{K}$. Дополним A до матрицы $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ размера $(n + l) \times n$ и ранга n. (Таким образом, B — матрица размера $l \times n$.)

Пусть элементы $e_i^{\pm}$, h_i, где $i = 1, \ldots, n$, и элементы d_k, где $k = 1, \ldots, l$, порождают супералгебру Ли $\mathfrak{G}(A, I)$, где $I = (p_1, \ldots p_n) \in (\mathbb{Z}/2)^n$ — набор четностей ($p(e_i^{\pm}) = p_i$, причем все элементы d_k четны), свободную, за исключение соотношений

$$\begin{aligned} &[e_i^+, e_j^-] = \delta_{ij}h_i; \quad [h_i, e_j^{\pm}] = \pm A_{ji}e_j^{\pm}; \quad [d_k, e_j^{\pm}] = \pm B_{jk}e_j^{\pm}; \\ &[h_i, h_j] = [h_i, d_k] = [d_k, d_m] = 0 \ \text{ при любых } i, j, k, m. \end{aligned} \tag{Д2.3}$$

Супералгебру Ли $\mathfrak{G}(A, I)$ можно снабдить $\mathbb{Z}^n$-градуировкой

$$\begin{aligned} &\deg e_i^{\pm} = (0, \ldots, 0, \pm 1, 0, \ldots, 0) \\ &\deg h_i = \deg d_k = (0, \ldots, 0) \ \text{ при любых } i, k. \end{aligned} \tag{Д2.4}$$

Символом $\mathfrak{h}$ обозначим линейную оболочку всех элементов h_i и d_k. Пусть $\mathfrak{G}(A, I)^{\pm}$ — подсупералгебры Ли в $\mathfrak{G}(A, I)$ порожденные элементами $e_1^{\pm}, \ldots, e_n^{\pm}$. Тогда

$$\mathfrak{G}(A, I) = \mathfrak{G}(A, I)^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{G}(A, I)^+,$$

где однородная компонента степени $(0, \ldots, 0)$ — это $\mathfrak{h}$.

Супералгебры Ли $\mathfrak{G}(A, I)^{\pm}$ однородны относительно этой $\mathbb{Z}^n$-градуировки, и имеется

$$\text{максимальный однородный идеал } \mathfrak{r}, \text{ такой что } \mathfrak{r} \cap \mathfrak{h} = 0. \tag{Д2.5}$$

Идеал $\mathfrak{r}$ есть прямая сумма однородных идеалов, однородные компоненты которых степени $(0, \ldots, 0)$ тривиальны (равны 0).

Поскольку $\operatorname{rk} A = n - l$, существует матрица $T = (T_{ij})$ ранга l и размера $l \times n$, такая что $TA = 0$. Пусть

$$c_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} T_{ij}h_j, \quad \text{где} \ \ i = 1, \ldots, l. \tag{Д2.6}$$

Из свойств матрицы T следует, что

а) элементы c_i линейно независимы; пусть $\mathfrak{c}$ — пространство, которое на них натягивается;

б) элементы c_i лежат в центре:

$$[c_i, e_j^{\pm}] = \pm\Bigg(\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} T_{ik}A_{kj}\Bigg)e_j^{\pm} = \pm(TA)_{ij}e_j^{\pm} \overset{TA=0}{=} 0.$$

Определим (супер)алгебру Ли $\mathfrak{g}(A, I)$ как фактор $\mathfrak{G}(A, I)/\mathfrak{r}$ и назовем[1] ее *(супер)алгеброй Ли с матрицей Картана* A (*и набором четностей* I). Условие (Д2.5) переписанное в виде

$$\text{максимальный однородный идеал } \mathfrak{s}, \text{ такой что } \mathfrak{s} \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{c}, \tag{Д2.7}$$

приводит к алгебре $\mathfrak{G}(A, I)/\mathfrak{s} = \mathfrak{g}(A, I)/\mathfrak{c}$, т. е. фактору (супер)алгебры Ли с матрицей Картана по центру.

Образы элементов $e_i^{\pm}$, h_i, d_k и алгебры $\mathfrak{c}$ в $\mathfrak{g}(A, I)$ и $\mathfrak{g}(A, I)^{(1)}$ мы будем, допуская привычную вольность речи, обозначать теми же символами, что и прообразы.

Соотношения, которые нужно добавить к соотношениям (Д2.3), чтобы превратить $\mathfrak{G}(A, I)^{\pm}$ в $\mathfrak{g}(A, I)^{\pm}$, имеют вид уравнений $R_i = 0$, левые части которых можно неявно описать так:

$$\text{элементы } R_i, \text{ что порождают максимальный идеал } \mathfrak{r}. \tag{Д2.8}$$

Явное описание этих соотношений — аналогов «соотношений Серра» — для супералгебр Ли роста $\leqslant 1$ см. в [BGLL°] и приведенных там ссылках. Для почти аффинных супералгебр Ли (бесконечного роста) соотношения также описаны, см. [CCLL*].

1.2. Веса и корни. В этом подпункте $\mathfrak{g}$ обозначает одну из алгебр $\mathfrak{g}(A, I)$ или $\mathfrak{G}(A, I)$.

Элементы пространства $\mathfrak{h}^*$ называются *весами*. Для любого веса α его *весовым подпространством* в $\mathfrak{g}$ называется

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ при любых } h \in \mathfrak{h}\}.$$

Любой ненулевой элемент $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ имеет *вес* α.

1.2а. Утверждение ([Кац2°]). *Пространство алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *можно представить в виде прямой суммы подпространств* $\mathfrak{g} = \bigoplus\limits_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha$.

По построению у элементов $e_i^{\pm}$ с одним и тем же верхним индексом (либо все $+$, либо все $-$) веса α_i линейно независимы, и любой вес α, такой что $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ лежит в $\mathbb{Z}$-оболочке множества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

У алгебры Ли $\mathfrak{g}$ есть также и $\mathbb{R}^n$-градуировка, в которой $\deg e_i^{\pm} = (0, \ldots, 0, \pm 1, 0, \ldots, 0)$, где ± 1, стоит на i-м месте (эту градуировку

---

[1] Во многих работах эта (супер)алгебра Ли или ее «родственницы» называются бессмысленным термином *контрагредиентная* (супер)алгебра Ли.

можно рассматривать и как $\mathbb{Z}^n$-градуировку, но мы используем $\mathbb{R}^n$ для упрощения последующих формулировок). Эта градуировка эквивалентна весовой градуировке на $\mathfrak{g}$ и мы отождествляем степени относительно этих градуировок (использовано в (Д2.9)).

Ясно, что супералгебра Ли $\mathfrak{g}(A, I)$ наследует $\mathbb{Z}^n$-градуировку алгебры $\mathfrak{G}(A, I)$. Ненулевые элементы $\alpha \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$, такие что однородные компоненты $\mathfrak{g}(A, I)_\alpha$ отличны от нуля, называются *корнями*. Множество R всех корней называется *системой корней* супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. По построению пространство $\mathfrak{g}_\alpha$ либо чисто четно, либо чисто нечетно, и соответствующий корень α называется *четным* или *нечетным*.

1.3. Системы простых и положительных корней. В этом пункте $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A, I)$, а R — система корней супералгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Для любого подмножества $B = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\} \subset R$ положим:

$$R_B^{\pm} = \Big\{\alpha \in R \,\Big|\, \alpha = \pm \sum n_i\sigma_i,\ \ n_i \in \mathbb{Z}_+\Big\}.$$

Множество B называется *системой простых корней* корневой системы R (или супералгебры Ли $\mathfrak{g}$), если векторы $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ линейно независимы, а $R = R_B^+ \cup R_B^-$. Заметим, что множество R содержит все координатные векторы и, стало быть, на него может быть натянуто пространство $\mathbb{R}^n$; поэтому в каждой системе простых корней n элементов.

Пусть $(\cdot\,,\cdot)$ — стандартное евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Если существует вектор $x \in \mathbb{R}^n$, такой что

$$(\alpha, x) \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \ \text{ при любых } \alpha \in R, \tag{Д2.9}$$

то подмножество $R^+ = \{\alpha \in R \mid (\alpha, x) > 0\}$ в R называется *системой положительных корней* системы R (или алгебры $\mathfrak{g}$). Так как множество R конечно или счетно, то множество

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{существует корень } \alpha \in R, \text{ такой что } (\alpha, y) = 0\}$$

является конечным или счетным объединением $(n-1)$-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$, т. е. его мера равна 0. Условие (Д2.9) выполнено, таким образом, при почти всех x.

По построению каждая система B простых корней содержится ровно в одной системе положительных корней, а именно в R_B^+.

1.3а. Утверждение. *Любая конечная система R^+ положительных корней супералгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ содержит ровно одну систему простых корней, состоящую из тех корней из R^+, которые невозможно представить в виде суммы двух положительных корней.*

1.4. Принятая нормализация. Одной системе простых корней могут соответствовать разные, но эквивалентные пары (A_B, I_B). Хорошо бы фиксировать какую-то выделенную пару (A_B, I_B) в классе эквивалентности.

На роль «наилучшего» упорядочения индексов матрицы Картана A мы предлагаем тот, при котором минимально значение функции

$$\max_{i,j\in\{1,\ldots,n\},\ \text{такие что } (A_B)_{ij}\neq 0} |i-j|, \tag{Д2.10}$$

т. е. соберем ненулевые внедиагональные элементы матрицы A_B как можно ближе к главной диагонали. Заметим, что для алгебр Ли типа $\mathfrak{e}$ стандартная (бурбакистская) нумерация отличается от предложенной в (Д2.10).

Очевидно, что масштабирование

$$e_i^{\pm} \mapsto \sqrt{\lambda_i}\, e_i^{\pm}, \quad \text{переводит матрицу } A \text{ в } A' := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\cdot A. \tag{Д2.11}$$

Две пары (A, I) и (A', I') будем считать *эквивалентными*, если (A', I') получена из (A, I) композицией перестановки четностей и масштабированием $A' = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\cdot A$, где $\lambda_1 \ldots \lambda_n \neq 0$. Очевидно, что эквивалентные пары (A, I) определяют изоморфные супералгебры Ли.

Масштабирование влияет лишь на матрицу A_B, а не на набор четностей I_B. Матрицу Картана A назовем *нормализованной*, если

$$A_{jj} = 0 \ \text{ или } \ 1, \ \ \text{ или } \ 2 \ \ (\text{только при } i_j = \bar{0}). \tag{Д2.12}$$

Чтобы различить случаи $i_j = \bar{0}$ и $i_j = \bar{1}$, мы пишем $A_{jj} = \bar{0}$ или $\bar{1}$, вместо 0 или 1, если $i_j = \bar{0}$. Мы будем рассматривать только нормализованные матрицы Картана: для них нет нужды указывать I.

Строку с 0 или $\bar{0}$ на главной диагонали можно умножить при масштабировании на любое ненулевое число; обычно мы умножаем на такое число, чтобы матрица A_B стала симметричной, если это возможно.

В наших примерах $\operatorname{sdim}\mathfrak{g}(A)'/\mathfrak{c} = d|B$, а обозначение $D/d|B$, см., например, табл. Д2.5, означает, что $\operatorname{sdim}\mathfrak{g}(A) = D|B$, а $d = D - 2(\operatorname{size}(A) - \operatorname{rk}(A))$.

1.5. Эквивалентные системы простых корней. Пусть $B = \{\sigma_1, \ldots \ldots, \sigma_n\}$ — система простых корней. Выберем ненулевые элементы $\tilde{e}_i^{\pm} \in \mathfrak{g}_{\pm\sigma_i}$; положим $\tilde{h}_i = [\tilde{e}_i^+, \tilde{e}_i^-]$, $A_B = (A_{ij})$, где $A_{ij} = \sigma_i(\tilde{h}_j)$ и $I_B = \{p(\tilde{e}_1), \cdots, p(\tilde{e}_n)\}$. Пара (A_B, I_B) так построенная определена множеством B неоднозначно, но все такие пары (A_B, I_B) эквивалентны друг другу.

Две системы простых корней B_1 и B_2 назовем *эквивалентными*, если пары (A_{B_1}, I_{B_1}) и (A_{B_2}, I_{B_2}) эквивалентны.

Образующие Шевалле и базис Шевалле. Набор образующих алгебры Ли отвечающий нормализованной матрице Картана мы обозначаем символами $X_1^{\pm}, \ldots, X_n^{\pm}$, сохранив символы $e_1^{\pm}, \ldots, e_n^{\pm}$ для произвольной матрицы Картана; и называем их, вместе с элементами $H_i := [X_i^+, X_i^-]$ и d_k, добавленными для удобства при всех i и k, см. (Д2.3), *образующими Шевалле*.

У простых конечномерных супералгебр Ли построенных по нормализованным матрицам Картана существует только один, с точностью до знаков, базис, состоящий из однородных относительно градуировки весами векторов и содержащий $X_i^{\pm}$ и H_i и такой, что все структурные константы — целые числа. Такой базис назовем[1] базисом *Шевалле*.

§ 2. Графы Дынкина

2.1. Когда графы Дынкина полезны. Привычный уже способ задавать простые конечномерные алгебры Ли над $\mathbb{C}$ с целочисленной матрицей Картана (а других матриц и нет; мы ведь уже некоторое время говорим лишь о нормализованных матрицах) — это рисовать графы, которые называются *диаграммами Дынкина*. Матрицы Картана некоторых простых *супер*алгебр Ли $\mathfrak{g}$, как над $\mathbb{C}$, так и над полями характеристики $p > 0$, могут иметь элементы из основного поля. Однако с **каждой** супералгеброй Ли с матрицей Картана можно связать аналог диаграммы Дынкина, *при условии, что на ребра графа навешена дополнительная информация*. Хотя эти аналоги диаграмм Дынкина не взаимно однозначно соответствуют матрицам Картана, они наглядно представляют матрицы Картана и позволяют иногда заметить скрытые симметрии супералгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Очевидно, что кодировать матрицы Картана графами стоит лишь для довольно разреженных матриц. У некоторых важных типов (супер)алгебр Ли (например, лоренцевых, см. [ГН*]) почти все элементы матрицы Картана не просто отличны от 0, но и довольно большие по абсолютной величине, что обессмысливает кодирование матриц Картана графами.

Первые аналоги графов Дынкина для супералгебр Ли ввел В. Кац [Kac1], мы следуем более аккуратному изложению работы [CCLL*].

2.2. Вершины. Каждому простому корню сопоставим

$$\begin{cases} \text{вершину } \bigcirc, & \text{если } p(\alpha_i) = \bar{0} \text{ и } A_{ii} = 2,\\ \text{вершину } \ast, & \text{если } p(\alpha_i) = \bar{0} \text{ и } A_{ii} = \bar{1};\\ \text{вершину } \bullet, & \text{если } p(\alpha_i) = \bar{1} \text{ и } A_{ii} = 1;\\ \text{вершину } \otimes, & \text{если } p(\alpha_i) = \bar{1} \text{ и } A_{ii} = 0;\\ \text{вершину } \odot, & \text{если } p(\alpha_i) = \bar{0} \text{ и } A_{ii} = \bar{0}. \end{cases} \tag{Д2.13}$$

---

[1] Отметим, что для другой нормализации тоже может найтись базис алгебры с целыми структурными константами. Предложенная выше нормализация — по всей видимости наиболее естественная для алгебр Ли над полями характеристики 2 и для супералгебр Ли над полями любой характеристики, см. [BGLL°, CCLL*] — отличается от «классической» для $\mathfrak{o}(2n+1)$: мы ведь полагаем, что $A_{nn} = \bar{1}$. Вообще-то базисом Шевалле для $\mathfrak{o}(2n+1)$ называется базис, отличный от нашего (и тоже с целочисленными структурными константами).

Над $\mathbb{C}$ вершина $\ast$ может встретиться лишь для $\mathfrak{o}(2n+1)$, но для алгебр Ли нет причины отходить от стандартной нормализации матриц Картана. А вот вершина $\odot$ встречается только у «сильно бесконечномерных» (супер)алгебр Ли, с которыми мы пока не работаем. Над полями же характеристики $p > 0$ без вершин $\ast$ и $\odot$ не обойтись, особенно при $p = 2$, см. [BGLL°]. Вершины $\bigcirc$, $\bullet$ и $\otimes$ называются *белой*, *черной* and *серой* соответственно. Алгебра Ли $\mathfrak{o}(3) \simeq \mathfrak{sp}(2) \simeq \mathfrak{sl}(2)$ с матрицей Картана (2), и супералгебра Ли $\mathfrak{osp}(1|2)$ с матрицей Картана (1) просты, как и алгебра Ли $\mathfrak{o}(3)$ с матрицей Картана $(\bar{1})$. Алгебра Ли с матрицей Картана $(\bar{0})$ и супералгебра Ли с матрицей Картана (0) разрешимы размерности 4 и $2|2$ соответственно. Их производные (коммутанты) суть хорошо известные *алгебра Гейзенберга* $\mathfrak{hei}(2) \simeq \mathfrak{hei}(2|0)$ и *супералгебра Гейзенберга* $\mathfrak{hei}(0|2) \simeq \mathfrak{sl}(1|1)$ соответственно. У алгебры Ли с матрицей Картана $(\bar{0})$ обозначения до сих пор нет, а супералгебра Ли с матрицей Картана (0) — это $\mathfrak{gl}(2|2)$.

2.3. Ребра. Если матрица Картана целочисленна (или состоит из вычетов по простому модулю, например, из ± 1), ей можно сопоставить аналог диаграммы Дынкина: пусть $\max(|A_{ij}|, |A_{ji}|)$ ребер соединяют i-ю вершину с j-й, причем ребра снабжены наконечником $>$, острие которого указывает от i-й вершины к j-й, если $|A_{ij}| > |A_{ji}|$ или в противоположном направлении, если $|A_{ij}| < |A_{ji}|$. Если матричные элементы не целые, а комплексные, мы рисуем лишь одно ребро, с надписью $(|A_{ij}|, |A_{ji}|)$; для $\mathfrak{osp}_{\alpha}(4|2)$ мы приводим иллюстрации для целых значений параметра α, но маркируем ребро числом $\max(|A_{ij}|, |A_{ji}|)$.

2.4. Отражения. Пусть R^+ — система положительных корней супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $B = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ — соответствующая система простых корней, а $(A = A_B,\ I = I_B)$ — соответствующая матрица Картана. Тогда для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$ множество $(R^+ \backslash \{\sigma_k\}) \coprod \{-\sigma_k\}$ — тоже система положительных корней. Такой переход от одной системы положительных корней к другой называется *отражением в корне* σ_k; оно действует на системах простых корней по формуле

$$r_{\sigma_k}(\sigma_j) = \begin{cases} -\sigma_j, & \text{если } k = j,\\ \sigma_j + B_{kj}\sigma_k, & \text{если } k \neq j, \end{cases} \tag{Д2.14}$$

где

$$B_{kj} = \begin{cases} -\dfrac{2A_{kj}}{A_{kk}}, & \text{если } A_{kk} \neq 0 \text{ и } -\dfrac{2A_{kj}}{A_{kk}} \in \mathbb{Z}_+,\\ 1, & \text{если } i_k = \bar{1},\ A_{kk} = 0,\ A_{kj} \neq 0,\\ 0, & \text{если } i_k = \bar{1},\ A_{kk} = A_{kj} = 0,\\ 0, & \text{если } i_k = \bar{0},\ A_{kk} = \bar{0},\ A_{kj} = 0. \end{cases} \tag{Д2.15}$$

Если $A_{kk} \neq 0$ и $-\dfrac{2A_{kj}}{A_{kk}} \notin \mathbb{Z}_+$, то отражения не определены (если характеристика основного поля равна 0); среди рассматриваемых нами супералгебр Ли такие случаи не встретятся.

Слово «отражение» использовано по аналогии с простыми конечномерными алгебрами Ли над $\mathbb{C}$, когда «отражение», продолженное на всю систему R по линейности (что оказывается возможным), является биекцией R на R и не зависит от R^+, а только от σ_k. Это отображение обычно обозначают символом r_{σ_k} или кратко r_k. Отображение r_{σ_i} продолженное на пространство, натянутое над $\mathbb{R}$ на R является отражением в гиперплоскости ортогональной вектору σ_i относительно билинейной формы двойственной форме Киллинга.

Отражения относительно четных (нечетных) корней называются *четными* (соотв. *нечетными*). Простой корень называется *изотропным*, если на главной диагонали в соответствующая ему строке матрицы Картана стоит 0 или $\bar{0}$, и *неизотропным* в противном случае; прилагательные переносятся на отражения в этих корнях.

Если у супералгебры Ли есть изотропный простой корень α, то отражения не образуют, как правило, аналога *группы Вейля* потому что отражение в простом корне определено лишь на системах простых корней, содержащих этот корень. В общем же случае действие данного изотропного отражения (Д2.14) не может быть продолжено до линейного отображения $R \to R$. Над $\mathbb{C}$ для конечномерных супералгебр Ли с неразложимой матрицей Картана действие отражений можно продолжить по линейности с системы корней R на *решетку корней*, но это продолжение сохраняет R лишь для $\mathfrak{sl}(m|n)$ и $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$.

Если σ_i — изотропный корень, то соответствующее отражение переводит один набор образующих Шевалле в другой, а одну матрицу Картана — в другую:

$$\widetilde{X}_i^{\pm} = X_i^{\mp}; \quad \widetilde{X}_j^{\pm} = \begin{cases} [X_i^{\pm}, X_j^{\pm}], & \text{если } A_{ij} \neq 0, \\ X_j^{\pm} & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{Д2.16}$$

$$A_{ij} = (\sigma_i, \sigma_j) \mapsto \widetilde{A}_{ij} = (\widetilde{\sigma}_i, \widetilde{\sigma}_j), \quad \text{где} \quad \widetilde{\sigma}_i = r_{\sigma_k}(\sigma_i), \quad \text{см. (Д2.14).}$$

Перечислять все неэквивалентные матрицы Картана даже для одной супералгебры Ли — безрадостное и небыстрое занятие, если размер матрицы Картана больше, чем 3×3. Кроме того, легко ошибиться или пропустить случай–другой. Мы рекомендуем решать эту задачу для матриц Картана любого реально встречающегося размера (скажем, со стороной короче 20) с помощью пакета программ *SuperLie*, см. [Gr°, CCLL*].

2.5. Лемма Сергановой. В. Серганова доказала следующую лемму. Скажем, что системы простых корней B_1 и B_2 *связаны цепочкой отражений*, если существует набор систем простых корней $B^0, \ldots, B^n$ и корни $\alpha_i \in B^i$ такие, что $B^0 = B_1$, $B^n = B_2$ и $B^{i+1} = r_{\alpha_i}(B^i)$. Мы скажем, что системы простых корней B_1 и B_2 *соединены цепочкой нечетных отражений*, если все корни α_i из цепочки таковы, что $A_{ii} = 0$.

Лемма ([ЛСС°]). *Для любой супералгебры Ли вида $\mathfrak{g}(A)$ с неразложимой матрицей Картана A и полиномиального роста, и любой пары систем простых корней B_1 и B_2 найдется цепочка отражений, связывающая систему B_1 с системой простых корней B_2' эквивалентной* (*в смысле определения* 1.5) *либо системе B_2, либо системе $-B_2$.*

2.6. Как восстановить матрицу Картана по диаграмме Дынкина. Заметим, что для супералгебр Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$, $\widetilde{\mathfrak{osp}}_\alpha(4|2)^{(1)}$ и $\mathfrak{svect}^L_\alpha(1|2)$ матрица Картана целочисленна лишь при $\alpha \in \mathbb{Z}$, причем в случае $\mathfrak{svect}^L_\alpha(1|2)$ целочисленная матрица Картана описывает $\mathfrak{gl}(2|2)$.

Оказывается, что для супералгебр Ли некоторых классов целочисленную матрицу Картана (A_{ij}) и последовательность четностей $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$, ассоциированную с системой простых корней можно практически единственным образом с точностью до эквивалентности восстановить по диаграмме Дынкина. Во всех случаях, кроме матриц Картана для $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$, $\widetilde{\mathfrak{osp}}_\alpha(4|2)^{(1)}$ и $\mathfrak{svect}^L_\alpha(1|2)$, когда диаграмма Дынкина рисуется по специальным правилам, это восстановление идет по следующей схеме.

1) Если i-я и j-я вершины соединены k ребрами, а стрелка указывает на j-ю вершину, то $|A_{ij}| = k$, $|A_{ij}| = 1$.

2) Если i-я и j-я вершины соединены k ребрами без стрелок, то $|A_{ij}| = |A_{ji}| = k$.

3) Если j-я вершина ●, то $A_{jj} = 1$, $i_j = \bar{1}$.
Если j-я вершина ⊗, то $A_{jj} = 0$, $i_j = \bar{1}$.
Если j-я вершина ○, то $A_{jj} = 2$, $i_j = \bar{0}$.
Если j-я вершина ⊙, то $A_{jj} = \bar{0}$, $i_j = \bar{0}$.

4) Если $A_{ii} \neq 0$, то $A_{ji} \leqslant 0$ при всех $j \neq i$.

5) Если $A_{ii} = 0$, то i-я строка восстанавливается с точностью до умножения на -1 следующим образом:

а) если $A_{ij} \neq 0$ в точности для одного j, то знак у A_{ji} можно выбрать произвольно;

б) если $A_{ij_1}, A_{ij_2} \neq 0$ с точностью для двух различных индексов j_1 и j_2, то $A_{ij_1}A_{ij_2} < 0$;

в) если $A_{ij_1}, A_{ij_2}, A_{ij_3} \neq 0$ в точности для трех различных индексов j_1, j_2 и j_3, причем $A_{j_1j_2} \neq 0$ и $A_{j_1j_3} = A_{j_2j_3} = 0$, то $A_{ij_1}A_{ij_2} > 0$ и $A_{ij_1}A_{ij_3} < 0$.

2.7. Предложение. а) *Среди конечномерных супералгебр Ли неразложимой матрицей Картана обладают простые алгебры $\mathfrak{sl}(m|n)$ при $m \neq n$, $\mathfrak{osp}(m|2n)$, $\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$, $\mathfrak{ag}(2)$, $\mathfrak{ab}(3)$* (*их матрицы Картана невырождены*), *а также $\mathfrak{gl}(n|n)$, где $n > 1$, коранг матрицы Картана которой равен* 1.

б) *Супералгебры Каца—Муди $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}$, где $\mathfrak{g}$ — конечномерная супералгебра Ли с матрицей Картана, тоже обладает матрицей Картана.*

Кроме того, матрицами Картана обладают скрученные супералгебры Каца—Муди $\widetilde{\mathfrak{sl}}(m|n)^{(2)}_{-st}$, $\widetilde{\mathfrak{osp}}(2m|2n)^{(2)}$, а также непростые родственницы простых супералгебр Ли: супералгебры Каца—Муди, ассоциированные с $\widetilde{\mathfrak{psq}}(n)^{(2)}$ и $\widetilde{\mathfrak{psl}}(n|n)^{(2)}_{-st}$, где $n > 2$.

2.8. Системы простых корней. Всюду ниже $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(A, I)$ для какой-нибудь пары (A, I) с неразложимой матрицей Картана из Предложения 2.7.

Перечислим с точностью до эквивалентности все системы простых корней в $\mathfrak{g}$, а следовательно, и все матрицы Картана супералгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Предложение. *Пусть B — система простых корней, $e_1^\pm, \ldots, e_n^\pm$ — соответствующий набор образующих, $A_B=(A_{ij})$ — матрица Картана. Возможны следующие случаи:*

а) если $p(\sigma_i)=\bar{0}$ и $A_{ij}\neq 0$, то супералгебра Ли, порожденная элементами $e_i^\pm$ изоморфна $\mathfrak{sl}(2)$; Мы нормализуем матрицу, чтоб было или $A_{ii}=2$ или $A_{ii}=\bar{1}$, чтобы отличить от случая в), нормализованный вид которого — $A_{ii}=1$.

б) если $p(\sigma_i)=\bar{1}$ и $A_{ij}=0$, то $2\sigma_i\notin R$ и супералгебра Ли, порожденная элементами $e_i^\pm$, изоморфна $\mathfrak{sl}(1|1)$;

в) если $p(\sigma_i)=\bar{1}$ и $A_{ij}\neq 0$, то $3\sigma_i\notin R$, а супералгебра Ли, порожденная элементами $e_i^\pm$, изоморфна $\mathfrak{osp}(1|2)$;

г) если $p(\sigma_i)=\bar{0}$ и $A_{ii}=0$, то $2\sigma_i\notin R$, а супералгебра Ли, порожденная элементами $e_i^\pm$, изоморфна супералгебре Гейзенберга $\mathfrak{hei}(2|0)$. Чтобы отличить этот случай от случая а), мы пишем $A_{ii}=\bar{0}$.

Доказательство. Раз $e_i^\pm\in\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ и у $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ есть матрица Картана, то доказательство сводится к четному случаю, см., например, [Кац2°], что доказывает п. а).

Разбор остальных случаев мы оставляем читателю, см. [vdL°]. ☐

2.9. Теорема (явное описание систем простых корней). *В таблицах Д2.4—Д2.7 описаны все с точностью до эквивалентности системы простых корней простых конечномерных супералгебр Ли и простых скрученных супералгебр петель.*

2.10. Несимметризуемые матрицы Картана. Для супералгебр Ли полиномиального роста над $\mathbb{C}$ такие матрицы составляют только две серии, см. [HS°]:

1) $\mathfrak{svect}^L_\alpha(1|2)$, где $\alpha\notin\mathbb{Z}$. Ее матрица Картана есть $\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1-\alpha&0&\alpha\\1+\alpha&-\alpha&0\end{pmatrix}$.

Нечетные отражения (во втором или третьем простом корне) переводит α в $\alpha\pm 1$ (т. е. данная матрица переходит в матрицу такого же вида, но с другим значением параметра), так что достаточно рассмотреть только изображенную выше матрицу при $\operatorname{Re}\alpha\in\left(0, \dfrac{1}{2}\right]$.

2) $\widetilde{\mathfrak{psq}}(n)^{(2)}$; из множества нетривиальных центральных расширений, перечисленных в (Д5.13), здесь берется то, что соответствует $i=0$, ее матрицы Картана при $n=3$ суть

$$\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&0&1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\longleftrightarrow\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

2.11. Системы простых корней исключительных супералгебр Ли. И. Капланский первым (см. его «newsletters» в [Kapp°]) обнаружил исключительные супералгебры Ли $\mathfrak{ag}(2)$ и $\mathfrak{ab}(3)$, которые он назвал Γ_2 и Γ_3 соответственно, и параметрическое семейство $\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$, которое И. Капланский обозначил $\Gamma(A, B, C)$; наши обозначения1) отражают тот факт, что $\mathfrak{ag}(2)_{\bar{0}}=\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{g}(2)$ и $\mathfrak{ab}(3)_{\bar{0}}=\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{o}(7)$, а в картановской номенклатуре алгебр Ли приняты такие обозначения: $\mathfrak{sl}(2)$ — это A_1, а $\mathfrak{o}(7)$ — это B_3. Вот как И. Капланский описал исключительные супералгебры Ли.

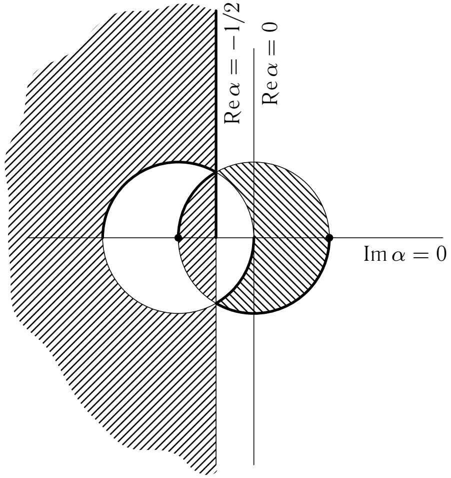


Рис. 2.1

$\underline{\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)}$. Четная часть супералгебры $\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$ изоморфна сумме $\mathfrak{sl}_1(2)\oplus\mathfrak{sl}_2(2)\oplus\mathfrak{sl}_3(2)$ трех копий алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ упорядоченных, чтобы их различать, а нечетная часть супералгебры $\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$ изоморфна $\mathrm{id}_1\otimes\mathrm{id}_2\otimes\mathrm{id}_3$, где id_i — тавтологический $\mathfrak{sl}_i(2)$-модуль. Пусть det есть $\mathfrak{sl}_i(2)$-инвариантная антисимметрическая билинейная форма на id_i, заданная на паре вектор-столбцов u, v формулой

$$\det(u, v):=\det(uv),\quad \text{где } (uv) \text{ — матрица со столбцами } u \text{ и } v.$$

---

1) Мы обозначаем исключительную простую алгебру Ли не $\mathfrak{g}_2$, как обычно, а $\mathfrak{g}(2)$ для единообразия и чтобы не путать ее с часто встречающимся в *этой книге* обозначением для компоненты $\mathfrak{g}_2$ (супер)алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Задав отображение $p\colon\ \mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\to\mathfrak{sl}(2)$, положив

$$p(u,\,v)(w) := \det(u,\,v)w - \det(w,\,u)(v) \quad \text{для любых } u,\,v,\,w\in\mathrm{id},$$

определим скобку двух нечетных элементов из $\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$, положив

$$[u_1\otimes u_2\otimes u_3,\ v_1\otimes v_2\otimes v_3] := \sum_{\substack{(i,j,k)=(1,2,3);\\ k=1,2,3}} A_k \det(u_i,\,v_i)\det(u_j,\,v_j)p_k(u_k,\,v_k),$$

где $A_k\in\mathbb{C}$. Очевидно, что параметры A_1, A_2 и A_3 равноправны, и несложно проверить, что тождество Якоби выполнено тогда и только тогда, когда $A_1+A_2+A_3=0$. Это условие продемонстрировало (А. А. Кириллову, а он рассказал нам на своем семинаре в 1976 г.) очевидную S_3-симметрию параметров. Действительно, пусть $\alpha\in\mathbb{C}\cup\infty$ — отношение двух свободных параметров. Тогда S_3-действие на плоскости $A_1+A_2+A_3=0$ порождено преобразованиями:

$$\alpha\mapsto -1-\alpha, \quad \alpha\mapsto\alpha^{-1}. \tag{Д2.17}$$

Эта симметрия могла бы прийти в головы и раньше, поскольку супералгебра Ли $\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$ есть, фактически, суперверсия алгебры Ли $\mathfrak{wk}(3;\,\alpha)$ с неразложимой матрицей Картана над полем характеристики 2, найденной пятью годами раньше Б. Вейсфейлером и В. Кацем, которые установили, что группа симметрий параметра алгебры Ли $\mathfrak{wk}(3;\,\alpha)$ есть $\mathrm{SL}(2;\,\mathbb{Z}/2)\simeq S_3$, см. [BGLL°]. На рис. 2.1 изображены фундаментальные области[1] S_3-действия. Другие преобразования, порожденные отображениями (Д2.17) суть

$$\alpha\mapsto -\frac{1+\alpha}{\alpha}, \quad \alpha\mapsto -\frac{1}{\alpha+1}, \quad \alpha\mapsto -\frac{\alpha}{\alpha+1}.$$

$\mathfrak{ag}(2)$. Как уже отмечено, $\mathfrak{ag}(2)_{\bar 0}=\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{g}(2)$, а $\mathfrak{ag}(2)_{\bar 1}=\mathrm{id}\otimes L^{\varphi_1}$, где L^{φ_1} — неприводимый 7-мерный $\mathfrak{g}(2)$-модуль, старший вес которого — первый фундаментальный вес φ_1, а id — тавтологический $\mathfrak{sl}(2)$-модуль. Пусть $(\cdot\,,\cdot)$ — инвариантная симметрическая билинейная форма на L^{φ_1}, а $\tau\colon\ \Lambda^2(L^{\varphi_1})\to\mathfrak{g}(2)$ — гомоморфизм $\mathfrak{g}(2)$-модулей, явное описание которого следующее. В $\mathfrak{g}=\mathfrak{o}(8)$ рассмотрим $\mathbb{Z}/3$-градуировку $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1$ (при умножении мы рассматриваем индексы по модулю 3), заданную внешним автоморфизмом порядка 3 (отвечающему циклической перестановке свободных вершин в графе Дынкина). Имеем: $\mathfrak{g}_{\pm1}\simeq L^{\varphi_1}$, а $\mathfrak{g}_0\simeq\mathfrak{g}(2)$. Форма Киллинга на $\mathfrak{o}(8)$ индуцирует невырожденное скалярное произведение $(\cdot\,,\cdot)$, а коммутатор в $\mathfrak{o}(8)$ при ограничении на $\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_1$ задает гомоморфизм τ. Умножение двух нечетных элементов из $\mathfrak{ag}(2)$ задается для любых x_1, $x_2\in L^{\varphi_1}$ и u_1, $u_2\in\mathrm{id}$ формулой

$$[x_1\otimes u_1,\ x_2\otimes u_2] = (x_1,\,x_2)p(u_1,\,u_2) - \det(u_1,\,u_2)\cdot\tau(x_1,\,x_2),$$

---

[1] *Фундаментальная область* относительно G-действия — это такое множество F точек пространства, что для любой точки x пространства в F есть ровно одна точка ее G-орбиты.

где отображения p и det — такие же, как и те, что использованы выше при описании умножения в $\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$.

$\mathfrak{ab}(3)$. Как уже отмечено, $\mathfrak{ab}(3)_{\bar 0}=\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{o}(7)$, а $\mathfrak{ab}(3)_{\bar 1}=\mathrm{id}\otimes L^{\varphi_3}$, где L^{φ_3} — неприводимый 8-мерный $\mathfrak{o}(7)$-модуль (спинорный), старший вес которого — третий фундаментальный вес φ_3, а id — тавтологический $\mathfrak{sl}(2)$-модуль. Пусть $(\cdot\,,\cdot)$ — инвариантная симметрическая билинейная форма на пространстве L^{φ_3} спинорного представления алгебры Ли $\mathfrak{o}(7)$, см. гл. Д4. Пусть Cliff(6) — алгебра Клиффорда от 6 образующих γ_i, где $i=1,\,\ldots,\,6$, а $\gamma_7=\gamma_1\cdots\gamma_6$. Тождества

$$\gamma_i\gamma_j+\gamma_i\gamma_j=\delta_{ij}$$

выполняются при $i,\,j=1,\,\ldots,\,6$ по определению образующих, а когда один или оба индекса равны 7 — как следствие тождеств при $i,\,j=1,\,\ldots,\,6$. Отождествим L^{φ_3} и Cliff(6), положив

$$\rho(E_{ij}-E_{ji})=\frac{1}{2}\gamma_i\gamma_j, \quad \text{где}\ \ i,\,j=1,\,\ldots,\,7.$$

Определим теперь умножение двух нечетных элементов из $\mathfrak{ab}(3)$, положив для любых Γ_1, $\Gamma_2\in L^{\varphi_3}$ и u_1, $u_2\in\mathrm{id}$

$$[\Gamma_1\otimes u_1,\Gamma_2\otimes u_2]=(\Gamma_1,\Gamma_2)p(u_1,u_2)+\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 7}\det(u_1,u_2)\cdot(\Gamma_1,\gamma_i\gamma_j\Gamma_2)(E_{ij}-E_{ji}),$$

где отображения p и det — такие же, как и те, что использованы выше при описании умножения в $\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$ и $\mathfrak{ag}(2)$.

2.11a. Утверждение. *В табл.* Д2.1 *перечислены все системы простых корней в следующих базисах пространствах* $\mathfrak{h}^*$, *двойственных максимальным торам* $\mathfrak{h}$ *исключительных супералгебр Ли.*

$\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$, *где* $\alpha\neq 0,\,-1,\,\infty$: *пусть* ε_1, ε_2, ε_3 — *ортонормированный базис в* $\mathfrak{h}^*$.

$\mathfrak{ag}(2)$: *пусть* δ — *корень алгебры Ли* $\mathfrak{sl}(2)$, *такой что* $\delta(H)=1$, *где* $H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, *а* γ_1 *и* γ_2 — *соответственно длинный и короткий корни алгебры Ли* $\mathfrak{g}(2)$.

$\mathfrak{ab}(3)$: *базис в* $\mathfrak{h}^*$ — *объединение естественного ортонормированного базиса* ε_1, ε_2, ε_3 *для пространства двойственного алгебре Картана в* $\mathfrak{o}(7)$, *а вектор* δ — *такой же, как и для* $\mathfrak{ag}(2)$.

Представления наименьшей размерности исключительных простых супералгебр Ли[1] $\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$, $\mathfrak{ag}(2)$ и $\mathfrak{ab}(3)$ реализуются в суперпространствах

---

[1] Интерпретацию этих супералгебр, аналогичную интерпретации исключительных алгебр Ли в терминах алгебр кватернионов, октав и их суперобобщений, интересную для понимания «геометрического смысла» и приведшую к открытию новых простых супералгебр Ли над полями характеристики 3, нашел А. Эльдюке, см. ссылки в работе [BGL°], в которой ее

довольно большой размерности, а именно, в присоединенных модулях, и поэтому мало удобны. Описание же в терминах алгебр с делением — «супермагический квадрат Эльдюке» — хоть и красиво, но тоже не для вычислений руками. Для конкретных вычислений проще пользоваться пакетом программ *SuperLie*. Однако для значений параметра $\alpha = 1$, 2 и 3 у $\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$ есть реализации в суперпространствах меньшей размерности, полезные для вычисления инвариантов узлов, см. [GL2°]. Обозначим эти неприводимые модули минимальной размерности (с четными векторами старшего веса для определенности) V и W. Имеют место разложения

$$\mathfrak{ag}(2) = \mathfrak{osp}_3(4|2) \oplus \Pi(W), \quad \mathfrak{ab}(3) = \mathfrak{osp}_2(4|2) \oplus \mathfrak{sl}(2) \oplus V \oplus V^*. \tag{Д2.18}$$

2.12. Задача. В статье [Se1*] В. Серганова дала априорное описание системы «суперкорней», причем неразложимым системам соответствуют конечномерные простые супералгебры Ли (или их «родственницы» с матрицей Картана). Это направление мысли привело к пониманию нечетных отражений как образующих *группоида Вейля* (см. один из обзоров на эту тему [HY°]) — важное понятие, появившееся в другом контексте в [SV°].

Так как системы корней имеются и у других простых супералгебр Ли, хотелось бы обобщить на них «априорный» подход Сергановой и понятие группоида Вейля, использовав как нечетные, так и четные, но изотропные, отражения, а также иные переходы от одной системы простых корней к другой, впервые рассмотренные И. Пенковым, см. его обзор в [ИНТ°]. Такое обобщение системы суперкорней хотелось бы иметь не только для конечномерных простых супералгебр Ли над $\mathbb{C}$, но и для модулярных супералгебр Ли, а также бесконечномерных.

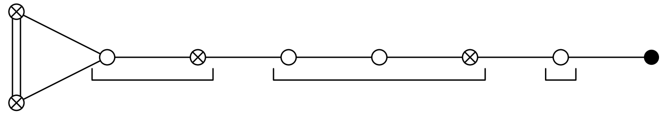
2.13. Изоморфизмы неэквивалентных систем корней, задаваемые не отражениями. Последнее десятилетие И. Пенков с соавторами занимался «финитарными» алгебрами Ли, см., например, [DiP*] и ссылки. В этих работах было замечено, среди прочего, что алгебра Ли матриц бесконечных во все стороны (ее граф Дынкина — бесконечная в обе стороны «нитка бусин») изоморфна алгебре Ли матриц бесконечных в одном квадранте (ее граф Дынкина — «нитка бусин» бесконечная лишь в одну сторону). Изоморфизм этих алгебр, очевидно вытекающий из равномощности множеств базисных векторов тавтологических модулей над этими алгебрами Ли, занумерованный в одном случае всеми целыми числами, а в другом — лишь положительными, не переносится никакими отражениями. Этот изоморфизм — еще один тип иного перехода от одной системы простых корней к другой.

авторы, вдохновленные работами Эльдюке, дали классификацию конечномерных супералгебр Ли с неразложимой матрицей Картана и всех неэквивалентных матриц Картана этих супералгебр Ли над алгебраически замкнутыми полями характеристики > 0.

Аналогично обстоит дело в суперслучае, например, супералгебры Ли, перечисленные в первой строке пункта 3) табл. Д2.6, изоморфны. Интересно, можно ли расширить такими изоморфизмами группоид Вейля, порожденный нечетными отражениями? Тот же **вопрос** о несуперной ситуации и группе Вейля. «Практическое» применение указанных изоморфизмов — эквивалентность соответствующих уравнений математической физики — никто, кажется, до сих пор не изучал. В супер случае — точно не изучал, это открытая **задача**.

§ 3. Таблицы

3.1. Обозначения в таблицах Д2.4–Д2.7. В таблице Д2.2 мы показываем, как мы нумеруем вершины диаграммы Дынкина. Знак • (не путать с ●) означает ○ или ⊗. Число $|v|$ равно числу вершин диаграммы Дынкина, ng есть число «серых» вершин ⊗ среди вершин, обозначенных знаком •, а png — четность числа ng. Глядя на диаграммы, мы видим, что все они, кроме диаграмм для $\mathfrak{sl}^{(1)}$ и $\mathfrak{psq}^{(2)}$ (вернее, их «родственниц» с матрицей Картана), расположены на одном или трех горизонтальных уровнях. Максимальную среднюю поддиаграмму вида $\bullet\!-\!\bullet\!-\cdots-\!\bullet\!-\!\bullet$ (для «родственниц» супералгебр Ли $\mathfrak{sl}^{(1)}$ или $\mathfrak{psq}^{(2)}$ с матрицей Картана всю диаграмму) мы будем называть *средней поддиаграммой*. Разобьем среднюю поддиаграмму на максимальные связные непересекающиеся отрезки, содержащие не более одной серой вершины ⊗ так, чтобы эта вершина непременно оказалась в конце каждого отрезка, например:



Для циклической диаграммы такое разбиение можно начать с любого места, а для нециклических диаграмм мы начинаем слева. Перенумеруем все эти отрезки последовательно слева направо или (для циклических диаграмм) против часовой стрелки. Пусть ev (соответственно od) есть общее число вершин во всех четных (нечетных) отрезках средней поддиаграммы; если в столбце «$ng \leqslant \min$» таблицы Д2.7 стоит пара a, b, то имеется в виду, что $ng \leqslant \min(a, b)$, а если стоит одно число c, то $ng \leqslant c$.

Все диаграммы Дынкина рассматриваемого нами вида можно восстановить по набору $|\tau|$, ng, png, ev, od.

Если две диаграммы в таблице соединены волнистой линией (пружинкой) или (иногда) прерывистой линией со стрелочками на концах упирающимися в серые вершины ⊗, то значит эти диаграммы связаны нечетным отражением в соответствующем корне.

Числовые отметки на диаграмме Дынкина означают, если не оговорено противное, коэффициенты линейной зависимости строк матрицы Картана, например, для $\mathfrak{gl}(n|n)$ см. точный ответ для простейшей диаграммы в табл. Д2.4, а в общем случае — условный ответ $(a_1, \ldots, a_{2n-1})$ в табл. Д2.7.

В таблицах Д2.5–Д2.7 перечислены все неэквивалентные системы простых корней, а для серийных супералгебр Ли показано, как диаграммы и их характеристики *png*, *ev*, *od* изменяются под действием нечетных отражений: указаны только те места в диаграммах, которые подвергаются изменению. По правилам таблицы Д2.3 легко восстановить список всех с точностью до эквивалентности систем простых корней перечисленных в таблицах Д2.5–Д2.7.

Ниже, если матрица Картана A такова, что у супералгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$ есть только один нечетный простой корень, то номер этой матрицы заключен в $\boxed{\text{рамочку}}$, а номер, для которого все простые корни нечетные, подчеркнут. Вершины графа Дынкина перенумерованы, и эти номера заключены в маленькие квадратики.

Матрица, содержащая знак «$-$» рядом с графами Дынкина, показывает результат нечетных отражений: номер строки — это номер матрицы Картана из списка ниже, а номер столбца — это номер корня, занумерованного числом в маленьком квадратике у соответствующей вершины и в котором производится нечетное отражение; на пересечении строки и столбца указан номер той матрицы Картана, которая получается в результате нечетного отражения, или «$-$», если отражение неприменимо (поскольку $A_{ii} \neq 0$). Некоторые из матриц Картана, полученных таким образом, эквивалентны.

Таблица Д2.1

$\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$

1) $2\varepsilon_1,\ -\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3,\ 2\varepsilon_3;$
2) $\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3,\ 2\varepsilon_2,\ 2\varepsilon_3;$
3) $2\varepsilon_1,\ 2\varepsilon_2,\ -\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3;$
4) $\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3,\ \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,\ -\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3.$

$\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)^{(1)}$

1) $-2\varepsilon_1,\ 2\varepsilon_2,\ 2\varepsilon_3,\ \varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3;$
2) $\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3,\ \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,$
3) $-\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3,\ -\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3.$

$\mathfrak{ab}(3)$

1) $-2\delta,\ \frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\delta,\ -\varepsilon_1,\ \varepsilon_1-\varepsilon_2;$
2) $\varepsilon_2+\varepsilon_3,\ \varepsilon_1-\varepsilon_2,\ -\varepsilon_1,\ \frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3)-\delta;$
3) $\varepsilon_2+\varepsilon_3,\ \varepsilon_1-\varepsilon_2,\ \frac{1}{2}(-\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3)-\delta,\ \frac{1}{2}(-\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\delta;$
4) $\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)-\delta,\ -\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)-\delta,\ \frac{1}{2}(-\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\delta,\ \varepsilon_1-\varepsilon_2;$
5) $-\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\delta,\ -2\delta,\ \varepsilon_2+\varepsilon_3,\ \varepsilon_1-\varepsilon_2;$
6) $\varepsilon_2+\varepsilon_3,\ -\varepsilon_1,\ \frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\delta,\ \frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3)-\delta.$

$\mathfrak{ag}(2)$

1) $\gamma_1,\ -\gamma_1-\gamma_2+\delta,\ \gamma_1+2\gamma_2-\delta;$
2) $\gamma_1,\ \gamma_2,\ -\gamma_1-2\gamma_2+\delta;$
3) $-2\gamma_2+\delta,\ \gamma_1+\gamma_2-\delta,\ \gamma_2;$
4) $\gamma_2-\delta,\ \gamma_1,\ \delta.$

$\mathfrak{ag}(2)^{(1)}$

1) $\gamma_1,\ \gamma_2,\ -\gamma_1-2\gamma_2+\delta,\ -2\delta;$
2) $\gamma_1,\ -\gamma_1-\gamma_2+\delta,\ \gamma_1+2\gamma_2-\delta,\ -\gamma_1-2\gamma_2-\delta;$
3) $\gamma_2-\delta, \gamma_1, \delta, -2\gamma_1-3\gamma_2;$
4) $-\gamma_2+\delta,\ \gamma_1+\gamma_2-\delta,\ 3\gamma_2-2\gamma_1,\ \gamma_2;$
5) $\gamma_1,\ -2\gamma_1-3\gamma_2,\ -2\delta,\ \gamma_1+2\gamma_2+\delta.$

$\mathfrak{ab}(3)^{(1)}$

1) $-2\delta,\ \frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\delta,\ -\varepsilon_1,\ \varepsilon_1-\varepsilon_2,\ \varepsilon_2-\varepsilon_3;$
2) $\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)-\delta,\ -\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)-\delta,\ \frac{1}{2}(-\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\delta,\ \varepsilon_1-\varepsilon_2,\ \varepsilon_2-\varepsilon_3;$
3) $-\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\delta,\ -2\delta,\ \varepsilon_2+\varepsilon_3,\ \varepsilon_1-\varepsilon_2,\ \varepsilon_2-\varepsilon_3;$
4) $\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_1,\ \frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3)-\delta,\ \frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\delta,\ \varepsilon_2-\varepsilon_3;$
5) $-\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\delta,\ -2\delta,\ \varepsilon_2+\varepsilon_3,\ \varepsilon_1-\varepsilon_2;$
6) $\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_1,\ \frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\delta,\ \frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3)+\delta.$

Таблица Д2.2. **Нумерация вершин в диаграммах Дынкина—Каца**

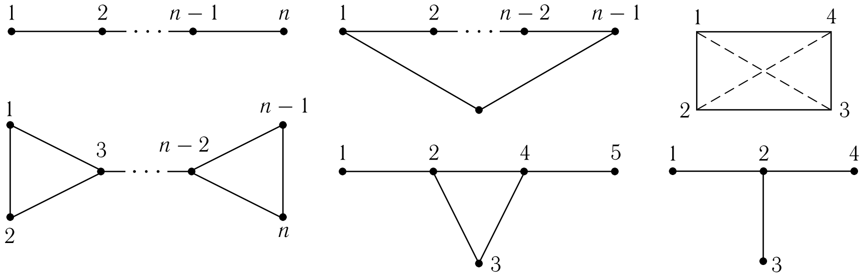
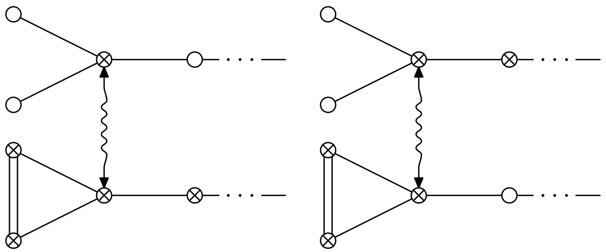
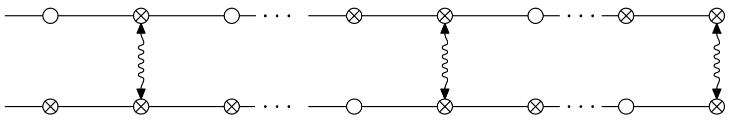


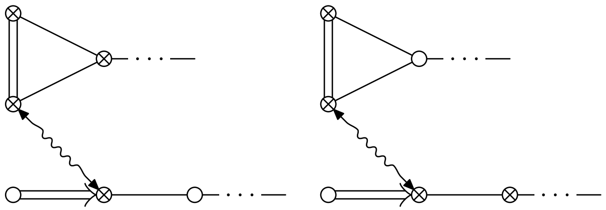
Таблица Д2.3. **Действие нечетных отражений**



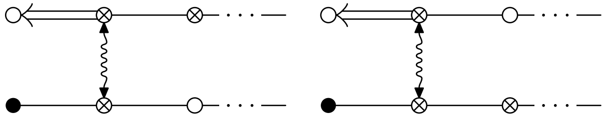
$png' = png + \bar{1},\ \ od' = ev + 1,\ \ ev' = od - 1$



$$\underbrace{png' = png, \qquad png' = png, \qquad png' = png + \bar{1}}_{ev' = ev,\ \ od' = od}$$

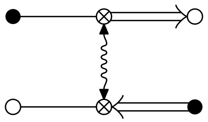


$png' = png$, $ev' = ev + 1$, $od' = od$

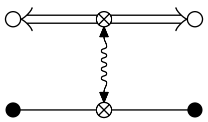


$png' = png + \bar{1}$, $od' = od$, $ev' = ev$

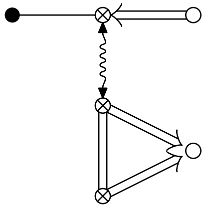
$\mathfrak{osp}(4|2)^{(2)}$



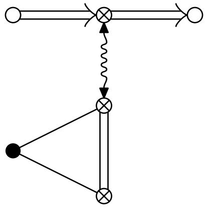
$\mathfrak{sl}(3|3)^{(4)}$



$\mathfrak{sl}(2|3)^{(2)}$

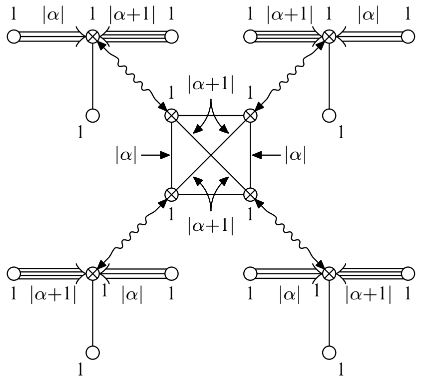


$\mathfrak{osp}(3|2)^{(1)}$



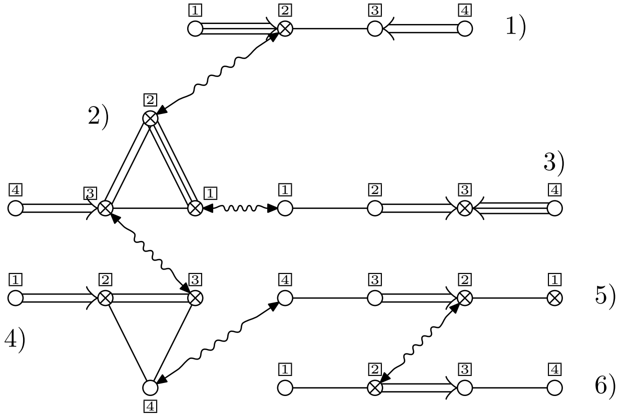
В следующей схеме стороны и диагонали «квадрата» изображены упрощенно: вместо $|\alpha|$ или $|\alpha+1|$ ребер изображено одно ребро с пояснениями.

$\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)^{(1)}$ при $\alpha = 3$



$\mathfrak{ab}(3)$, sdim $= 24|16$

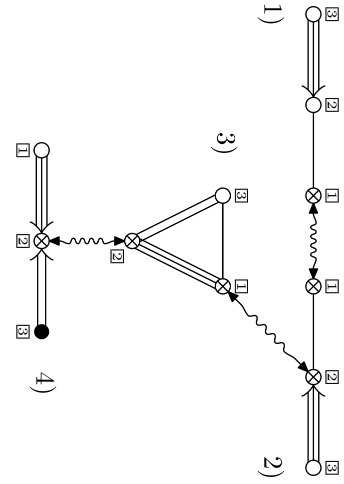
$$\begin{pmatrix} - & 2 & - & - \\ 3 & 1 & 4 & - \\ 2 & - & - & - \\ - & - & 2 & 5 \\ - & 6 & - & 4 \\ - & 5 & - & - \end{pmatrix}$$



$$\boxed{1)}\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad 2)\ \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boxed{3)}\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad 5)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boxed{6)}\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

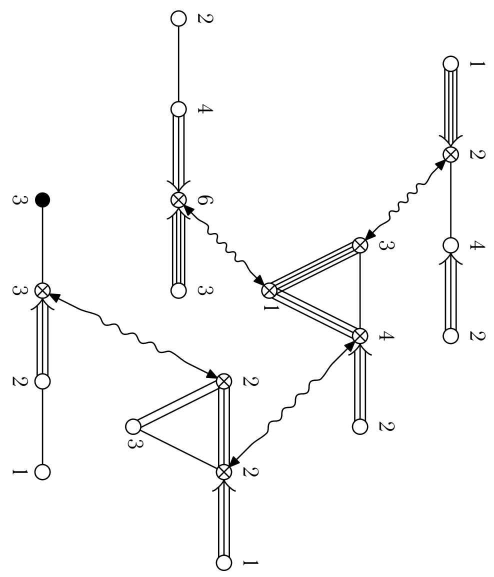
$\mathfrak{ag}(2)$, sdim = 17|14



$$\begin{pmatrix} 2 & - & - \\ 1 & 3 & - \\ - & 2 & 4 \\ - & - & 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{1)}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathfrak{ag}(2)^{(1)}$



$\mathfrak{ab}(3)^{(1)}$

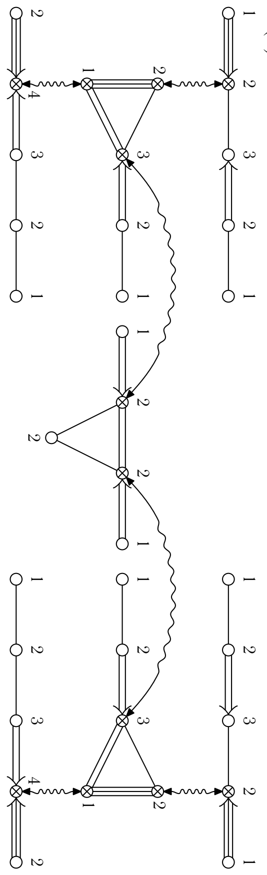


Таблица Д2.4. **Простейшие диаграммы и их расширения**

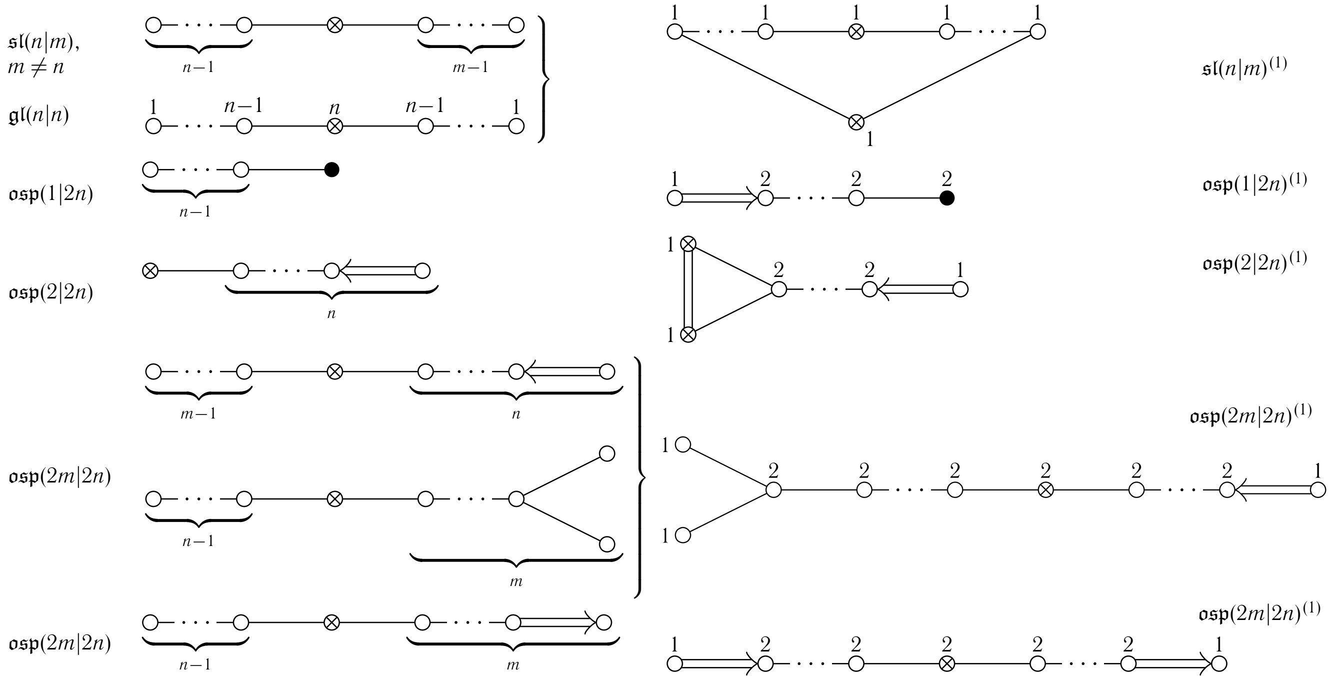
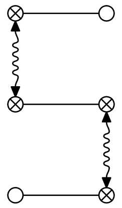
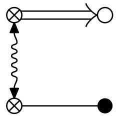
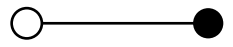
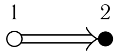
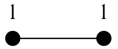
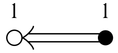
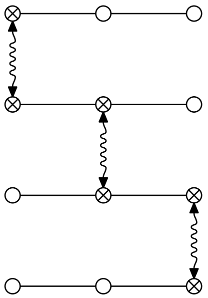


Таблица Д2.5. **Системы простых корней (rk ⩽ 4)**

$\mathfrak{g}(A, I)$, sdim $\mathfrak{g}(A, I)$	A	Диаграммы	$\mathfrak{g}(A, I)$, sdim $\mathfrak{g}(A, I)$	A	Диаграммы
$\mathfrak{sl}(1\|2)$, sdim $= 4\|4$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$		$\mathfrak{osp}(3\|2)$, sdim $= 6\|6$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	
$\mathfrak{osp}(1\|4)$, sdim $= 10\|4$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$		$\mathfrak{osp}(1\|2)^{(1)}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	
$\mathfrak{osp}(2\|2)^{(2)}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$		$\mathfrak{sl}(1\|3)^{(4)}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	

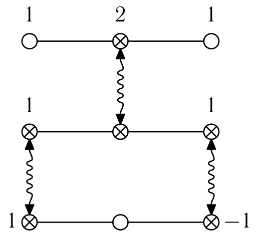
$\mathfrak{sl}(1|3)$, sdim $= 9|6$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$



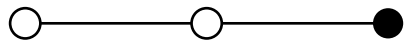
$\mathfrak{gl}(2|2)$, sdim $= 8/6|8$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



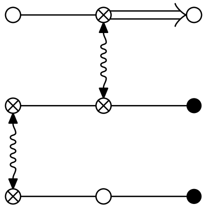
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{osp}(1|6)$, sdim $= 21|6$



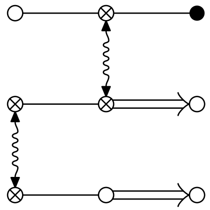
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{osp}(3|4)$, sdim $= 13|12$



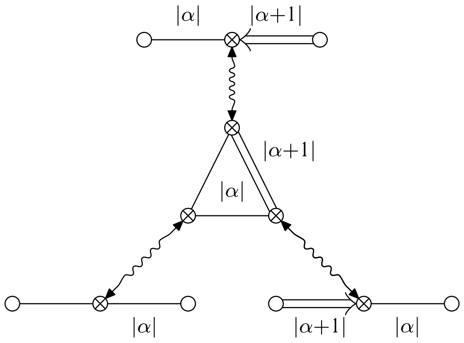
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{osp}(5|2)$, sdim $= 13|10$



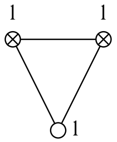
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ \alpha & 0 & -1-\alpha \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -\alpha \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1-\alpha \\ -1 & 0 & -\alpha \\ -1-\alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1-\alpha & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$, $\alpha = 1$, sdim $= 9|8$



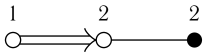
$\mathfrak{sl}(1|2)^{(2)}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



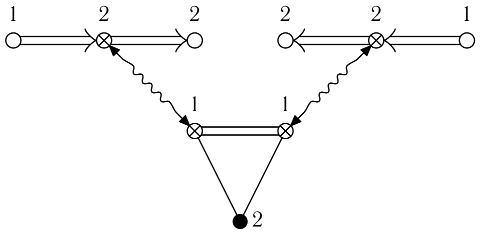
$\mathfrak{sl}(1|4)^{(1)}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



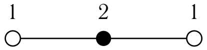
$\mathfrak{osp}(3|2)^{(1)}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



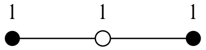
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{sl}(1|4)^{(2)}$



$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

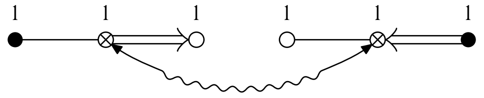
$\mathfrak{osp}(2|6)^{(2)}$



$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{osp}(4|2)^{(2)}$

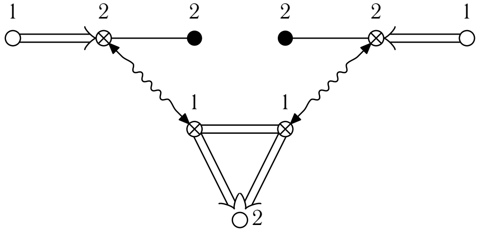


$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

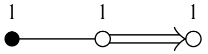
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{sl}(2|3)^{(2)}$



$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

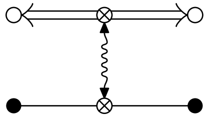
$\mathfrak{sl}(1|5)^{(4)}$



$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{sl}(3|3)^{(4)}$

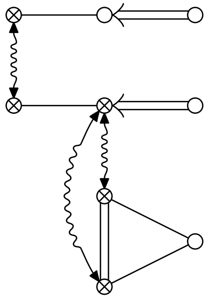


$\mathfrak{osp}(2|4)$,
sdim $= 11|8$

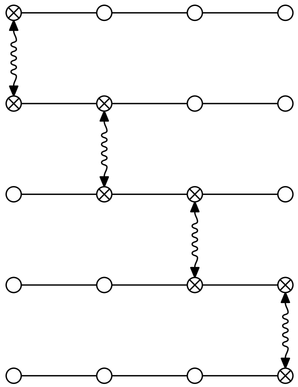
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

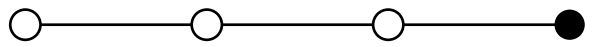
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$



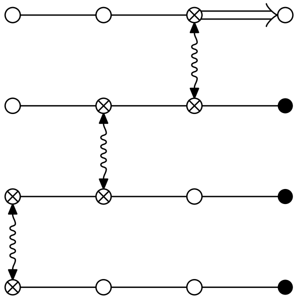
$\mathfrak{sl}(1|4)$, sdim $= 16|8$



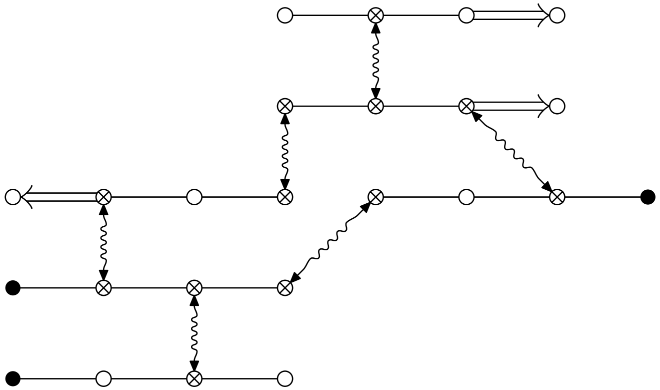
$\mathfrak{osp}(1|8)$, sdim $= 36|8$



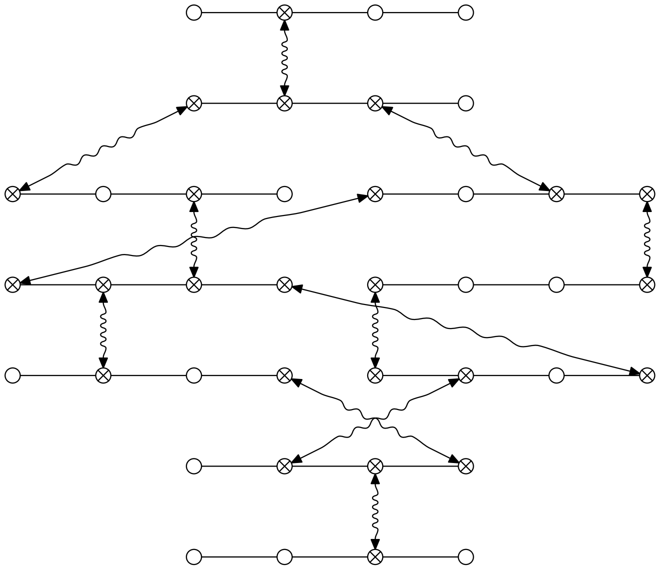
$\mathfrak{osp}(3|6)$, sdim $= 20|20$



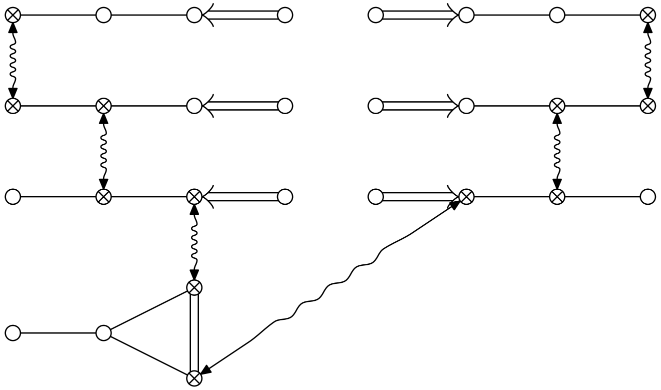
$\mathfrak{osp}(5|4)$,
sdim $= 20|20$



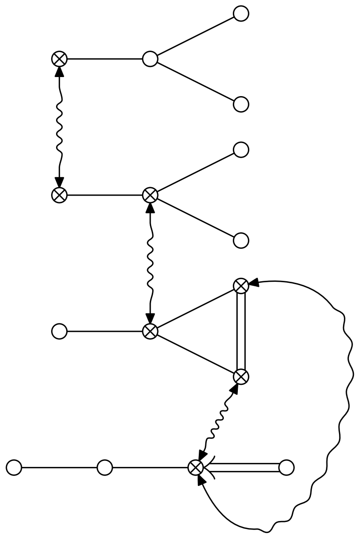
$\mathfrak{sl}(2|3)$,
sdim $= 12|12$



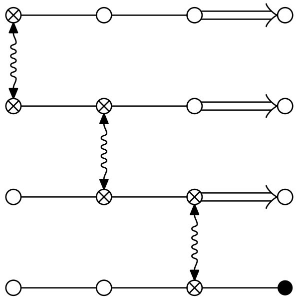
$\mathfrak{osp}(2|6)$,
sdim $= 24|12$



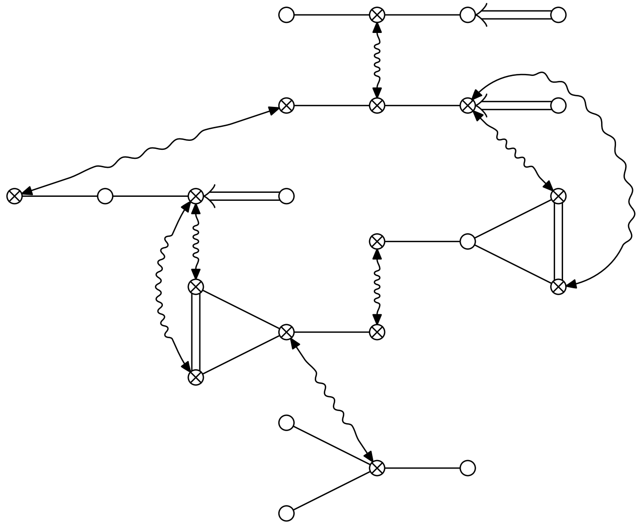
$\mathfrak{osp}(6|2)$,
sdim $= 18|12$



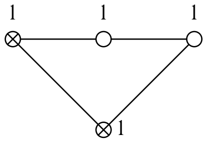
$\mathfrak{osp}(7|2)$,
sdim $= 24|14$



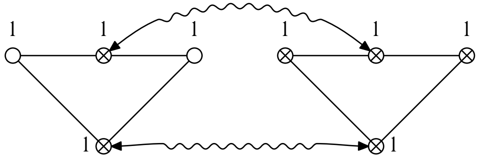
$\mathfrak{osp}(4|4)$,
sdim $= 16|16$



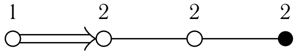
$\mathfrak{sl}(1|3)^{(1)}$



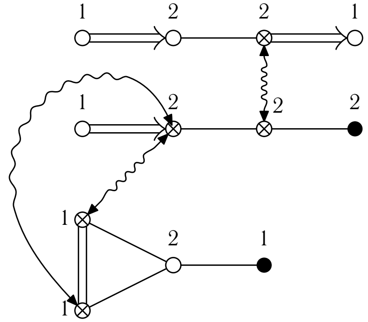
$\mathfrak{sl}(2|2)^{(1)}$



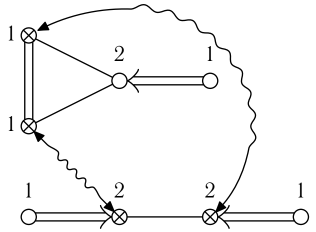
$\mathfrak{osp}(1|6)^{(1)}$



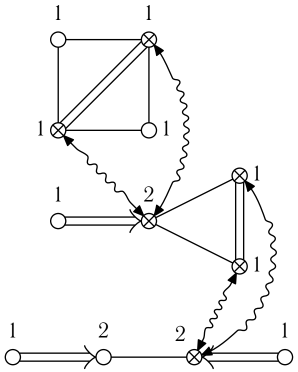
$\mathfrak{osp}(3|4)^{(1)}$



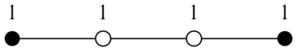
$\mathfrak{osp}(2|4)^{(1)}$



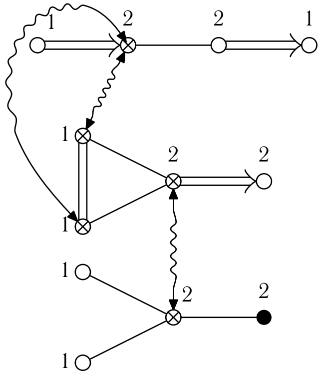
$\mathfrak{osp}(2|4)^{(2)}$



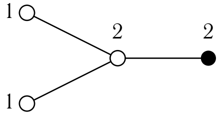
$\mathfrak{osp}(2|6)^{(2)}$



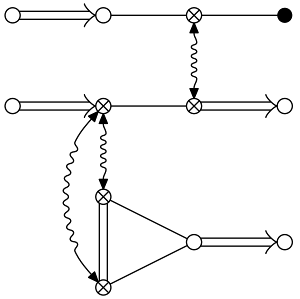
$\mathfrak{osp}(5|2)^{(1)}$



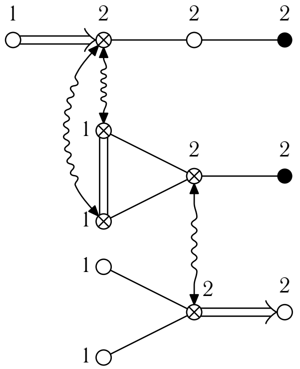
$\mathfrak{sl}(1|6)^{(2)}$



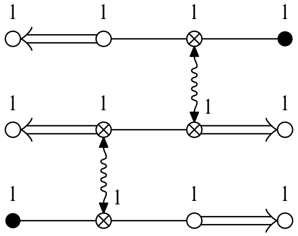
$\mathfrak{sl}(2|5)^{(2)}$



$\mathfrak{sl}(3|4)^{(2)}$

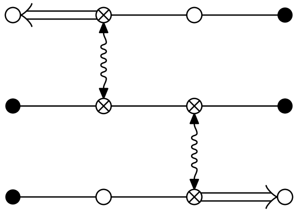


$\mathfrak{osp}(3|4)^{(1)}$



$\mathfrak{osp}(3|4)^{(1)}$

$\mathfrak{osp}(2|4)^{(1)}$



$\mathfrak{osp}(2|4)^{(1)}$

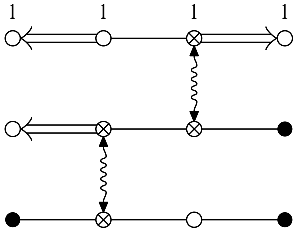
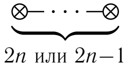


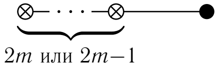
Таблица Д2.6. **Интересные частные случаи**

1) Все простые корни нечетные

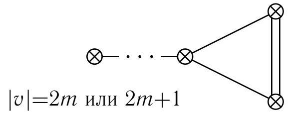
$\mathfrak{sl}(n|n \pm 1)$



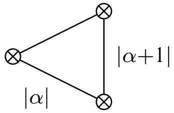
$\mathfrak{osp}(2m \pm 1|2m)$



$\mathfrak{osp}(2n|2m)$, где $n = m$ или $m + 1$

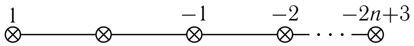


$\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$

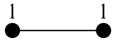


$\mathfrak{osp}(1|2)$

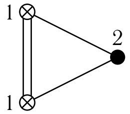
$\mathfrak{sl}(n|n)$



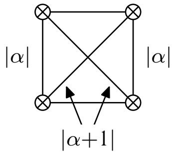
$\mathfrak{osp}(2|2)^{(2)}$



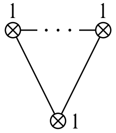
$\mathfrak{osp}(3|2)^{(1)}$



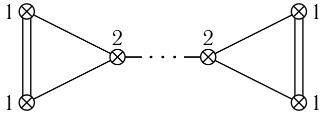
$\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)^{(1)}$



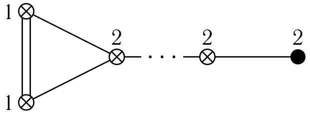
$\mathfrak{psl}(n|n)^{(1)}$ и $\mathfrak{psq}(2n+1)^{(2)}$
$(|v|=2n)$ $(|v|=2n+1)$



$\mathfrak{osp}(2n+2|2n)^{(1)}$ и $\mathfrak{psl}(2n|2n)^{(2)}$
$(|v|=2n+2)$ $(|v|=2n+1)$



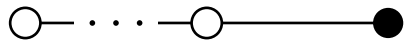
$\mathfrak{osp}(2n+1|2n)^{(1)}$ и $\mathfrak{sl}(2n-1|2n)^{(2)}$
$(|v|=2n+1)$ $(|v|=2n)$



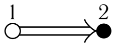
$\mathfrak{osp}(2n|2n)^{(1)}$ и $\mathfrak{sl}(2n+1|2n+1)^{(4)}_{-st}$
$(|v|=2n)$ $(|v|=2n+1)$

2) Все простые корни неизотропные

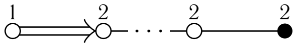
$\mathfrak{osp}(1|2n)$



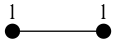
$\mathfrak{osp}(1|2)^{(1)}$



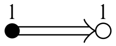
$\mathfrak{osp}(1|2n)^{(1)}$



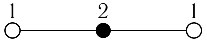
$\mathfrak{osp}(2|2)^{(2)}$



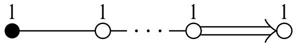
$\mathfrak{sl}(1|3)^{(4)}_{-st}$



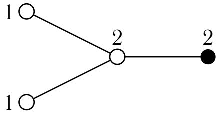
$\mathfrak{sl}(1|4)^{(2)}_{-st}$



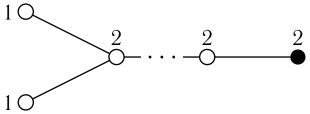
$\mathfrak{sl}(1|2n+1)^{(4)}_{-st}$



$\mathfrak{sl}(1|6)^{(2)}_{-st}$

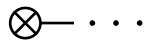


$\mathfrak{sl}(1|2n)^{(2)}_{-st}$



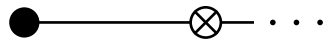
3) Все корни нечетные, а ранг бесконечен. Пусть $\mathrm{L} = \lim\limits_{n\to\infty}$.

$\mathrm{L}\,\mathfrak{sl}(n|n)$



$\mathrm{L}\,\mathfrak{sl}(n|n)^{(1)} \simeq \mathrm{L}\,\mathfrak{psq}(2n+1)^{(2)}$

$\mathrm{L}\,\mathfrak{osp}(2n|2n)^{(2)} \simeq \mathrm{L}\,\mathfrak{psl}(2n+1|2n+1)^{(4)} \simeq \mathrm{L}\,\mathfrak{osp}(2n+1|2n)^{(1)} \simeq \mathrm{L}\,\mathfrak{sl}(2n-1|2n)^{(2)}$



$\mathrm{L}\,\mathfrak{osp}(2n+2|2n)^{(1)} \simeq \mathrm{L}\,\mathfrak{psl}(2n|2n)^{(2)}_{-st} \simeq \mathrm{L}\,\mathfrak{osp}(2n+1|2n)^{(1)} \simeq \mathrm{L}\,\mathfrak{sl}(2n-1|2n)^{(2)}_{-st}$

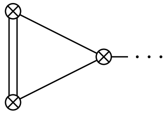
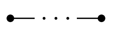
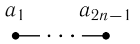
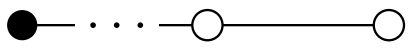
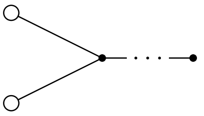
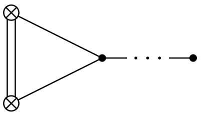
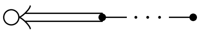


Таблица Д2.7. **Системы простых корней в общем случае**

$\mathfrak{g}(A, I)$, sdim $\mathfrak{g}(A, I)$	Диаграммы	$\lvert v\rvert$	$ev \geqslant 0$	$od \geqslant 0$	png	$ng \leqslant \min$	Обозначения à la Картан
$\mathfrak{sl}(m\mid n)$, где $m > n$ $m^2 + n^2 - 1 \mid 2mn$		$m + n - 1$	$\frac{m-1}{n-1}$	$\frac{n}{m}$		$2n - 1$	$A_{m,n-1}$ или $A_{m-1,n}$
$\mathfrak{gl}(n\mid n)$, $2n^2/2n^2 - 2 \mid 2n^2$		$2n - 1$	$n - 1$	n		$2n - 1$	$A_{n,n-1}$ или $A_{n-1,n}$
$\mathfrak{osp}(1\mid 2n)$, $2n^2 + n \mid 2n$		n					$B^{\bullet}_{0,n}$
$\mathfrak{osp}(2m\mid 2n)$, $2n^2 + 2m^2 + n - m \mid$ $4mn$		$m + n$	$\frac{m}{n-1}$	$\frac{n-1}{m}$	$\frac{0}{1}$	$2m, 2n - 1$	$C_{m,n}$
			$\frac{m-2}{n}$	$\frac{n}{m-2}$	$\frac{1}{0}$	$2m - 3, 2n$	$D^{\circ}_{m,n}$
			$\frac{m-1}{n-1}$	$\frac{n-1}{m-1}$	$\frac{0}{1}$	$2m - 2, 2n - 1$	$D^{\otimes}_{m,n}$
$\mathfrak{osp}(2m + 1\mid 2n)$, $2n^2 + 2m^2 + n + m \mid$ $4mn + 2n$		$m + n$	$\frac{m-1}{n}$	$\frac{n}{m-1}$	$\frac{0}{1}$	$2m - 1, 2n$	$B^{\circ}_{m,n}$
			$\frac{m}{n-1}$	$\frac{n-1}{m}$	$\frac{1}{0}$	$2m, 2n - 1$	$B^{\bullet}_{m,n}$

Введенные в [Кас1] обозначения, похожие на обозначения Картана для систем корней алгебр Ли, составили лишь часть подобных обозначений, если учитывать все неэквивалентные случаи, см. последний столбец. Как и обозначения в первом столбце, они мало пригодны для супералгебр Ли, так как игнорируют различия между неэквивалентными системами корней с диаграммой Дынкина того же вида (но хотя бы различают виды). В отличие от обозначений в первом столбце они бессмысленны, поэтому их сложно запомнить. Для $\mathfrak{sl}(m|n)$ и $\mathfrak{psl}(n|n)$, т. е., на самом деле, $\mathfrak{gl}(n|n)$, они еще и не однозначны, поэтому для этих супералгебр они вредны. А вот при описании фундаментальных представлений супералгебр Ли серии $\mathfrak{osp}$ они необходимы, как и обозначения в первом столбце, причем одна супералгебра может принадлежать нескольким типам: например, $\mathfrak{osp}(4|2)$ реализуется как $C_{2,1}$, $D^{\circ}_{2,1}$ и $D^{\otimes}_{2,1}$. В частности, случайное обозначение супералгебры Ли $\mathfrak{osp}_{\alpha}(4|2)$ символом $D(2,\ 1;\ \alpha)$ (пока, к сожалению, иногда используемое) некорректно: отчего не $C(2,\ 1;\ \alpha)$, да и имеется в виду D° или $D^{\otimes}$?!

Таблица Д2.7 (продолжение 1)

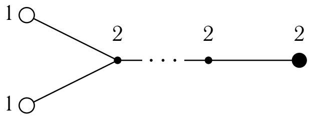
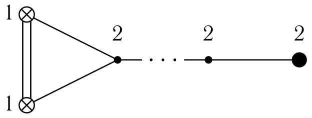
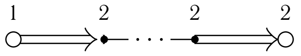
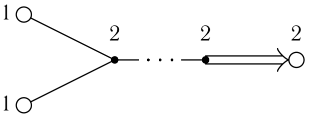
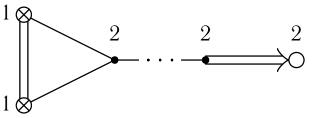
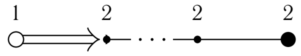
$\mathfrak{g}(A, I)$, sdim $\mathfrak{g}(A, I)$	Диаграммы	$\lvert v\rvert$	$ev \geqslant 0$	$od \geqslant 0$	png	$ng \leqslant \min$
$\mathfrak{osp}(2m + 1\mid 2n)^{(1)}$		$m + n + 1$	$n - 1$	$m - 1$	1	$2m - 3, 2n - 1$
			$m - 1$	$n - 1$	0	$2m - 1, 2n - 2$
			$m - 1$	n	1	$2m - 1, 2n - 1$
			n	$m - 2$	0	$2m - 4, 2n$
			$m - 2$	n	1	$2m - 3, 2n - 1$
			m	$n - 1$	0	$2m, 2n - 2$

Таблица Д2.7 (продолжение 2)

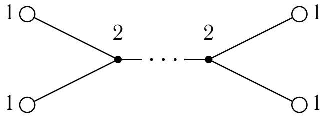
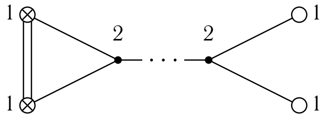
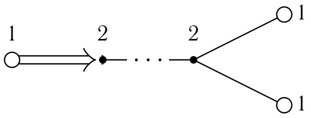
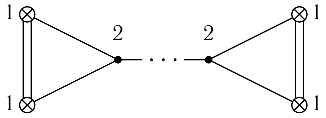
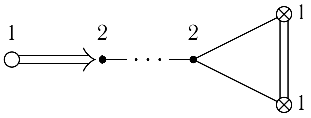
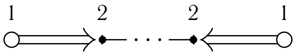
$\mathfrak{g}(A, I)$, sdim $\mathfrak{g}(A, I)$	Диаграммы	$\lvert v\rvert$	$ev \geqslant 0$	$od \geqslant 0$	png	$ng \leqslant \min$
$\mathfrak{osp}(2m\|2n)^{(1)}$		$m+n+1$	n	$m-3$	0	$2m-6,\ 2n$
			$m-3$	n	1	$2m-5,\ 2n-1$
			$m-2$	n	1	$2m-3,\ 2n-1$
			$m-2$	$n-1$	0	$2m-4,\ 2n-2$
			$m-1$	$n-1$	0	$2m-2,\ 2n-2$
			m	$n-1$	0	$2m,\ 2n-2$

Таблица Д2.7 (продолжение 3)

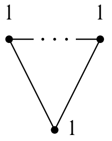
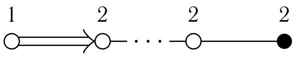
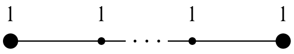
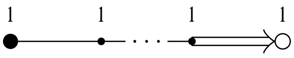
$\mathfrak{g}(A, I)$, sdim $\mathfrak{g}(A, I)$	Диаграммы	$\lvert v\rvert$	$ev \geqslant 0$	$od \geqslant 0$	png	$ng \leqslant \min$
$\mathfrak{sl}(m\|n)^{(1)}$ или $\mathfrak{psq}(n)^{(2)}$		$m+n$ или n	m или $ev+od=n$	n	0 или 1	$2m,\ 2n$
$\mathfrak{osp}(1\|2n)^{(1)}$		$n+1$	n	m		
$\mathfrak{osp}(2m\|2n)^{(2)}$ или $\mathfrak{sl}(2m+1\|2n+1)^{(4)}_{-st}$		$m+n$ или $m+n+1$	$\frac{m-1}{m}$	$\frac{n-1}{n-1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{2m-2,\ 2n-2}{2m-1,\ 2n-1}$
			$\frac{m-2}{m}$	$\frac{n}{n-1}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{2m-3,\ 2n-1}{2m,\ 2n-2}$
			$\frac{n}{m-1}$	$\frac{m-2}{n}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{2m-4,\ 2n}{2m-1,\ 2n-1}$

Таблица Д2.7 (продолжение 4)

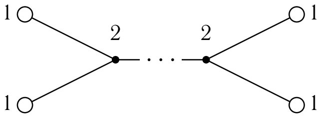
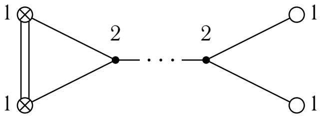
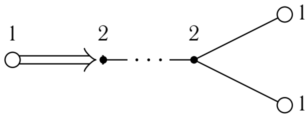
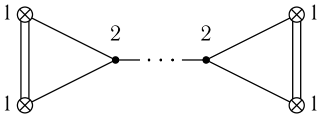
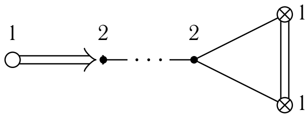
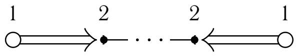
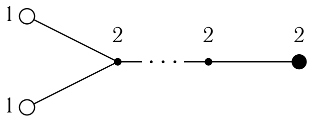
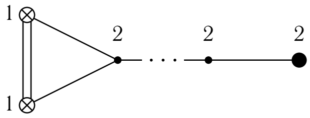
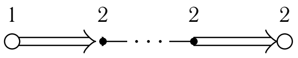
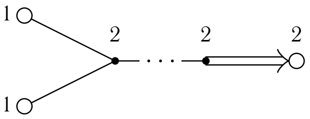
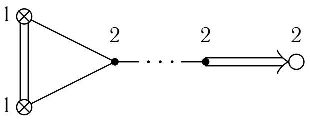
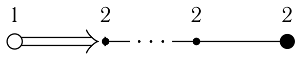
$\mathfrak{g}(A, I)$, sdim $\mathfrak{g}(A, I)$	Диаграммы	$\lvert v\rvert$	$ev \geqslant 0$	$od \geqslant 0$	png	$ng \leqslant \min$
$\mathfrak{osp}(2m\lvert 2n)^{(2)}$		$m+n+1$	$n-2$	$m-1$	1	$2m-3,\ 2n-3$
			$\frac{m-1}{n-1}$	$\frac{n-2}{m-2}$	0	$\frac{2m-2,\ 2n-4}{2n-2,\ 2m-4}$
			$\frac{n}{m}$	$\frac{m-2}{n-2}$	0	$\frac{2m-4,\ 2n}{2n-4,\ 2m}$
			$m-2$	$n-1$	1	$2m-3,\ 2n-3$
			$\frac{n-1}{m-1}$	$\frac{m-1}{n-1}$	1	$\frac{2m-3,\ 2n-1}{2n-3,\ 2m-1}$
			$n-1$	m	1	$2m-1,\ 2n-1$

Таблица Д2.7 (продолжение 5)

$\mathfrak{g}(A, I)$, sdim $\mathfrak{g}(A, I)$	Диаграммы	$\lvert v\rvert$	$ev \geqslant 0$	$od \geqslant 0$	png	$ng \leqslant \min$
$\mathfrak{sl}(2m+1\lvert 2n)^{(2)}_{-st}$		$m+n+1$	m	$n-2$	0	$2m,\ 2n-4$
			$n-2$	m	1	$2m-1,\ 2n-3$
			$\frac{n}{n-1}$	$\frac{m-1}{m}$	$\frac{0}{0}$	$2m-2,\ 2n$
			$m-1$	$n-1$	1	$2m-1,\ 2n-3$
			$n-1$	$m-1$	0	$2m-2,\ 2n-2$
			$n-1$	m	1	$2m,\ 2n-2$

Д3. Векторные супералгебры Ли

§ 1. Введение

Ниже мы рассматриваем бесконечномерные комплексные супералгебры Ли векторных полей с полиномиальными или формальными коэффициентами вместе со специальными градуировками, которые называются *градуировками Вейсфейлера*. Для краткости будем называть рассматриваемые супералгебры *W-градуированными векторными*. Классификацию простых комплексных W-градуированных векторных супералгебр Ли см. в [LSh°, LSh*] [1]. Уже в [ALSh°] показано, в частности, что непосредственное обобщение задачи Э. Картана на супералгебры, т. е. «классификация примитивных супералгебр Ли» (см. [GQS°]) является дикой задачей. Заметим, что в отличие от алгебр Ли, каждая простая супералгебра Ли векторных полей имеет несколько (конечное число) неэквивалентных градуировок Вейсфейлера, и мы перечислим их все; деформации супералгебр могут быть параметризованы супермногообразием (с особенностями).

Все исключительные бесконечномерные простые W-градуированные векторные супералгебры Ли найдены И. М. Щепочкиной; см. [Щ5ис°].

1.1. Классификация. Рассмотрим бесконечномерную комплексную фильтрованную супералгебру Ли $\mathcal{M}$ с убывающей фильтрацией вида

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{-\delta} \supset \mathcal{M}_{-\delta+1} \supset \ldots \supset \mathcal{M}_0 \supset \mathcal{M}_1 \supset \ldots$$

глубина δ которой конечна и такую, что

1) $\mathcal{M}_0$ — максимальная подалгебра конечной коразмерности;
2) $\mathcal{M}_0$ не содержит идеалов всей алгебры $\mathcal{M}$.

Алгебра $\mathcal{M}$ с перечисленными выше свойствами называется *примитивной супералгеброй Ли*. Мы предполагаем, что такие супералгебры Ли $\mathcal{M}$ полны в естественной топологии, а если исходная алгебра не полна, то мы рассмотрим ее пополнение. Базис окрестностей нуля этой топологии образован пространствами конечной коразмерности, например, пространствами $\mathcal{M}_i$. При отсутствии нечетных переменных эта топология, по-видимому, наиболее естественная: мы считаем, что два векторных поля *k-близки* друг к другу, если ряды Тейлора их коэффициентов при частных производных совпадают вплоть до членов порядка k включительно. Эта топологию называется *топологией проективного предела*, но используются также и другие, еще менее удачные термины, например *линейно компактная

топология*. Никакая другая топология встречаться не будет, поэтому все топологические прилагательные (полный, открытый, замкнутый) относятся к этой топологии.

Заметим, что сам термин «фильтрованная алгебра» предполагает, что $[\mathcal{M}_i, \mathcal{M}_j] \subset \mathcal{M}_{i+j}$, а из условий 1) и 2) можно вывести, см. [Кас2°], что $\dim M_i < \infty$ при всех i, где $M_i = \mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i+1}$, а $\mathbb{Z}$-градуированная супералгебра $M = \bigoplus\limits_{k\geqslant -\delta} M_k$, ассоциированная с $\mathcal{M}$, растет *полиномиально*, т. е. зависящая от n функция $\dim \bigoplus\limits_{k\leqslant n} M_k$ растет как полином.

Вслед за Б. Вейсфейлером снабдим каждую такую фильтрованную супералгебру Ли $\mathcal{M}$ другой, улучшенной, фильтрацией, обозначив перефильтрованную супералгебру Ли символом $\mathcal{L}$, где $\mathcal{M} = \mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-d} \supset \mathcal{L}_{-d+1} \supset \ldots \supset \mathcal{L}_0 \supset \mathcal{L}_1 \supset \ldots \qquad (Д3.1)$$

положив $\mathcal{L}_0 = \mathcal{M}_0$, взяв в качестве $\mathcal{L}_{-1}$ минимальное $\mathcal{L}_0$-инвариантное подпространство, строго содержащее $\mathcal{L}_0$, и положив

$$\mathcal{L}_{-i-1} = [\mathcal{L}_{-1}, \mathcal{L}_{-i}] + \mathcal{L}_{-i} \quad \text{и} \quad \mathcal{L}_i = \{D \in \mathcal{L}_{i-1} \mid [D, \mathcal{L}_{-1}] \subset \mathcal{L}_{i-1}\} \qquad (Д3.2)$$

при $i \geqslant 1$. Параметр d из формулы (Д3.1) называется *глубиной* как супералгебры Ли $\mathcal{L}$, так и ассоциированной с ней градуированной супералгебры Ли $L = \oplus L_i$, где $L_i = \mathcal{L}_i/\mathcal{L}_{i+1}$.

Преимущество *фильтрации Вейсфейлера* (Д3.1)–(Д3.2) состоит в том, что для соответствующей перефильтрованной супералгебры Ли $\mathcal{L}$ действие супералгебры Ли L_0 на L_{-1} неприводимо, как мы увидим. К супералгебрам Ли конструкция Вейсфейлера применяется буквально.

Условие 2) эквивалентно, см. [Кас2°], следующему, иногда более удобному, условию:

2′) для любого ненулевого $x \in M_k$ при $k \geqslant 0$, где $M_k = \mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{k+1}$, существует элемент $y \in M_{-1}$, такой что $[x, y] \neq 0$.

Когда L_0-модуль L_{-1} точен (это всегда так, если супералгебра Ли $\mathcal{L}$ проста), супералгебры Ли $\mathcal{L}$ и L можно реализовать *векторными полями* на супермногообразии, соответствующему линейному суперпространству $(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0)^* = (L/L_0)^*$ с формальными (соответственно, полиномиальными) коэффициентами. Поскольку мы в основном интересуемся простыми супералгебрами Ли, мы предположим, что L_0-модуль L_{-1} точен. Немедленно встает следующая проблема.

A′) Классифицировать простые W-градуированные векторные супералгебры как абстрактные, т. е. игнорируя различия в градуировках. Сразу же заметим, что такая постановка вопроса исключительно неестественна: совершенно различные алгебры векторных полей становятся эквивалентными. Например, уже в [ALSh°] мы отметили, что

---

[1] Другое изложение нашей классификации и ее истории см. в [Кас2°, CgK*, CChK°, CiKa*].

$\mathfrak{vect}(1|1)$ — алгебра Ли всех векторных полей на $\mathbb{C}^{1|1}$ — изоморфна, как абстрактная алгебра, супералгебре Ли $\mathfrak{k}(1|2)$ *контактных* векторных полей на $\mathbb{C}^{1|2}$, а также супералгебре Ли $\mathfrak{m}(1)$ контактных векторных полей тоже на $\mathbb{C}^{1|2}$, но совершенно другого типа. Таким образом, более естественной является следующая формулировка.

А) Классифицировать простые W-градуированные векторные супералгебры. В приложениях, однако, полные алгебры гораздо более важны и более естественны, чем ассоциированные с ними градуированные. Поэтому целью более разумной, чем задача А, является следующая задача.

Б) Классифицировать простые W-фильтрованные полные векторные супералгебры. Естественные «тривиальные» примеры таких алгебр: это алгебры, полученные в качестве ответа на задачу А, но у которых в качестве коэффициентов рассматриваются формальные ряды, а не полиномы. По дороге к решению задачи Б следующая задача может показаться естественным первым шагом.

Б$'$) Классифицировать простые W-фильтрованные полные векторные супералгебры как абстрактные, т. е. игнорируя различия в фильтрациях. Однако задача Б$'$ вовсе не проще задачи Б: в то время как разница между задачами А$'$ и Б$'$ такая же огромная, как между задачами А и Б, разница между задачами Б и Б$'$ пренебрежимо мала, если вообще существует. Действительно, невозможно решить задачу Б$'$ и не решить задачу Б. В самом деле, разные «фильтрованные деформации» не обязательно изоморфны как абстрактные алгебры, так что для того чтобы решить задачу Б$'$ нам надо прежде всего знать все W-фильтрации или ассоциированные с ними W-градуировки.

Однако даже задача Б не является наиболее естественной: существуют деформации алгебр из класса Б, которые не лежат в классе Б, например, результат факторизации проквантованной алгебры Пуассона, т. е. алгебры Ли дифференциальных операторов, по центру. Поэтому настоящая задача — следующая.

В) Классифицировать простые W-фильтрованные векторные супералгебры Ли и ВСЕ их деформации.

1.1а. Об обозначениях. В свое время мы подробно опишем все супералгебры Ли из таблиц нашей основной теоремы, а пока, чтобы легче было обозреть общую картину, проинформируем читателя немедленно, что наш главный пример $\mathfrak{vect}(m|n;\ r)$ — это супералгебра Ли векторных полей, чьи коэффициенты суть полиномы (или формальные степенные ряды, в зависимости от рассматриваемой ситуации) от m коммутирующих и n антикоммутирующих переменных с фильтрацией (и градуировкой), заданной тем, что степени r, где $0 \leqslant r \leqslant n$, нечетных переменных считаются равными 0, а степени всех прочих переменных равными 1. Перерградуировки остальных серий определяются аналогично. Если $r = 0$, то мы параметр r не указываем.

На векторных супералгебрах $\mathfrak{g}$ есть два аналога следа. Один определяется буквально так же, как для $\mathfrak{gl}(n)$, в том смысле, что он равен 0 на коммутаторах. Ядро следа обозначается $\mathfrak{g}'$. Другой аналог следа, менее похожий на tr буквально, но гораздо более похожий по смыслу и духу — это дивергенция. Бездивергентная (специальная) подалгебра в $\mathfrak{g}$ обозначается $\mathfrak{sg}$. В дальнейшем для любой супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ символ $\mathfrak{cg} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C} \cdot z$ или $\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ обозначает тривиальное центральное расширение с одномерным четным центром, порожденным элементом z.

Тавтологическое представление линейной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, т. е. подалгебры в $\mathfrak{gl}(V)$ в пространстве V, а иногда и сам модуль V, обозначается символом id или, для ясности, $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. Тривиальный одномерный четный модуль над простой алгеброй или супералгеброй Ли обозначается символом $\mathbb{C}$, а если $\mathfrak{g}_0$ содержит центральный элемент z, такой что $z|_{\mathfrak{g}_j} = j \cdot \mathrm{id}_{\mathfrak{g}_j}$, то символом $\mathbb{C}[k]$ обозначается $\mathfrak{g}_0$-модуль, тривиальный на полупростой части супералгебры Ли $\mathfrak{g}_0$, в котором z действует умножением на k.

В таблицах Д3.1—Д3.2 ниже выражение в скобках содержит суперразмерность суперпространства переменных, а точка с запятой отделяет суперразмерность от краткого описания перерградуировки, например, $\mathfrak{vect}(m|n;\ r)$.

Переходя от одной перерградуировки к другой, мы рассматриваем «минимальные» реализации (т. е. реализации с минимальной $\dim \mathcal{L}/\mathcal{L}_0$) в качестве точки отсчета; соответствующие градуировки и фильтрации назовем *стандартными*. Для исключительных супералгебр Ли часто более удобна другая точка отсчета, а именно: согласованная[1] градуировка K.

Перерградуировки серий управляются параметром r, подробно описанным в п. 1.2. Все перерградуировки даны в по возможности осмысленных обозначениях, например $\mathfrak{kas}^{\xi}(1|6;\ 3\eta)$ означает, что взяв супералгебру Ли $\mathfrak{kas}^{\xi}$ в качестве точки отсчета, мы полагаем $\deg \eta = 0$ для каждой из трех переменных η. Ясно, что указанные ограничения часто налагают некоторые (не указанные явно) ограничения на степени других переменных. Эти неуказанные ограничения подробно описаны ниже.

Исключительная градуировка Reg супералгебры $\mathfrak{h}_{\lambda}(2|2)$ описана походя в списке случайных изоморфизмов. Ее детальное описание дано для другой инкарнации этой алгебры, см. п. 1.2а.

---

[1] Символом K мы сперва обозначали согласованную с четностью (compatible) градуировку, записанную с русским акцентом по аналогии с ОК (oll korrekt, согласно легенде), а позже решили сохранить это обозначение, с тем, чтобы увековечить вклад В. Каца, а CK — исключительная градуировка, пропущенная нами и найденная Ш.-Дж. Ченгом (Cheng) и В. Кацом.

Таблица Д3.1 **(*S*) Серийные алгебры**

N	Семейство и условия его простоты
1	$\mathfrak{vect}(m\vert n;\ r)$ при $m\geqslant 1$ и $0\leqslant r\leqslant n$
FD	$\mathfrak{vect}(0\vert n;\ r)$ при $n>1$ и $0\leqslant r\leqslant n$
2	$\mathfrak{svect}(m\vert n;\ r)$ при $m>1$, $0\leqslant r\leqslant n$
FD	$\mathfrak{svect}(0\vert n;\ r)$ при $n>2$ и $0\leqslant r\leqslant n$
3	$\mathfrak{svect}'(1\vert n;\ r)$ при $n>1$, $0\leqslant r\leqslant n$
FD	$\widetilde{\mathfrak{s}}\mathfrak{vect}(n)$ при $n>2$
4	$\mathfrak{k}(2m+1\vert n;\ r)$ при $0\leqslant r\leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$, если $(m\vert n)\neq(0\vert 2k)$ $\mathfrak{k}(1\vert 2k;\ r)$ при $0\leqslant r\leqslant k$, кроме $r=k-1$
5	$\mathfrak{h}(2m\vert n;\ r)$ при $m>0$ и $0\leqslant r\leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$ $\mathfrak{h}_\lambda(2\vert 2;\ r)$ при $\lambda\neq 0,\ \pm1,\ -2,\ \infty$ и $r=0,\ 1$ и $\mathrm{Reg}_{\mathfrak{h}}$
FD	$\mathfrak{h}'(0\vert n)$ при $n>3$
6	$\mathfrak{m}(n\vert n+1;\ r)$ при $0\leqslant r\leqslant n$, кроме $r=n-1$
7	$\mathfrak{sm}(n\vert n+1;\ r)$ при $n>1$, но $n\neq 3$ и $0\leqslant r\leqslant n$, кроме $r=n-1$
8	$\mathfrak{b}_\lambda(n\vert n+1;\ r)$ при $n>1$, где $\lambda\neq 0,\ 1,\ \infty$ и $0\leqslant r\leqslant n$, кроме $r=n-1$ $\mathfrak{b}_\lambda(2\vert 3;\ r)$, где $\lambda\neq 0,\ \pm1,\ -2,\ \infty$ при $r=0,\ 2$ и E (см. 1.2а)
9	$\mathfrak{b}'_1(n\vert n+1;\ r)$ при $n>1$ и $0\leqslant r\leqslant n$, кроме $r=n-1$
10	$\mathfrak{b}'_\infty(n\vert n+1;\ r)$ при $n>1$ и $0\leqslant r\leqslant n$, кроме $r=n-1$
11	$\mathfrak{le}(n\vert n;\ r)$ при $n>1$ и $0\leqslant r\leqslant n$, кроме $r=n-1$
12	$\mathfrak{sle}'(n\vert n;\ r)$ при $n>2$ и $0\leqslant r\leqslant n$, кроме $r=n-1$
13	$\widetilde{\mathfrak{s}}\mathfrak{b}_\mu(2^{n-1}-1\vert 2^{n-1})$ при $\mu\neq 0$ и $n>2$

Таблица Д3.2 **(*E*) Исключительные алгебры**

Супералгебры Ли	Обозначения перерадуировок
$\mathfrak{vle}(4\vert 3;\ r)$, где $r=0,\ 1,\ K$	$\mathfrak{vle}(4\vert 3)$, $\mathfrak{vle}(5\vert 4)$ и $\mathfrak{vle}(3\vert 6)$
$\mathfrak{vas}(4\vert 4)$	$\mathfrak{vas}(4\vert 4)$
$\mathfrak{kas}(1\vert 6;\ r)$, где $r=0,\ 1\xi,\ 3\xi,\ 3\eta$	$\mathfrak{kas}(1\vert 6)$, $\mathfrak{kas}(5\vert 5)$, $\mathfrak{kas}(4\vert 4)$ и $\mathfrak{kas}(4\vert 3)$
$\mathfrak{mb}(4\vert 5;\ r)$, где $r=0,\ 1,\ K$	$\mathfrak{mb}(4\vert 5)$, $\mathfrak{mb}(5\vert 6)$ и $\mathfrak{mb}(3\vert 8)$
$\mathfrak{ksle}(9\vert 6;\ r)$, где $r=0,\ 2,\ K,\ CK$	$\mathfrak{ksle}(9\vert 6)$, $\mathfrak{ksle}(11\vert 9)$, $\mathfrak{ksle}(5\vert 10)$ и $\mathfrak{ksle}(9\vert 11)$

Некоторые алгебры являются «выпавшими» из серий. Например, $\mathfrak{svect}(1\vert n;\ r)$ «выпадает» из серии, поскольку $\mathfrak{svect}(m\vert n;\ r)$ не является простой при $m=1$, а содержит простой идеал $\mathfrak{svect}'(1\vert n;\ r)$. Конечномерные супералгебры Ли $\mathfrak{h}(0\vert n)$ гамильтоновых векторных полей тоже не являются простыми и содержат простой при $n>3$ идеал $\mathfrak{h}'(0\vert n)$.

Аналогично, супералгебры Ли $\mathfrak{le}(n\vert n;\ r)$, $\mathfrak{b}_1(n\vert n+1;\ r)$ и $\mathfrak{b}_\infty(n\vert n+1;\ r)$ «выпадают» из серии $\mathfrak{b}_\lambda(n\vert n+1;\ r)$ при $\lambda=0,\ 1$ и ∞ соответственно, поскольку содержат либо простой идеал коразмерности 1, либо центр, фактор по которому — простая супералгебра. Хотя супералгебры серии $\mathfrak{sm}$ не являются «выпавшими» по вышеприведенным соображениям, они выделены за их бездивергентность и, несомненно, заслуживают отдельной строки. Об этих «выпавших» алгебрах иногда говорят слишком легко, практически не делая различий между этими алгебрами и алгебрами из той серии, из которой они «выпали» за счет факторизации по модулю центра или будучи идеалами коразмерности 1. Сравните их с более привычными парами, разница между которыми, наоборот, подчеркивается: алгебра Пуассона $\mathfrak{po}$ и алгебра Ли $\mathfrak{h}$ гамильтоновых векторных полей, или алгебра петель и ассоциированная с ней аффинная алгебра Каца—Муди, или $\mathfrak{sl}(np)$ и $\mathfrak{psl}(np)$ над полем характеристики p.

Теорема (решение проблемы A, см. [LSh*]). *Простые W-градуированные векторные супералгебры $\mathfrak{g}$ составляют нижеприведенные серии (S, табл.* Д3.1) *и пять исключительных семейств из пятнадцати индивидуальных алгебр (E, табл.* Д3.2). *Они попарно неизоморфны как градуированные или фильтрованные супералгебры, за исключением случайных изоморфизмов, см. формулу* (Д3.3). *Параметры, при которых $\mathfrak{g}$ становится конечной, отмечены символом FD.*

Все эти алгебры являются либо картановскими продолжениями, либо результатом того или иного обобщения картановского продолжения (описанного ниже) и поэтому определяются своими членами $\mathfrak{g}_i$, где $i\leqslant 0$ (или $i\leqslant 1$ в некоторых случаях). Эти члены перечислены в пункте 1.3а, *и их вид может существенно различаться в зависимости от n и r, хотя они и составляют одно «семейство».*

Случайные изоморфизмы:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{vect}(1\vert 1)\cong\mathfrak{vect}(1\vert 1;\ 1);\\
&\mathfrak{svect}(2\vert 1)\cong\mathfrak{le}(2;\ 2);\ \ \mathfrak{svect}(2\vert 1;\ 1)\cong\mathfrak{le}(2)\\
&\mathfrak{sm}(n)\cong\mathfrak{b}_{2/(n-1)}(n);\ \ \text{в частности, } \mathfrak{sm}(2)\cong\mathfrak{b}_2(2)\text{, и}\\
&\mathfrak{sm}(3)\cong\mathfrak{b}_1(3)\text{, следовательно, } \mathfrak{sm}(3)\text{ не проста;}\\
&\mathfrak{sle}'(3)\cong\mathfrak{sle}'(3;\ 3);\\
&\mathfrak{b}_{1/2}(2;\ 2)\cong\mathfrak{h}_{1/2}(2\vert 2)=\mathfrak{h}(2\vert 2);\\
&\mathfrak{h}_\lambda(2\vert 2)\cong\mathfrak{b}_\lambda(2;\ 2);\ \ \ \mathfrak{h}_\lambda(2\vert 2;\ 1)\cong\mathfrak{b}_\lambda(2);\\
&\mathfrak{b}_{a,b}(2;\ E)\cong\mathfrak{b}_{-b,-a}(2)\cong\mathfrak{b}_{b,a}(2)\text{ для } a\neq b\text{ и } b\neq 0;\\
&\mathfrak{b}_{a,0}(2;\ E)\cong\mathfrak{le}(2)\text{ и }\mathfrak{b}_{a,a}(2;\ E)\cong\mathfrak{b}'_\infty(2);\\
&\mathfrak{h}_\lambda(2\vert 2)\cong\mathfrak{h}_{-1-\lambda}(2\vert 2),\ \ \text{следовательно, фундаментальные}\\
&\text{области — это }\ \mathrm{Re}\,\lambda\geqslant-\frac{1}{2}\ \text{ или }\ \mathrm{Re}\,\lambda\leqslant-\frac{1}{2},\ \ \text{в частности,}\\
&\mathfrak{b}_0(n)\simeq\mathfrak{b}_{-1}(n)\text{ и }\mathfrak{b}_1(n)\simeq\mathfrak{b}_{-2}(n);\\
&\widetilde{\mathfrak{s}}\mathfrak{b}_\mu(2^{n-1}-1\vert 2^{n-1})\cong\widetilde{\mathfrak{s}}\mathfrak{b}_\nu(2^{n-1}-1\vert 2^{n-1})\text{ для }\mu\nu\neq 0.
\end{aligned}\tag{Д3.3}$$

Хотя супералгебры $\mathfrak{b}_\lambda(2;\, r)$ и $\mathfrak{h}_\lambda(2|2;\, r)$ изоморфны, мы рассматриваем их отдельно, поскольку они сохраняют совершенно разные структуры (как, скажем, $\mathfrak{o}(3)$ и $\mathfrak{sl}(2)$). Происхождение таинственного в настоящий момент изоморфизма $\mathfrak{h}_\lambda(2|2) \cong \mathfrak{h}_{-1-\lambda}(2|2)$ объяснено в замечании 1.4г.

Замечания. 1) Изоморфные абстрактные супералгебры Ли могут быть совершенно разными как фильтрованные или градуированные: например, три градуировки устанавливают изоморфизмы абстрактных алгебр (см. [ALSh°]):

$$\mathfrak{k}(1|2) \cong \mathfrak{vect}(1|1) \cong \mathfrak{m}(1).$$

Заметим, что из этих трех неизоморфных градуированных алгебр только одна W-градуирована.

2) Исключенная градуировка супералгебры $\mathfrak{k}(1|2k;\, k-1)$ не является градуировкой Вейсфейлера: для нее $\mathfrak{g}_0$-модуль $\mathfrak{g}_{-1}$ приводим. Однако над $\mathbb{R}$ супералгебра $\mathfrak{k}(1|2k;\, k-1)$ является W-градуированной; эти вещественные формы как раз и рассматривают в работах физиков.

3) Супералгебра Ли $\widetilde{\mathfrak{svect}}(n)$, также как и $\widetilde{\mathfrak{sb}}_\mu(2^{n-1}-1|2^{n-1})$, зависит от нечетного параметра, когда n нечетен.

Вышеприведенные супералгебры Ли допускают иногда деформации, у которых нет фильтрации Вейсфейлера. Такие деформации (часто связанные с квантованием) детально рассмотрены в [ЛЩ°].

Всюду ниже мы непоследовательно сокращаем обозначения $\mathfrak{le}(n|n;\, r)$, $\mathfrak{m}(n|n+1;\, r)$, $\mathfrak{b}_\lambda(n|n+1;\, r)$ и т. п., то есть алгебры из табл. Д3.1 до $\mathfrak{le}(n;\, r)$, $\mathfrak{m}(n;\, r)$, $\mathfrak{b}_\lambda(n;\, r)$ и т. п., соответственно. Иногда вместо $\mathfrak{b}_\lambda(n;\, r)$, где $\lambda = \dfrac{2a}{n(a-b)} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, мы пишем для ясности $\mathfrak{b}_{a,b}(n;\, r)$, а параметры a, b проинтерпретированы в § 6.

Заметим, что исключительная градуировка $\mathrm{Reg}_{\mathfrak{b}}$ супералгебр Ли $\mathfrak{b}_\lambda(2)$ и изоморфизм $\mathfrak{h}_\lambda(2|2) \cong \mathfrak{b}_\lambda(2;\, 2)$ задают естественную градуировку $\mathrm{Reg}_{\mathfrak{h}}$ супералгебр Ли $\mathfrak{h}_\lambda(2|2)$. Эти переградуировки ($\mathrm{Reg}_{\mathfrak{b}}$ и $\mathrm{Reg}_{\mathfrak{h}}$) не являются, однако, важными с точки зрения классификации, благодаря случайным изоморфизмам (Д3.3). Однако при описании автоморфизмов супералгебры Ли $\mathfrak{h}_\lambda(2|2) \cong \mathfrak{b}_\lambda(2;\, 2)$, их, конечно, необходимо учесть.

Наши обозначения исключительных простых векторных супералгебр, хотя и отражают способ, которым они были построены, и сохраняемую ими геометрию (например, $\mathfrak{ksle}$ отражает то, что она является подалгеброй в какой-то контактной алгебре $\mathfrak{k}$ и имеет отношение к $\mathfrak{sle}$), длинноваты, однако писать кратко $\mathfrak{e}(\dim)$ — значит создавать путаницу в и без того сложных обозначениях: суперразмерности суперпространств $(\mathcal{L}/\mathcal{L})^*$, на которых супералгебра Ли $\mathcal{L}$ реализована векторными полями, иногда совпадают для различных переградуировок различных супералгебр. Так что слишком упрощать обозначения не сто́ит.

Задача. Описание неприводимых представлений простых векторных супералгебр было начато в [БЛ*] для общей серии $\mathfrak{vect}(m|n)$, следуя пионерским работам А. Н. Рудакова, который изучал алгебры Ли. Описание неприводимых представлений некоторых исключительных векторных супералгебр Ли см. в обзоре [GLS2*]. Исключительно интересный взгляд на задачу предложила В. Серганова в статье [Se3*]. Продолжить ее исследования — **важная задача**.

1.2. Нестандартные W-градуировки и фильтрации. В таблице Д3.3 перечислены все W-градуировки простых векторных супералгебр. В частности, градуировки серии $\mathfrak{vect}$ индуцируют градуировки в сериях $\mathfrak{svect}$, $\mathfrak{svect}'$ и исключительных алгебрах $\mathfrak{vle}(4|3)$ и $\mathfrak{vas}(4|4)$, градуировки в $\mathfrak{m}$ индуцируют градуировки в $\mathfrak{b}_\lambda$, $\mathfrak{le}$, $\mathfrak{sle}$, $\mathfrak{sle}'$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{sb}$, $\mathfrak{sb}'$ и исключительном семействе $\mathfrak{mb}$, а градуировки в $\mathfrak{k}$ индуцируют градуировки в супералгебрах Ли серий $\mathfrak{po}$ и $\mathfrak{h}$, и исключительных алгебрах $\mathfrak{kas}$ и $\mathfrak{ksle}$. О градуировках продеформированной супралгебры Ли $\widetilde{\mathfrak{svect}}(m)$ см. в п. 2.2.

Таблица Д3.3

Супералгебра Ли $\mathfrak{g}$	Вейсфейлеровы $\mathbb{Z}$-градуировки супералгебры $\mathfrak{g}$
$\mathfrak{vect}(n|m;\, r)$,	$\deg u_i = \deg \xi_j = 1$ для всех i, j $(*)$
$0 \leqslant r \leqslant m$	$\deg \xi_j = 0$ для $1 \leqslant j \leqslant r$; $\deg u_i = \deg \xi_{r+s} = 1$ для всех i, s
$\mathfrak{m}(n;\, r)$,	$\deg \tau = 2$, $\deg q_i = \deg \xi_i = 1$ для всех i $(*)$
$0 \leqslant r \leqslant n$ $r \neq n-1$	$\deg \tau = \deg q_i = 2$, $\deg \xi_i = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant r < n$; $\deg q_{r+j} = \deg \xi_{r+j} = 1$ для всех j
$\mathfrak{m}(1|n;\, n)$	$\deg \tau = \deg q_i = 1$, $\deg \xi_i = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant n$
$\mathfrak{k}(2n+1|m;\, r)$,	$\deg t = 2$, $\deg p_i = \deg q_i = \deg \xi_j = \deg \eta_j = \deg \theta_k = 1$ $(*)$ для всех i, j, k
$0 \leqslant r \leqslant \left[\dfrac{m}{2}\right]$ $r \neq k-1$ для $m = 2k$ и $n = 0$	$\deg t = \deg \xi_i = 2$, $\deg \eta_i = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant r \leqslant \left[\dfrac{m}{2}\right]$; $\deg p_i = \deg q_i = \deg \theta_j = 1$ для $j \geqslant 1$ и всех i
$\mathfrak{k}(1|2m;\, m)$	$\deg t = \deg \xi_i = 1$, $\deg \eta_i = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant m$

Переменные описаны в п. 2 ниже. В частности, мы рассматриваем супералгебру $\mathfrak{k}(2n+1|m)$, сохраняющую уравнение Пфаффа $\tilde{\alpha}(X) = 0$ на векторное поле $X \in \mathfrak{vect}(2n+1|m)$, где

$$\tilde{\alpha} = dt + \sum_{i \leqslant n}(p_i dq_i - q_i dp_i) + \sum_{j \leqslant r}(\xi_j d\eta_j + \eta_j d\xi_j) + \sum_{k \geqslant m-2r} \theta_k d\theta_k. \qquad (Д3.4)$$

Стандартные градуировки соответствуют случаю $r = 0$ и отмечены «звездочкой» $(*)$. Заметим, что в сериях коразмерность подалгебры $\mathcal{L}_0$ достигает своего минимума как раз в стандартной градуировке.

1.2а. Исключительная нестандартная перерадуировка $\mathrm{Reg}_{\mathfrak{b}}$. Эта перерадуировка супералгебры Ли $\mathfrak{b}_{a,b}(2)$, см. (Д3.46), задана условиями

$$\deg\tau=0;\quad \deg\xi_1=\deg\xi_2=-1;\quad \deg q_1=\deg q_2=1.$$

Таким образом, при $b=0$ или $a=b$ имеем

$$\mathfrak{b}_{a,0}(2;\ \mathrm{Reg}_{\mathfrak{b}})\cong\mathfrak{le}(2)\ \text{ и }\ \mathfrak{b}_{a,a}(2;\ \mathrm{Reg}_{\mathfrak{b}})\cong\mathfrak{b}^{\circ}_{\infty}(2),\quad \text{в частности,}\ \ \mathfrak{g}_{-2}=0;$$

при «общих» a и b имеем

$$\mathfrak{g}_{-2}=\mathrm{Span}\{\mathrm{Le}_{\xi_1\xi_2}\}\ \text{и}\ \mathfrak{g}_{-1}=\mathrm{Span}\{\mathrm{Le}_{\xi_1},\ \mathrm{Le}_{\xi_2},\ \mathrm{Le}_{Q_1},\ \mathrm{Le}_{Q_2}\},\tag{Д3.5}$$

где $Q_1=A\xi_1\xi_2q_1+B\tau\xi_2$, $Q_2=A\xi_1\xi_2q_2-B\tau\xi_1$, а A и B — какие-то коэффициенты, которые можно восстановить по a и b. Скобка в $\mathfrak{g}_{-1}$ задана нечетной формой $\omega=c\sum dQ_id\xi_i$ так, что $\mathfrak{g}_0$ должна содержаться в $\mathfrak{m}(2)_0$. Непосредственные вычисления показывают, что $\dim\mathfrak{g}_0=4|4$ и

$$\begin{gathered}\mathfrak{g}_0=\mathfrak{spe}(2)\oplus\mathbb{C}\cdot X,\quad \text{где } X=\mathrm{Le}_{a\tau+b\sum q_i\xi_i},\\ \mathfrak{spe}(2)_0\cong\mathfrak{sl}(2)=\mathrm{Span}\{\mathrm{Le}_{q_1\xi_2},\ \mathrm{Le}_{q_2\xi_1},\ \mathrm{Le}_{q_1\xi_1-q_2\xi_2}\},\\ \mathfrak{spe}(2)_{-1}=\mathbb{C}\cdot\mathrm{Le}_1,\quad \mathfrak{spe}(2)_1=\mathbb{C}\cdot\mathrm{Le}_{\alpha\xi_1\xi_2P(q)+\beta\tau\Delta(\xi_1\xi_2P(q))},\end{gathered}\tag{Д3.6}$$

где $P(q)$ — моном степени 2, а α, β — какие-то константы. Так как собственные значения оператора X на $\mathfrak{g}_{-1}$ и на $\mathfrak{g}_{-2}$ суть $-a+b$ и $a+b$, соответственно, то

$$\mathfrak{b}_{a,b}(2;\ E)\cong\mathfrak{b}_{-b,-a}(2)\cong\mathfrak{b}_{b,a}(2).\tag{Д3.7}$$

При $n>2$, а также для $\mathfrak{m}(n)$ при $n>1$, аналогичные перерадуировки не являются градуировками Вейсфейлера. Исключительная градуировка $\mathrm{Reg}_{\mathfrak{b}}$ супералгебры $\mathfrak{b}_\lambda(2)$ индуцирует исключительную градуировку $\mathrm{Reg}_{\mathfrak{h}}$ изоморфной супералгебры $\mathfrak{h}_\lambda(2|2)$, см. (Д3.3).

1.2б. W-перерадуировки исключительных алгебр.

Теорема ([Щ5ис°], [CChK°]). *W-перерадуировки исключительных простых векторных супералгебр заданы перерадуировками их «стандартных» «объемлющих» алгебр, перечисленными в табл.* Д3.4 *и* Д3.5.

В табл. Д3.4 пять семейств исключительных супералгебр Ли приведены в их минимальных реализациях в виде картановского продолжения $(\mathfrak{g}_{-1},\ \mathfrak{g}_0)_*$ или *обобщенного картановского продолжения* $(\mathfrak{g}_-,\ \mathfrak{g}_0)_*^{mk}$, что при $\mathfrak{g}_-=\bigoplus\limits_{-2\leqslant i\leqslant -1}\mathfrak{g}_i$ записано в виде $(\mathfrak{g}_{-2},\ \mathfrak{g}_{-1},\ \mathfrak{g}_0)_*^{mk}$. Указана также одна из супералгебр из списка (S) в табл. Д3.1 в качестве объемлющей, в которой указанная исключительная супералгебра является максимальной.

Некоторые перерадуировки объемлющих алгебр являются настолько нестандартными, что даже их однородные компоненты становятся бесконечномерными. В табл. Д3.5 градуировка $R=R(r)$ — функция от r из табл. Д3.4; над каждой переменной из табл. Д3.5 написана ее степень.

Таблица Д3.4 **($\boldsymbol{E\subset S}$)**

$\mathfrak{vle}(4\vert 3;\ r)=(\Pi(\Lambda(3))/\mathbb{C}\cdot 1,\ \mathfrak{cvect}(0\vert 3))_*\subset\mathfrak{vect}(4\vert 3;\ R)$ при $r=0,\ 1,\ K$
$\mathfrak{vas}(4\vert 4)=(\mathrm{spin},\ \mathfrak{as})_*\subset\mathfrak{vect}(4\vert 4)$
$\mathfrak{kas}^{\xi}(1\vert 6;\ r)\subset\mathfrak{k}(1\vert 6;\ r)$ при $r=0,\ 1\xi,\ 3\xi$ $\mathfrak{kas}^{\xi}(1\vert 6;\ 3\eta)=(\mathrm{Vol}_0(0\vert 3),\ \mathfrak{c}(\mathfrak{vect}(0\vert 3)))_*\subset\mathfrak{svect}(4\vert 3)$
$\mathfrak{mb}(4\vert 5;\ r)=(\mathfrak{ab}(4),\ \mathfrak{cvect}(0\vert 3))_*^{m}\subset\mathfrak{m}(4\vert 5;\ R)$ при $r=0,\ 1,\ K$
$\mathfrak{ksle}(9\vert 6;\ r)=(\mathfrak{hei}(8\vert 6),\ \mathfrak{svect}(0\vert 4)_{3,4})_*^{k}\subset\mathfrak{k}(9\vert 6;\ R)$ при $r=0,\ 2,\ CK$ $\mathfrak{ksle}(9\vert 6;\ K)=(\mathrm{id}_{\mathfrak{sl}(5)},\ \Lambda^2(\mathrm{id}^*_{\mathfrak{sl}(5)}),\ \mathfrak{sl}(5))_*^{k}\subset\mathfrak{svect}(5\vert 10;\ R)$

Таблица Д3.5 **($\boldsymbol{R}$)**

$\mathfrak{vle}(4\vert 3)$	$R(0)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&\vert&1&1&1\\ u_1&u_2&u_3&y&&\xi_1&\xi_2&\xi_3\end{pmatrix}$ $R(1)=\begin{pmatrix}2&1&1&0&\vert&0&1&1\\ u_1&u_2&u_3&y&&\xi_1&\xi_2&\xi_3\end{pmatrix}$ $R(K)=\begin{pmatrix}2&2&2&0&\vert&1&1&1\\ u_1&u_2&u_3&y&&\xi_1&\xi_2&\xi_3\end{pmatrix}$
$\mathfrak{mb}(4\vert 5)$	$R(0)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&\vert&1&1&1&1;&2\\ u_0&u_1&u_2&u_3&&\xi_0&\xi_1&\xi_2&\xi_3&\tau\end{pmatrix}$ $R(1)=\begin{pmatrix}0&2&1&1&\vert&2&0&1&1;&2\\ u_0&u_1&u_2&u_3&&\xi_0&\xi_1&\xi_2&\xi_3&\tau\end{pmatrix}$ $R(K)=\begin{pmatrix}0&2&2&2&\vert&3&1&1&1;&3\\ u_0&u_1&u_2&u_3&&\xi_0&\xi_1&\xi_2&\xi_3&\tau\end{pmatrix}$
$\mathfrak{kas}^{\xi}(1\vert 6)$	$R(0)=\begin{pmatrix}2&\vert&1&1&1&1&1&1\\ t&&\xi_1&\xi_2&\xi_3&\eta_1&\eta_2&\eta_3\end{pmatrix}$ $R(1\xi)=\begin{pmatrix}2&\vert&0&1&1&2&1&1\\ t&&\xi_1&\xi_2&\xi_3&\eta_1&\eta_2&\eta_3\end{pmatrix}$ $R(3\xi)=\begin{pmatrix}1&\vert&0&0&0&1&1&1\\ t&&\xi_1&\xi_2&\xi_3&\eta_1&\eta_2&\eta_3\end{pmatrix}$ $R(3\eta)=\begin{pmatrix}1&\vert&1&1&1&0&0&0\\ t&&\xi_1&\xi_2&\xi_3&\eta_1&\eta_2&\eta_3\end{pmatrix}$
$\mathfrak{ksle}(9\vert 6)$	$R(0)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1;&2&\vert&1&1&1&1&1&1\\ q_1&q_2&q_3&q_4&p_1&p_2&p_3&p_4&t&&\xi_1&\xi_2&\xi_3&\eta_1&\eta_2&\eta_3\end{pmatrix}$ $R(2)=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1&1&0&0;&2&\vert&0&1&1&2&1&1\\ q_1&q_2&q_3&q_4&p_1&p_2&p_3&p_4&t&&\xi_1&\xi_2&\xi_3&\eta_1&\eta_2&\eta_3\end{pmatrix}$ $R(K)=\begin{pmatrix}2&2&2&2&1&1&1&1;&2&\vert&1&1&1&1&1&1\\ q_1&q_2&q_3&q_4&p_1&p_2&p_3&p_4&t&&\xi_1&\xi_2&\xi_3&\eta_1&\eta_2&\eta_3\end{pmatrix}$ $R(CK)=\begin{pmatrix}3&2&2&2&0&1&1&1;&3&\vert&2&2&2&1&1&1\\ q_1&q_2&q_3&q_4&p_1&p_2&p_3&p_4&t&&\xi_1&\xi_2&\xi_3&\eta_1&\eta_2&\eta_3\end{pmatrix}$

Итак, с точки зрения классификации W-фильтрованных супералгебр Ли имеется пять *семейств* исключительных алгебр, состоящие из 15 индивидуальных алгебр.

1.3. Тензорные поля. Пусть ρ — представление группы $\mathrm{GL}(n)$ в пространстве V. *Тензорным полем типа* ρ или V на n-мерном связном многообразии M называется любое сечение t локально тривиального векторного расслоения на M со слоем V такое, что при любой замене координат $x \mapsto y$ имеет место равенство

$$t(y(x)) = \rho\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) t(x).$$

Пространство тензорных полей типа ρ или V обозначается символом $T(\rho)$ или $T(V)$. Если же V — неприводимый $\mathrm{GL}(n)$-модуль с **младшим** весом $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, то мы пишем $T(\lambda)$, а не $T(V)$ или $T(\rho)$. Над многообразиями обычно рассматривают лишь тензорные поля с конечномерным слоем V.

Напомним определение модулей тензорных полей над $\mathfrak{vect}(m|n)$ и ее подалгебрами, см. [GLS2*]. Как показано в [GLS2*], над супермногообразиями НЕ рассматривать тензорные поля с бесконечномерными слоями было бы большой ошибкой. Для любой другой $\mathbb{Z}$-градуированной векторной супералгебры Ли $\mathfrak{g} = \bigoplus\limits_{i \geqslant -d} \mathfrak{g}_i$ конструкция совершенно такая же. Ясно, что $\mathfrak{vect}_0(m|n) \cong \mathfrak{gl}(m|n)$. Пусть V есть $\mathfrak{g}_0$-модуль с *младшим* весом $\lambda = \mathrm{lwt}(V)$. Превратим V в $\mathfrak{g}_{\geqslant}$-модуль, где $\mathfrak{g}_{\geqslant} = \bigoplus\limits_{i \geqslant 0} \mathfrak{g}_i$, положив $\mathfrak{g}_+ \cdot V = 0$, где $\mathfrak{g}_+ = \bigoplus\limits_{i > 0} \mathfrak{g}_i$. Пусть супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ реализована векторными полями на $m|n$-мерном линейном супермногообразии $\mathcal{C}^{m|n}$ с координатами $x = (u, \xi)$. Суперпространство $T(V) = \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g}_{\geqslant})}(U(\mathfrak{g}), V)$ изоморфно, благодаря теореме Пуанкаре—Биркгофа—Витта, суперпространству $\mathbb{C}[[x]] \otimes V$. Его элементы естественно интерпретировать как формальные *тензорные поля типа* V. Если $\lambda = (a, \ldots, a)$, мы будем кратко писать $T(\vec{a})$ вместо $T(\lambda)$. Мы будем обычно рассматривать $\mathfrak{g}$-модули $T(V)$, отвечающие неприводимым $\mathfrak{g}_0$-модулям V.

Примеры. Суперпространство супералгебры Ли $\mathfrak{vect}(m|n)$, рассматриваемое как $\mathfrak{vect}(m|n)$- и $\mathfrak{svect}(m|n)$-модуль, — это $T(\mathrm{id})$; суперпространство функций — это $T(\vec{0}) = \Omega^0$. Пространство λ-плотностей — это $\mathrm{Vol}^\lambda(m|n) = T(\lambda, \ldots, \lambda; -\lambda, \ldots, -\lambda)$, где «;» отделяет первые m координат веса относительно матричных единиц E_{ii} в $\mathfrak{gl}(m|n)$ от остальных. В частности, $\mathrm{Vol}^\lambda(m|0) = T(\vec{\lambda})$, однако $\mathrm{Vol}^\lambda(0|n) = T\left(\overrightarrow{-\lambda}\right)$. Пусть $T_0(\vec{0}) = \Lambda(m)/\mathbb{C} \cdot 1$, а

$$\mathrm{Vol}_0(0|m) = \left\{ v \in \mathrm{Vol}(0|m) \;\middle|\; \int v = 0 \right\}. \tag{Д3.8}$$

Над $\mathfrak{svect}(0|m)$ пространства Vol и $T(\vec{0})$ изоморфны, поэтому определен модуль

$$T_0^0(\vec{0}) := \mathrm{Vol}_0(0|m)/\mathbb{C} \cdot 1. \tag{Д3.9}$$

1.3а. Несколько первых членов, которые определяют картановское и $\boldsymbol{mk}$-продолжения. (Ниже мы напомним определение картановского продолжения и обобщим его.) Чтобы облегчить сравнение разных векторных супералгебр, мы предлагаем табл. Д3.6. Наиболее интересные феномены происходят при крайних значениях параметра r и маленьких значениях суперразмерности $m|n$.

Выберем центральный элемент $z \in \mathfrak{g}_0$ так, что на $\mathfrak{g}_k$ он действует как $k \cdot \mathrm{id}$, а $\Lambda(r) = \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_r]$ — есть супералгебра Грассмана, причем $\deg \xi_i = 0$ при всех i. Пусть $\Lambda(0) = \mathbb{C}$.

Область значений параметра r есть множество целых точек отрезка $[0, m]$, где m — число нечетных переменных, для супералгебр Ли серий $\mathfrak{vect}$ и $\mathfrak{svect}$; отрезка $\left[0, \left[\dfrac{m}{2}\right]\right]$ для супералгебр Ли серий $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{h}$ и отрезка $[0, n]$ для супералгебр Ли $\mathfrak{m}(n)$, $\mathfrak{b}_\lambda(n)$ и их подалгебр, причем значение $r = n - 1$ запрещено. Запрещены те значения параметра r, при которых соответствующие градуировки не являются W-градуировками: $\mathfrak{g}_0$-модуль $\mathfrak{g}_{-1}$ приводим, в частности, $r \neq k - 1$ для $k(1|2k)$.

Сравнивая алгебры $\mathfrak{vect}(1|m; m)$ и $\mathfrak{k}(1|2m; m)$ из табл. Д3.6, можно подумать, что эти супералгебры Ли изоморфны, но это не так: достаточно сравнить положительные части. Первая из этих алгебр получается как частичное картановское продолжение той же неположительной части, что и $\mathfrak{k}(1|2m; m)$, и некоторого подмодуля в $\mathfrak{k}(1|2m; m)_1$. Простая исключительная супералгебра $\mathfrak{kas}$, введенная ниже, — другой пример частичного продолжения.

Мы полагаем $p(\mu) \equiv n \pmod 2$, так что μ может рассматриваться как дополнительная нечетная переменная. Супералгебры Ли $\widetilde{\mathfrak{svect}}_\mu(0|n)$ изоморфны при ненулевых значениях μ, следовательно, изоморфными являются также и супералгебры Ли $\widetilde{\mathfrak{sb}}_\mu(2^{n-1} - 1|2^{n-1})$ при разных $\mu \neq 0$. Поэтому при четном n мы можем считать, что $\mu = 1$, а если $p(\mu) = \bar{1}$, то мы будем рассматривать μ как дополнительную переменную, от которой зависят коэффициенты.

В приведенных таблицах предполагается, что $\lambda = \dfrac{2a}{n(a - b)} \neq 0,\ 1,\ \infty$, а три исключительных случая (отвечающих «выпавшим» из серий супералгебрам Ли $\mathfrak{le}(n)$, $\mathfrak{b}'_1(n)$ и $\mathfrak{b}'_\infty(n)$, соответственно) рассмотрены отдельно. Из условия неприводимости $\mathfrak{g}_0$-модуля $\mathfrak{g}_{-1}$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{b}'_\infty(n)$ следует, что случай $r = n - 1$ необходимо исключить. Случай $r = n - 2$ особо исключительный, поэтому в следующих таблицах мы предполагаем, что

$$\begin{aligned} &0 < r < n - 2; \quad \text{а кроме того, если не оговорено противное,} \\ &\qquad\qquad\qquad a \neq b \text{ и } (a, b) \neq \alpha(n, n - 2) \text{ для всех } \alpha \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{Д3.10}$$

Пусть V — тавтологическое $k|k$-мерное представление супералгебры Ли $\mathfrak{spe}(k)$, и пусть $d = \mathrm{diag}(1_k, -1_k) \in \mathfrak{pe}(k)$. Положим $W = V \otimes \Lambda(r)$

Таблица Д3.6

N	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_{-2}$	$\mathfrak{g}_{-1}$	$\mathfrak{g}_0$
1	$\mathfrak{vect}(n\vert m;\ r)$	–	$\mathrm{id}\otimes\Lambda(r)$	$\mathfrak{gl}(n\vert m-r)\otimes\Lambda(r)\inplus\mathfrak{vect}(0\vert r)$
2	$\mathfrak{vect}(1\vert m;\ m)$	–	$\Lambda(m)$	$\Lambda(m)\inplus\mathfrak{vect}(0\vert m)$
3	$\mathfrak{svect}(n\vert m;\ r),\ n\neq 1$	–	$\mathrm{id}\otimes\Lambda(r)$	$\mathfrak{sl}(n\vert m-r)\otimes\Lambda(r)\inplus\mathfrak{vect}(0\vert r)$
4	$\mathfrak{svect}'(1\vert m;\ r),\ r\neq m$	–	$\mathrm{id}\otimes\mathrm{Vol}_0(0\vert r)$	$\mathfrak{sl}(n\vert m-r)\otimes\Lambda(r)\inplus\mathfrak{vect}(0\vert r)$
5	$\mathfrak{svect}'(1\vert m;\ m)$	–	$\mathrm{Vol}_0(0\vert m)$	$\Lambda(m)\inplus\mathfrak{svect}(0\vert m)$
	$\mathfrak{svect}'(1\vert 2)$	–	$T_0\overrightarrow{(0)}$	$\mathfrak{vect}(0\vert 2)\cong\mathfrak{sl}(1\vert 2)$
	$\mathfrak{svect}(2\vert 1)$	–	$\Pi(T_0\overrightarrow{(0)})$	$\mathfrak{vect}(0\vert 2)\cong\mathfrak{sl}(2\vert 1)$
6	$\mathfrak{h}(2n\vert m)$	–	id	$\mathfrak{osp}(m\vert 2n)$
7	$\mathfrak{h}(2n\vert m;\ r)$	$T_0\overrightarrow{(0)}$	$\mathrm{id}\otimes\Lambda(r)$	$\mathfrak{osp}(m-2r\vert 2n)\otimes\Lambda(r)\inplus\mathfrak{vect}(0\vert r)$
8	$\mathfrak{h}(2n\vert 2r;\ r)$	–	$\mathrm{id}\otimes\Lambda(r)$	$\mathfrak{sp}(2n)\otimes\Lambda(r)\inplus\mathfrak{vect}(0\vert r)$
9	$\mathfrak{h}_\lambda(2\vert 2)$	–	$\Pi(\mathrm{Vol}^\lambda(0\vert 2))$	$\mathfrak{osp}(2\vert 2)\cong\mathfrak{vect}(0\vert 2)$
10	$\mathfrak{h}_\lambda(2\vert 2;\ 1)$	–	$\mathrm{id}_{\mathfrak{sp}(2)}\otimes\mathrm{Vol}^\lambda(0\vert 1)$	$\mathfrak{sp}(2)\otimes\Lambda(1)\inplus\mathfrak{vect}(0\vert 1)$
11	$\mathfrak{k}(2n+1\vert m;\ r)$, $r\neq k-1$, если $m=2k$ и $n=0$	$\Lambda(r)$	$\mathrm{id}\otimes\Lambda(r)$	$\mathfrak{cosp}(m-2r\vert 2n)\otimes\Lambda(r)\inplus\mathfrak{vect}(0\vert r)$
12	$\mathfrak{k}(1\vert 2m;\ m)$	–	$\Lambda(m)$	$\Lambda(m)\inplus\mathfrak{vect}(0\vert m)$
13	$\mathfrak{k}(1\vert 2m+1;\ m)$	$\Lambda(m)$	$\Pi(\Lambda(m))$	$\Lambda(m)\inplus\mathfrak{vect}(0\vert m)$
14	$\mathfrak{m}(n;\ r),\ r\neq n-1$	$\Pi(\Lambda(r))$	$\mathrm{id}\otimes\Lambda(r)$	$\mathfrak{cpe}(n-r)\otimes\Lambda(r)\inplus\mathfrak{vect}(0\vert r)$
15	$\mathfrak{m}(n;\ n)$	—	$\Pi(\Lambda(n))$	$\Lambda(n)\inplus\mathfrak{vect}(0\vert n)$
16	$\tilde{\mathfrak{sb}}_\mu(2^{n-1}-1\vert 2^{n-1})$	—	$\dfrac{\Pi(\mathrm{Vol}(0\vert n))}{\mathbb{C}(1+\mu\xi_1\ldots\xi_n)\,\mathrm{vol}(\xi)}$	$\tilde{\mathfrak{svect}}_\mu(0\vert n)$
17	$\mathfrak{le}(n)$	–	id	$\mathfrak{pe}(n)$
18	$\mathfrak{le}(n;\ r),\ r<n-1$	$\Pi(T_0\overrightarrow{(0)})$	$\mathrm{id}\otimes\Lambda(r)$	$\mathfrak{pe}(n-r)\otimes\Lambda(r)\inplus\mathfrak{vect}(0\vert r)$
19	$\mathfrak{le}(n;\ n)$	–	$\Pi(T_0\overrightarrow{(0)})$	$\mathfrak{vect}(0\vert n)$
20	$\mathfrak{sle}'(n),\ r<n-2$	–	id	$\mathfrak{spe}(n)$
21	$\mathfrak{sle}'(n;\ r)$	“$\Pi(T_0\overrightarrow{(0)})$”	“$\mathrm{id}\otimes\Lambda(r)$”	$\mathfrak{spe}(n-r)\otimes$ “$\Lambda(r)$”$\inplus T^1(\mathfrak{vect}(0\vert r))$
22	$\mathfrak{sle}'(n;\ n-2)$	“$\Pi(T_0\overrightarrow{(0)})$”	“$\mathrm{id}\otimes\Lambda(r)$”	см. (Д3.13)
23	$\mathfrak{sle}'(n;\ n)$	–	$\Pi(T_0^0\overrightarrow{(0)})$	$\mathfrak{svect}(0\vert n)$

и $D\in\mathfrak{vect}(0|r)$. Пусть $\Xi=\xi_1\cdots\xi_n\in\Lambda(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)$. Обозначим символом T^r представление супералгебры Ли $\mathfrak{vect}(0|r)$ в суперпространстве $\mathfrak{spe}(n-r)\otimes\Lambda(r)$, заданное формулой

$$T^r(D)=1\otimes D+d\otimes\frac{1}{n-r}\operatorname{div}D. \qquad (Д3.11)$$

$\underline{\text{В } \mathfrak{sle}'(n;\ r)_0 \text{ при } r\neq n-2}$:

$\mathfrak{vect}(0|r)$ действует на суперпространстве $\mathfrak{spe}(n-r)\otimes\Lambda(r)$ по представлению T^r; элемент $X\otimes f\in\mathfrak{spe}(n-r)\otimes\Lambda(r)$ действует на $\mathfrak{g}_{-1}$ как $\mathrm{id}\otimes f$, а на $\mathfrak{g}_{-2}$ — нулем; $D\in\mathfrak{vect}(0|r)$ действует в $\mathfrak{g}_{-1}$ по представлению T^r, а в $\mathfrak{g}_{-2}$ как D. (Д3.12)

$\underline{\text{В } \mathfrak{sle}'(n;\ n-2)_0}$ заметим, что $\mathfrak{spe}(2)\cong\mathbb{C}(\mathrm{Le}_{q_1\xi_1-q_2\xi_2})\inplus\mathbb{C}\cdot\mathrm{Le}_{\xi_1\xi_2}$, где $\mathfrak{g}_{-2}$ и $\mathfrak{g}_{-1}$ — такие же, как и выше при $r<n-2$. Положим $\mathfrak{h}=\mathbb{C}(\mathrm{Le}_{q_1\xi_1-q_2\xi_2})$. Тогда

$$\mathfrak{g}_0\cong\underline{\big(\mathfrak{h}\otimes\Lambda(n-2)\inplus\mathbb{C}\cdot\mathrm{Le}_{\xi_1\xi_2}\otimes(\Lambda(n-2)\setminus\mathbb{C}\cdot\xi_3\cdots\xi_n)\big)}\inplus T^1(\mathfrak{vect}(0|n-2)). \qquad (Д3.13)$$

Действия супералгебры Ли $\mathfrak{vect}(0|n-2)$ — фактора супералгебры $\mathfrak{g}_0$ по модулю подчеркнутого идеала в пространствах $\mathfrak{g}_i$ происходят по формуле (Д3.11). В подпространстве $\xi_1\xi_2\otimes\Lambda(n-2)\subset\mathfrak{g}_0$ это действие такое же, как в пространстве форм объема, поэтому мы можем рассмотреть в нем подпространство форм объема с интегралом 0 и ограничиться им.

В таблице Д3.6 член в кавычках означает суперпространство, изоморфное заключенному в кавычки, но с действием, заданным формулами (Д3.11) и (Д3.12).

$\underline{\mathfrak{b}_{a,b}(n;\ r) \text{ при } 0<r<n-2 \text{ и } ar-bn\neq 0}$. В частности, мы исключаем $\mathfrak{b}'_\infty(n;\ n)=\mathfrak{b}'_{a,a}(n;\ n)$ и $\mathfrak{b}'_1(n;\ n-2)=\mathfrak{b}'_{n,n-2}(n;\ n-2)$. Если z — центральный элемент в $\mathfrak{cspe}(n-r)$, который действует на $\mathfrak{g}_{-1}$ как $-\mathrm{id}$, то

$z\otimes\psi$ действует на $\mathfrak{g}_{-1}$ как $-\mathrm{id}\otimes\psi$, а на $\mathfrak{g}_{-2}$ как $-2\,\mathrm{id}\otimes\psi$. (Д3.14)

Если $ar-bn\neq 0$, то положим $c=\dfrac{a}{ar-bn}$. Пусть $a\cdot\mathrm{str}\otimes\mathrm{id}$ — представление супералгебры Ли $\mathfrak{pe}(n-r)=\mathfrak{spe}(n-r)\inplus\mathbb{C}\cdot d$, равное $\mathrm{id}_{\mathfrak{spe}(n-r)}$ на $\mathfrak{spe}(n-r)$ и переводящее d в $2a\cdot\mathrm{id}$. Напомним, что $\mathbb{C}[k]$ — это одномерный $\mathfrak{g}_0$-модуль такой, что k — это значение на нем центрального элемента z из $\mathfrak{g}_0$, выбранного так, чтобы $z|_{\mathfrak{g}_i}=i\cdot\mathrm{id}_{\mathfrak{g}_i}$.

Таблица Д3.7

N	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_{-2}$	$\mathfrak{g}_{-1}$	$\mathfrak{g}_0$
24	$\mathfrak{b}_\lambda(n)$	$\Pi(\mathbb{C}[-2])$	id	$\mathfrak{spe}(n)\inplus\mathbb{C}(az+bd)$
25	$\mathfrak{b}_\lambda(n;r)$, $r<n-2$	$\Pi((-c)\,\mathrm{str})\otimes\mathrm{Vol}^{2c}(0\vert r)$	$\Big(\Big(\Big(-\dfrac{c}{2}\Big)\,\mathrm{str}\Big)\otimes\mathrm{id}\Big)\otimes\mathrm{Vol}^c(0\vert r)$	$(\mathfrak{pe}(n-r)\otimes\Lambda(r))\inplus\mathfrak{vect}(0\vert r)$
26	$\mathfrak{b}_\lambda(n;n)$	—	$\Pi(\mathrm{Vol}^\lambda(0\vert n))$	$\mathfrak{vect}(0\vert n)$

В таблице Д3.8 член в кавычках обозначает суперпространство, изоморфное заключенному в кавычки, но с действием, заданным формулой (Д3.14). В исключительном случае $ar=bn$, т. е. при $\lambda=\dfrac{2}{n-r}$, действие алгебр Ли $\mathfrak{vect}(0|r)$ на идеале $\mathfrak{cspe}(n-r)\otimes\Lambda(r)\subsetplus\mathfrak{vect}(0|r)$ алгебр Ли $\mathfrak{g}_0$ и на $\mathfrak{g}_-$ такое же, как в случае $\mathfrak{sle}'$, см. формулу (Д3.12).

Таблица Д3.8

N	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_{-2}$	$\mathfrak{g}_{-1}$	$\mathfrak{g}_0$
27	$\mathfrak{b}_{2/(n-r)}(n;\ r)$, $r<n-2$	$\Pi(\mathbb{C})\otimes\Lambda(r)$	$\mathrm{id}\otimes$“$\Lambda(r)$”	$\mathfrak{cpe}(n-r)\otimes$ “$\Lambda(r)$” $\subsetplus T^r(\mathfrak{vect}(0|r))$
28	$\mathfrak{b}'_\infty(n)$	$\Pi(\mathbb{C})$	id	$\mathfrak{spe}(n)_{a,a}$
29	$\mathfrak{b}'_\infty(n;\ r)$, $r<n-2$	$\Pi(\mathbb{C})\otimes\Lambda(r)$	$\mathrm{id}\otimes\Lambda(r)$	$((\mathfrak{spe}(n-r)_{a,a})\otimes\Lambda(r))\subsetplus\mathfrak{vect}(0|r)$
30	$\mathfrak{b}'_\infty(n;\ n)$	—	$\Pi(\Lambda(n))$	$(\Lambda(n)\setminus\mathbb{C}\cdot\Xi)\subsetplus\mathfrak{svect}(0|n)$
31	$\mathfrak{b}'_1(n)$	$\Pi(\mathbb{C})$, $r<n-2$	id	$\mathfrak{spe}(n)_{n,n-2}$
32	$\mathfrak{b}'_1(n;\ r)$ $r<n-2$	“$\Pi(\mathrm{Vol}_0(0|r))$”	$\mathrm{id}\otimes$“$\Lambda(r)$”	$((\mathfrak{spe}(n-r)_{n,n-2})\otimes$ “$\Lambda(r)$”$)\subsetplus T^r(\mathfrak{vect}(0|r))$
33	$\mathfrak{b}'_1(n;\ n-2)$	“$\Pi(T_0\overrightarrow{(0)})$”	$\mathrm{id}\otimes$“$\Lambda(r)$”	(Д3.13) как в $N=32$ с заменой $\mathfrak{spe}(2)$ на $\mathfrak{cspe}(2)$
34	$\mathfrak{b}'_1(n;\ n)$	—	$\Pi(\mathrm{Vol}_0(0|n))$	$\mathfrak{vect}(0|n)$

1.3б. Исключительные супералгебры Ли. Заметим, что нет ни одной простой W-градуированной векторной супералгебры Ли глубины >3 и только у двух алгебр глубина равна 3: это $\mathfrak{mb}(4|5;\ K)$, для которой

$$\mathfrak{mb}(4|5;\ K)_{-3}\cong\Pi(\mathrm{id}_{\mathfrak{sl}(2)}),\tag{Д3.15}$$

и $\mathfrak{ksle}(9|6;\ CK)=\mathfrak{ksle}(9|11)$, для которой

$$\mathfrak{ksle}(9|11)_{-3}\simeq\Pi(\mathrm{id}_{\mathfrak{sl}(2)}\otimes\mathbb{C}[-3]).\tag{Д3.16}$$

Остальные члены $\mathfrak{g}_i$ при $-2\leqslant i\leqslant 0$ для 15-ти исключительных W-градуированных алгебр см. в таблице Д3.9.

1.3в. Исключительная подсупералгебра Ли $\mathfrak{kas}$ в $\mathfrak{k}(1|6)$. Так же как и $\mathfrak{vect}(1|m;\ m)$, эта супералгебра не определяется своей неположительной частью и заслуживает более пристального изучения. Супералгебра Ли $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}(1|2n)$ порождена функциями из $\mathbb{C}[t,\ \xi,\ \eta]$, где $\xi=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)$, $\eta=(\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n)$. Стандартная $\mathbb{Z}$-градуировка супералгебры $\mathfrak{g}$ индуцирована $\mathbb{Z}$-градуировкой в $\mathbb{C}[t,\ \xi,\ \eta]$, заданной формулами

$$\deg K_f=\deg f-2,\quad \text{где}\ \deg t=2,\quad \deg\xi_i=\deg\eta_i=1.$$

Ясно, что эта градуировка супералгебры Ли $\mathfrak{k}(1|2n)$ имеет глубину 2. Посмотрим на функции, которые порождают первые однородные компоненты супералгебре $\mathfrak{g}=\bigoplus\limits_{i\geqslant -2}\mathfrak{g}_i$:

Таблица Д3.9

Звездочка * в первом столбце напоминает о том, что в этих случаях глубина градуировки равна 3, см. (Д3.15) и (Д3.16).

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_{-2}$	$\mathfrak{g}_{-1}$	$\mathfrak{g}_0$	$\dim\mathfrak{g}_-$
$\mathfrak{vle}(4|3)$	–	$\Pi(\Lambda(3)/\mathbb{C}1)$	$\mathfrak{c}(\mathfrak{vect}(0|3))$	$4|3$
$\mathfrak{vle}(4|3;1)$	$\mathbb{C}[-2]$	$\mathrm{id}\otimes\Lambda(2)$	$\mathfrak{c}(\mathfrak{sl}(2)\otimes\Lambda(2)\subsetplus T^{1/2}(\mathfrak{vect}(0|2))$	$5|4$
$\mathfrak{vle}(4|3;K)$	$\mathrm{id}_{\mathfrak{sl}(3)}\otimes\mathbb{C}[-2]$	$\Pi(\mathrm{id}^*_{\mathfrak{sl}(3)}\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{sl}(2)}\otimes\mathbb{C}[-1])$	$\mathfrak{sl}(3)\oplus\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathbb{C}\cdot z$	$3|6$
$\mathfrak{vas}(4|4)$	–	spin	$\mathfrak{as}$	$4|4$
$\mathfrak{kas}^\xi$	$\mathbb{C}[-2]$	$\Pi(\mathrm{id})$	$\mathfrak{co}(6)$	$1|6$
$\mathfrak{kas}^\xi(;1\xi)$	$\Lambda(1)$	$\mathrm{id}_{\mathfrak{sl}(2)}\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{gl}(2)}\otimes\Lambda(1)$	$\mathfrak{sl}(2)\oplus(\mathfrak{gl}(2)\otimes\Lambda(1))\subsetplus\mathfrak{vect}(0|1)$	$5|5$
$\mathfrak{kas}^\xi(;3\xi)$	–	$\Lambda(3)$	$\Lambda(3)\oplus\mathfrak{sl}(1|3)$	$4|4$
$\mathfrak{kas}^\xi(;3\eta)$	–	$\mathrm{Vol}_0(0|3)$	$\mathfrak{c}(\mathfrak{vect}(0|3))$	$4|3$
$\mathfrak{mb}(4|5)$	$\Pi(\mathbb{C}[-2])$	$\mathrm{Vol}(0|3)$	$\mathfrak{c}(\mathfrak{vect}(0|3))$	$4|5$
$\mathfrak{mb}(4|5;1)$	$\Lambda(2)/\mathbb{C}\cdot 1$	$\mathrm{id}_{\mathfrak{sl}(2)}\otimes\Lambda(2)$	$\mathfrak{c}(\mathfrak{sl}(2)\otimes\Lambda(2)\subsetplus T^{1/2}(\mathfrak{vect}(0|2))$	$5|6$
$\mathfrak{mb}(4|5;K)^*$	$\mathrm{id}_{\mathfrak{sl}(3)}\otimes\mathbb{C}[-2]$	$\Pi(\mathrm{id}^*_{\mathfrak{sl}(3)}\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{sl}(2)}\otimes\mathbb{C}[-1])$	$\mathfrak{sl}(3)\oplus\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathbb{C}\cdot z$	$3|8$
$\mathfrak{ksle}(9|6)$	$\mathbb{C}[-2]$	$\Pi(T^0_0\overrightarrow{(0)})$	$\mathfrak{svect}(0|4)_{3,4}$	$9|6$
$\mathfrak{ksle}(9|6;2)$	$\Pi(\mathrm{id}_{\mathfrak{sl}(1|3)})$	$\mathrm{id}_{\mathfrak{sl}(2)}\otimes\Lambda(3)$	$(\mathfrak{sl}(2)\otimes\Lambda(3))\subsetplus\mathfrak{sl}(1|3)$	$11|9$
$\mathfrak{ksle}(9|6;K)$	id	$\Pi(\Lambda^2(\mathrm{id}^*))$	$\mathfrak{sl}(5)$	$5|10$
$\mathfrak{ksle}(9|6;CK)^*$	$\mathrm{id}^*_{\mathfrak{sl}(3)}\otimes\Lambda(1)$	$\mathrm{id}_{\mathfrak{sl}(2)}\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{sl}(3)}\otimes\Lambda(1)$	$\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(3)\otimes\Lambda(1)\subsetplus\mathfrak{vect}(0|1)$	$9|11$

(Д3.17)

компонента	$\mathfrak{g}_{-2}$	$\mathfrak{g}_{-1}$	$\mathfrak{g}_0$	$\mathfrak{g}_1$
ее базис	1	$\Lambda^1(\xi,\ \eta)$	$\Lambda^2(\xi,\ \eta)\oplus\mathbb{C}\cdot t$	$\Lambda^3(\xi,\ \eta)\oplus t\Lambda^1(\xi,\ \eta)$

Как легко проверить непосредственно, компонента $\mathfrak{g}_1$ порождает всю подалгебру $\mathfrak{g}_+$ элементов положительной степени. Компонента $\mathfrak{g}_1$ распадается на два $\mathfrak{g}_0$-модуля: $\mathfrak{g}_{11}=\Lambda^3$ и $\mathfrak{g}_{12}=t\Lambda^1$. Очевидно, что $\mathfrak{g}_{12}$ всегда неприводим, а компонента $\mathfrak{g}_{11}$ тривиальна при $n=1$.

Частичные картановские продолжения модулей $\mathfrak{g}_{11}$ и $\mathfrak{g}_{12}$ хорошо известны:

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{g}_-\oplus\mathfrak{g}_0,\ \mathfrak{g}_{11})^{mk}_*\cong\mathfrak{po}(0|2n)\oplus\mathbb{C}\cdot K_t\cong\mathfrak{d}(\mathfrak{po}(0|2n));\\&(\mathfrak{g}_-\oplus\mathfrak{g}_0,\ \mathfrak{g}_{12})^{mk}_*=\mathfrak{g}_{-2}\oplus\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_{12}\oplus\mathbb{C}\cdot K_{t^2}\cong\mathfrak{osp}(2n|2).\end{aligned}\tag{Д3.18}$$

Отметим исключительное свойство супералгебры Ли $\mathfrak{k}(1|6)$: только для нее компонента $\mathfrak{g}_{11}$ распадается на два неприводимых модуля, которые мы обозначим $\mathfrak{g}^\xi_{11}$ и $\mathfrak{g}^\eta_{11}$, поскольку один содержит $\xi_1\xi_2\xi_3$, а другой — $\eta_1\eta_2\eta_3$.

Отметим далее, что $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{co}(6) \cong \mathfrak{gl}(4)$. Как $\mathfrak{gl}(4)$-модули, пространства $\mathfrak{g}_{11}^{\xi}$ и $\mathfrak{g}_{11}^{\eta}$ суть $S^2(\mathrm{id})$ и $S^2(\mathrm{id}^*)$, т. е. симметрические квадраты тавтологического четырехмерного представления и двойственного к нему.

Теорема ([Щ5ис°]). *Картановское продолжение*

$$\mathfrak{kas}^{\xi} = (\mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0,\ \mathfrak{g}_{11}^{\xi} \oplus \mathfrak{g}_{12})_*^{mk}$$

— бесконечномерная и простая супералгебра Ли. Она изоморфна супералгебре Ли $\mathfrak{kas}^{\eta} = (\mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0,\ \mathfrak{g}_{11}^{\eta} \oplus \mathfrak{g}_{12})_*^{mk}$.

Когда не имеет значения, какую из изоморфных алгебр $\mathfrak{kas}^{\xi} \simeq \mathfrak{kas}^{\eta}$ мы рассматриваем, мы просто пишем $\mathfrak{kas}$.

Явная реализация этих алгебр производящими функциями и некоторые их структуры описаны для струнных «родственниц» этих алгебр в [GLS1°]. Отметим таинственную разницу в заданиях образующими и соотношениями между супералгеброй $\mathfrak{kas}$, порожденной многочленами, и супералгеброй $\mathfrak{kas}^L$, порожденной лорановскими многочленами: мы предполагаем 1), что между образующими алгебры $\mathfrak{kas}$ (которых конечное число) имеется бесконечно много соотношений, в то время как $\mathfrak{kas}^L$ конечно представлена.

1.4. Теорема Грозмана и описание супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ в терминах $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ и $\mathfrak{g}_{\bar 1}$. В [CChK°] исключительные простые векторные супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ описаны в терминах компонент $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ и $\mathfrak{g}_{\bar 1}$. Для большинства серий такое описание представляет незначительную ценность, поскольку каждая однородная компонента $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ и $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ имеет замысловатую структуру. Для исключений же (а также для скрученных поливекторных полей), ситуация совершенно другая! Заметим, что такое описание не только красиво, но и полезно, например, для конструкции простых *алгебр Воличенко* (неоднородных относительно четности подалгебр простых супералгебр Ли).

Отметим в этой связи теорему Грозмана. Он полностью описал билинейные дифференциальные операторы, действующие в тензорных полях на многообразиях и инвариантные относительно всех замен координат. Оказалось, что хотя в формулировке задачи никаких «суперов» нет, почти все операторы 1-го порядка задают на своей области определения структуру супералгебры Ли. Некоторые из этих супералгебр Ли просты или близки к простым. В конструкциях, приведенных ниже, мы используем часть этих инвариантных операторов.

Под *тензорными полями* на многообразии M мы понимаем сечения расслоения $E_q^p(M) = (TM)^{\otimes p} \otimes_{\Omega^0} (TM^*)^{\otimes q}$, возможно, подкрученные на μ-плотности, т. е. $E_q^p(M) \otimes_{\Omega^0} \mathrm{Vol}^{\mu}$.

Примеры. Пространство r-векторных полей — это $L^r = E_{\Omega^0}^r(\mathfrak{vect}(n)) = T(-1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0)$ с r минус-единицами. *Пространства скрученных r-форм и скрученных r-векторных полей с подкруткой* μ обозначим символами $\Omega_{\mu}^r = \Omega^r \otimes_{\Omega^0} \mathrm{Vol}^{\mu}$ и $L_{\mu}^r = L^r \otimes_{\Omega^0} \mathrm{Vol}^{\mu}$, соответственно. Очевидно, что если $\dim M = n$, то $L_{\mu}^r \simeq \Omega_{\mu-1}^{n-r}$ и $\mathrm{Vol}^1 = \Omega^n$.

---

1) Прояснить ответ — **открытая задача**.

А. А. Кириллов заметил, что с помощью инвариантного относительно замен переменных спаривания (спариваем послойно и интегрируем, что возможно, благодаря индексу *comp* над одним из спаривающихся пространств, указывающему, что рассматриваются лишь тензорные поля с компактным носителем)

$$(\cdot\,,\cdot)\colon \Gamma^{comp}(M,\ E_q^p(M)) \times \Gamma(M,\ E_p^q) \otimes_{\Omega^0} \mathrm{Vol}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

можно каждому билинейному оператору B сопоставить операторы двойственные относительно первого или второго аргумента и обозначаемые B^{*1} и B^{*2} соответственно. Ясно, что если оператор B инвариантен, то инвариантны и двойственные ему. П. Я. Грозман показал, что оператор, известный как «лагранжев конкомитант» двойственен производной Ли, а операторы, двойственные к каждому из двух конкомитантов Схоутена и скобке Нийенхёйса (Nijenhuis) — новые.

Следующее утверждение — часть замечательного результата Грозмана [Gr*]. Чтобы описать оператор P_4, мы отождествляем $\Omega^{\boldsymbol{\cdot}} \otimes_{\Omega^0} \mathfrak{vect}(M)$ с подсупералгеброй Ли векторных полей $\mathfrak{vect}(\widehat{M})$; напомним, что $\widehat{M}$ — это супермногообразие $(M,\ \Omega^{\boldsymbol{\cdot}}(M)) = (M,\ \Lambda^{\boldsymbol{\cdot}}(T^*M))$ с координатами x_i и $\widehat{x}_i = dx_i$. Централизатор дифференциала есть

$$C(d) = \{D \in \mathfrak{vect}(\widehat{M}) \mid [D,\ d] = 0\}. \tag{Д3.19}$$

Скобка в $C(d)$ называется *скобкой Нийенхёйса*. Эта скобка является линейной комбинацией описанных ниже операторов P_1, P_1^{*1}, их композиции с оператором перестановки

$$S_{12}\colon T(V) \otimes T(W) \longrightarrow T(W) \otimes T(V)$$

и неким «неприводимым» (т. е. не являющимся суммой операторов, образ каждого из которых — пространство тензорных полей со слоем, неприводимым относительно действия группы $\mathrm{GL}(n)$) оператором P_4.

1.4а. Утверждение ([Gr*]). *Следующие дифференциальные операторы первого порядка исчерпывают, с точностью до дуализации и перестановки аргументов, все билинейные дифференциальные операторы 1-го порядка* $D\colon T(\rho_1) \otimes T(\rho_2) \to T(\rho_3)$ *инвариантные относительно произвольных замен переменных*:

$\mathbf{P}_1\colon \Omega^r \otimes T(\rho_2) \to T(\rho_3), \quad (w,\ t) \mapsto Z(dw,\ t),$

где Z — оператор 1-го порядка, представляющий собой продолжение проекции $\rho_1 \otimes \rho_2 \to \rho_3$ на любую неприводимую компоненту;

P₂: $\mathrm{Vect} \otimes T(\rho) \to T(\rho)$ — производная Ли;

P₃: $T(S^p(\mathrm{id}^*)) \otimes T(S^q(\mathrm{id}^*)) \to T(S^{p+q-1}(\mathrm{id}^*))$ — скобка Пуассона;

P₄: *неприводимая компонента скобки Нийенхёйса, см. абзац под формулой* (Д3.19).

P₅: $\Omega^p \otimes \Omega^q \to \Omega^{p+q+1}$;

$$\omega_1,\, \omega_2 \mapsto (-1)^{p(\omega_1)} a(d\omega_1 \wedge \omega_2) + b(\omega_1 \wedge d\omega_2), \quad \textit{где } a,\, b \in \mathbb{C};$$

P₆: $\Omega^p_\mu \otimes \Omega^q_\nu \to \Omega^{p+q+1}_{\mu+\nu}$, *где* $|\mu|^2 + |\nu|^2 \neq 0$ *и* $p + q < n$ *дается формулой*

$$\omega_1 \operatorname{vol}^\mu,\, \omega_2 \operatorname{vol}^\nu \mapsto ((-1)^{p(\omega_1)} \nu d\omega_1 \wedge \omega_2 - \mu\omega_1 \wedge d\omega_2) \operatorname{vol}^{\mu+\nu};$$

P₇: $L^p \otimes L^q \to L^{p+q-1}$ — скобка Схоутена;

P₈: $L^p_\mu \otimes L^q_\nu \to L^{p+q-1}_{\mu+\nu}$ — *обобщение скобки Схоутена* (*на многообразиях при* $p + q \leqslant n$, *а на супермногообразиях размерности* $n|1$ *при* $p,\, q \in \mathbb{C}$), *заданное формулой*

$$X \operatorname{vol}^\mu,\, Y \operatorname{vol}^\nu \mapsto ((\nu - 1)(\mu + \nu - 1) \operatorname{div} X \cdot Y + \\ + (-1)^{p(X)}(\mu - 1)(\mu + \nu - 1) X \operatorname{div} Y - (\mu - 1)(\nu - 1) \operatorname{div}(XY)) \operatorname{vol}^{\mu+\nu},$$

где дивергенция поливекторного поля *задана в локальных координатах* $(x,\, \check{x})$ *на супермногообразии* $\check{M} = (M,\, \Lambda^\bullet(TM))$ *оператором* (*см. замечание* 3.1 *ниже*)

$$\Delta = \sum_{i \leqslant n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial \check{x}_i}. \tag{Д3.20}$$

Физики называют оператор (Д3.20) *BRST-оператором*, см. [GPS°] (в честь Becchy, Rouet, Stora и Тютина), или *оператором Баталина—Вилковысского*. Отметим, что Δ есть *Фурье-образ* (относительно «ду́ховых переменных» $\check{x}_i = \Pi(\partial_{x_i})$, нечетных, если поливекторные поля рассматриваются на многообразии) внешнего дифференциала d.

1.4б. Утверждение. *Следующие естественные инвариантные операторы задают на своей области определения структуру супералгебры Ли. Некоторые из этих супералгебр близки к простым*:

P_3 *и* P_4 (*точнее, не* P_4, *а скобка Нийенхёйса*). *Векторная супералгебра* $C(d)$ *не является, однако, транзитивной.*

P_5: *при* $ab = 0$ *оператор задает структуру ассоциативной супералгебры*; *при* $a = b$ *создает структуру нильпотентной супералгебры Ли на* $\Pi(\Omega^\bullet)$. *Оператор*

$$P\colon \omega_1,\, \omega_2 \mapsto (d\omega_1)\omega_2 - \omega_1 d\omega_2 \tag{Д3.21}$$

задает структуру алгебры Ли (*не супералгебры*).

P_6, *умноженный на* $\dfrac{\mu - \nu}{\mu\nu}$, *задает структуру нильпотентной супералгебры Ли на суперпространствах*

$$\begin{gathered} \Pi\Big(\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} \Omega^\bullet \otimes \mathrm{Vol}^\lambda\Big)/d\Omega^\bullet, \\ \Omega^\bullet_+ = \Pi\Big(\bigoplus_{\lambda > 0;\, \lambda \in \mathbb{R}} \Omega^\bullet \otimes \mathrm{Vol}^\lambda\Big), \quad \Omega^\bullet_- = \Pi\Big(\bigoplus_{\lambda < 0;\, \lambda \in \mathbb{R}} \Omega^\bullet \otimes \mathrm{Vol}^\lambda\Big). \end{gathered} \tag{Д3.22}$$

P_6, *умноженный на* $\dfrac{\mu - \nu}{\mu + \nu}$, *задает структуру нильпотентной супералгебры Ли на*

$$\Pi\Big(d\Omega^\bullet \oplus \bigoplus_{\lambda \neq 0;\, \lambda \in \mathbb{R}} \Omega^\bullet \otimes \mathrm{Vol}^\lambda\Big).$$

P_7 *задает супералгебру Ли* $\mathfrak{b}(n)$.

P_8, *умноженный на* $\dfrac{1}{\mu\nu}$, *задает структуру нильпотентной супералгебры Ли на* $\Omega^\bullet_+$ *и* $\Omega^\bullet_-$, *см.* (Д3.22).

Упражнение. Как выразить скобку в $\mathfrak{b}_\lambda(n)$ в терминах оператора P_8? Ответ см. в [Gr*].

1.4в. В дополнение к W-градуировкам, мы иногда рассматриваем градуировки, которые выводят наши супералгебры Ли из класса алгебр полиномиального роста, а именно: мы полагаем $\deg x_i = 0$ для некоторых **четных** переменных x. Если мы делаем так с r из них, то обозначим такую градуировку символом $\bar{r}$. В этих терминах исключительные векторные супералгебры и $\mathfrak{b}_\lambda(n;\, \bar{n})$ выглядят следующим образом (где не указанная явно скобка задается оператором P_6 или P_7):

$\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{ksle}(5|10;\, \bar{5})}$: $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{svect}(5|0) \simeq d\Omega^4$, $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \Pi(d\Omega^1)$ с естественным $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-действием на $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$, а скобкой двух нечетных элементов является их произведение; мы полагаем при этом, что

$$dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k \wedge dx_l \otimes \operatorname{vol}^{-1} = \operatorname{sign}(ijklm) \frac{\partial}{\partial x_m}$$

для любой перестановки $(ijklm)$ индексов (12345).

$\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{vas}(4|4;\, \bar{4})}$: $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{vect}(4|0)$, и $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \Omega^1 \otimes \mathrm{Vol}^{-1/2}$ с естественным $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-действием на $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$, а скобка нечетных элементов задана формулой

$$\Big[\frac{\omega_1}{\sqrt{\operatorname{vol}}},\, \frac{\omega_2}{\sqrt{\operatorname{vol}}}\Big] = \frac{d\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge d\omega_2}{\operatorname{vol}},$$

где для любой перестановки $(ijkl)$ индексов (1234) мы полагаем, что

$$\frac{dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k}{\mathrm{vol}} = \mathrm{sign}(ijkl)\frac{\partial}{\partial x_l}.$$

$\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{vle}(3|6;\ \bar{3})}$: $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{vect}(3|0) \oplus \mathfrak{sl}(2)^{(1)}_{\geqslant 0}$, где $\mathfrak{g}^{(1)}_{\geqslant 0} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[x_1,\, x_2,\, x_3]$, а

$$\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \left(\Omega^1 \otimes \mathrm{Vol}^{-1/2}\right) \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{sl}(2)^{(1)}_{\geqslant 0}} \quad \text{с естественным } \mathfrak{g}_{\bar{0}}\text{-действием на } \mathfrak{g}_{\bar{1}}.$$

Напомним, что $\mathrm{id}_{\mathfrak{sl}(2)}$ — это неприводимый $\mathfrak{sl}(2)$-модуль L^1 со старшим весом 1, а его тензорный квадрат разлагается на $L^2 \simeq \mathfrak{sl}(2)$ и тривиальный модуль L^0. Обозначим, соответственно, символами $v_1 \wedge v_2$ и $v_1 \circ v_2$ проекции вектора $v_1 \otimes v_2 \in L^1 \otimes L^1$ на кососимметрическую и симметрическую компоненты соответственно. Для любых $f_1,\, f_2 \in \Omega^0$, $\omega_1,\, \omega_2 \in \Omega^1$ и $v_1,\, v_2 \in L^1$ положим

$$\left[\frac{\omega_1 \otimes v_1}{\sqrt{\mathrm{vol}}},\, \frac{\omega_2 \otimes v_2}{\sqrt{\mathrm{vol}}}\right] = \frac{(\omega_1 \wedge \omega_2) \otimes (v_1 \wedge v_2) + (d\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge d\omega_2) \otimes (v_1 \circ v_2)}{\mathrm{vol}},$$

где мы отождествляем Ω^0 с $\Omega^3 \otimes_{\Omega^0} \mathrm{Vol}^{-1}$, а $\Omega^2 \otimes_{\Omega^0} \mathrm{Vol}^{-1}$ с $\mathfrak{vect}(3|0)$, полагая

$$\frac{dx_i \wedge dx_j}{\mathrm{vol}} = \mathrm{sign}(ijk)\frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{для любой перестановки } (ijk) \text{ индексов (123).}$$

$\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{mb}(3|8;\ \bar{3})}$: см. [LSh*], где исправлена неточная формула из [CChK°].

$\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{kas}(;\ \bar{1})}$: $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{vect}(1|0) \oplus \mathfrak{sl}(4)^{(1)}_{\geqslant 0}$, где $\mathfrak{sl}(4)^{(1)}_{\geqslant 0} = \mathfrak{sl}(4) \otimes \mathbb{C}[x]$, а $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1$, где $\mathfrak{g}_{-1} = \Lambda^2\left(\mathrm{id}_{\mathfrak{sl}(4)^{(1)}_{\geqslant 0}}\right)$ и $\mathfrak{g}_1 = S^2\left(\mathrm{id}^*_{\mathfrak{sl}(4)^{(1)}_{\geqslant 0}}\right)$. Ясно, что можно изменить градуировку, поменяв местами $\mathfrak{g}_{\pm 1}$.

Умножение естественное: скобка элементов из $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_{-1}$ (или наоборот) — это произведение кососимметрической матрицы на симметрическую (или наоборот); а действие алгебры Ли $\mathfrak{sl}(4)^{(1)}_{\geqslant 0}$ на $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ является естественным действием в пространстве билинейных форм (или двойственным к нему). Алгебра Ли $\mathfrak{vect}(1|0)$ действует на функциях-коэффициентах.

$\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{b}_\lambda(n;\ \bar{n})}$: мы получаем, что $\mathfrak{g}_i = (\Pi(\Lambda^i(\mathfrak{vect}(n|0))) \otimes \mathrm{Vol}^{(i-1)\lambda}$ при $i = 0,\, \ldots,\, n$; умножение задано оператором P_8.

1.4г. Замечание. Рассмотрим случай $n = 2$ более внимательно. Очевидно, что мы можем переставить члены $\mathfrak{g}_{\pm 1}$. Эта возможность и объясняет таинственный изоморфизм $\mathfrak{b}_\lambda(2;\ \bar{2}) \simeq \mathfrak{b}_{-1-\lambda}(2;\ \bar{2})$, отмеченный в п. Д3.2. В частности, мы получаем дополнительный внешний автоморфизм супералгебры $\mathfrak{b}_{-1/2}(2;\ \bar{2})$, а при $\lambda = \frac{1}{2}$ и $\lambda = -\frac{3}{2}$ имеется нетривиальное центральное расширение, см. [ЛЩ°]; кроме того, количество особых значений параметра λ возрастает: к 0, 1 и ∞ добавляется -1 и -2.

§ 2. Векторные супералгебры. Стандартная реализация

2.1. Общие алгебры. Пусть $x = (u_1,\, \ldots,\, u_n,\, \theta_1,\, \ldots,\, \theta_m)$, где u_i — четные переменные, а θ_j — нечетные. Положим $\mathfrak{vect}(n|m) = \mathfrak{der}\ \mathbb{C}[x]$. Она называется *общей* векторной супералгеброй.

2.2. Специальные алгебры. На векторных супералгебрах Ли, кроме следа, есть еще один аналог следа — *дивергенция*, которая полю $D = \sum\limits_i f_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum\limits_j g_j \frac{\partial}{\partial \theta_j}$ сопоставляет функцию

$$\mathrm{div}\, D = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial u_i} + \sum_j (-1)^{p(g_j)} \frac{\partial g_i}{\partial \theta_j}. \tag{Д3.23}$$

Интерпретацию дивергенции как «картановского продолжения следа» см. в [ILMS°, Leb°].

- Супералгебра Ли

$$\mathfrak{svect}(n|m) = \{D \in \mathfrak{vect}(n|m) \mid \mathrm{div}\, D = 0\}$$

называется *специальной* (или *бездивергентной*) векторной супералгеброй. Ясно, что $\mathfrak{svect}(n|m)$ можно также описать как

$$\{D \in \mathfrak{vect}(n|m) \mid L_D\, \mathrm{vol}(x) = 0\},$$

где $\mathrm{vol}(x)$ — форма объема с постоянными коэффициентами в координатах x, а L_D — производная Ли вдоль D.

- Супералгебра Ли

$$\mathfrak{svect}_\lambda(0|m) = \{D \in \mathfrak{vect}(0|m) \mid \mathrm{div}(1 + \lambda\theta_1 \cdot \ldots \cdot \theta_m)D = 0\},$$

где $p(\lambda) \equiv m \pmod 2$, — деформация супералгебры $\mathfrak{svect}(0|m)$. Она называется *деформированной специальной* (или *бездивергентной*) векторной супералгеброй. Ясно, что $\mathfrak{svect}_\lambda(0|m) \cong \mathfrak{svect}_\mu(0|m)$ при $\lambda\mu \neq 0$, так что мы кратко обозначим все эти изоморфные алгебры символом $\widetilde{\mathfrak{svect}}(m)$. Заметим, что если m нечетно, то и параметр деформации λ нечетен.

Замечание. Как обычно в дифференциальной геометрии, мы иногда пишем $\mathfrak{vect}(x)$ или $\mathfrak{vect}(V)$, если $V = \mathrm{Span}(x)$ и используем аналогичные обозначения для подалгебр супералгебры серии $\mathfrak{vect}$, определенных ниже. Алгебраисты иногда сокращают $\mathfrak{vect}(n)$ до W_n (в честь Витта), а $\mathfrak{svect}(n)$ — до S_n для краткости.

С W-фильтрацией минимальной коразмерности супералгебры Ли $\widetilde{\mathfrak{svect}}(m)$ ассоциирована $\mathbb{Z}$-градуированная супералгебра Ли, изоморфная $\mathfrak{svect}(0|m)$. Положив

$$\deg\theta_i = 1 \begin{cases} \text{для всех } i, \text{ кроме } i = m, & \text{а } \deg\theta_m = 1 - m, \text{ если } m \text{ четно},\\ \text{для всех } i, & \text{а } \deg\theta_m = -m, \quad \text{если } m \text{ нечетно}, \end{cases} \tag{Д3.24}$$

мы наделяем $\mathbb{Z}$-градуировкой саму алгебру $\widetilde{\mathfrak{svect}}(m)$.

2.3. Алгебры, сохраняющие уравнение Пфаффа и дифференциальные 2-формы. 1) Положим $u = (t, p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$. Пусть

$$\tilde{\alpha}_1 = dt + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} (p_i dq_i - q_i dp_i) + \sum_{1\leqslant j\leqslant m} \theta_j d\theta_j \quad \text{и} \quad \tilde{\omega}_0 = d\tilde{\alpha}_1. \qquad (\text{Д}3.25)$$

Форма $\tilde{\alpha}_1$ называется *контактной*, а форма $\tilde{\omega}_0$ — *симплектической*. Иногда удобно переобозначить переменные θ. Положим $\Theta = (\xi, \eta)$, где

$$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_j - i\theta_{r+j}); \quad \eta_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_j + i\theta_{r+j}) \text{ при } j \leqslant r = \left[\frac{m}{2}\right] \text{ (здесь } i^2 = -1),$$

а если $m = 2r + 1$, то положим $\Theta = \Theta(\xi, \eta, \theta)$, где $\theta = \theta_{2r+1}$, а вместо $\tilde{\omega}_0$ или $\tilde{\alpha}_1$ возьмем α_1 и $\omega_0 = d\alpha_1$ соответственно, где

$$\begin{aligned}\alpha_1 = dt + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} (p_i dq_i - q_i dp_i) +& \\ + \sum_{1\leqslant j\leqslant r} (\xi_j d\eta_j + \eta_j d\xi_j) + &\begin{cases} 0, & \text{если } m = 2r \\ \theta d\theta, & \text{если } m = 2r + 1. \end{cases}\end{aligned} \qquad (\text{Д}3.26)$$

Супералгебра Ли, сохраняющая *уравнение Пфаффа* $\alpha_1(X) = 0$ на векторное поле $X \in \mathfrak{vect}(2n + 1|m)$, или, другими словами, сохраняющая распределение, заданное формой α_1, т. е. супералгебра

$$\begin{aligned}\mathfrak{k}(2n + 1|m) = \{D \in \mathfrak{vect}(2n + 1|m) \,|L_D\alpha_1 = f_D\alpha_1 \text{ для некоторой}& \\ \text{функции } f_D \in \mathbb{C}[t, p, q, \theta]\},&\end{aligned}$$

называется *контактной супералгеброй*. Супералгебра Ли

$$\mathfrak{po}(2n|m) = \{D \in \mathfrak{k}(2n + 1|m) \mid L_D\alpha_1 = 0\}$$

называется *супералгеброй Пуассона*. Геометрическая интерпретация супералгебры Пуассона: это супералгебра Ли, сохраняющая связность с формой α_1 в линейном расслоении над симплектическим супермногообразием с симплектической формой $d\alpha_1$.

2) Аналогично, положим $u = q = (q_1, \ldots, q_n)$ — четные переменные, а $\theta = (\xi_1, \ldots, \xi_n; \tau)$ — нечетные. Положим

$$\alpha_0 = d\tau + \sum_i (\xi_i dq_i + q_i d\xi_i), \quad \omega_1 = d\alpha_0 \qquad (\text{Д}3.27)$$

и назовем эти формы *периконтактной* и *периплектической* соответственно. Заметим, что периконтактная форма четна, а периплектическая — нечетна. Супералгебру Ли, которая сохраняет уравнение Пфаффа $\alpha_0(X) = 0$ на векторное поле $X \in \mathfrak{vect}(n|n + 1)$, или, другими словами, распределение, заданное формой α_0, т. е. супералгебру

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(n) = \{D \in \mathfrak{vect}(n|n + 1) \mid L_D\alpha_0 = f_D \cdot \alpha_0 \text{ для некоторой}& \\ \text{функции } f_D \in \mathbb{C}[q, \xi, \tau]\}&\end{aligned}$$

назовем *периконтактной супералгеброй*. Супералгебра Ли

$$\mathfrak{b}(n) = \{D \in \mathfrak{m}(n) \mid L_D\alpha_0 = 0\}$$

называется супералгеброй *Бюттен* (Buttin, см. [Лмех]). Геометрическая интерпретация супералгебры Бюттен: это супералгебра Ли, сохраняющая связность с формой α_0 в линейном расслоении ранга $\varepsilon = (0|1)$, т. е. нечетным слоем над *периплектическим* супермногообразием — супермногообразием с невырожденной формой

$$\omega_1 = d\alpha_0. \qquad (\text{Д}3.28)$$

Супералгебра Ли

$$\mathfrak{sm}(n) = \{D \in \mathfrak{m}(n) \mid \operatorname{div} D = 0\}$$

называется *бездивергентной* или *специальной периконтактной* супералгеброй, а супералгебра Ли

$$\mathfrak{sb}(n) = \{D \in \mathfrak{b}(n) \mid \operatorname{div} D = 0\}$$

называется *бездивергентной* или *специальной бюттеновской* супералгеброй.

Замечание. Связь с конечномерной геометрией следующая. Во-первых, очевидно, что $\operatorname{Ker}\alpha_1 = \operatorname{Ker}\tilde{\alpha}_1$. Ограничение формы $\tilde{\omega}_0$ на $\operatorname{Ker}\alpha_1$ — это в точности ортосимплектическая форма $B'_{ev}(m|2n)$. Аналогично, ограничение формы ω_1 на $\operatorname{Ker}\alpha_0$ — это $B_{odd}(n|n)$.

Теорема Дарбу о нормальном виде дифференциальной невырожденной 2-формы сформулирована в [Лмех] (правильно) и в [Kos] (пропущен случай нечетной формы). Доказательство см. в [ГрЛе*, L*].

§ 3. Производящие функции

С помощью производящих функций можно лаконично описать супералгебры Ли серий $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{m}$ и их подалгебры.

• Нечетная форма α_1. Для любой функции $f \in \mathbb{C}[t, p, q, \theta]$ положим

$$K_f = (2 - E)(f)\frac{\partial}{\partial t} - H_f + \frac{\partial f}{\partial t}E, \qquad (\text{Д}3.29)$$

где $E = \sum y_i \dfrac{\partial}{\partial y_i}$ (здесь y_i — это все координаты, кроме t) — оператор Эйлера (который считает степень относительно переменных y_i, а H_f — гамильтоново векторное поле с гамильтонианом f, которое сохраняет форму $d\tilde{\alpha}_1$:

$$H_f = \sum_{i\leqslant n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right) - (-1)^{p(f)}\left(\sum_{j\leqslant m} \frac{\partial f}{\partial \theta_j}\frac{\partial}{\partial \theta_j}\right). \qquad (\text{Д}3.30)$$

Выбор формы α_1 вместо $\tilde{\alpha}_1$ влияет лишь на вид поля H_f, который мы приведем в наиболее общем случае $m=2k+1$:

$$H_f=\sum_{i\leqslant n}\Big(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\Big)-(-1)^{p(f)}\sum_{j\leqslant k}\Big(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial \eta_j}+\frac{\partial f}{\partial \eta_j}\frac{\partial}{\partial \xi_j}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big).$$

• Четная форма α_0. Для любой $f\in\mathbb{C}[q,\,\xi,\,\tau]$ положим

$$M_f=(2-E)(f)\frac{\partial}{\partial\tau}-Le_f-(-1)^{p(f)}\frac{\partial f}{\partial\tau}E, \tag{Д3.31}$$

где $E=\sum\limits_i y_i\dfrac{\partial}{\partial y_i}$ (здесь y_i — все координаты, кроме τ), а

$$Le_f=\sum_{i\leqslant n}\Big(\frac{\partial f}{\partial q_i}\,\frac{\partial}{\partial \xi_i}+(-1)^{p(f)}\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\Big). \tag{Д3.32}$$

Пусть L_X — производная Ли вдоль векторного поля X. Так как

$$L_{K_f}(\alpha_1)=2\frac{\partial f}{\partial t}\alpha_1=K_1(f)\alpha_1,$$
$$L_{M_f}(\alpha_0)=-(-1)^{p(f)}2\frac{\partial f}{\partial\tau}\alpha_0=-(-1)^{p(f)}M_1(f)\alpha_0,$$

то ясно, что $K_f\in\mathfrak{k}(2n+1|m)$ и $M_f\in\mathfrak{m}(n)$. Заметим, что

$$p(Le_f)=p(M_f)=p(f)+\bar{1}.$$

Скобки. Суперкоммутаторам $[K_f,\,K_g]$ и $[M_f,\,M_g]$ отвечают *контактные скобки* производящих функций: собственно контактная скобка $k.b.$ и *периконтактная скобка* $m.b.$:

$$[K_f,\,K_g]=K_{\{f,\,g\}_{k.b.}};\qquad [M_f,\,M_g]=M_{\{f,\,g\}_{m.b.}}$$

Явные формулы для контактных скобок следующие. Определим сперва скобки функций, которые не зависят от t (соответственно τ).

Скобка Пуассона $\{\cdot\,,\cdot\}_{P.b.}$ в реализации с формой $\tilde{\omega}_0$ задается формулой

$$\{f,\,g\}_{P.b.}=\sum_{i\leqslant n}\Big(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\Big)-(-1)^{p(f)}\sum_{j\leqslant m}\frac{\partial f}{\partial \theta_j}\frac{\partial g}{\partial \theta_j}$$
$$\text{для любых } f,\,g\in\mathbb{C}[p,\,q,\,\theta], \tag{Д3.33}$$

а в реализации с формой ω_0 при $m=2k+1$ — формулой

$$\{f,\,g\}_{P.b.}=\sum_{i\leqslant n}\Big(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\Big)-$$
$$-(-1)^{p(f)}\Big(\sum_{j\leqslant m}\Big(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\,\frac{\partial g}{\partial \eta_j}+\frac{\partial f}{\partial \eta_j}\,\frac{\partial g}{\partial \xi_j}\Big)+\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}\Big)\quad\text{для } f,\,g\in\mathbb{C}[p,\,q,\,\xi,\,\eta,\,\theta].$$

Скобка Бюттен $\{\cdot\,,\cdot\}_{B.b.}$ задается формулой

$$\{f,\,g\}_{B.b.}=\sum_{i\leqslant n}\Big(\frac{\partial f}{\partial q_i}\,\frac{\partial g}{\partial \xi_i}+(-1)^{p(f)}\,\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\,\frac{\partial g}{\partial q_i}\Big)\quad\text{для любых } f,\,g\in\mathbb{C}[q,\,\xi]. \tag{Д3.34}$$

3.1. Замечание. То, что мы назвали «скобкой Бюттен», было открыто в досуперную эпоху Я. Схоутеном; К. Бюттен была первой среди тех, кто заметил, что эта скобка задает структуру супералгебры Ли на своей области определения. Интерпретация супералгебры Бюттен, аналогичная интерпретации супералгебры Пуассона и элементов супералгебры $\mathfrak{le}$ как аналогов гамильтоновых векторных полей, принадлежит Д. Лейтесу [Лмех]. Скобку Бюттен и «нечетную механику», введенную в [Лмех], переоткрыли И. Баталин и Г. Вилковысский; под именем «антискобка» она получила широкую известность, благодаря своим приложениям в физике; некоторые из них описаны в [GPS°]. *Скобка Схоутена* первоначально была определена на суперпространстве поливекторных полей на многообразии, т. е. на суперпространстве сечений внешней алгебры (над алгеброй $\mathcal{F}$ функций) касательного расслоения $\Gamma(\Lambda^{\boldsymbol{\cdot}}(TM))\cong\Lambda^{\boldsymbol{\cdot}}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Vect}(M))$. Явная формула для скобки Схоутена, в которой, как обычно, переменные с «крышечкой» следует проигнорировать, — это

$$[X_1\wedge\ldots\wedge\ldots\wedge X_k,\,Y_1\wedge\ldots\wedge Y_l]=$$
$$=-\sum_{i,j}(-1)^{i+j+k}[X_i,\,Y_j]\wedge X_1\wedge\ldots\wedge\widehat{X}_i\wedge\ldots\wedge X_k\wedge Y_1\wedge\ldots\wedge\widehat{Y}_j\wedge\ldots\wedge Y_l. \tag{Д3.35}$$

С помощью Правила Знаков мы легко суперизуем формулу (Д3.35), т. е. заменяем многообразие M супермногообразием $\mathcal{M}$. Пусть x и ξ суть соответственно четные и нечетные координаты на $\mathcal{M}$. Полагая

$$\theta_i=\Pi\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)=\check{x}_i,\qquad q_j=\Pi\Big(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big)=\check{\xi}_j \tag{Д3.36}$$

мы отождествляем скобку Схоутена поливекторных полей на $\mathcal{M}$ со скобкой Бюттен функций на супермногообразии $\widetilde{\mathcal{M}}$, чьими координатами являются x, ξ и $\check{x}$, $\check{\xi}$, причем закон преобразования переменных $\check{x}$, $\check{\xi}$ индуцирован заменами переменных x, ξ.

В терминах скобок Пуассона и Бюттен контактные скобки приобретают вид

$$\{f,\,g\}_{k.b.}=(2-E)(f)\frac{\partial g}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}(2-E)(g)-\{f,\,g\}_{P.b.}; \tag{Д3.37}$$

$$\{f,\,g\}_{m.b.}=(2-E)(f)\frac{\partial g}{\partial\tau}+(-1)^{p(f)}\frac{\partial f}{\partial\tau}(2-E)(g)-\{f,\,g\}_{B.b.}. \tag{Д3.38}$$

Супералгебра Ли *гамильтоновых векторных полей* (или *гамильтонова супералгебра*), а также ее производная подалгебра (определенная только при $n=0$) суть

$$\mathfrak{h}(2n|m)=\{D\in\mathfrak{vect}(2n|m)\mid L_D\omega_0=0\},$$
$$\mathfrak{h}'(m)=\{H_f\in\mathfrak{h}(0|m)\mid \textstyle\int f\,\mathrm{vol}(\theta)=0\}.$$

«Нечетные» аналоги супералгебры Ли гамильтоновых полей суть супералгебра векторных полей $\mathfrak{le}(n)$, введенная в [Лмех], и ее специальная подалгебра

$$\mathfrak{le}(n)=\mathrm{Span}(D\in\mathfrak{vect}(n|n)\mid L_D\omega_1=0),$$
$$\mathfrak{sle}(n)=\mathrm{Span}(D\in\mathfrak{le}(n)\mid \mathrm{div}\,D=0).$$

Нетрудно доказать следующие изоморфизмы (как суперпространств):

$$\mathfrak{k}(2n+1|m) \cong \operatorname{Span}(K_f \mid f \in \mathbb{C}[t, p, q, \xi]);$$
$$\mathfrak{le}(n) \cong \operatorname{Span}(Le_f \mid f \in \mathbb{C}[q, \xi]);$$
$$\mathfrak{m}(n) \cong \operatorname{Span}(M_f \mid f \in \mathbb{C}[\tau, q, \xi]);$$
$$\mathfrak{h}(2n|m) \cong \operatorname{Span}(H_f \mid f \in \mathbb{C}[p, q, \xi]).$$

Положим

$$\mathfrak{po}'(m) = \operatorname{Span}\left(K_f \in \mathfrak{po}(0|m) \mid \int \mathrm{vol}_\xi = 0\right).$$

Тогда $\mathfrak{h}'(m) = \mathfrak{po}'(m)/\mathbb{C} \cdot K_1$.

3.2. Вывод явной формулы для периконтактной скобки. Пусть $F_x := \dfrac{\partial F}{\partial x}$.

С одной стороны, так как $M_F\alpha_0 = (-1)^{p(F)+1}2F_\tau\alpha_0$, то

$$\begin{aligned}(M_FM_G - (-1)^{(p(F)+1)(p(G)+1)}M_GM_F)\alpha_0 &= \\ = \{(-1)^{p(G)+1}2[(\xi F_\tau + F_q)G_{\xi\tau} + (-1)^{p(F)}(F_\xi - qF_\tau)G_{q\tau} + (-1)^{p(G)(p(F)+1)}2G_\tau F_\tau] &- \\ - (-1)^{(p(F)+1)p(G)}2[(\xi G_\tau + G_q)F_{\xi\tau} + (-1)^{p(G)}(G_\xi - qG_\tau)F_{q\tau} &+ \\ + (-1)^{p(F)(p(G)+1)}2F_\tau G_\tau]\}\alpha_0. \qquad (Д3.39)\end{aligned}$$

С другой стороны, имеем

$$((2-E)(F)G_\tau)_\tau = 2F_\tau G_\tau + \xi F_{\tau\xi}G_\tau - qF_{\tau q}G_\tau; \qquad (Д3.40)$$
$$(F_\tau(2-E)(G))_\tau = (-1)^{p(F)+1}(2F_\tau G_\tau + F_\tau\xi G_{\tau\xi} - F_\tau qG_{\tau q}); \qquad (Д3.41)$$
$$(F_qG_\xi + (-1)^{p(F)}F_\xi G_q)_\tau = F_{\tau q}G_q + (-1)^{p(F)}F_qG_{\tau\xi} - F_\xi G_{\tau q}. \qquad (Д3.42)$$

Ясно, что

$$(-1)^{p(F)p(G)}(Д3.40) + (-1)^{p(G)}(Д3.41) + (-1)^{p(F)+p(G)}(Д3.42) = \{\ldots\},$$

где $\{\ldots\}$ — это коэффициент при α_0 в (Д3.39). Поэтому

$$\{F, G\}_{m.b.} = (-1)^{p(F)+p(G)}\big((2-E)(F)G_\tau + (-1)^{p(F)}F_\tau(2-E)(G) + \{F, G\}_{\text{B.b.}}\big).$$

Аналогичные рассуждения для четной контактной скобки (с формой α_0, замененной на α_1 или $\tilde{\alpha}_1$, а полей M_f на K_f соответственно) приводят к явной формуле для четной контактной скобки.

§ 4. Бездивергентные подалгебры

Как легко вычислить,

$$\operatorname{div} K_f = (2n+2-m)K_1(f);$$

поэтому бездивергентная подалгебра контактной супералгебры Ли либо совпадает с ней (при $m = 2n+2$), либо является супералгеброй Пуассона. Для периконтактной серии ситуация более интересна: бездивергентная подалгебра оказывается простой. Так как

$$\operatorname{div} M_f = (-1)^{p(f)}2\left((1-E)\frac{\partial f}{\partial\tau} - \sum_{i\leqslant n}\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial\xi_i}\right), \qquad (Д3.43)$$

то бездивергентной подалгеброй периконтактной алгебры является

$$\mathfrak{sm}(n) = \operatorname{Span}\left(M_f \in \mathfrak{m}(n) \mid (1-E)\frac{\partial f}{\partial\tau} = \sum_{i\leqslant n}\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial\xi_i}\right).$$

В частности,

$$\operatorname{div} Le_f = (-1)^{p(f)}2\sum_{i\leqslant n}\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial\xi_i}.$$

Нечетный аналог лапласиана, а именно, *BRST-оператор* $\Delta = \sum\limits_{i\leqslant n}\dfrac{\partial^2}{\partial q_i\partial\xi_i}$ выделяет *гармонические* функции, т. е. удовлетворяющие условию $\Delta(f) = 0$. Они порождают в $\mathfrak{le}(n)$ специальную (бездивергентную) подсупералгебру $\mathfrak{sle}(n)$.

В супералгебрах $\mathfrak{sle}(n)$, $\mathfrak{sb}(n)$ и $\mathfrak{svect}(1|n)$ имеются идеалы $\mathfrak{sle}'(n)$, $\mathfrak{sb}'(n)$ и $\mathfrak{svect}'(n)$ коразмерности ε^n, определенные из точных последовательностей

$$0 \longrightarrow \mathfrak{sle}'(n) \longrightarrow \mathfrak{sle}(n) \longrightarrow \mathbb{C} \cdot Le_{\xi_1\ldots\xi_n} \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathfrak{sb}'(n) \longrightarrow \mathfrak{sb}(n) \longrightarrow \mathbb{C} \cdot M_{\xi_1\ldots\xi_n} \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathfrak{svect}'(n) \longrightarrow \mathfrak{svect}(1|n) \longrightarrow \mathbb{C} \cdot \xi_1\ldots\xi_n\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow 0.$$

Иначе говоря, на каждой из супералгебр $\mathfrak{sle}(n)$, $\mathfrak{sb}(n)$ и $\mathfrak{svect}(1|n)$ имеется след четности ε^n.

§ 5. Обобщения продолжений Картана

Опишем картановские продолжения и их обобщения, предложенные Н. Танакой и (в бóльшей общности) И. Щепочкиной.

5.1. Картановские продолжения. Пусть $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли, V есть $\mathfrak{g}$-модуль, а S^i — оператор i-й симметрической степени. Положим $\mathfrak{g}_{-1} = V$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, а при $k > 0$ определим k-е *картановское продолжение* пары $(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)$ формулой

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_k = \{X \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{k-1})\ |X(v_0)(v_1, v_2, \ldots v_k) = X(v_1)(v_0, v_2, \ldots, v_k)\\ \text{при любых } v_0, v_1, \ldots v_k \in \mathfrak{g}_{-1}\}.\end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} i&\colon S^{k+1}(\mathfrak{g}_{-1})^* \otimes \mathfrak{g}_{-1} \longrightarrow S^k(\mathfrak{g}_{-1})^* \otimes \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_{-1},\\ j&\colon S^k(\mathfrak{g}_{-1})^* \otimes \mathfrak{g}_0 \longrightarrow S^k(\mathfrak{g}_{-1})^* \otimes \mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_{-1}\end{aligned} \qquad (Д3.44)$$

— естественные вложения. Тогда $\mathfrak{g}_k = i(S^{k+1}(\mathfrak{g}_{-1})^* \otimes \mathfrak{g}_{-1}) \cap j(S^k(\mathfrak{g}_{-1})^* \otimes \mathfrak{g}_0)$.

Картановским продолжением пары $(V,\ \mathfrak{g})$ называется пространство $(\mathfrak{g}_{-1},\ \mathfrak{g}_0)_* = \bigoplus\limits_{k\geqslant -1} \mathfrak{g}_k$. Это пространство — алгебра Ли относительно естественной скобки, которую абстрактно довольно долго определять. А вот если $\mathfrak{g}_0$-модуль $\mathfrak{g}_{-1}$ *точен*, то имеется вложение

$$(\mathfrak{g}_{-1},\ \mathfrak{g}_0)_* \subset \mathfrak{vect}(n) = \mathfrak{der}\mathbb{C}[x_1,\ \ldots,\ x_n], \quad \text{где} \quad n = \dim \mathfrak{g}_{-1} \quad \text{и}$$

$$\mathfrak{g}_i = \{D \in \mathfrak{vect}(n) \mid \deg D = i,\ [D,\ X] \in \mathfrak{g}_{i-1} \quad \text{для любых } X \in \mathfrak{g}_{-1}\},$$

и структура алгебры Ли на $\mathfrak{vect}(n)$ индуцирует структуру алгебры Ли на $(\mathfrak{g}_{-1},\ \mathfrak{g}_0)_*$, совпадающую с той, которую мы не стали определять.

Из четырех серий простых векторных алгебр Ли три являются картановскими продолжениями:

$$\mathfrak{vect}(n) = (\mathrm{id},\ \mathfrak{gl}(n))_*, \quad \mathfrak{svect}(n) = (\mathrm{id},\ \mathfrak{sl}(n))_*, \quad \mathfrak{h}(2n) = (\mathrm{id},\ \mathfrak{sp}(n))_*,$$

Четвертая серия алгебр Ли — $\mathfrak{k}(2n+1)$ является результатом слегка более общей конструкции, которую мы опишем в п. 5.2.

5.1а. Супералгебры векторных полей как картановские продолжения. Суперизация конструкций из п. 5.1 непосредственна: по Правилу Знаков. Таким образом, мы получаем бесконечномерные супералгебры Ли

$$\mathfrak{vect}(m|n) = (\mathrm{id},\ \mathfrak{gl}(m|n))_*;\ \mathfrak{svect}(m|n) = (\mathrm{id},\ \mathfrak{sl}(m|n))_*;$$

$$\mathfrak{h}(2m|n) = (\mathrm{id},\ \mathfrak{osp}^a(m|2n))_*;$$

$$\mathfrak{le}(n) = (\mathrm{id},\ \mathfrak{pe}^a(n))_*;\ \mathfrak{sle}(n) = (\mathrm{id},\ \mathfrak{spe}^a(n))_*.$$

Замечание. Картановские продолжения

$$(\mathrm{id},\ \mathfrak{osp}(m|2n))_* = (\Pi(\mathrm{id}),\ \mathfrak{osp}^a(m|2n))_* \quad \text{и} \quad (\mathrm{id},\ \mathfrak{pe}(n))_* = (\Pi(\mathrm{id}),\ \mathfrak{pe}^a(n))_*$$

конечномерны. Обобщение картановских продолжений, описанных в п. 5.2, было впервые дано в [ALSh°] и многократно использовалось позже, например, при классификации простых векторных супералгебр Ли и для реализации (супер)алгебр Ли операторами рождения и уничтожения, см. [Щ°]. Суперизация контактных алгебр Ли приводит к **двум** сериям, а именно, $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{m}$.

5.2. Обобщения картановского продолжения. Рассмотрим нильпотентную $\mathbb{Z}$-градуированную алгебру Ли $\mathfrak{g}_- = \bigoplus\limits_{-d\leqslant i\leqslant -1} \mathfrak{g}_i$, и подалгебру Ли $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{der}_0\mathfrak{g}$ в алгебре Ли ее дифференцирований, сохраняющих $\mathbb{Z}$-градуировку. Пусть

$$i\colon S^{k+1}(\mathfrak{g}_-)^* \otimes \mathfrak{g}_- \longrightarrow S^k(\mathfrak{g}_-)^* \otimes \mathfrak{g}_-^* \otimes \mathfrak{g}_-,$$

$$j\colon S^k(\mathfrak{g}_-)^* \otimes \mathfrak{g}_0 \longrightarrow S^k(\mathfrak{g}_-)^* \otimes \mathfrak{g}_-^* \otimes \mathfrak{g}_-$$

— естественные вложения, сходные с (Д3.44). При $k > 0$ определим k-е продолжение пары $(\mathfrak{g}_-,\ \mathfrak{g}_0)$, положив

$$\mathfrak{g}_k = \big(j(S^{\bullet}(\mathfrak{g}_-)^* \otimes \mathfrak{g}_0) \cap i(S^{\bullet}(\mathfrak{g}_-)^* \otimes \mathfrak{g}_-)\big)_k,$$

где индекс k в правой части выделяет компоненту степени k.

Положим $(\mathfrak{g}_-,\ \mathfrak{g}_0)_* = \bigoplus\limits_{i\geqslant -d} \mathfrak{g}_i$. Если $\mathfrak{g}_0$-модули $\mathfrak{g}_i$ неприводимы при $i < 0$, то как легко проверить, $(\mathfrak{g}_-,\ \mathfrak{g}_0)_*$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{vect}(\dim \mathfrak{g}_-)$.

Что же такое алгебра Ли контактных векторных полей в этих терминах? Обозначим символом $\mathfrak{hei}(2n)$ супералгебру Гейзенберга (Heisenberg): ее пространство — это $W \oplus \mathbb{C} \cdot z$, где W есть $2n$-мерное пространство с невырожденной кососимметрической билинейной формой B, а скобка задана следующими соотношениями:

$$z \text{ лежит в центре и } [v,\ w] = B(v,\ w) \cdot z \text{ при всех } v,\ w \in W. \tag{Д3.45}$$

Ясно, что $\mathfrak{k}(2n+1) \cong (\mathfrak{hei}(2n),\ \mathfrak{csp}(2n))_*$.

• Зададим структуру супералгебры Ли $\mathfrak{hei}(2n|m)$ на прямой сумме $(2n,\ m)$-мерного суперпространства W с невырожденной кососимметрической четной билинейной формой B и $(1,\ 0)$-мерном пространстве, натянутом на элемент z формулой (Д3.45). Очевидно, что

$$\mathfrak{k}(2n+1|m) = (\mathfrak{hei}(2n|m),\ \mathfrak{cosp}^a(m|2n))_*$$

Имея $\mathfrak{hei}(2n|m)$, подалгебру $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{cosp}^a(m|2n)$, и тавтологический модуль W над $\mathfrak{osp}^a(m|2n) = \mathfrak{osp}^a(W)$, мы назовем *$k$-продолжением* пары $(W,\ \mathfrak{g})$ супералгебру Ли $(\mathfrak{hei}(2n|m),\ \mathfrak{g})_*$.

• Периконтактный аналог серии $\mathfrak{k}$ ассоциирован со следующим «нечетным» аналогом супералгебры $\mathfrak{hei}(2n|m)$. Обозначим символом $\mathfrak{ab}(n)$ *антискобочную* супералгебру: ее пространство — $W \oplus \mathbb{C} \cdot z$, где W есть $n|n$-мерное суперпространство, снабженное невырожденной кососимметрической нечетной билинейной формой B, а скобка в $\mathfrak{ab}(n)$ задана следующими соотношениями:

$$z \text{ нечетен и лежит в центре, а } [v,\ w] = B(v,\ w) \cdot z \text{ при всех } v,\ w \in W.$$

Ясно, что

$$\mathfrak{m}(n) = (\mathfrak{ab}(n),\ \mathfrak{cpe}^a(n))_*$$

Имея $\mathfrak{ab}(n)$, подалгебру $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{cpe}^a(n)$, и тавтологический $\mathfrak{pe}^a(n)$-модуль W, мы назовем *m-продолжением* пары $(W,\ \mathfrak{g})$ супералгебру Ли $(\mathfrak{ab}(n),\ \mathfrak{g})_*$.

В общем случае, имея невырожденную форму B на суперпространстве W и супералгебру $\mathfrak{g}$, сохраняющую форму B, мы будем называть вышеупомянутые обобщенные продолжения общим термином *mk-продолжения* пары $(W,\ \mathfrak{g})$.

5.2а. Частичное картановское продолжение или продолжение положительной части. Пусть $\mathfrak{g}_0$-модуль $\mathfrak{h}_1$ в $\mathfrak{g}_1$ таков, что $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{h}_1] = \mathfrak{g}_0$. Если такой модуль $\mathfrak{h}_1$ существует (обычно $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{h}_1] \subsetneq \mathfrak{g}_0$), то определим второе продолжение пары $\Big(\bigoplus\limits_{i\leqslant 0} \mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_1\Big)$ формулой

$$\mathfrak{h}_2 = \{D \in \mathfrak{g}_2 \mid [D, \mathfrak{g}_{-1}] \in \mathfrak{h}_1\}.$$

Члены $\mathfrak{h}_i$ при $i > 2$ определяются аналогично. Положим $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{g}_i$ при $i < 0$ и $\mathfrak{h}_* = \oplus \mathfrak{h}_i$.

Примеры (см. табл. Д3.6). Супералгебра Ли $\mathfrak{vect}(1|n; n)$ — подалгебра в $\mathfrak{k}(1|2n; n)$. Первая из них определяется как частичное картановское продолжение той же самой неположительной части, что и у $\mathfrak{k}(1|2n; n)$ и одного из подмодулей в $\mathfrak{k}(1|2n; n)_1$. Супералгебра $\mathfrak{kas}$ — другой пример.

§ 6. Деформации супералгебры Бюттен

У супералгебры Ли $\mathfrak{b}(n)$ есть переградуировка $\mathfrak{b}(n; n)$, заданная формулами $\deg \xi_i = 0$, $\deg q_i = 1$ при всех i, в которой алгебра $\mathfrak{b}(n)$, изначально имевшая глубину 2, принимает вид $\mathfrak{g} = \bigoplus\limits_{i \geqslant -1} \mathfrak{g}_i$, где $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{vect}(0|n)$ и $\mathfrak{g}_{-1} \cong \Pi(\mathbb{C}[\xi])$. Заменим теперь $\mathfrak{vect}(0|n)$-модуль $\mathfrak{g}_{-1}$ функций (с поменянной четностью) на модуль λ-плотностей, т. е. положим $\mathfrak{g}_{-1} \cong \Pi(\mathrm{Vol}^\lambda(0|n))$, где $\mathfrak{g}_0$-действие на $\mathfrak{g}_{-1}$ задано формулой

$$L_D(\mathrm{vol}^\lambda(\xi)) = \lambda \operatorname{div} D \cdot \mathrm{vol}^\lambda(\xi), \quad \text{а} \quad p(\mathrm{vol}^\lambda(\xi)) = \bar{1}.$$

Определим $\mathfrak{b}_\lambda(n; n)$ как картановское продолжение

$$(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)_* = (\Pi(\mathrm{Vol}^\lambda(0|n)), \mathfrak{vect}(0|n))_*.$$

Ясно, что $\mathfrak{b}_\lambda(n; n)$ является деформацией супералгебры $\mathfrak{b}(n; n)$. Набор всех этих алгебр $\mathfrak{b}_\lambda(n; n)$ при разных λ называется *основной деформацией*. Хоть и «основная», эта деформация — не то, что называется «квантованием супералгебры Бюттен», см. [ЛЩ°], где перечислены и другие деформации супералгебр Ли $\mathfrak{b}_\lambda(n)$.

Деформация $\mathfrak{b}_\lambda(n)$ супералгебры Ли $\mathfrak{b}(n)$ — это обратно переградуированная супералгебра $\mathfrak{b}_\lambda(n; n)$, которую можно описать следующим образом. Положим

$$\mathfrak{b}_{a,b}(n) = \mathrm{Span}\left(M_f \in \mathfrak{m}(n) \,\middle|\, a \operatorname{div} M_f = (-1)^{p(f)} 2(a - bn)\frac{\partial f}{\partial \tau}\right). \tag{Д3.46}$$

Удобно положить

$$\mathrm{div}_\lambda = (bn - aE)\frac{\partial}{\partial \tau} - a\Delta, \quad \text{где} \quad \lambda = \frac{2a}{n(a-b)}. \tag{Д3.47}$$

Принимая во внимание явный вид (Д3.43) дивергенции поля M_f, мы получаем

$$\mathfrak{b}_{a,b}(n) = \mathrm{Span}(M_f \in \mathfrak{m}(n) \mid \mathrm{div}_\lambda(f) = 0) =$$
$$= \{D \in \mathfrak{vect}(n|n+1) \mid L_D(\mathrm{vol}^a(q, \xi, \tau)\alpha_0^{a-bn}) = 0\}.$$

Непосредственно проверяется, что $\mathfrak{b}_{a,b}(n) \simeq \mathfrak{b}_\lambda(n)$. Этот изоморфизм показывает, что параметр λ в действительности пробегает проективную прямую $\mathbb{C}P^1$, а не $\mathbb{C}$.

Отметим, что $\mathfrak{b}_{nb,b}(n) \cong \mathfrak{sm}(n)$, а также, что $\mathfrak{b}_{a,-a}(2; 2) \cong \mathfrak{h}_{1/2}(2|2)$.

Как следует из описания неприводимых (и непрерывных в некоторой топологии) $\mathfrak{vect}(m|n)$-модулей с вакуумным вектором [БЛ*] и критерия простоты $\mathbb{Z}$-градуированных супералгебр Ли (см. [Кас1]), супералгебры $\mathfrak{b}_\lambda(n)$ просты при $n > 2$ и $\lambda \neq 0, 1, \infty$, а также при $n = 2$ и $\lambda \neq 0, \pm 1, -2, \infty$. Ясно также, что супералгебры $\mathfrak{b}_\lambda(n)$ неизоморфны при различных значениях параметра λ.

Супералгебра Ли $\mathfrak{b}(n) = \mathfrak{b}_0(n)$ не является простой: она содержит ε-мерный, т. е. $(0|1)$-мерный центр. При $\lambda = 1$ и ∞ супералгебры $\mathfrak{b}_\lambda(n)$ тоже не просты, а содержат простой идеал коразмерности ε^n и ε^{n+1} соответственно. Соответствующие точные последовательности суть

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}M_1 \longrightarrow \mathfrak{b}(n) \longrightarrow \mathfrak{le}(n) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathfrak{b}'_1(n) \longrightarrow \mathfrak{b}_1(n) \longrightarrow \mathbb{C}M_{\xi_1\ldots\xi_n} \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathfrak{b}'_\infty(n) \longrightarrow \mathfrak{b}_\infty(n) \longrightarrow \mathbb{C}M_{\tau\xi_1\ldots\xi_n} \longrightarrow 0.$$

§ 7. Простые вещественные векторные супералгебры Ли

Заметим сразу, что как и в случае алгебр Ли, любая простая вещественная супералгебра Ли является либо *овеществлением* $\mathfrak{g}^\mathbb{R}$ некоторой простой комплексной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ (т. е. той же супералгеброй, рассматриваемой не над $\mathbb{C}$, а над $\mathbb{R}$), либо вещественной формой некоторой простой комплексной супералгебры Ли.

«Тривиальной» вещественной формой векторной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ назовем ту, у которой коэффициенты при частных производных — вещественные многочлены.

7.1. Вещественные гамильтоновы векторные поля. Как и в комплексном случае, вещественные гамильтоновы векторные поля — это поля, сохраняющие симплектическую структуру, т. е. четную невырожденную суперантисимметрическую билинейную форму ω. Но если в комплексном случае такую форму всегда можно привести к единственному нормальному виду, то в вещественном $2n|m$-мерном пространстве таких нормальных видов, с точностью до пропорциональности, $\left[\frac{m}{2}\right]+1$ штук. Они различаются сигнатурой ограничения формы ω на нечетное подпространство.

Для любого целого числа $a\in\left\{0,\,1,\,\ldots,\,\left[\frac{m}{2}\right]\right\}$ положим

$$x=(p_1,\,\ldots,\,p_n,\,q_1,\,\ldots,\,q_n,\,\xi_1,\,\ldots,\,\xi_a,\,\eta_1,\,\ldots,\,\eta_a,\,\theta_1,\,\ldots,\,\theta_{m-2a}),\qquad (\text{Д}3.48)$$

где p_i и q_i — четные переменные, а ξ_j, η_j, θ_k — нечетные. Пусть

$$\omega_{n,m;a}=\sum_{i\leqslant n}dp_i\wedge dq_i+\sum_{j\leqslant a}d\xi_j d\eta_j+\sum_{k\leqslant m-2a}(d\theta_k)^2.\qquad (\text{Д}3.49)$$

Через $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(2n|m-a,\,a)$ обозначим вещественную супералгебру Ли векторных полей, сохраняющих форму $\omega_{n,m;a}$:

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(2n|m-a,\,a)=\{D\in\mathfrak{vect}_{\mathbb{R}}(2n|m)\mid L_D\omega_{n,m;a}=0\}.$$

Ясно, что супералгебра Ли $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(2n|m-a,\,a)$ является вещественной формой комплексной гамильтоновой супералгебры Ли $\mathfrak{h}(2n|m)$, а ее нулевая в стандартной градуировке компонента $\mathfrak{h}_0=\mathfrak{osp}(m-a,\,a|2n)$ является вещественной формой супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(m|2n)$, сохраняющей билинейную форму сигнатуры $(m-a,\,a)$ в ортогональной части.

Каждое вещественное гамильтоново векторное поле $D\in\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(2n|m-a,\,a)$ определяется своим гамильтонианом $f\in\mathbb{R}[p,\,q,\,\xi,\,\eta,\,\theta]$ по формуле:

$$H_f^{(a)}=\sum_{i\leqslant n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right)-\\ -(-1)^{p(f)}\left(\sum_{j\leqslant a}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial \eta_j}+\frac{\partial f}{\partial \eta_j}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right)+\sum_{k\leqslant m-2a}\frac{\partial f}{\partial \theta_k}\frac{\partial}{\partial \theta_k}\right).$$

Скобка Пуассона задается формулой

$$\{f,\,g\}_{P.b.}^{(a)}=\sum_{i\leqslant n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right)-\\ -(-1)^{p(f)}\left(\sum_{j\leqslant a}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\frac{\partial g}{\partial \eta_j}+\frac{\partial f}{\partial \eta_j}\frac{\partial g}{\partial \xi_i}\right)+\sum_{k\leqslant m-2a}\frac{\partial f}{\partial \theta_k}\frac{\partial g}{\partial \theta_k}\right).\qquad (\text{Д}3.50)$$

Заметим, что супералгебра Ли $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(2n|m-a,\,a)$ допускает переградуировку вида $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(2n|m-a,\,a;\,r)$ тогда и только тогда, когда $r\leqslant a$. Эта переградуировка определяется соотношениями:

$$\begin{aligned}&\deg\xi_j=0,\ \ \deg\eta_j=2 &&\text{при } 1\leqslant j\leqslant r,\\ &\deg p_i=\deg q_i=\deg\xi_j=\deg\eta_j=\deg\theta_k=1 &&\text{при } j>r \text{ и всех } i,\,k.\end{aligned}$$

Нулевая компонента $\mathfrak{h}_0$ в этой переградуировке имеет вид

$$\mathfrak{h}_0=\mathfrak{osp}(m-a-r,\,a-r|2n)\otimes\Lambda(r)\mathbin{\subset\!\!\!\!+}\mathfrak{vect}(0|r).$$

Итак, каждая из супералгебр Ли $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}(2n|m-a,\,a;\,r)$ с $r\leqslant a\leqslant\left[\frac{m}{2}\right]$ является вещественной формой комплексной супералгебры Ли $\mathfrak{h}(2n|m;\,r)$.

7.2. Вещественные контактные векторные поля. Ситуация с контактными векторными полями совершенно аналогична ситуации с гамильтоновыми полями. Добавим к набору (Д3.48) переменных x четную координату t и положим

$$\alpha_{2n,m;a}:=dt+\sum_{1\leqslant i\leqslant n}(p_i dq_i-q_i dp_i)+\sum_{1\leqslant j\leqslant a}(\xi_j d\eta_j+\eta_j d\xi_j)+2\sum_{1\leqslant k\leqslant m-2a}\theta_k d\theta_k.\qquad (\text{Д}3.51)$$

Вещественная супералгебра Ли

$$\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}(2n+1|m-a,\,a)=\{D\in\mathfrak{vect}_{\mathbb{R}}(2n+1|m)\mid L_D\alpha_{2n,m;a}=f_D\alpha_{2n,m;a}\\ \text{для некоторой функции } f_D\in\mathbb{R}[t,\,x]\}$$

состоит из вещественных контактных векторных полей, сохраняющих распределение, задаваемое пфаффовым уравнением $\alpha_{2n,m;a}(X)=0$ на $X\in\mathfrak{vect}(2n+1|m)$. Эта супералгебра Ли является вещественной формой комплексной контактной супералгебры Ли $\mathfrak{k}(2n+1|m)$. Точные формулы для контактного векторного поля $K_f^{(a)}\in\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}(2n+1|m-a,\,a)$, соответствующего производящей функции $f\in\mathbb{R}[t,\,p,\,q,\,\xi,\,\eta,\,\theta]$, и для контактной скобки производящих функций получаются заменой H_f на $H_f^{(a)}$ и $\{\cdot\,,\cdot\}_{P.b}$ на $\{\cdot\,,\cdot\}_{P.b}^{(a)}$, соответственно.

Как и для гамильтоных полей, переградуировка $\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}(2n+1|m-a,\,a;\,r)$ возможна лишь при $r\leqslant a$. Супералгебры Ли $\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}(2n+1|m-a,\,a;\,r)$ с $r\leqslant a\leqslant\left[\frac{m}{2}\right]$ являются вещественными формами супералгебры Ли $\mathfrak{k}(2n+1|m)$.

Заметим, что хотя переградуировка комплексной супералгебры Ли $\mathfrak{k}(1|2k;\,k-1)$ не является вейсфейлеровой (в силу приводимости $\mathfrak{g}_{-1}$ как $\mathfrak{g}_0$-модуля), ее вещественная форма $\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}(1|k+1,\,k-1;\,k-1)$ является W-градуированной.

7.3. Исключительная супералгебра Ли $\mathfrak{kas}$. Супералгебры Ли $\mathfrak{g}=\mathfrak{kas}\subset\mathfrak{k}(1|6)$ и $\mathfrak{vect}(1|m;\,m)$ не определяются своими неположительными частями. Можно показать, что любая вещественная форма супералгебры Ли $\mathfrak{kas}$ является подалгеброй соответствующей вещественной формы супералгебры Ли $\mathfrak{k}(1|6)$. Единственное, что остается сделать, это выделить соответствующую вещественную форму $\mathfrak{g}_0$-модуля $\Lambda^3(\mathrm{id})\subset\mathfrak{k}(1|6)_1$.

Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_6$ — нечетные координаты в реализации супералгебры Ли $\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}(1|6-a, a)$, где $a=0, 1, 2$ или 3, производящими функциями. В обозначениях предыдущего пункта или $\zeta_i=\theta_i$, или $\zeta_i=\xi_i$, а $\zeta_{3+i}=\eta_i$ при $i=1$, 2 или 3. Сплетающий оператор действия алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ в пространстве $\Lambda^3(\zeta)$ — это $*$-оператор Ходжа:

$$(\zeta_{i_1}\zeta_{i_2}\zeta_{i_3})^*=H_{\zeta_{i_3}}H_{\zeta_{i_2}}H_{\zeta_{i_1}}(\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_6), \quad \text{где } H_{\theta_i}=\partial_{\theta_i},\ H_{\xi_i}=\partial_{\eta_i},\ H_{\eta_i}=\partial_{\xi_i}.$$

Следовательно,

$$(f^*)^*=\begin{cases} f, & \text{если } \mathfrak{g}_0=\mathfrak{co}(5,\,1) \text{ или } \mathfrak{co}(3,\,3),\\ -f, & \text{если } \mathfrak{g}_0=\mathfrak{co}(6) \text{ или } \mathfrak{co}(4,\,2).\end{cases}$$

В первых двух случаях собственные подпространства оператора $*$ выделяют вещественные неприводимые подпространства в пространстве $\Lambda^3(\zeta)$, определяющие соответствующие вещественные формы супералгебры $\mathfrak{kas}$. Мы обозначаем их $\mathfrak{kas}_{5,1}$ и $\mathfrak{kas}_{3,3}$ соответственно, считая по умолчанию, что мы имеем дело с $\mathfrak{kas}^{\xi}$, а не с $\mathfrak{kas}^{\eta}$, для которой получим аналогичный ответ (изоморфные алгебры). В двух последних случаях пространство $\Lambda^3(\zeta)$ как вещественный $\mathfrak{g}_0$-модуль является неприводимым, а оператор $*$ задает на нем комплексную структуру.

7.4. Вещественные формы супералгебры Ли $\mathfrak{svect}'(1|2)$. (Изложение следует статье [CiKa°].) Н. Кантарини и В. Кац рассмотрели вложение супералгебры Ли $\mathfrak{svect}'(1|2)$ в $\mathfrak{k}(1|4)$. Геометрически это частный случай любимого В. И. Арнольдом вложения $\mathfrak{vect}(N)\subset\mathfrak{k}(1+2(N-1))$, только здесь $N=m|n$, связанного с действием векторных полей на (супер)многообразии $\mathcal{M}$ в проективизации кокасательного расслоения $\mathbb{P}(T^*\mathcal{M})$. (Кстати, если рассматривать проективизацию $\mathbb{P}(\Pi T^*\mathcal{M})$, то получим вложение $\mathfrak{vect}(m|n)\subset\mathfrak{m}(m+n-1)$.)

Формально же это делается так. Пусть $\mathfrak{g}$ — перерадуированная супералгебра Ли $\mathfrak{vect}(m|n)=\mathfrak{vect}(x|\zeta)$, в которой

$$\deg x_1=2, \quad \deg x_i=\deg\zeta_j=1, \quad \text{где } i=2, \ldots, m,\ j=1, \ldots, n. \qquad \text{(Д3.52)}$$

Глубина градуировки супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ равна 2, причем $\dim\mathfrak{g}_{-2}=1$, а само пространство $\mathfrak{g}_{-2}$ натянуто на элемент ∂_{x_1}. Пространство $\mathfrak{g}_{-1}$ является суммой: $\mathfrak{g}_{-1}=V_1\oplus V_2$, где

$$V_1=\operatorname{Span}(\partial_{x_i}, \partial_{\zeta_j}\mid i\geqslant 2, \text{ любое } j), \quad V_2=\operatorname{Span}(x_i\partial_{x_1}, \zeta_j\partial_{x_1}\mid i\geqslant 2, \text{ любое } j).$$

Скобка $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-1}]\to\mathfrak{g}_{-2}$ определяет на пространстве $\mathfrak{g}_{-1}$ невырожденную суперантисимметрическую билинейную форму ω, относительно которой подпространства V_1 и V_2 изотропны. Компонента $\mathfrak{g}_0$ в градуировке (Д3.52) состоит из всех операторов, сохраняющих форму ω и подпространство V_1.

Ясно, что перерадуировка (Д3.52) ограничивается и на подалгебру $\mathfrak{svect}(m|n)$. Если в качестве исходной супералгебры Ли мы возьмем $\mathfrak{svect}'(1|2)$, то в градуировке (Д3.52) мы, во-первых, получим интересующее нас вложение $\mathfrak{svect}'(1|2)\subset\mathfrak{k}(1|4)$, а во-вторых, в нулевой компоненте $\mathfrak{g}_0$ останется только подалгебра $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathbb{C}\cdot z$ (поскольку элемент $\zeta_1\zeta_2\partial_x$ мы выбрасываем из $\mathfrak{svect}(1|2)$). Элемент z является градуирующим, а подалгебра $\mathfrak{sl}(2)$ действует на подпространствах V_1 и V_2 как на тавтологическом модуле (id) и двойственном к нему (id*) соответственно. Но для $\mathfrak{sl}(2)$ эти модули изоморфны! Это дает нам возможность взять в качестве вещественной формы алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ унитарную форму $\mathfrak{su}(2)$, а в качестве вещественной формы 4-мерного $\mathfrak{g}_0$-модуля $\mathfrak{g}_{-1}$ — овеществление тавтологического 2-мерного $\mathfrak{sl}(2)$-модуля.

Полное продолжение над $\mathbb{R}$ полученной вещественной супералгебры Ли даст нам вещественную форму, которую мы обозначим $\mathfrak{suvect}(1|2)$, неизоморфную тривиальной вещественной форме. Причем, что интересно: над $\mathbb{C}$ описанная перерадуировка супералгебры Ли $\mathfrak{svect}'(1|2)$ (равно как и всей супералгебры Ли $\mathfrak{vect}(1|2)$) не является вейсфейлеровой, а ее вещественная форма $\mathfrak{suvect}(1|2)$ является.

Как подалгебру вещественной супералгебры Ли $\mathfrak{k}(1|4)$, реализованной производящими функциями от переменных $x, \theta_1, \ldots, \theta_4$ (см. п. 1.2), супералгебру Ли $\mathfrak{g}=\mathfrak{suvect}(1|2)$ можно явно описать следующим образом.

Четная часть $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ супералгебры Ли $\mathfrak{suvect}(1|2)$ натягивается на элементы

$$X_f=\frac{1}{2}(f-f''\Theta)=\frac{1}{2}(f\cdot 1-f''(1)^*), \qquad Y_f^{ij}=f(\theta_i\theta_j+(\theta_i\theta_j)^*),$$

где $\Theta=\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4$, $i, j=1, \ldots, 4$, $f\in\mathbb{R}[x]$, а $*$ есть оператор Хóджа.

Отображение $X_f\mapsto D_f:=f\dfrac{d}{dx}$ является изоморфизмом благодаря коэффициенту $\dfrac{1}{2}$ в выражении для X_f. Таким образом, $\mathfrak{g}_{\bar 0}\cong\mathfrak{su}(2)\otimes\mathbb{R}[x]\subsetplus\mathfrak{vect}(x)$.

Нечетная же часть $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ натягивается на элементы

$$Z_f^i=f\theta_i+f'\theta_i^*$$

и, как $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модуль, изоморфна пространству $\mathrm{id}^{\mathbb{R}}\otimes\mathbb{R}[t]\operatorname{vol}^{-1/2}$, где $M^{\mathbb{R}}$ — овеществление пространства M.

Наконец, скобка нечетных элементов имеет вид:

$$[Z_f^i, Z_g^j]=\delta_{ij}X_{-2fg}+(1-\delta_{ij})Y^{ij}_{fg'-f'g}.$$

В инвариантных терминах эту скобку можно задать так. Пусть V — пространство $\mathfrak{su}(2)$-модуля $\mathrm{id}^{\mathbb{R}}$ четырехмерного над $\mathbb{R}$. Его внешний квадрат $V\wedge V$ изоморфен сумме двух экземпляров присоединенного модуля; индекс — номер экземпляра:

$$V\wedge V=\mathfrak{su}(2)_1\oplus\mathfrak{su}(2)_2.$$

Пусть $(v \wedge w)_1$, где v, $w \in V$, — проекция внешнего произведения двух элементов на первое слагаемое. Тогда

$$[fv \cdot \mathrm{vol}^{-1/2},\ gw \cdot \mathrm{vol}^{-1/2}] = 2\omega(v,\ w)D_{fg} + (fg' - f'g)(v \wedge w)_1.$$

Чтобы увидеть это на элементах супералгебры Ли $\mathfrak{svect}'(1|2)$, а не на элементах супералгебры Ли $\mathfrak{k}(1|4)$, рассмотрим $\mathbb{Z}$-градуировку вида $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{-1} + \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}_1$ супералгебры $\mathfrak{svect}'(1|2)$ по степеням ζ, т. е. положив $\deg x = 0$ и $\deg \zeta_1 = \deg \zeta_2 = 1$. Тогда

$$\mathfrak{g}_{\bar 0} = \mathfrak{h}_0 \simeq \mathfrak{g}_{\bar 0} \cong \mathfrak{sl}(2) \otimes \mathbb{C}[x] \ltimes \mathfrak{vect}(x),$$

причем $\mathfrak{h}_{-1} \simeq \mathrm{id} \otimes \mathbb{C}[x]\,\mathrm{vol}^{-1/2}$ и $\mathfrak{h}_1 \simeq \mathrm{id}^* \otimes \mathbb{C}[x]\,\mathrm{vol}^{-1/2}$ как $\mathfrak{h}_0$-модули. Так как $\mathrm{id} \simeq \mathrm{id}^*$, то имеет место естественный, бросающийся в глаза, инволютивный автоморфизм, тождественный на компоненте $\mathfrak{g}_0$ и переставляющий компоненты $\mathfrak{g}_{-1}$ и $\mathfrak{g}_1$. Этот автоморфизм естественно порождает вещественную структуру, но отвечающая ей вещественная форма супералгебры Ли $\mathfrak{svect}'(1|2)$ — это не та вещественная форма, что нам нужна. У этой вещественной формы четная часть изоморфна $\mathfrak{sl}(2) \otimes \mathbb{R}[x] \ltimes \mathfrak{vect}(x)$, а нечетная распадается в сумму двух $\mathfrak{g}_0$-подмодулей. Таким образом, эта вещественная форма изоморфна тривиальной.

Нужная вещественная структура должна на четной части иметь вид:

$$A \otimes f(x) \mapsto -\bar{A}^t \otimes f(x), \qquad D_f \mapsto D_{\bar f},$$

где $A \in \mathfrak{sl}(2)$. Поэтому на нечетной части эта вещественная структура действует так:

$$v \otimes f(x)\,\mathrm{vol}^{-1/2} \longleftrightarrow -\bar{v}^* \otimes \bar{f}(x)\,\mathrm{vol}^{-1/2},$$

где v^* — вектор, двойственный вектору v, а «¯» есть оператор, комплексно сопрягающий координаты вектора в данном базисе.

7.5. Теорема. *Пусть $\mathfrak{g}$ — простая супералгебра Ли векторных полей с W-градуировкой.*

(1) *Если $\mathfrak{g}$ отлична от $\mathfrak{b}_\lambda(n;\ r)$ с $\lambda \notin \mathbb{R}$, $\mathfrak{h}(2n|m;\ r)$, $\mathfrak{k}(2n + 1|m;\ r)$, $\mathfrak{kas}$ и $\mathfrak{svect}'(1|2)$, то все вещественные формы супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ тривиальны.*

(1а) *Супералгебры Ли $\mathfrak{b}_\lambda(n;\ r)$ с $\lambda \notin \mathbb{R}$ не имеют вещественных форм.*

(1б) *Дополнительные вещественные формы супералгебр Ли $\mathfrak{h}(2n|m;\ r)$, $\mathfrak{k}(2n + 1|m;\ r)$, $\mathfrak{kas}$ и $\mathfrak{svect}'(1|2)$ см. в табл.* Д3.10.

Вещественная форма $\mathfrak{kas}_{3,3}$ допускает все W-перерадуировки супералгебры $\mathfrak{kas}$ (т. е. 0, 1ξ, 3ξ и 3η), тогда как вещественная форма $\mathfrak{kas}_{5,1}$ допускает только W-перерадуировки 0 и 1ξ, и не допускает W-перерадуировки 3ξ и 3η.

(3) *Супералгебра Ли $\mathfrak{k}(1|2k;\ k - 1)$ (не являющаяся W-градуированной над $\mathbb{C}$) обладает W-градуированной вещественной формой $\mathfrak{k}(1|k + 1,\ k - 1;\ k - 1)$.*

(4) *В силу изоморфизма $\mathfrak{b}_{1/2}(2;\ 2) \cong \mathfrak{h}(2|2)$ супералгебра Ли $\mathfrak{b}_{1/2}(2;\ 2)$ обладает двумя вещественными формами, представленными в таблице* Д3.10.

(5) *У супералгебры Ли $\mathfrak{svect}(1|2)$ нет вещественной формы, продолжающей вещественную форму $\mathfrak{suvect}(1|2)$ комплексной супералгебры $\mathfrak{svect}'(1|2)$.*

Таблица Д3.10

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{h}_0$	Условие
$\mathfrak{h}(2n\|m)$	$\mathfrak{h}(2n\|m - a,\ a)$	$\mathfrak{osp}(m - a,\ a\|2n)$	$0 \leqslant a \leqslant \left[\frac{m}{2}\right]$
$\mathfrak{h}(2n\|m;\ r)$	$\mathfrak{h}(2n\|m - a,\ a;\ r)$	$\mathfrak{osp}(m - a - r,\ a - r\|2n) \otimes \Lambda(r) \ltimes \mathfrak{vect}(0\|r)$	$r \leqslant a \leqslant \left[\frac{m}{2}\right]$
$\mathfrak{k}(2n + 1\|m)$	$\mathfrak{k}(2n + 1\|m - a,\ a;\ r)$	$\mathfrak{cosp}(m - a,\ a\|2n) \otimes \Lambda(r) \ltimes \mathfrak{vect}(0\|r)$	$0 \leqslant a \leqslant \left[\frac{m}{2}\right]$
$\mathfrak{k}(2n + 1\|m;\ r)$	$\mathfrak{k}(2n + 1\|m - a,\ a;\ r)$	$\mathfrak{cosp}(m - a - r,\ a - r\|2n) \otimes \Lambda(r) \ltimes \mathfrak{vect}(0\|r)$	$r \leqslant a \leqslant \left[\frac{m}{2}\right]$
$\mathfrak{kas}$	$\mathfrak{kas}_{6-a,a}$	$\mathfrak{co}(6 - a,\ a)$	$a = 1$ или 3
$\mathfrak{svect}'(1\|2)$	$\mathfrak{suvect}(1\|2)$	$\mathfrak{csu}(2) \simeq \mathfrak{u}(2)$	

§ 8. Струнные супералгебры Ли

Эти супералгебры Ли являются векторными супералгебрами, у которых коэффициенты при частных производных суть многочлены Лорана (или ряды Лорана, когда нужна полнота алгебры). Эти супералгебры Ли сохраняют ту либо иную структуру на том, что физики называют суперструной, т. е. на супермногообразии, ассоциированном с векторным расслоении над окружностью (или, если струна комплексная, над проколотой комплексной прямой $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$).

Сами эти супералгебры Ли тоже «stringy» (по-английски это слово значит и «струнный», и «жилистый», как мясо): как модуль на алгеброй Витта[1] $\mathfrak{witt} = \mathfrak{der}\,\mathbb{C}[t^{-1},\ t]$, каждая из струнных супералгебр Ли является прямой суммой «жил» — модулей $\mathcal{F}_\lambda$, описанных ниже. Одно из популярных описаний струнных супералгебр Ли $\mathfrak{g}$ в терминах $\mathfrak{witt}$-модулей, до сих

---

[1] Специалисты по простым алгебрам Ли над полями характеристики $p > 0$ называют версию этой алгебры *алгеброй Витта* в честь Витта, открывшего конечномерную версию этой алгебры, хотя сам Витт никогда ничего про эту алгебру не публиковал; название прижилось и в струнных теориях над любым полем.

пор кочующее из текста в текст, зависит от вложения $\mathfrak{witt} \to \mathfrak{g}$ (канонического-то нет, за исключением пары случаев), затрудняя идентификацию алгебры $\mathfrak{g}$.

8.1. Строгое определение. Определение струнных супералгебр Ли основано на глубоком понятии *глубокой* (супер)алгебры Ли, см. [Math°]. О. Матьё отделил класс $\mathbb{Z}$-градуированных (супер)алгебр Ли полиномиального роста и бесконечной глубины, содержащий струнные алгебры, от класса, содержащего алгебры петель (и «родственницы» алгебр петель — алгебры Каца—Муди). В алгебрах петель все корневые векторы, отвечающие вещественным[1] корням, действуют локально нильпотентно, а в струнных — не все (грубо говоря, в струнных супералгебрах есть корневой вектор ∂_t или похожий на него, который понижает степень до бесконечности).

Пусть φ — угловой параметр на окружности, $t = \exp(i\varphi)$. Простых струнных алгебр Ли только одна: $\mathfrak{witt}$.

Струнные же *супер*алгебры Ли, даже простые, довольно многочисленны. Они суть подсупералгебры в супералгебре Ли супердифференцирований суперкоммутативной супералгебры функций на одной из двух суперокружностей: либо на $S^{1|n}$ — супермногообразии, ассоциированном с цилиндром (тривиальным расслоением ранга n), либо на $S^{1|n-1,M}$ — супермногообразии, ассоциированном с суммой Уитни (Whitney) цилиндра и расслоения Мёбиуса. Эти супералгебры функций суть

$$R^L(n) = \mathbb{K}[t^{-1}, t, \theta_1, \ldots, \theta_n] \quad \text{и} \quad R^M(n) = \mathbb{K}[t^{-1}, t, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \sqrt{t}\,\theta],$$

здесь $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а верхний индекс L и M поставлен в честь Лорана и Мёбиуса соответственно. В случае комплексной струны мы забываем о φ и думаем в терминах переменной t — четной координаты на $\mathbb{C}^\times$. Напомним, что сумма Уитни двух расслоений Мёбиуса — тривиальное расслоение ранга 2, поэтому достаточно рассматривать только одно расслоение Мёбиуса в качестве слагаемого Уитни. Ниже в этом параграфе $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, если не оговорено другое. Положим

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{vect}^L(1|n) = \mathfrak{der} R^L(n);\\
&\mathfrak{svect}^L_\lambda(1|n) = \{D \in \mathfrak{vect}^L(1|n) \mid \operatorname{div}(t^\lambda D) = 0\} =\\
&\qquad\qquad = \{D \in \mathfrak{vect}^L(1|n) \mid L_D(t^\lambda \operatorname{vol}(t,\, \theta)) = 0\};\\
&\mathfrak{k}^L(1|n) = \{D \in \mathfrak{vect}^L(n) \mid D(\alpha_1) = f_D\alpha_1,\\
&\qquad\qquad \text{где } \alpha_1 = dt + \sum \theta_i d\theta_i, \ \text{для некоторой } f_D \in R^L(n)\}.
\end{aligned}$$

---

[1] Напомним, что корень r называется *вещественным*, если kr является корнем только для конечного числа различных значений скаляров k. В противном случае корень называется *мнимым*.

Вместо $\mathfrak{svect}^L_0(1|n)$ мы кратко пишем $\mathfrak{svect}^L(1|n)$.

Стандартные рассуждения доказывают, что функции $f \in R^L(n)$ порождают $\mathfrak{k}^L(n)$, а выражения для полей K_f и контактной скобки такие же, как и для супералгебры Ли $\mathfrak{k}(1|n)$, порожденной многочленами f.

8.2. Утверждение. *Супералгебры Ли* $\mathfrak{vect}^M(1|n)$ *и* $\mathfrak{svect}^M_\lambda(1|n)$, *полученные заменой* $R^L(n)$ *на* $R^M(n)$, *изоморфны* $\mathfrak{vect}^L(1|n)$ *и* $\mathfrak{svect}^L_{\lambda-1/2}(1|n)$ *соответственно, а* $\mathfrak{svect}^L_\lambda(1|n) \cong \mathfrak{svect}^L_\mu(1|n)$, *если и только если* $\lambda - \mu \in \mathbb{Z}$.

Следующая формула бывает полезна:

$$D = f\partial_t + \sum f_i\partial_i \in \mathfrak{svect}^L_\lambda(1|n) \iff \lambda f = -t \operatorname{div} D. \tag{Д3.53}$$

Если $\lambda \in \mathbb{Z}$, то на супералгебре Ли $\mathfrak{svect}^L_\lambda(1|n)$ есть след (четности $\varepsilon^n = n \bmod 2$), выделяющий простой идеал $\mathfrak{svect}^{L\prime}_\lambda(1|n)$ коразмерности ε^n:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{svect}^{L\prime}_\lambda(1|n) \longrightarrow \mathfrak{svect}^L_\lambda(1|n) \longrightarrow \mathbb{K} \cdot \theta_1 \ldots \theta_n\partial_t \longrightarrow 0.$$

Подъем контактной структуры с суперокружности $S^{1|n}$ на ее двулистное накрытие $S^{1|n-1,M}$ приводит к новой супералгебре Ли. Действительно: в координатах такой подъем означает замену θ_n на $\sqrt{t}\theta$ и переводит форму α_1 в *форму Мёбиуса*

$$\widehat{\widehat{\alpha}} = dt + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \theta_i d\theta_i + t\zeta d\zeta.$$

Другое нормальное выражение для *формы Мёбиуса* часто не менее удобно:

$$\widehat{\alpha} = \begin{cases} dt + \sum\limits_{i \leqslant k} (\xi_i d\eta_i + \eta_i d\xi_i) + t\zeta d\zeta, & \text{если } n = 2k+1,\\ dt + \sum\limits_{i \leqslant k} (\xi_i d\eta_i + \eta_i d\xi_i + \theta d\theta) + t\zeta d\zeta, & \text{если } n = 2k+2. \end{cases} \tag{Д3.54}$$

Таким образом, имеется два способа описывать векторные поля сохраняющие распределение, заданное формой α_1 или $\widehat{\alpha}$:

1) Можно положить:

$$\mathfrak{k}^M(1|n) = \{D \in \mathfrak{der}\, R^M(n) \mid L_D(\alpha_1) = f_D \cdot \alpha_1, \ \text{где } f_D \in R^M(n)\}.$$

В этом случае поля K_f заданы теми же формулами, что и для $\mathfrak{k}(1|n)$, но производящие функции лежат в $R^M(n)$. Контактная скобка функций из $R^M(n)$ тоже задается теми же формулами, что и для $\mathfrak{k}(1|n)$.

2) Можно положить:

$$\mathfrak{k}^M(1|n) = \{D \in \mathfrak{vect}^L(1|n) \mid L_D(\widehat{\alpha}) = f_D \cdot \widehat{\alpha}, \ \text{где } f_D \in R^L(n)\}.$$

Легко проверить, что $\mathfrak{k}^M(1|n) = \mathrm{Span}(\widetilde{K}_f \mid f \in R^L(n))$, где *контактное поле Мёбиуса* задано формулой

$$\widetilde{K}_f = \triangle(f)\mathcal{D} + \mathcal{D}(f)E + \widetilde{H}_f, \tag{Д3.55}$$

в которой, как и в случае суперцилиндра $S^{1,n}$, мы полагаем $\triangle = 2 - E$, где

$$\mathcal{D} := \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\theta}{2t}\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{1}{2}\widetilde{K}_1, \quad \text{а} \quad E = \begin{cases} \sum\limits_{i\leqslant n-1} \theta_i \dfrac{\partial}{\partial\theta_i}, & \text{если } n = 2k+1, \\ \sum\limits_{i\leqslant n-2} \theta_i \dfrac{\partial}{\partial\theta_i} + \theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}, & \text{если } n = 2k+2; \end{cases} \tag{Д3.56}$$

и где

$$\widetilde{H}_f = \begin{cases} (-1)^{p(f)}\Big(\sum \dfrac{\partial f}{\partial\theta_i}\dfrac{\partial}{\partial\theta_i} + \dfrac{1}{t}\dfrac{\partial f}{\partial\zeta}\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\Big) \\ \qquad\qquad \text{в реализации с формой } \widehat{\widehat{\alpha}} \text{ при } n = 2k+1; \\ (-1)^{p(f)}\Big(\sum \Big(\dfrac{\partial f}{\partial\xi_i}\dfrac{\partial}{\partial\eta_i} + \dfrac{\partial f}{\partial\eta_i}\dfrac{\partial}{\partial\xi_i}\Big) + \dfrac{\partial f}{\partial\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{1}{t}\dfrac{\partial f}{\partial\zeta}\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\Big) \\ \qquad\qquad \text{в реализации с формой } \widehat{\alpha} \text{ при } n = 2k+2. \end{cases}$$

Соответствующую контактную скобку производящих функций назовем *скобкой Рамона* (*Ramond*); ее явное выражение

$$\{f, g\}_{R.b.} = \triangle(f)\mathcal{D}(g) - \mathcal{D}(f)\triangle(g) - \{f, g\}_{MP.b.}, \tag{Д3.57}$$

где *скобка Мёбиуса—Пуассона* $\{\cdot,\cdot\}_{MP.b.}$ имеет вид (мы приведем скобку лишь в реализации с формой $\widehat{\widehat{\alpha}}$):

$$\{f, g\}_{MP.b.} = (-1)^{p(f)}\Big(\sum \frac{\partial f}{\partial\theta_i}\frac{\partial g}{\partial\theta_i} + \frac{1}{t}\frac{\partial f}{\partial\zeta}\frac{\partial g}{\partial\zeta}\Big). \tag{Д3.58}$$

Так же, как и для контактных полей с полиномиальными коэффициентами имеем

$$L_{K_f}(\alpha_1) = K_1(f)\cdot\alpha_1, \qquad L_{\widetilde{K}_f}(\widehat{\alpha}) = \widetilde{K}_1(f)\cdot\widehat{\alpha}.$$

8.3. Замечание. 1) Опишем связь вышеописанных скобок с ассоциативным и суперкоммутативным умножением функций. Эти условия часто выписывают как часть определения скобок, особенно скобки Пуассона. Но это неверно: они суть следствия определения скобок.

$$\begin{aligned} \{f, gh\}_{k.b.} &= \{f, g\}_{k.b.}h + (-1)^{p(f)p(g)}g\{f, h\}_{k.b.} + K_1(f)gh; \\ \{f, gh\}_{R.b.} &= \{f, g\}_{R.b.}h + (-1)^{p(f)p(g)}g\{f, h\}_{R.b.} + \widetilde{K}_1(f)gh; \\ \{f, gh\}_{m.b.} &= \{f, g\}_{m.b.}h + (-1)^{(p(f)+1)p(g)}g\{f, h\}_{m.b.} + M_1(f)gh. \end{aligned} \tag{Д3.59}$$

Соответствующие формулы для скобок Пуассона и Бюттен или Схоутена суть выражения (Д3.59) (первые две и третья соответственно) без третьего слагаемого.

Явно вложение $i\colon \mathfrak{vect}^L(1|n) \to \mathfrak{k}^L(1|2n)$ задано формулой (Д3.60), в которой $\Phi = \sum\limits_{i\leqslant n} \xi_i\eta_i$:

$D \in \mathfrak{vect}^L(1\|n)$	Производящая функция $i(D)$
$f(\xi)t^m\partial_t$	$(-1)^{p(f)}\dfrac{1}{2^m}f(\xi)(t-\Phi)^m$
$f(\xi)t^m\partial_i$	$(-1)^{p(f)}\dfrac{1}{2^m}f(\xi)\eta_i(t-\Phi)^m$

(Д3.60)

Ясно, что $\mathfrak{svect}^L_\lambda(1|n)$ — подсуперпространство в $\mathfrak{vect}^L(1|n)$, натянутое на производящие функции

$$f(\xi)(t-\Phi)^m + \sum_i f_i(\xi)\eta_i(t-\Phi)^{m-1}, \text{ где } (\lambda+n)f(\xi) = -\sum_i (-1)^{p(f_i)}\frac{\partial f_i}{\partial\xi_i}. \tag{Д3.61}$$

Серийные струнные супералгебры Ли над $\mathbb{C}$ суть $\mathfrak{vect}^L(1|n)$, $\mathfrak{svect}^L_\lambda(1|n)$ при $\lambda \notin \mathbb{Z}$, $\mathfrak{svect}^{L'}_\lambda(1|n)$ при $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{k}^L(1|n)$ и $\mathfrak{k}^M(1|n)$.

8.4. Замечание. Мы думаем, что градуировки и фильтрации струнных супералгебр Ли, индуцированные фильтрацией Вейсфейлера векторных супералгебр Ли того же типа, но с полиномиальными коэффициентами, лучше других градуировок и фильтраций, но, в отличие от случая полиномиальных коэффициентов, мы не знаем так ли это. Очевидно, что W-градуировки супералгебр Ли $\mathfrak{vect}(1|n)$ и $\mathfrak{k}(1|n)$ индуцируют градуировки супералгебр Ли $\mathfrak{vect}^L(1|n)$, а также $\mathfrak{svect}^L_\lambda(1|n)$) и $\mathfrak{k}^L(1|n)$. Для $\mathfrak{k}^M(1|n)$ форма $\widehat{\alpha}$, задающая сохраняющееся распределение, должна быть однородной, поэтому $\deg\theta = 0$. В реализации $\mathfrak{k}^M(1|n) = \mathfrak{aut}_{RL}(\widehat{\alpha})$ эти $\mathbb{Z}$-градуировки перечислены в табл. Д3.11, где $(*)$ отмечает «стандартную» градуировку.

Таблица Д3.11

$\mathfrak{k}^M(1\|n)$	$\deg t = 2,\quad \deg\theta = 0,\quad \deg\xi_i = 1$ при всех i $\qquad (*)$
$\mathfrak{k}^M(1\|2n;\, r)$ $1 \leqslant r < n$	$\deg t = \deg\eta_1 = \ldots = \deg\eta_r = 2,\quad \deg\xi_1 = \ldots = \deg\xi_r = \deg\zeta = 0,$ $\deg\xi_{r+i} = \deg\eta_{r+i} = \deg\theta = 1$ при всех i
$\mathfrak{k}^M(1\|2n+1;\, n)$	$\deg t = \deg\eta_1 = \ldots = \deg\eta_n = 1, \deg\zeta = \deg\xi_1 = \ldots = \deg\xi_n = 0$

8.5. Модули тензорных полей над струнными супералгебрами.

Символом $T^L(V) = \mathbb{K}[t^{-1}, t] \otimes V$ обозначим $\mathfrak{vect}(1|n)$-модуль, который отличается от $T(V)$ тем, что функции со значениями в V — это многочлены (или ряды) Лорана, а не просто многочлены. Очевидно, что $T^L(V)$ есть $\mathfrak{vect}^L(1|n)$-модуль. Определим *подкрученную с весом* $\mu \in \mathbb{K}$ версию модуля $T^L(V)$, положив

$$T^L_\mu(V) = \mathbb{K}[t^{-1}, t]t^\mu \otimes V. \tag{Д3.62}$$

8.5а. «Простейшие» модули — аналоги тавтологического модуля над матричными супералгебрами Ли. Простейшими модулями над супералгебрами Ли серии $\mathfrak{vect}$ являются, конечно, модули λ-плотностей. Они характеризуются тем, что над алгеброй функций $\mathcal{F}$ их ранг равен 1 (или ε, если образующая нечетна). Над струнными супералгебрами такие модули можно еще подкрутить и рассматривать $\mathcal{F}_{\lambda;\mu} := \mathrm{Vol}^{\lambda}_{\mu}$, ср. (Д3.62). Отметим, что при $\mu \notin \mathbb{Z}$ такой модуль содержит лишь один подмодуль — образ внешнего дифференциала d, см. [БЛ*], а при $\mu \in \mathbb{Z}$ имеется дополнительно ядро вычета:

$$\mathrm{Res}\colon \mathrm{Vol}^L \longrightarrow \mathbb{K}, \quad f\,\mathrm{vol}(t,\,\xi) \longmapsto \text{ коэффициент при } \frac{\xi_1\ldots\xi_n}{t} \\ \text{в разложении функции } f \text{ по степеням переменных.} \tag{Д3.63}$$

• Над $\mathfrak{svect}^L(1|n)$ все пространства Vol^{λ}, очевидно, изоморфны, поскольку сохраняется элемент объема $\mathrm{vol}(t,\,\theta)$. Поэтому все модули ранга 1 над алгеброй функций изоморфны модулю подкрученных функций $\mathcal{F}_{0;\mu}$.

Над $\mathfrak{svect}^L_{\lambda}(1|n)$ простейшие модули порождены над алгеброй функций элементом $t^{\lambda}\,\mathrm{vol}(t,\,\theta)$. Подмодули простейших модулей над $\mathfrak{svect}^L(1|n)$ и $\mathfrak{svect}^L_{\lambda}(1|n)$ — такие же как и над $\mathfrak{vect}^L(1|n)$, но, если $\mu \in \mathbb{Z}$, то дополнительно имеется тривиальный подмодуль.

8.5б. «Простейшие» модули над контактными супералгебрами Ли. Такие модули естественно выражать не в терминах λ-плотностей, а в терминах степеней формы $\alpha = \alpha_1$:

$$\mathcal{F}_{\lambda} := \begin{cases} \mathcal{F}\alpha^{\lambda} & \text{при } n = m = 0, \\ \mathcal{F}\alpha^{\lambda/2} & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{Д3.64}$$

• При $n = 0$, $m = 2$ (мы берем $\alpha = dt - \xi d\eta - \eta d\xi$) над $\mathcal{F}$ имеются дополнительные модули ранга 1, а именно:

$$T(\lambda,\,\nu)_{\mu} = \mathcal{F}_{\lambda;\mu}\cdot([d\xi])^{\nu}, \tag{Д3.65}$$

где $[d\xi] := d\xi \mod \mathcal{F}\alpha$; очевидно, что $[d\eta] = [d\xi]^{-1}$, где $[d\eta] := d\eta \mod \mathcal{F}\alpha$.

• Над $\mathfrak{k}^M$ мы заменяем форму α формой $\widehat{\alpha}$ и определение $\mathfrak{k}^L(1|m)$-модулей $\mathcal{F}_{\lambda;\mu}$ заменяется на

$$\mathcal{F}^M_{\lambda;\mu} = \begin{cases} \mathcal{F}_{\lambda;\mu}(\widehat{\alpha})^{\lambda} & \text{при } m = 1, \\ \mathcal{F}_{\lambda;\mu}(\widehat{\alpha})^{\lambda/2} & \text{при } m > 1. \end{cases} \tag{Д3.66}$$

8.5в. Примеры. 1) Модуль форм объема над $\mathfrak{k}(2n+1|m)$ — это $\mathcal{F}_{2n+2-m}$. В частности, отсюда сразу видно, что имеется вложение $\mathfrak{k}(2n+1|2n+2) \subset \mathfrak{svect}(2n+1|2n+2)$.

2) Присоединенные $\mathfrak{k}^L(1|m)$- и $\mathfrak{k}^M(1|m)$-модули суть

$$\begin{gathered} \mathfrak{k}^L(1|m) \simeq \begin{cases} \mathcal{F}_{-1} & \text{при } m = 0, \\ \mathcal{F}_{-2} & \text{в противном случае;} \end{cases} \\ \mathfrak{k}^M(1|m) \simeq \begin{cases} \mathcal{F}_{-1} & \text{при } m = 1, \\ \mathcal{F}_{-2} & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{gathered} \tag{Д3.67}$$

В частности, $\mathfrak{k}^L(1|4) \simeq \mathrm{Vol}$ и $\mathfrak{k}^M(1|5) \simeq \Pi(\mathrm{Vol})$, а значит, эти супералгебры непросты.

8.6. Исключительные струнные супералгебры Ли. А) Часть функций, порождающих $\mathfrak{k}^L(1|6)$ и удовлетворяющих некоторому условию, порождают $\mathfrak{kas}^L \subset \mathfrak{k}^L(1|6)$ — лорановский аналог супералгебры Ли $\mathfrak{kas}$.

Б) На комплексификации суперокружности $S^{1|2}$, пусть q — четная координата, а τ и ξ — нечетные. Положим

$$\mathfrak{m}^L(1) = \{D \in \mathfrak{vect}^L(1|2) \mid D\alpha_0 = f_D\alpha_0, \text{ где } f_D \in R^L(1|1),\ \alpha_0 = d\tau + qd\xi + \xi dq\}.$$

В, Г) Из примера 8.5а следует, что функции на $S^{1|4}$ (соответственно на $S^{1|4;M}$) с нулевым вычетом составляют идеал в $\mathfrak{k}^L(1|4)$ (соответственно в $\mathfrak{k}^M(1|5)$). Эти идеалы являются простыми супералгебрами Ли $\mathfrak{k}^{L\prime}(1|4)$ и $\mathfrak{k}^{M\prime}(1|5)$, производными соответствующих супералгебр Ли.

«Статус» этих исключений разный: алгебра $\mathfrak{kas}^L$ — настоящее исключение, алгебра $\mathfrak{m}^L(1)$ — результат исключительной переградуировки; алгебры $\mathfrak{k}^{L\prime}(1|4)$ и $\mathfrak{k}^{M\prime}(1|5)$ «выпали» из серий, будучи выделенными (супер)следом (не дивергенцией!).

Задача. Одна серия деформаций супералгебры Ли $\mathfrak{svect}^L(n)$ описана выше. Описать деформации всех простых струнных супералгебр Ли и тех непростых, чьими производными простые являются. О подводных камнях в этой задаче и о том, что уже сделано, см. в статье [LSh*].

Теорема (отмеченные струнные супералгебры Ли). *Единственные нетривиальные центральные расширения простых струнных супералгебр Ли — те, что приведены*[1] *в табл.* Д3.12.

Простые струнные (супер)алгебры Ли, у которых есть нетривиальное центральное расширение, назовем *отмеченными* струнными супералгебрами.

В этом подпункте K_f — общее обозначение как K_f, так и K^M_f. Пусть $D_{\theta_i} := \partial_{\theta_i} + \theta_i\partial_t$, а для супералгебр Ли серии $\mathfrak{k}^M$ введем еще операторы

---

[1] Спасибо К. Заксе, исправившему выражения для нетривиальных центральных расширений, приводящих к струнным супералгебрам Рамона, в терминах «суперполей». Для вычислений удобнее, однако, пользоваться компонентной записью, см. формулы (Д3.68) и далее.

$D^M_{\theta_N} := \theta_N\partial_t - \frac{1}{t}\partial_{\theta_N}$. Определим оператор $\mathcal{D}^{-1}$, см. (Д3.56), для мультииндекса $\alpha \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ и функции $f_\alpha = f_\alpha(t)$, положив

$$\mathcal{D}^{-1}(f_\alpha\theta_\alpha) = \begin{cases} \left(\int f_\alpha\, dt\right)\theta_\alpha, & \text{если } 4 \notin \alpha,\\ \sqrt{t}\left(\int \frac{f_\alpha}{\sqrt{t}}\, dt\right)\theta_\alpha, & \text{если } 4 \in \alpha,\end{cases}$$

где знак $\int$ означает неопределенный интеграл по t.

Таблица Д3.12

Алгебра	Коцикл c	Имя расширенной алгебры
$\mathfrak{k}^L(1\mid 0)$	$K_f,\ K_g \mapsto \operatorname{Res} fK_1^3(g)$	алгебра Вирасоро $\mathfrak{vir}$
$\left.\begin{matrix}\mathfrak{k}^L(1\mid 1)\\ \mathfrak{k}^M(1\mid 1)\end{matrix}\right\}$	$K_f,\ K_g \mapsto \begin{cases}\operatorname{Res}(fD_\theta K_1^2 g)\\ \operatorname{Res}(fK^M_\theta(K^M_1)^2 g)\end{cases}$	супералгебра Невё—Шварца $\mathfrak{ns}$ супералгебра Рамона $\mathfrak{r}$
$\mathfrak{vect}^L(1\mid 1)$	$D_1 = f\partial_t + g\partial_\theta,\ D_2 = \tilde{f}\partial_t + \tilde{g}\partial_\theta \mapsto$ $\mapsto \operatorname{Res}\left[\left(D_1\partial_t D_2 - (-1)^{p(D_1)p(D_2)} D_2\partial_t D_1\right)\theta\right]$	$\widehat{\mathfrak{vect}}^L(1\mid 1)$
$\left.\begin{matrix}\mathfrak{k}^L(1\mid 2)\\ \mathfrak{k}^M(1\mid 2)\end{matrix}\right\}$	$K_f,\ K_g \mapsto \begin{cases}\operatorname{Res}(fD_{\theta_1}D_{\theta_2}K_1 g)\\ \operatorname{Res}\left(f\frac{1}{\sqrt{t}}K^M_{\theta_1}\sqrt{t}\,D^M_{\theta_2}K^M_1 g\right)\end{cases}$	супералгебры 2-Невё—Шварца $\mathfrak{ns}(2)$ 2-Рамона $\mathfrak{r}(2)$
$\mathfrak{m}^L(1)$	$M_f,\ M_g \mapsto \operatorname{Res} f(M_q)^3(g)$	$\widehat{\mathfrak{m}}^L(1)$
$\left.\begin{matrix}\mathfrak{k}^L(1\mid 3)\\ \mathfrak{k}^M(1\mid 3)\end{matrix}\right\}$	$K_f,\ K_g \mapsto \begin{cases}\operatorname{Res}(fD_{\theta_1}D_{\theta_2}D_{\theta_3} g)\\ \operatorname{Res}\left(f\frac{1}{\sqrt{t}}K^M_{\theta_1}K^M_{\theta_2}\sqrt{t}D^M_{\theta_3} g\right)\end{cases}$	супералгебры 3-Невё—Шварца $\mathfrak{ns}(3)$ 3-Рамона $\mathfrak{r}(3)$
$\left.\begin{matrix}\mathfrak{k}^{L\prime}(4)\\ \mathfrak{k}^M(1\mid 4)\end{matrix}\right\}$	$K_f,\ K_g \mapsto$ $\mapsto$ (1) $\begin{cases}\operatorname{Res}\left(fD_{\theta_1}D_{\theta_2}D_{\theta_3}D_{\theta_4}K_1^{-1} g\right)\\ \operatorname{Res}\left(f\frac{1}{\sqrt{t}}K^M_{\theta_1}K^M_{\theta_2}K^M_{\theta_3}\sqrt{t}D^M_{\theta_4}\mathcal{D}^{-1} g\right)\end{cases}$ (2) $\operatorname{Res} fK_{t^{-1}}(tg)$ (3) $\operatorname{Res} fK_1(g)$	супералгебры (1) $\begin{cases}\text{4-Невё—Шварца } \mathfrak{ns}(4)\\ \text{4-Рамона } \mathfrak{r}(4)\end{cases}$ (2) $4'$-Невё—Шварца $\mathfrak{ns}(4')$ (3) 4^0-Невё—Шварца $\mathfrak{ns}(4^0)$
$\mathfrak{vect}^L(1\mid 2)$	ограничение коцикла (3), см. строку выше: $D_1 = f\partial_t + g_1\partial_{\xi_1} + g_2\partial_{\xi_2}$, $D_2 = \tilde{f}\partial_t + \tilde{g}_1\partial_{\xi_1} + \tilde{g}_2\partial_{\xi_2} \mapsto$ $\mapsto \operatorname{Res}\left(g_1\tilde{g}_2' - (-1)^{p(D_1)p(D_2)} g_2\tilde{g}_1'\right)$	$\widehat{\mathfrak{vect}}^L(1\mid 2)$
$\mathfrak{svect}^L_\lambda(1\mid 2)/\mathfrak{c}$	ограничение коцикла, заданного строкой выше	$\mathfrak{svect}^L_\lambda(1\mid 2)$, ее центр $\mathfrak{c}$ одномерен

Ограничение коцикла, задающего расширение супералгебры Ли $\mathfrak{vect}^L(1|2)$ на ее подалгебру $\operatorname{Span}(f(t)\partial_t) \cong \mathfrak{witt}$ тривиально, а вот ограничение коцикла, задающего расширение супералгебры Ли $\mathfrak{svect}^L_\lambda(1|2)$ на ее подалгебру $\mathfrak{witt}$, которую можно вложить единственным способом, нетривиально. Загадка разрешается при внимательном взгляде на вложение $\mathfrak{vect}(1|m) \to \mathfrak{k}(1|2m)$: в нем участвуют дифференцирования, см. (Д3.61).

Ненулевые значения коцикла c на $\mathfrak{vect}^L(1|2)$ в мономиальном базисе:

$$\begin{aligned} &c(t^k\theta_1\partial_{\theta_1},\, t^l\theta_2\partial_{\theta_2}) = k\delta_{k,-l}, \quad c(t^k\theta_1\partial_{\theta_2},\, t^l\theta_2\partial_{\theta_1}) = -k\delta_{k,-l},\\ &c(t^k\theta_1\theta_2\partial_{\theta_1},\, t^l\partial_{\theta_2}) = k\delta_{k,-l}, \quad c(t^k\theta_1\theta_2\partial_{\theta_2},\, t^l\partial_{\theta_1}) = k\delta_{k,-l}.\end{aligned} \tag{Д3.68}$$

В $\mathfrak{svect}^L_\lambda(1|2)$ выберем базис:

$$\begin{aligned} L_m &= t^m\left(t\partial_t + \frac{\lambda + m + 1}{2}(\theta_1\partial_{\theta_1} + \theta_2\partial_{\theta_2})\right),\\ S^j_m &= t^m\theta_j(t\partial_t + (\lambda + m + 1)(\theta_1\partial_{\theta_1} + \theta_2\partial_{\theta_2})).\end{aligned}$$

В этом базисе ненулевые значения коцикла c на $\mathfrak{svect}^L_\lambda(1|2)/\mathfrak{c}$ суть

$$\begin{aligned} &c(L_m, L_n) = \frac{1}{2}m(m^2 - (\lambda + 1)^2)\delta_{m,-n},\\ &c(t^k\partial_{\theta_i}, S^j_m) = -m(m - (\lambda + 1))\delta_{m,-n}\delta_{i,j},\\ &c(t^m(\theta_1\partial_{\theta_1} - \theta_2\partial_{\theta_2}),\, t^n(\theta_1\partial_{\theta_1} - \theta_2\partial_{\theta_2})) = m\delta_{m,-n},\\ &c(t^m\theta_1\partial_{\theta_2},\, t^n\theta_2\partial_{\theta_1}) = m\delta_{m,-n}.\end{aligned} \tag{Д3.69}$$

8.7. Корневая система супералгебры Ли $\mathfrak{svect}^L_\lambda(1|2)$. Элементами одной из систем простых корней являются

$$\begin{aligned} &X_1^+ = \xi_1\delta_{\xi_2}, && X_2^+ = t\delta_{\xi_1}, && X_3^+ = \xi_2 t\partial_t - (\lambda + 1)\xi_1\xi_2\delta_{\xi_1},\\ &X_1^- = \xi_2\delta_{\xi_1}, && X_2^- = \lambda\frac{\xi_1\xi_2}{t}\delta_{\xi_2} + \xi_1\partial_t, && X_3^- = \delta_{\xi_2},\\ &H_1 = \xi_1\delta_{\xi_1} - \xi_2\delta_{\xi_2}, && H_2 = t\partial_t + \xi_1\delta_{\xi_1} + \lambda\xi_2\delta_{\xi_2}, && H_3 = t\partial_t + (\lambda + 1)\xi_1\delta_{\xi_1}.\end{aligned} \tag{Д3.70}$$

Отражение во 2-м корне переводит систему (Д3.70) в следующую систему, в которой, чтобы сравнивать матрицы Картана было проще, мы будем рассматривать элементы с точностью до множителей в квадратных скобках $[\cdot]$:

$$\begin{aligned} &X_1^+ = t\delta_{\xi_2}, && X_2^+ = \lambda\frac{\xi_1\xi_2}{t}\delta_{\xi_2} + \xi_1\partial_t, && X_3^+ = [-\lambda]t\xi_2\delta_{\xi_1},\\ &X_1^- = \lambda\frac{\xi_1\xi_2}{t}\delta_{\xi_1} - \xi_2\partial_t, && X_2^- = t\delta_{\xi_1}, && X_3^- = [-\lambda]\frac{\xi_1}{t}\delta_{\xi_2},\\ &H_1 = -(t\partial_t + \lambda\xi_1\delta_{\xi_1} + \xi_2\delta_{\xi_2}), && H_2 = t\partial_t + \xi_1\delta_{\xi_1} + \lambda\xi_2\delta_{\xi_2}, && H_3 = \xi_2\delta_{\xi_2} - \xi_1\delta_{\xi_1}.\end{aligned}$$

Отражение в 3-м корне переводит систему (Д3.70) следующую систему:

$$\begin{aligned} &X_1^+ = \delta_{\xi_2}, && X_2^+ = [\lambda + 2]t\xi_2\delta_{\xi_1}, && X_3^+ = (\lambda + 1)\xi_2\xi_1\delta_{\xi_2} - \xi_1 t\partial_t,\\ &X_1^- = t\xi_2\partial_t - (\lambda + 1)\xi_1\xi_2\delta_{\xi_1}, && X_2^- = [-\lambda]\frac{\xi_1}{t}\delta_{\xi_2}, && X_3^- = \delta_{\xi_1},\\ &H_1 = t\partial_t + (\lambda + 1)\xi_1\delta_{\xi_1}, && H_2 = \xi_2\delta_{\xi_2} - \xi_1\delta_{\xi_1}, && H_3 = -t\partial_t - (\lambda + 1)\xi_2\delta_{\xi_2}.\end{aligned}$$

Соответствующие матрицы Картана имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1\\ 1-\lambda & 0 & \lambda\\ 1+\lambda & -\lambda & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -\lambda+1 & -2+\lambda\\ 1-\lambda & 0 & \lambda\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & \lambda+1\\ -1 & 2 & -1\\ 1+\lambda & -\lambda-2 & 0\end{pmatrix}. \tag{Д3.71}$$

Чтобы сравнить эти матрицы, приведем их к следующим нормальным видам соответственно, перенумеровав строки/столбцы и масштабировав (по определению $\lambda \neq 0, \pm 1$, так что дроби корректно определены):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1+\frac{1}{\lambda} & 0 & 1 \\ 1+\frac{1}{\lambda} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1+\frac{1}{1-\lambda} & 0 & 1 \\ 1+\frac{1}{1-\lambda} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1+\frac{1}{1+\lambda} & 0 & 1 \\ 1+\frac{1}{1+\lambda} & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{Д3.72}$$

Видно, что преобразования $\lambda \mapsto \lambda+1$ и $\lambda \mapsto 1-\lambda$ устанавливают изоморфизмы супералгебр Ли, а значит, можно считать, что $\operatorname{Re}\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Отметим, что значению $\lambda = 0$ отвечает непростая супералгебра Ли, а матрице Картана при $\lambda = 0$ соответствует $\mathfrak{gl}(2|2)$, причем в качестве матрицы Картана удобно брать первую из матриц (Д3.71).

8.8. Утверждение (простота и случайные изоморфизмы). 1) *Супералгебры Ли* $\mathfrak{vect}^L(1|n)$ *при любом* n, $\mathfrak{svect}_\lambda^{L'}(1|n)$ *при* $\lambda \notin \mathbb{Z}$ *и* $n > 1$, $\mathfrak{svect}^{L'}(1|n)$ *при* $n > 1$, $\mathfrak{k}^M(1|n)$ *при* $n \neq 5$ *и* $\mathfrak{k}^L(1|n)$ *при* $n \neq 4$; *а также четыре исключительных струнных супералгебры Ли просты.*

2) *Супералгебры Ли* $\mathfrak{vect}^L(1|1)$, $\mathfrak{k}^L(1|2)$ *и* $\mathfrak{m}^L(1|1)$ *изоморфны.*

3) *Изоморфизм* $\mathfrak{svect}_\lambda^L(1|2) \cong \mathfrak{svect}_\mu^L(1|2)$ *имеет место, если* μ *можно получить из* λ *преобразованиями* $\lambda \mapsto \lambda+1$ *и* $\lambda \mapsto 1-\lambda$. *Супералгебры Ли* $\mathfrak{svect}_\lambda^L(1|2)$ *из полосы* $\operatorname{Re}\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ *неизоморфны.*

8.8а. Замечания. 1) Единственными, как доказано в [HS°], супералгебрами Ли $\mathfrak{g}(A)$ полиномиального роста с несимметризуемой матрицей Картана являются: $\widetilde{\mathfrak{psq}}(n)^{(2)}$ и исключительное параметрическое семейство (обнаруженное Ю. ван де Люром в 1986 г.) с любой из матриц (Д3.72). Эта супералгебра Ли $\mathfrak{g}(A)$ реализуется в виде отмеченной струнной супералгебры $\mathfrak{svect}_\lambda^L(1|2)$. Описание соотношений между ее образующими Шевалле см. в статье [GL1°]. Отметим, что $\mathfrak{svect}_\lambda^L(1|2)$ не является центральным расширением никакой супералгебры петель: см. строгое определение 8.1.

2) **О конформности струнных супералгебр**. Напомним, что алгебра Ли называется *конформной*, если она сохраняет метрику (или, более общо, билинейную форму, или иной тензор, например, элемент объема) B с точностью до ненулевого числового множителя. Известно, что на *вещественном* пространстве размерности $\neq 2$ с метрикой B, алгебра Ли конформно сохраняющая B, изоморфна $\mathfrak{c}(\mathfrak{aut}(B)) \cong \mathfrak{co}(V, B)$. Если же $\dim V = 2$, то V можно воспринимать как комплексную прямую $\mathbb{C}^1$ с координатой t и отождествить B с $dt \cdot d\bar{t}$ (рассматривается не внешнее, а симметрическое произведение дифференциалов). Элемент $f\frac{d}{dt}$ из алгебры Витта $\mathfrak{witt}$ умножает dt на f', а значит, $dt \cdot d\bar{t}$ на $f'\bar{f}'$, так что алгебра Витта *конформная*, хотя умножает форму $dt \cdot d\bar{t}$ не на число, а на функцию.

На СУПЕРпространствах V билинейная форма B может быть как четной, так и нечетной; супералгебра Ли $\mathfrak{aut}(V, B)$, сохраняющая форму B — это либо $\mathfrak{osp}(\mathrm{Par})$, либо $\mathfrak{pe}(\mathrm{Par})$, а соответствующие конформные супералгебры суть тривиальные центральные расширения $\mathfrak{c}(\mathfrak{aut}(V, B))$ во всех суперразмерностях, кроме тех, что приводят к струнным супералгебрам Ли.

Элементы K_F контактных супералгебр Ли $\mathfrak{k}^L(1|n)$, $\mathfrak{k}^M(1|n)$ и $\mathfrak{m}^L(1)$, сохраняющих распределение заданное 1-формой, которую для общности рассуждения обозначим α, умножают симметрическое произведение форм $\alpha \cdot \bar{\alpha}$ на $K_1(F)\overline{K_1(F)}$. Каждый элемент D супералгебры Ли $\mathfrak{vect}^L(1|n)$ или $\mathfrak{svect}_\lambda^L(1|n)$ умножает симметрическое произведение форм объема $\mathrm{vol}(t, \theta) \cdot \mathrm{vol}(\bar{t}, \bar{\theta})$ на $\operatorname{div} D \cdot \overline{\operatorname{div} D}$.

Хотя ни один из тензоров из предыдущего абзаца — не билинейная форма, струнные супералгебры часто называют *суперконформными*[1], см. [ГШВ°]. Только $\mathfrak{k}^L(1|1)$ и $\mathfrak{k}^M(1|1)$ являются суперконформными в классическом смысле слова, поскольку эти супералгебры преобразуют элемент объема $\mathrm{vol}(t, \theta) =$ “$dt\partial_\theta$” так же, как форму $d\theta$, рассмотренную в факторе $\Omega^1/\mathcal{F}\alpha$ или $\Omega^1/\mathcal{F}\hat{\alpha}$ соотвественно. Поэтому над этими супералгебрами Ли тензор $dt\partial_\theta \cdot d\bar{t}\partial_{\bar{\theta}}$ можно отождествить с билинейной формой $d\theta \cdot d\bar{\theta}$.

8.9. Утверждение. *Если инвариантная невырожденная суперсимметрическая билинейная форма на простой конечномерной супералгебре Ли* $\mathfrak{g}$ *существует, то она единственна, с точностью до пропорциональности.*

На бесконечномерных простых супералгебрах Ли таких форм может быть несколько, см. [Kst°]. Инвариантная невырожденная суперсимметричная билинейная форма $(\cdot\,,\cdot)$ на $\mathfrak{g}$ существует, если и только если имеет место изоморфизм $\mathfrak{g}$-модулей

$$\mathfrak{g} \cong \begin{cases} \mathfrak{g}^*, & \text{если форма } (\cdot\,,\cdot) \text{ четна,} \\ \Pi(\mathfrak{g}^*), & \text{если форма } (\cdot\,,\cdot) \text{ нечетна.} \end{cases}$$

Таблица Д3.13

	0	1	2	3	4	5	6	7	$n>7$
$\mathfrak{g}$	$\mathcal{F}_{-1}$	$\mathcal{F}_{-2}$	$\mathcal{F}_{-2}$	$\mathcal{F}_{-2}$	$\mathcal{F}_{-2}$	$\mathcal{F}_{-2}$	$\mathcal{F}_{-2}$	$\mathcal{F}_{-2}$	$\mathcal{F}_{-2}$
Vol	$\mathcal{F}_1$	$\Pi(\mathcal{F}_1)$	$\mathcal{F}_0$	$\Pi(\mathcal{F}_{-1})$	$\mathcal{F}_{-2}$	$\Pi(\mathcal{F}_{-3})$	$\mathcal{F}_{-4}$	$\Pi(\mathcal{F}_{-5})$	$\Pi^n(\mathcal{F}_{2-n})$
$\mathfrak{g}^*$	$\mathcal{F}_2$	$\Pi(\mathcal{F}_3)$	$\mathcal{F}_2$	$\Pi(\mathcal{F}_1)$	$\mathcal{F}_0$	$\Pi(\mathcal{F}_{-1})$	$\mathcal{F}_{-2}$	$\Pi(\mathcal{F}_{-3})$	$\Pi^n(\mathcal{F}_{4-n})$

Таблица Д3.14

	1	2	3	4	5	6	7	$n>7$
$\mathfrak{g}$	$\mathcal{F}_{-1}$	$\mathcal{F}_{-2}$	$\mathcal{F}_{-2}$	$\mathcal{F}_{-2}$	$\mathcal{F}_{-2}$	$\mathcal{F}_{-2}$	$\mathcal{F}_{-2}$	$\mathcal{F}_{-2}$
Vol	$\Pi(\mathcal{F}_1)$	$\mathcal{F}_1$	$\Pi(\mathcal{F}_0)$	$\mathcal{F}_{-1}$	$\Pi(\mathcal{F}_{-2})$	$\mathcal{F}_{-3}$	$\Pi(\mathcal{F}_{-4})$	$\Pi^n(\mathcal{F}_{3-n})$
$\mathfrak{g}^*$	$\Pi(\mathcal{F}_2)$	$\mathcal{F}_3$	$\Pi(\mathcal{F}_2)$	$\mathcal{F}_1$	$\Pi(\mathcal{F}_0)$	$\mathcal{F}_{-1}$	$\Pi(\mathcal{F}_{-2})$	$\Pi^n(\mathcal{F}_{5-n})$

Из таблиц Д3.13 и Д3.14 следует, что на $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^L(1|6)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^M(1|7)$ имеется инвариантная невырожденная суперсимметрическая билинейная форма, четная и нечетная соответственно. Обе формы заданы единообразно:

$$(K_f,\, K_g) = \operatorname{Res} fg.$$

Ограничение формы с $\mathfrak{k}^L(1|6)$ на $\mathfrak{kas}^L$ тождественно равно 0.

---

[1] Иногда, причем совершенно напрасно, суперконформными называют только простые струнные супералгебры: как мы видели, такое сужение области применения термина неоправданно. В таких произведениях термин «суперконформные» тут же, в противоречие с определением, применяется к центральным расширениям простых струнных супералгебр, конформность которых пока никем не установлена, а «струнность» наличествует.

8.10. Три коцикла на $\mathfrak{k}^{L'}(1|4)$ и «примарные поля». Положим

Таблица Д3.15

Элементы	их степени	их четности
$L_n = K_{t^{n+1}};\ T_n^{ij} = K_{t^n\theta_i\theta_j};\ S_n = K_{t^{n-1}\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4}$	$2n$	$\bar{0}$
$E_n^i = K_{t^{n+1}\theta_i};\ F_n^i = K_{t^n\frac{\partial}{\partial\theta_i}\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4}$	$2n+1$	$\bar{1}$

В этом «мономиальном» базисе ненулевые значения коцикла следующие (здесь A_n — группа четных перестановок):

Таблица Д3.16

$c(L_m, L_n) = \alpha\cdot m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$
$c(E_m^i, E_n^i) = \alpha\cdot m(m+1)\delta_{m+n+1,0}$
$c(T_m^{ij}, T_n^{ij}) = -\alpha\cdot m\delta_{m+n,0}$
$c(F_m^i, F_n^i) = -\alpha\cdot\delta_{m+n+1,0}$
$c(S_m, S_n) = \alpha\cdot\dfrac{1}{m}\delta_{m+n,0}$
$c(L_m, S_n) = (\gamma+\beta\cdot m)\delta_{m+n,0}$
$c(E_m^i, F_n^i) = \Big(\frac{1}{2}\gamma+\beta\cdot\Big(m+\frac{1}{2}\Big)\Big)\delta_{m+n+1,0}$
$c(T_m^{ij}, T_n^{kl}) = -\beta\cdot m\delta_{m+n,0}$, где $(i, j, k, l)\in A_4$

Изменим базис следующим образом:

$$\widetilde{L}_m = L_m + a_mS_m \quad \text{при } a_m = -\frac{\beta}{\alpha}\cdot m^2 - \frac{\gamma}{\alpha}\cdot m;$$

$$\widetilde{E}_m^i = E_m^i + b_mF_m^i \quad \text{при } b_m = \frac{\beta}{2\alpha}\cdot(2m+1) + \frac{\gamma}{2\alpha}.$$

Три коцикла с параметрами α, β и γ можно теперь выразить так, чтобы они не занулялись лишь на паре элементов из одного $\mathfrak{witt}$-подмодуля присоединенного модуля. В новом базисе коциклы имеют вид:

Таблица Д3.17

$c(\widetilde{L}_m, \widetilde{L}_n) = \Big(\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha}\cdot m^3 - \dfrac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha}\cdot m\Big)\delta_{m+n,0}$
$c(\widetilde{E}_m^i, \widetilde{E}_n^i) = \Big(\dfrac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha}\cdot\Big(m+\dfrac{1}{2}\Big)^2 - \dfrac{\alpha^2-3\gamma^2}{4\alpha}\Big)\delta_{m+n+1,0}$
$c(T_m^{ij}, T_n^{ij}) = -\alpha\cdot m\delta_{m+n,0}$
$c(F_m^i, F_n^i) = -\alpha\cdot\delta_{m+n+1,0}$
$c(S_m, S_n) = \alpha\cdot\dfrac{1}{m}\delta_{m+n,0}$
$c(\widetilde{E}_m^i, F_n^i) = (\gamma+\beta\cdot(2m+1))\delta_{m+n+1,0}$
$c(T_m^{ij}, T_n^{kl}) = -\beta\cdot m\delta_{m+n,0}$, где $(i, j, k, l)\in A_4$

Заметим, что пространство параметров новых коциклов не $\mathbb{C}^3 = \{(\alpha, \beta, \gamma)\}$, а $\mathbb{C}^3$ без плоскости $\alpha = 0$.

Иногда удобно перейти к следующему базису:

Таблица Д3.18

$L_n = K_{t^{n+1}};\ T_n^{\xi_1\xi_2} = K_{t^n\xi_1\xi_2};\ T_n^{\xi_i\eta_j} = K_{t^n\xi_i\eta_j};\ T_n^{\eta_1\eta_2} = K_{t^n\eta_1\eta_2};\ S_n = K_{t^{n-1}\eta_1\eta_2\xi_1\xi_2}$
$G_n^{\xi_i} = K_{t^{n+1}\xi_i};\ \bar{G}_n^{\eta_i} = K_{t^{n+1}\eta_i};\ F_n^i = K_{t^n\eta_1\eta_2\xi_i};\ \bar{F}_n^i = K_{t^n\xi_1\xi_2\eta_i}$

Формулы таблицы Д3.16 перейдут при этом в

Таблица Д3.19

$c(L_m, L_n) = m(m^2-1)\alpha\cdot\delta_{m+n,0}$
$c(G_m^i, \bar{G}_n^i) = m(m+1)\alpha\cdot\delta_{m+n+1,0}$
$c\big(T_m^{\xi_2\eta_2}, T_n^{\xi_2\eta_2}\big) = m\alpha\cdot\delta_{m+n,0}$
$c\big(T_m^{\xi_1\eta_1}, T_n^{\xi_1\eta_1}\big) = m\alpha\cdot\delta_{m+n,0}$
$c\big(T_m^{\xi_1\eta_1}, T_n^{\xi_2\eta_2}\big) = -m\beta\cdot\delta_{m+n,0}$
$c(F_m^i, \bar{F}_n^i) = -\alpha\cdot\delta_{m+n+1,0}$
$c(S_m, S_n) = \dfrac{1}{m}\alpha\cdot\delta_{m+n,0}$
$c\big(T_m^{\xi_1\xi_2}, T_n^{\eta_1\eta_2}\big) = m(\beta-\alpha)\cdot\delta_{m+n,0}$
$c\big(T_m^{\xi_1\eta_2}, T_n^{\xi_2\eta_1}\big) = m(\beta+\alpha)\cdot\delta_{m+n,0}$
$c(L_m, S_n) = (\gamma+m\beta)\cdot\delta_{m+n,0}$
$c(G_m^1, F_n^2) = \Big(\frac{1}{2}\gamma+\Big(m+\frac{1}{2}\Big)\beta\Big)\cdot\delta_{m+n+1,0}$
$c(\bar{G}_m^1, \bar{F}_n^2) = \Big(\frac{1}{2}\gamma+\Big(m+\frac{1}{2}\Big)\beta\Big)\cdot\delta_{m+n+1,0}$
$c(G_m^2, F_n^1) = -\Big(\frac{1}{2}\gamma+\Big(m+\frac{1}{2}\Big)\beta\Big)\cdot\delta_{m+n+1,0}$
$c(\bar{G}_m^2, \bar{F}_n^1) = -\Big(\frac{1}{2}\gamma+\Big(m+\frac{1}{2}\Big)\beta\Big)\cdot\delta_{m+n+1,0}$

Для $\mathfrak{k}^M(4)$ аналогичный базис имеет вид

Таблица Д3.20

Элементы	их степени	их четность
$L_n = K_{t^{n+1}};\ T_n^{\xi\eta} = K_{t^n\xi\eta};\ T_n^{\xi\theta} = K_{t^n\xi\theta};\ T_n^{\eta\theta} = K_{t^n\eta\theta}$	$2n$	$\bar{0}$;
$\widetilde{T}_n^{\xi\zeta} = K_{t^n\xi\zeta};\ \widetilde{T}_n^{\eta\zeta} = K_{t^n\eta\zeta};\ T_n^{\theta\zeta} = K_{t^n\theta\zeta};\ S_n = K_{t^{n-1}\xi\eta\theta\zeta}$	$2n-1$	$\bar{0}$;
$G_n^{\xi} = K_{t^{n+1}\xi};\ G_n^{\eta} = K_{t^{n+1}\eta};\ G_n^{\theta} = K_{t^{n+1}\theta};\ \widetilde{F}_n = K_{t^n\xi\eta\theta}$	$2n+1$	$\bar{1}$
$\widetilde{G}_n = K_{t^{n+1}\zeta};\ F_n^{\xi\eta} = K_{t^n\xi\eta\zeta};\ F_n^{\xi\theta} = K_{t^n\xi\theta\zeta};\ F_n^{\eta\theta} = K_{t^n\eta\theta\zeta}$	$2n$	$\bar{1}$

В этом базисе коцикл задан формулами

Таблица Д3.21

$$\boxed{\begin{gathered}
c(L_m,\, L_n) = m(m^2-1)\alpha\cdot\delta_{m+n,0}\\
c\big(G^{\xi}_m,\, G^{\eta}_n\big) = m(m+1)\alpha\cdot\delta_{m+n+1,0}\\
c\big(\widetilde{G}^{\zeta}_m,\, \widetilde{G}^{\zeta}_n\big) = \Big(m-\frac{1}{2}\Big)\Big(m+\frac{1}{2}\Big)\alpha\cdot\delta_{m+n,0}\\
c\big(G^{\theta}_m,\, G^{\theta}_n\big) = m(m+1)\alpha\cdot\delta_{m+n+1,0}\\
c\big(T^{\xi\eta}_m,\, T^{\xi\eta}_n\big) = m\alpha\cdot\delta_{m+n,0}\\
c\big(T^{\xi\zeta}_m,\, T^{\eta\zeta}_n\big) = -\Big(m-\frac{1}{2}\Big)\alpha\cdot\delta_{m+n-1,0}\\
c\big(T^{\xi\theta}_m,\, T^{\eta\theta}_n\big) = -m\alpha\cdot\delta_{m+n,0}\\
c\big(T^{\zeta\theta}_m,\, T^{\zeta\theta}_n\big) = -\Big(m-\frac{1}{2}\Big)\alpha\cdot\delta_{m+n-1,0}\\
c\big(F^{\xi\eta}_m,\, F^{\xi\eta}_n\big) = \alpha\cdot\delta_{m+n,0}\\
c\big(\widetilde{F}_m,\, \widetilde{F}_n\big) = \alpha\cdot\delta_{m+n+1,0}\\
c\big(F^{\xi\theta}_m,\, F^{\eta\theta}_n\big) = -\alpha\cdot\delta_{m+n,0}\\
c(S_m,\, S_n) = \frac{2}{1-2m}\alpha\cdot\delta_{m+n-1,0}
\end{gathered}}$$

Д4. Супералгебры Пуассона и Бюттен — аналоги общей линейной алгебры. Спинорные и осцилляторные представления

Основное поле $\mathbb{K}$ в этой главе — алгебраически замкнутое, его характеристика $p \neq 2$. (Для простоты примеры рассмотрены над $\mathbb{C}$.) Если $p = 2$, то все сказанное ниже (и определения, и утверждения), надо изменить; первый шаг в этом направлении сделан в работах А. Лебедева, см. [Leb°].

§ 1. Введение

Обычно студенты-математики узнают об общей линейной алгебре $\mathfrak{gl}(n)$ (здесь «алгебра» — алгебра Ли) довольно рано из курса линейной алгебры (здесь «алгебра» — наука). Однако в связи с современным распространением узкой специализации и отрывом в учебных планах физики от математики, они вполне могут закончить университет, услышав об алгебре Пуассона $\mathfrak{po}(2n) := \mathfrak{po}(2n|0)$ разве что мельком, в курсе механики. А супералгебры представляются предметами или орудиями для изучения предмета далекого будущего даже для специализирующихся в теории представлений студентов-алгебраистов.

В отличие от студентов-математиков, студенты-физики узнают об алгебре Пуассона $\mathfrak{po}(2n)$, может быть, даже раньше, чем об алгебре $\mathfrak{gl}(n)$. Однако осознание ключевого факта, что алгебра $\mathfrak{po}(2n)$ на самом деле является «классическим пределом квантового объекта» — $\mathfrak{gl}(\infty)$ — одной из многих (см. [Egr*, DiP*]) инкарнаций общей линейной алгебры, действующей в бесконечномерном пространстве функций от нескольких (в некоторых задачах возможно даже бесконечного числа) переменных, происходит часто вне университетской программы.

И для математиков, и для физиков спинорные представления алгебры Ли $\mathfrak{o}(n)$ — объекты совершенно другой, отличной от тензорных представлений, природы (для конечномерных представлений это, пожалуй, верно), и немного загадочные. Вот эту загадочность мы и развеем в этой главе.

Существует 1-параметрическое семейство супералгебр Ли, изоморфных супералгебре Ли $\mathfrak{gl}(2^{[m/2]-1}|2^{[m/2]-1})$ или ее «странной» версии $\mathfrak{q}(2^{[m/2]-1})$ при всех, кроме одного (равного 0), значениях параметра $\hbar \in \mathbb{K}$, а значение этого параметрического семейства в точке 0 — супералгебра

Пуассона $\mathfrak{po}(0|m)$. Другими словами,

супералгебры $\mathfrak{po}(0|2m)$ и $\mathfrak{gl}(2^{[m/2]-1}|2^{[m/2]-1})$, а также $\mathfrak{po}(0|2m-1)$ и $\mathfrak{q}(2^{[m/2]-1})$ суть *две ипостаси* одного семейства супералгебр Ли.

Этот факт пока не дошел до учебников, а ведь он показывает, что

> *спинорные представления* классических алгебр Ли $\mathfrak{o}(m)$, традиционно рассматриваемые как дальние (и бедные) родственники тензорных представлений в семействе фундаментальных представлений алгебры $\mathfrak{o}(m)$, являются просто ограничением на подалгебру $\mathfrak{o}(m) \subset \mathfrak{po}(0|m)$ тавтологического представления супералгебры Ли из параметрического семейства при общем значении параметра деформации, т. е. ограничением тавтологического представления супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(2^{[m/2]-1}|2^{[m/2]-1})$ или $\mathfrak{q}(2^{[m/2]-1})$.

При изменении параметра (т. е. при деформации, которую физики называют квантованием) супералгебра Пуассона $\mathfrak{po}(0|m)$ переходит в $\mathfrak{gl}(2^{[m/2]-1}|2^{[m/2]-1})$ или $\mathfrak{q}(2^{[m/2]-1})$, а ее подалгебра $\mathfrak{o}(m)$ почти не меняется. Ниже мы поясним, что значит «почти».

Важность спинорного представления стала понятна уже довольно давно, около века назад. Приведем одну из причин. Как известно из любого хорошего учебника[1] по теории представлений конечномерных редуктивных[2] алгебр Ли над $\mathbb{C}$, любой неприводимый конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль L^λ над конечномерной простой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ однозначно определяется своим старшим весом λ — элементом пространства, двойственного максимальной диагонализируемой подалгебре (максимальному тору), совпадающей для любой простой конечномерной алгебры Ли над $\mathbb{C}$ с ее подалгеброй Картана, см. [FH°, Бу1°, Бу3°]. Множество старших весов конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей порождает решетку, в качестве базиса которой можно взять фундаментальные веса φ_i. Поэтому фундаментальные веса — самые важные (по крайней мере, для конечномерных представлений).

Если L^λ — конечномерный $\mathfrak{sl}(n)$-модуль, то $\lambda = \sum \lambda_i \varphi_i$, где $\lambda_i \in \mathbb{Z}_+$ для всех i, а L^λ может быть реализован как подмодуль (или фактормодуль: в силу полной приводимости конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей над $\mathbb{C}$ оба подхода равно хороши) тензорного произведения

$$T^p_q = \underbrace{W \otimes \ldots \otimes W}_{p} \otimes \underbrace{W^* \otimes \ldots \otimes W^*}_{q}, \tag{Д4.1}$$

в котором действует представление $\bigotimes\limits_i R(\varphi_i)^{\otimes \lambda_i} := \bigotimes\limits_i R(\lambda_i \varphi_i)$.

Аналогично, каждый неприводимый конечномерный $\mathfrak{gl}(W)$-модуль L^λ, где $\lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_{n-1}; c)$, причем $\lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_{n-1})$ — старший вес относительно $\mathfrak{sl}(W)$, а c — собственное значение тождественного оператора (или единичной матрицы в инкарнации элементов алгебры Ли $\mathfrak{gl}(W) = \mathfrak{gl}(n)$ матрицами), может быть реализован в пространстве тензоров, подкрученных с помощью c-плотностей, точнее, в пространстве $c\,\mathrm{tr} \otimes \Big(\bigotimes\limits_i R(\lambda_i \varphi_i) \Big)$. Здесь $c\,\mathrm{tr}$ — это одномерное представление, действующее на образующую (c-ю степень элемента объема) умножением на c-кратное следа: $X \mapsto c \cdot \mathrm{tr}(X)$ для любого оператора (матрицы) $X \in \mathfrak{gl}(W)$ и любого числа $c \in \mathbb{K}$. Это представление является инфинитезимальным аналогом представления, задаваемого c-й степенью определителя на группе $\mathrm{GL}(W)$, когда $c \in \mathbb{R}$.

Таким образом, все неприводимые конечномерные представления алгебры Ли $\mathfrak{gl}(W)$ естественным образом реализуются в пространствах подкрученных тензоров $T^p_q \otimes c\,\mathrm{tr}$. Аналогично обстоит дело и с $\mathfrak{sp}(W)$-модулями, только проще: как и для $\mathfrak{sl}(W)$-модулей, нет необходимости подкручивать на представление $c\,\mathrm{tr}$, изоморфное над $\mathfrak{sp}(W)$ и $\mathfrak{sl}(W)$ тривиальному.

Фундаментальные представления и над $\mathfrak{sl}(W)$, и над $\mathfrak{sp}(W)$ реализуются во внешних степенях тавтологического модуля W. При этом над алгеброй Ли $\mathfrak{sl}(W)$, где $\dim W = n$, они неприводимы, а старший вес φ_i представления $E^i(W)$ и есть i-й фундаментальный вес:

$$R(\varphi_1) = W, \quad R(\varphi_2) = E^2(W), \quad \ldots, \quad R(\varphi_{n-1}) = E^{n-1}(W), \quad R(0) = E^n(W) \simeq \mathbb{K}.$$

Фундаментальный $\mathfrak{sp}(W)$-модуль $R(\varphi_i)$ составляет, при $i > 1$, лишь часть фундаментального $\mathfrak{sl}(W)$-модуля $E^i(W)$, состоящую из *примитивных* или, по другой терминологии, *гармонических* форм, которые мы определим ниже.

Для алгебры Ли $\mathfrak{o}(W)$ ситуация меняется кардинально: теперь уже не все фундаментальные представления могут быть реализованы как часть модуля $E^i(W)$ для некоторого i. Для алгебры Ли $\mathfrak{o}(2n+1)$ таких исключений одно, а для алгебры Ли $\mathfrak{o}(2n)$ исключительных представлений два, и все три исключения называются *спинорными*. Спинорные представления составляют часть *полу-спинорного представления*; построим и те, и другие.

Если $\dim W = 2n$, то полу-спинорное представление реализуется в грассмановой алгебре $E^{\bullet}(V)$ от «половины» пространства W, где $W = V \oplus V^*$ — разложение в прямую сумму подпространств, изотропных относительно ортогональной формы B на W. Каждое спинорное

---

[1] Среди лучших в настоящее время назовем [FH°], см. также [Бу1°, Бу3°] и лекции И. Н. Бернштейна в книге [Bern1°], воспроизведенные также в виде «Lectures on Lie Algebras» в книге *Representation Theory, Complex Analysis and Integral Geometry*, Birkhäuser (2012), 97–133. Представление в модуле L^λ со старшим весом λ будем обозначать символом $R(\lambda)$; часто $R(\lambda)$ будет обозначать и сам этот модуль.

[2] Конечномерная алгебра Ли над $\mathbb{C}$ *редуктивна*, если она есть прямая сумма простых и коммутативного центра.

представление натянуто на однородные элементы, одно — на четные, а другое — на нечетные. При этом неприводимые компоненты неизоморфны: их старшие веса соответствуют разным «рогам» диаграммы Дынкина — первой и второй вершинам графа $D_{m,0}$ из табл. Д2.7 в нумерации, принятой в табл. Д2.2. Спинорные представления отличаются также четностью (одно чисто четное, а другое — чисто нечетное), но рассматривая представления алгебры Ли $\mathfrak{o}(W)$ или ее подалгебр, мы четность игнорируем.

Если же $\dim W = 2n + 1$, то полу-спинорное представление реализуется в пространстве грассмановой алгебры $E^{\boldsymbol{\cdot}}(V \oplus W_0)$, где $W = V \oplus V^* \oplus W_0$, а W_0 — одномерное подпространство, ограничение ортогональной формы B на которое невырождено, и где $V \subset W$ — максимальное изотропное подпространство относительно формы B. Это полу-спинорное представление приводимо и распадается в сумму двух неприводимых, *спинорных*. Эти неприводимые компоненты изоморфны как $\mathfrak{o}(W)$-модули; они соответствуют последней вершине диаграммы Дынкина и отличаются лишь четностью: одно реализуется в пространстве грассмановой алгебры $E^{\boldsymbol{\cdot}}(V)$, а другое — в пространстве $E^{\boldsymbol{\cdot}}(V)\varpi$, где ϖ — образующий вектор нечетного одномерного подпространства W_0.

Осцилляторное представлением алгебры Ли $\mathfrak{sp}(W)$ — аналог спинорного представления алгебры $\mathfrak{o}(W)$. Осцилляторное представление реализуется в пространстве $S^{\boldsymbol{\cdot}}(V)$, где V — максимальное изотропное подпространство в $W = V \oplus V^*$ относительно симплектической формы B. Замечательная схожесть спинорного и осцилляторного представлений была объяснена и обобщена в теории *дуальных пар Хау*, см. ниже и в [How°].

Важность спинорно-осцилляторных представлений различна для различных классов алгебр Ли и их представлений. При описании неприводимых конечномерных представлений классических матричных алгебр Ли $\mathfrak{gl}(n)$, $\mathfrak{sl}(n)$ и $\mathfrak{sp}(2n)$ мы можем совсем обойтись без спинорных или осцилляторных представлений 1), но в этом же классе $\mathfrak{o}(n)$-модулей нам уже не обойтись без спинорных представлений. Пессимист мог бы сказать, что спинорные представления алгебр Ли $\mathfrak{o}(2n)$ и $\mathfrak{o}(2n + 1)$ составляют лишь $\frac{1}{n}$-ю часть тех кирпичиков, из которых строятся все их представления. Мы оптимистически трактуем спинорные представления как один из двух возможных типов строительных кирпичиков, уравнивая их в статусе с тензорными представлениями. Переход к бесконечномерным алгебрам, таким, как алгебры петель и струнные, лишает проблему выбора типов «строительных кирпичиков» какой бы то ни было остроты: кроме спинорных представлений никаких других «кирпичиков» нет. Более того, над алгеброй Витта $\mathfrak{witt}$ и ее центральным расширением, алгеброй Вирасоро $\mathfrak{vir}$, ВСЕ неприводимые представления со старшим весом общего положения сами суть спинорные представления.

Каждый неприводимый $\mathfrak{witt}$- и $\mathfrak{vir}$-модуль со старшим весом **реализуется в виде фактора спинорного модуля, или, что в данном случае эквивалентно, осцилляторного модуля**, см. [FF°]. Эта замечательная эквивалентность известна физикам под названием *бозонно-фермионного соответствия*, см. [ГШВ°], [Кац2°].

Для суперобобщений алгебр Ли $\mathfrak{witt}$ и $\mathfrak{vir}$ (см. в гл. Д3 список простых или близких к простым струнных супералгебр Ли, или, другими словами, супералгебр Ли векторных полей на N-расширенной суперокружности, т. е. $S^{1|N}$ или $S^{1|N-1;M}$) важность спинорно-осцилляторных представлений с ростом параметра N уменьшается в том же смысле, что и для $\mathfrak{o}(N)$, но в наиболее интересных случаях *отмеченных* струнных супералгебр она столь же значительна, как и для алгебры $\mathfrak{vir}$, ср. [FST°].

---

1) Более того, из предыдущего пока неясно бывают ли у этих алгебр Ли такие представления: мы ведь пока определили спинорные представления лишь для $\mathfrak{o}(n)$, а осцилляторные — лишь для $\mathfrak{sp}(2n)$.

§ 2. Супералгебра Пуассона $\mathfrak{po}\,(2n|m)$

2.1. Некоторые $\mathbb{Z}$-градуировки супералгебры Пуассона. Суперпространство лиевой супералгебры Пуассона $\mathfrak{g} = \mathfrak{po}(2n|m)$ над $\mathbb{K}$ — это $\mathbb{K}[q, p, \Theta]$, где $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $\Theta = (\Theta_1, \ldots, \Theta_m)$, а умножение задается *скобкой Пуассона*

$$\{f, g\}_{P.b.} = \sum_{i\leqslant n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right) - (-1)^{p(f)}\sum_{j\leqslant m}\frac{\partial f}{\partial \Theta_j}\frac{\partial g}{\partial \Theta_j}$$

$$\text{для любых}\quad f, g \in \mathbb{K}[p, q, \Theta]. \qquad (\text{Д}4.2)$$

Часто бывает удобно перейти от переменных Θ к другим переменным (над алгебраически незамкнутым полем, таким как $\mathbb{R}$, это невозможно сделать: соответствующие вещественные супералгебры Пуассона неизоморфны, и надо рассматривать разные вещественные формы):

$$\begin{cases} \xi_j = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_j - \sqrt{-1}\Theta_{r+j}) \\ \eta_j = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_j + \sqrt{-1}\Theta_{r+j}) \end{cases} \quad \text{при } j \leqslant r = \left[\frac{m}{2}\right], \qquad \theta = \Theta_{2r+1} \qquad (\text{Д}4.3)$$

и соответствующим образом преобразовать скобку (при $m = 2k$ член с θ отсутствует):

$$\{f, g\}_{P.b.} = \sum_{i\leqslant n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right) - \\ - (-1)^{p(f)}\left(\sum_{j\leqslant k}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\frac{\partial g}{\partial \eta_j} + \frac{\partial f}{\partial \eta_j}\frac{\partial g}{\partial \xi_j}\right) + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right). \qquad (\text{Д}4.4)$$

Задав градуировку ассоциативной супералгебры производящих функций, положив $\deg p_i = \deg q_i = \deg \theta_j = 1$ для всех i, j, мы задаем градуировку лиевой супералгебры Пуассона, реализованной на том же суперпространстве, положив

$$\deg_{Lie} f = \deg f - 2 \quad \text{для любого монома} \quad f \in \mathbb{K}[p, q, \theta]. \qquad (\text{Д}4.5)$$

Такая $\mathbb{Z}$-градуировка супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *стандартной*:

степень	-2	-1	0	1	$\dots$
элементы	1	$p,\ q,\ \theta$	$f\colon\ \deg f = 2$	$f\colon\ \deg f = 3$	$\dots$

Ясно, что $\mathfrak{g} = \bigoplus\limits_{i \geqslant -2} \mathfrak{g}_i$, причем $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{osp}(m|2n)$.

Рассмотрим теперь другую, «*грубую*», градуировку супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. Для этого введем переменные $Q = (q, \xi)$, $P = (p, \eta)$ и положим

$$\deg Q_i = 0, \quad \deg \theta = 1, \quad \deg P_i = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 2k; \\ 2, & \text{если } m = 2k+1. \end{cases} \qquad (\text{Д}4.6)$$

Эта градуировка (Д4.6) ассоциативной супералгебры индуцирует следующую *грубую градуировку* супералгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$m = 2k$:

степень	-1	0	1	$\dots$
элементы	$\mathbb{K}[Q]$	$\mathbb{K}[Q]P$	$\mathbb{K}[Q]P^2$	$\dots$

$m = 2k+1$:

степень	-2	-1	0	1	2	$\dots$
элементы	$\mathbb{K}[Q]$	$\mathbb{K}[Q]\theta$	$\mathbb{K}[Q]P$	$\mathbb{K}[Q]P\theta$	$\mathbb{K}[Q]P^2$	$\dots$

Замечание. Физики используют полуцелые степени для нечетных m, полагая $\deg \theta = \dfrac{1}{2}$ и $\deg P_i = 1$ при всех i. Как и другие математики, мы предпочитаем иметь дело с целыми степенями.

2.2. Квантование. Мы понимаем под *квантованием* нетривиальную деформацию $\mathfrak{Q}$ **лиевой** супералгебры $\mathfrak{g}$. Существует много способов проквантовать (супер)алгебру Пуассона (вейлевское, QP-и PQ-квантования, виковское и антивиковское квантования и т.д.), но если (супер)алгебра Пуассона реализована на пространстве многочленов, то все они эквивалентны, т.е. приводят к изоморфным супералгебрам Ли, см. [ЛЩ°], что согласуется с соображениями физиков. Здесь важно, что в качестве производящих функций алгебры $\mathfrak{g}$ мы рассматриваем только многочлены; для функций других типов (например, для многочленов Лорана или функций с компактным носителем, своим для каждой функции) деформаций (квантований?) бывает несколько, даже бесконечно много, неэквивалентных, ср. [Dzh°], [KST*], и никаких априорных соображений о том, сколько может быть неэквивалентных квантований, ни у кого пока нет.

Рассмотрим QP-квантование. Так как квантование $\mathfrak{Q}$ линейно над основным полем, достаточно описать его действие на мономах. На членах первой степени QP-квантование задается формулами

$$\mathfrak{Q}\colon\ Q \mapsto \widehat{Q}, \qquad P \mapsto \widehat{P} := \hbar \frac{\partial}{\partial Q}, \qquad (\text{Д}4.7)$$

где $\widehat{Q}$ — оператор левого умножения на Q. Моном же произвольной степени мы должны первым делом переписать так, чтобы все Q-переменные стояли левее всех P-переменных, а затем каждое переменное превратить в оператор по формулам (Д4.7). При каждом значении параметра $\hbar$ обычный операторный суперкоммутатор образов $[\mathfrak{Q}(f), \mathfrak{Q}(g)]$ определяет структуру супералгебры Ли на пространстве $\mathfrak{Q}(\mathfrak{po}(2n|m))$.

Можно, однако, рассмотреть деформацию $\mathfrak{Q}_{ass}$ ассоциативной структуры алгебры на том же пространстве функций $\mathcal{F}$, на котором задана скобка Пуассона. Непонятно отчего [1], говоря о «квантовании», так часто и делают. Классы неэквивалентных деформаций ассоциативной структуры составляют, однако, многомерное пространство. Чтобы прийти к согласию с физическими соображениями, «подгоняют под ответ», рассматривая дополнительное условие: продеформированное ассоциативное умножение $*_\hbar$ должно переходить, с точностью до множителя, в скобку Пуассона после замены ассоциативной (но уже некоммутативной, после деформации-то) алгебры $\mathcal{F}_{*_\hbar}$, реализованной на все том же пространстве функций $\mathcal{F}$, на соответствующую алгебру Ли $(\mathcal{F}_{*_\hbar})_L$ или супералгебру Ли $(\mathcal{F}_{*_\hbar})_{SL}$, если $\mathcal{F}$ — супералгебра функций на супермногообразии. Другими словами, фактически рассматривают деформацию не ассоциативной алгебры, а той, о которой мы, вслед за Дираком, говорим с самого начала: деформацию лиевой алгебры.

Случаи $m = 2k$ и $m = 2k - 1$ сильно различаются, мы рассмотрим их отдельно.

Продеформированная супералгебра Ли $\mathfrak{Q}(\mathfrak{po}(2n|2k))$, очевидно, является супералгеброй Ли $\mathfrak{diff}(n|k)$ дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами на пространстве $\mathbb{K}^{n|k}$. Фактически, супералгебра Ли $\mathfrak{diff}(n|k)$ является аналогом полной линейной супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$. Наиболее отчетливо это видно при $n = 0$, $m = 2k$, когда алгебра $\mathfrak{diff}(n|k)$ не просто аналогична алгебре Ли $\mathfrak{gl}(V)$ для $V = E^{\boldsymbol{\cdot}}(\xi)$, где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$, а **совпадает** с ней. Действительно,

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{po}(0|2k)) = \mathfrak{gl}(E^{\boldsymbol{\cdot}}(\xi)) = \mathfrak{gl}(2^{k-1}|2^{k-1}). \qquad (\text{Д}4.8)$$

---

[1] Изучая деформации *лиевых* алгебр, никто же не заменяет, скажем, алгебру Ли контактных векторных полей на ассоциативную алгебру ее производящих функций, см. сноску 2 на с. 139.

При $\dim V=\infty$ существует много версий алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$, см., например, изложение результатов Г. Егорова [Egr*] в [CoC2*], представляющее лишь одну из многих возможных точек зрения на задачу определения алгебры Ли $\mathfrak{gl}(\infty)$ и ее супераналогов; см. также [DiP*]. Поэтому при $n\neq 0$ мы заключаем символ $\mathfrak{gl}$ в кавычки и выбираем его интерпретацию по смыслу задачи:

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{po}(2n|2k))=\text{“}\mathfrak{gl}\text{”}(\mathcal{F}(Q))=\mathfrak{diff}(n|k). \tag{Д4.9}$$

При $n\neq 0$ и $m=2k-1$, образом квантования $\mathfrak{Q}$ является бесконечномерный аналог супералгебры Ли $\mathfrak{q}(2^k)$, а именно,

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}(\mathfrak{po}(2n|2k-1))&=\mathfrak{q}_J\mathfrak{diff}(n|k)=\\&=\Big\{D\in\mathfrak{diff}(n|k)\;\Big|\;[D,J]=0,\ \text{где } J=i\Big(\theta+\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)\Big\}.\end{aligned} \tag{Д4.10}$$

Упражнение. 1) Рассмотрим супералгебру Ли $\mathfrak{po}(0|2k-1)$ как подалгебру в $\mathfrak{po}(0|2k)$. Квантование $\mathfrak{Q}$ переводит супералгебру Ли $\mathfrak{po}(0|2k-1)$ в супералгебру Ли $\mathfrak{q}(2^{k-1})$. Куда при этом переходит θ?

2) Если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, то вместо оператора J, такого что $J^2=-\mathrm{id}$, можно взять оператор $\Pi=\theta+\dfrac{\partial}{\partial\theta}$: как это показано в [CoC1°] для $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, мы получим изоморфную супералгебру Ли $\mathfrak{q}_\Pi\mathfrak{diff}(n|k)$; если же в поле нет корня из -1, как над $\mathbb{R}$, то алгебры $\mathfrak{q}_J$ и $\mathfrak{q}_\Pi$ неизоморфны. Мы уже видели, что имеется $\left[\dfrac{m}{2}\right]+1$ неизоморфных вещественных форм $\mathfrak{po}(2n|m-a,a)$ комплексной супералгебры Ли $\mathfrak{po}(2n|m)$; при квантовании они переходят в одну из двух вещественных форм комплексной супералгебры Ли типа $\mathfrak{q}$. В какую из двух вещественных форм ($\mathfrak{q}_J$ или $\mathfrak{q}_\Pi$, т. е. сохраняющую оператор J, такой что $J^2=-\mathrm{id}$, или Π, такой что $\Pi^2=\mathrm{id}$) квантование переводит супералгебру Ли $\mathfrak{po}(2n|m-a,a)$ в зависимости от a?

§ 3. Пространство Фока[1] и спинорно-осцилляторные представления

3.1. Пространство Фока. И у супералгебры Ли $\mathfrak{diff}(n|k)$ и у супералгебры Ли $\mathfrak{qdiff}(n|k)$ имеется громадное число неприводимых представлений даже при $n=0$. Но одно из них — тавтологическое, действующее в суперпространстве функций на $\mathbb{K}^{n|k}$, является в некотором (а при $n=0$ — в прямом) смысле «самым маленьким».

---

[1] Все конструкции этого параграфа формально алгебраические. Мы говорим о многочленах или формальных рядах, но не говорим ни о гладких функциях, ни о гильбертовых пространствах. Наше определение пространства Фока отличается от его аналитического определения в функциональном анализе, являясь его формально алгебраическим аналогом.

На пространстве $\mathfrak{diff}(n|k)$ (или $\mathfrak{qdiff}(n|k)$) имеется не только структура лиевой супералгебры, но и структура ассоциативной супералгебры. Чтобы различать эти две структуры, мы будем обозначать соответствующую ассоциативную алгебру символом $\mathrm{Diff}(n|k)$ или $\mathrm{QDiff}(n|k)$. Каждая из этих *ассоциативных* супералгебр обладает только *одним* неприводимым представлением — все тем же «наименьшим» — тавтологическим. Пространство этого представления называется *пространством Фока*.

Как известно[1], супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(m|2n)$ при $(m,2n)\neq(4,2)$ являются жесткими, т. е. не имеют нетривиальных деформаций. Следовательно, сквозное отображение

$$\mathfrak{h}\longrightarrow\mathfrak{g}_0=\mathfrak{osp}(m|2n)\subset\mathfrak{g}=\mathfrak{po}(2n|m)\xrightarrow{\mathfrak{Q}}\begin{cases}\mathfrak{diff}(n|k) & \text{для } m=2k,\\ \mathfrak{qdiff}(n|k) & \text{для } m=2k-1\end{cases}$$

переводит любую подалгебру $\mathfrak{h}$ супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(m|2n)$ в изоморфный ей образ (при $(m|2n)\neq(4|2)$).

Как ни удивительно, это, казалось бы очевидное, утверждение про изоморфный образ не вполне верно; его следует сформулировать точнее. Дело в том, что и образующие Шевалле, и их образы при квантовании, порождают супералгебру Ли, изоморфную $\mathfrak{osp}(m|2n)$, а вот образ $\mathfrak{Q}(\mathfrak{osp}(m|2n))$ даже не замкнут относительно (супер)коммутатора.

Замыкание множества $\mathfrak{Q}(\mathfrak{osp}(m|2n))$ относительно (супер)коммутатора изоморфно супералгебре $\mathfrak{osp}(m|2n)\oplus\mathbb{K}1$.

Когда m и n конечны, константы можно отщепить, так как у конечномерной супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(m|2n)$ нет нетривиальных центральных расширений[2], по крайней мере, если характеристика поля $\mathbb{K}$ равна нулю или «достаточно большая». Если же хоть одно из чисел m или n равно ∞, у (супер)алгебры Ли $\mathfrak{osp}(m|2n)$ появляется нетривиальное центральное расширение и константы не отщепить[3].

---

[1] Доказательство, кажется, до сих пор не опубликовано. Жесткость простых конечномерных супералгебр Ли с матрицей Картана, кроме $\mathfrak{osp}(4|2)$, несложно доказать стандартной апелляцией к квадратичному элементу Казимира.

[2] Описать нетривиальные центральные расширения простых конечномерных (супер)алгебр Ли над полями положительной характеристики — полезная и в значительной степени открытая **задача**, см. [Джу*] и ссылки.

[3] Когомологии (и гомологии) бесконечномерных алгебр Ли — дело тонкое. Например, в книге Д. Б. Фукса [Фукс°] рассматриваются лишь *финитные* (ко)цепи, поэтому такое естественнейшее линейное отображение, как тождественное, исключено из рассмотрения. Как работать без такого ограничения — непонятно (и как снять это ограничение — **вопрос** к читателю), но согласиться с тем, что оно естественно, все-таки невозможно. Тем более, что имеются естественные примеры нефинитных (ко)гомологий.

В работах тунисских математиков, суперизующих работы Б. Фейгина и Д. Фукса по (ко)гомологиям алгебры Витта с коэффициентами в модулях тензорных полей, появляются так называемые *дифференциальные* (ко)гомологии, заданные дифференциальными опера-

Задача. Возможно, утверждение про изоморфный образ верно и для нежесткой супералегбры Ли $\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$, рассматриваемой как подсупералгебра Ли в подходящей супералгебре Пуассона, если ограничение коцикла, задающего квантование, на $\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$ тривиально. Проверить, так ли это — несложное, но насколько нам известно, пока не проделанное упражнение. Лучше («плотнее») всего вложить $\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$ в 0-ю компоненту в стандартной градуировке) супералгебры Пуассона $\mathfrak{po}(2n|m)$, реализованной на суперпространстве наименьшей размерности. Для $\alpha = 1$ эта размерность равна $2|4$, для $\alpha = 2$ — это $6|8$, а для $\alpha = 3$ — это $6|4$, см. формулы (Д2.18); при общем же значении параметра α — это $8|9$.

§ 4. Спинорно-осцилляторные представления

4.1. Как $\mathfrak{g}_0$-модуль, пространство Фока распадается на несколько подмодулей. Содержащий константы $\mathfrak{g}_0$-подмодуль называется *спинорно-осцилляторным модулем* над супералгеброй Ли $\mathfrak{g}_0$. Этот модуль неприводим. Он часто остается неприводимым при ограничении на подалгебру $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$ или даже на содержащую $\mathfrak{g}_0$ подсупералгебру Ли $\mathfrak{h}$ всей супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, как в рассмотренном ранее случае $\mathfrak{as} \subset \mathfrak{po}(0|6)$.

В частных случаях, когда $n = 0$ и $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{o}(m)$ или $m = 0$ и $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}(2n)$, это спинорно-осцилляторное представление превращается в обычное *спинорное* представление алгебры Ли $\mathfrak{o}(m)$ или, соответственно, *осцилляторное представление* алгебры Ли $\mathfrak{sp}(2n)$. Мы только что привели единообразное определение для них обоих.

Напомним, что даже функции, зависящие только от четных переменных, делятся на четные и нечетные:

$$\tilde{p}(f) = \begin{cases} \tilde{0}, & \text{если } f(-x) = f(x), \\ \tilde{1}, & \text{если } f(-x) = -f(x). \end{cases} \tag{Д4.11}$$

торами, действующими на коэффициентах при частных производных или на производящих функциях.

Кроме того, наличие с одной стороны — явных примеров деформаций алгебр петель (пример П. Голода и примеры И. Кричевера и С. Новикова), а с другой — отсутствие у алгебр петель деформаций в рамках принятой на сегодня теории (ко)гомологий, см. [Фукс°], не говоря уже о захватывающем описании полудюжины теорий (ко)гомологий групп, которые пришлось перебрать, чтобы построить неуловимую «группу Каца—Муди», см. [Фукс°], отчетливо показывают, что здесь есть что обдумать. См. также [БЛВ*], где дана ссылка на работу Д. Фукса с примером нескольких деформаций с общей инфинитезимальной касательной и приведен пример «*полутривиальной деформации*», т. е. нетривиальной деформации, приводящей к алгебре Ли, изоморфной исходной. (В [БЛВ*] пример дан над полем положительной характеристики, но известен пример и над полем характеристики 0. В гл. Д5 приведен пример другой когомологической задачи — описание нетривиальных центральных расширений — с некогомологичными коциклами, приводящими к изоморфным супералгебрам Ли.) Словом, разобраться во всем этом — **интереснейшая задача**.

Мы назовем *t-четностью* (t от слова tilde) эту функцию $\tilde{p}$, чтобы отличить ее от четности, задаваемой антикоммутирующими переменными Θ. Ясно, что пространство Фока разлагается в прямую сумму двух инвариантных компонент: пространств t-четных и t-нечетных функций. Пусть $\tilde{\Pi}$ — функтор изменения t-четности.

Упражнение. Пространства t-четных и t-нечетных функций неприводимы как $\mathfrak{osp}(m|2n)$-модули при $n = 0$. Если $n = 0$ и m четно, то эти модули изоморфны и отличаются действием функтора $\tilde{\Pi}$.

4.2. Примитивные, или гармонические элементы. Элементы супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(m|2n)$ (или ее подалгебры $\mathfrak{h}$) действуют в пространстве спинорно-осцилляторного представления неоднородными дифференциальными операторами порядка $\leqslant 2$ (этот порядок является просто фильтрацией, ассоциированной с «грубой» градуировкой):

$m = 2k$:

степень	-1	0	1
элементы	$\widehat{P}^2$	$\widehat{P}\widehat{Q}$	$\widehat{Q}^2$

$m = 2k + 1$:

степень	-2	-1	0	1	2
элементы	$\widehat{P}^2$	$\widehat{P}\widehat{\theta}$	$\widehat{P}\widehat{Q}$	$\widehat{Q}\widehat{\theta}$	$\widehat{Q}^2$

Напомним, что $M^S := \{m \in M \mid gm = 0 \text{ для любых } g \in S \text{ и } m \in M\}$ — стандартное обозначение для множества элементов $\mathfrak{g}$-модуля M, аннулируемых элементами множества S.

Элементы пространства $(\mathbb{K}[Q])^{\widehat{P}^2}$ при $m = 2k$ или пространства $(\mathbb{K}[Q, \theta])^{\widehat{P}\widehat{\theta}}$ при $m = 2k + 1$ называются *примитивными* или *гармоническими*. Более общо, пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{osp}(m|2n)$ есть $\mathbb{Z}$-градуированная супералгебра Ли, вложенная в супералгебру Ли $\mathfrak{osp}(m|2n)$ согласованным с грубой градуировкой образом. Назовем *$\mathfrak{h}$-примитивными* или *$\mathfrak{h}$-гармоническими* элементы пространств $(\mathbb{K}[Q])^{\mathfrak{h}_{-1}}$ при $m = 2k$ и $(\mathbb{K}[Q, \theta])^{\mathfrak{h}_{-1}}$ при $m = 2k + 1$.

4.3. Примеры Хау-дуальных (R. Howe) пар. Назовем две подалгебры Γ и Γ' супералгебры Ли $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{osp}(m|2n)$ или $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{pe}(n)$ *дуальной парой*, если одна из них является централизатором другой в супералгебре Ли $\mathfrak{g}_0$.

Ясно, что если прямая сумма подалгебр $\Gamma \oplus \Gamma'$ является максимальной подалгеброй супералгебры Ли $\mathfrak{g}_0$, то подалгебры Γ и Γ' образуют дуальную пару. Приведем несколько примеров из [ShM°].

4.3a. Пусть $\Gamma = \mathfrak{sp}(2n) = \mathfrak{sp}(W)$ и $\Gamma' = \mathfrak{sp}(2) = \mathfrak{sl}(2) = \mathfrak{sp}(V \oplus V^*)$. Ясно, что подалгебра Ли $\mathfrak{h} = \Gamma \oplus \Gamma'$ является максимальной подалгеброй в алгебре Ли $\mathfrak{o}(W \otimes (V \oplus V^*))$. Пространство Фока в этом случае — это просто пространство $E^\bullet(W)$.

Теорема. Γ'-*примитивные элементы* (*их называют* примитивные формы) *пространства* $E^{\bullet}(W)$ *каждой степени* i *при* $0 \leqslant i \leqslant n$ *образуют неприводимый* Γ-*модуль* P^i.

Это действие подалгебры Γ' в пространстве дифференциальных форм на любом симплектическом многообразии хорошо известно: подалгебра Γ' порождена (как алгебра Ли) операторами X^+ и X^-, где X^+ действует левым умножением на симплектическую форму ω, а X^- — сверткой с двойственным к ω бивектором.

4.3б. Пусть $\Gamma = \mathfrak{o}(2n) = \mathfrak{sp}(W)$ и $\Gamma' = \mathfrak{sp}(2) = \mathfrak{sl}(2) = \mathfrak{sp}(V \oplus V^*)$. Ясно, что подалгебра Ли $\mathfrak{h} = \Gamma \oplus \Gamma'$ является максимальной в алгебре Ли $\mathfrak{sp}(W \otimes (V \oplus V^*))$. Пространство Фока совпадает с пространством $S^{\bullet}(W)$.

Теорема. Γ'-*примитивные элементы* (*их называют* гармонические функции) *пространства* $S^{\bullet}(W)$ *в каждой степени* i *при* $i = 0, 1, \ldots$ *образуют неприводимый* Γ-*модуль* P^i.

Это действие подалгебры Γ' в пространстве полиномиальных функций на любом римановом многообразии тоже хорошо известно: подалгебра Γ' порождена (как алгебра Ли) операторами X^+ и X^-, где X^+ действует левым умножением на квадратичный полином, представляющий метрику g, а X^- — соответствующим оператором Лапласа.

Ясно, что объединение примеров 4.3а и 4.3б, соответствующее симметрической или кососимметрической форме на супермногообразии, также возможно: *пространство* Γ'-*примитивных элементов пространства* $S^{\bullet}(W)$ *каждой степени* i *образует неприводимый* Γ-*модуль*, см. [Ni°] и гл. Д6.

4.3в. Бернштейнов квадратный корень из разложения Лефшица, точнее, из симплектической формы и двойственного ей бивектора. Пусть L — пространство (комплексного) линейного расслоения со связностью ∇ над связным симплектическим многообразием (M^{2n}, ω), причем форма кривизны связности ∇ равна $\hbar\omega$ для некоторого числа $\hbar \in \mathbb{K}$. Это число $\hbar$ будем называть *подкруткой*; пространство тензорных полей типа ρ (здесь $\rho\colon \mathfrak{sp}(2n) \to \mathfrak{gl}(U)$ — представление, определяющее пространство $T(U)$ тензорных полей со значениями в пространстве U) с подкруткой $\hbar$ обозначим $T_{\hbar}(\rho)$. Поднимем естественное действие операторов X^+ и X^- с пространства Ω дифференциальных форм на многообразии M на пространство *подкрученных дифференциальных форм* $\Omega_{\hbar} := \Omega \otimes_{\Omega^0} \Gamma(L)$, где $\Gamma(L) = \Omega^0_{\hbar}$ — пространство сечений линейного расслоения L, положив $X^+ \mapsto X^+ \otimes 1$ и т. д..

Заметим, что действие операторов $X^{\pm}$ в пространстве $\Omega_{\hbar}$ линейно над алгеброй функций Ω^0. Пусть $D^+ = d + \alpha$ — связность ∇, а $D^- = [X^-, D^+]$. Введем на пространстве $\Omega_{\hbar}$ структуру суперпространства, полагая $p(\varphi \otimes s) = \deg\varphi \pmod 2$ для любых $\varphi \in \Omega$ и $s \in \Omega^0_{\hbar}$.

Теорема ([Bern2°]). *Операторы* D^+ *и* D^- *порождают на суперпространстве* $\Omega_{\hbar}$ *действие супералгебры Ли* $\mathfrak{osp}(1|2)$, *коммутирующее с действием группы* $\widehat{G}$ *автоморфизмов, сохраняющих связность* ∇ *расслоения* L.

В 1977 г. И. Бернштейн описал действие группы $\widehat{G}$, точнее, действие алгебры Ли $\mathfrak{po}(2n|0)$, соответствующей группе $\widehat{G}$; нас будет интересовать только линейная компонента инфинитезимальной части этого действия: $\mathfrak{po}(2n|0)_0$-действие, см. [Bern2°].

В примере 4.3а пространство P^i состоит из дифференциальных форм с постоянными коэффициентами. Обозначим символом $\mathcal{P}^i = P^i \otimes S^{\bullet}(V)$ пространство примитивных форм с полиномиальными коэффициентами. Элементы пространства $\sqrt{\mathcal{P}}^{\,i}_{\hbar} = \ker D^- \cap \mathcal{P}^i_{\hbar}$ будем называть ∇-*примитивными формами* степени i (и подкрутки $\hbar$).

И. Бернштейн показал, что пространство $\sqrt{\mathcal{P}}^{\,i}_{\hbar}$ является неприводимым $\mathfrak{g} = \mathfrak{po}(2n|0)$-модулем. Этот красивый результат был рассказан на семинаре «SoS» в конце 1970-х, а А. Шаповалов и Г. Шмелев обобщили результат Бернштейна на супермногообразия соответственно размерности $0|m$ (квадратный корень из метрики и оператора Лапласа) и $2n|m$ (общий орто-симплектический случай), см. обзор [Лобз°].

4.3г. «Квадратный корень» из гиперкэлеровой структуры. Супермногообразие суперразмерности $n|n$ над полем $\mathbb{K}$, снабженное нечетным тензорным полем J валентности (1, 1), таким что $J^2 = -\operatorname{id}$ (соответственно полем Π валентности (1, 1), таким что $\Pi^2 = \operatorname{id}$), назовем супермногообразием с *почти* J-*симметричной* (соответственно *почти* Π-*симметричной*) *структурой*. Подчеркнем, что и почти Π-симметричная, и почти J-симметричная структуры определены над любым полем.

Пусть $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ — вещественное супермногообразие с (почти) J-симметрической или Π-симметрической структурой, h — невырожденная суперсимметричная билинейная форма на $\mathcal{M}$, такая что

$$h(X, Y) = h(JX, JY) \quad \text{для любых векторных полей } X, Y \qquad (Д4.12)$$

Такую форму h назовем метрикой *псевдо-эрмитовой относительно* J; определение метрики *псевдо-эрмитовой относительно* Π аналогично, поэтому для краткости будем до конца главы говорить только о тензоре J.

Определим невырожденную антисимметрическую 2-форму из формулы

$$\omega(X, Y) = h(JX, Y) \text{ для любых векторных полей } X, Y \in \mathfrak{vect}(M). \qquad (Д4.13)$$

Собственно, формула (Д4.13) по любым двум членам тройки (ω, h, J) определяет третий член. Супермногообразие $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ назовем *почти* *кэлеровым*, если выполняются два условия:

$$\begin{aligned} &1)\quad p(h)+p(J)=p(\omega);\\ &2)\quad d\omega=0. \end{aligned} \tag{Д4.14}$$

Из этого определения вытекают следующие ограничения на возможные суперразмерности почти кэлерова супермногообразия $\mathcal{M}$ над $\mathbb{R}$:

	$p(J)=\bar{0}$	$p(J)$ (или $p(\Pi)$) $=\bar{1}$
$p(h)=\bar{0}$	$2n\vert 2m$	$2n\vert 2n$
$p(h)=\bar{1}$	$2n\vert 2n$	$n\vert n$ (над любым полем $\mathbb{K}$)

(Д4.15)

Условия интегрируемости тензорного поля J, достаточные для того, чтобы назвать почти кэлерово супермногообразие кэлеровым, не выполнены, однако, автоматически; их надо проверять, см. примеры в [BGLS*].

Если заданы три (почти) комплексные структуры J_i (они могут быть все четными или одна — четная, а две — нечетные, т. е. почти J-симметричные структуры), удовлетворяющие соотношениям кватернионных единиц, и одна метрика h псевдоэрмитова относительно каждой из J_i, а также три симплектические (или периплектические) формы ω_i, связанные между собой тремя соотношениями (Д4.13), то такое супермногообразие назовем (почти) *гиперкэлеровым*.

Пусть $(M;\ h;\ J_1,\ J_2,\ J_3;\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)$ — гиперкэлерово (супер)многообразие. Рассмотрим на нем линейное расслоение L с двумя связностями: ∇_1 и ∇_2, формы кривизны которых соответственно равны $\hbar_1\omega_1$ и $\hbar_2\omega_2$ для некоторых чисел $\hbar_1,\ \hbar_2\in\mathbb{C}$. Будем называть пару $\hbar=(\hbar_1,\ \hbar_2)$ *подкруткой*; пространство тензорных полей типа ρ с подкруткой $\hbar$ будем обозначать $T_\hbar(\rho):=T(\rho)\otimes_{\Omega^0}\Gamma(L)$. М. Вербицкий в работе[1] [Верб°] определил действие алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4)$ в пространстве Ω дифференциальных форм на многообразии M. Это Ω^0-линейное действие образующих $X_j^\pm$ при $j=1,\ 2$ алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4)$ на пространстве Ω, при каждом $j=1,\ 2$ повторяющее конструкцию, описанную выше для симплектического многообразия, естественно продолжается на пространство $\Omega_\hbar$ подкрученных дифференциальных форм с помощью изоморфизма $T_\hbar(\rho):=T(\rho)\otimes_{\Omega^0}\Gamma(L)$, где $\Gamma(L)=\Omega^0_\hbar$ — пространство сечений линейного расслоения L.

Определим пространство *примитивных i-форм* на гиперкэлеровом супермногообразии, полагая

$$\mathcal{P}^i=\ker X_1^-\cap\ker X_2^-\cap\Omega^i. \tag{Д4.16}$$

---

[1] См. продолжение в полезном обзоре [Ver°]. Конечно, $\mathfrak{sp}(4)\simeq\mathfrak{o}(5)$, но намереваясь установить скрытую суперсимметрию, реализованную суперoccupied алгеброй Ли $\mathfrak{osp}(1|4)$, обобщающую наблюдение И. Н. Бернштейна, мы подчеркиваем именно *симплектическую* инкарнацию этой алгебры Ли.

В соответствии с общей теорией [How°] подпространство P^i этого пространства, состоящее из форм с постоянными коэффициентами, — неприводимый $\mathfrak{sp}(2n;\ \mathbb{H})$-модуль.

Обещанный квадратный корень из пространства (Д4.16) — это пространство

$$\sqrt{\mathcal{P}}^{\,i}_{\hbar}=\ker D_1^-\cap\ker D_2^-\cap\Omega^i_\hbar, \tag{Д4.17}$$

где $D_i^+=\nabla_i$ при $i=1,\ 2$. Операторы D_i^+ и $D_i^-=[X_i^-,\ D_i^+]$ порождают супералгебру Ли $\mathfrak{osp}(1|4)$.

4.4. Примеры дуальных пар. Подалгебры вида $\mathfrak{g}_1(V_1)\oplus\mathfrak{g}_2(V_2)$ из следующей таблицы являются максимальными подалгебрами в супералгебре Ли $\mathfrak{g}(V_1\otimes V_2)$:

$\mathfrak{g}_1$	$\mathfrak{g}_2$	$\mathfrak{g}$
$\mathfrak{osp}(n_1\vert 2m_1)$	$\mathfrak{osp}(n_2\vert 2m_2)$	$\mathfrak{osp}(n_1n_2+4m_1m_2\vert 2n_1m_2+2n_2m_1)$
$\mathfrak{o}(n)$	$\mathfrak{osp}(n_2\vert 2m_2)$	$\mathfrak{osp}(nn_2\vert 2nm_2),\ n\neq 2,\ 4$
$\mathfrak{sp}(2n)$	$\mathfrak{osp}(n_2\vert 2m_2)$	$\mathfrak{osp}(2mn_2\vert 4nm_2)$
$\mathfrak{pe}(n_1)$	$\mathfrak{pe}(n_2)$	$\mathfrak{osp}(2n_1n_2\vert 2n_1n_2),\ n_1,\ n_2>2$
$\mathfrak{osp}(n_1\vert 2m_1)$	$\mathfrak{pe}(n_2)$	$\begin{cases}\mathfrak{pe}(n_1n_2+2m_1n_2) & \text{при } n_1\neq 2m_1\\ \mathfrak{spe}(n_1n_2+2m_1n_2) & \text{при } n_1=2m_1\end{cases}$
$\mathfrak{o}(n)$	$\mathfrak{pe}(m)$	$\mathfrak{pe}(nm)$
$\mathfrak{sp}(2n)$	$\mathfrak{pe}(m)$	$\mathfrak{pe}(2nm)$

В частности, на суперпространстве поливекторных полей существует естественная структура $\mathfrak{pe}(n)$-модуля. Если мы рассматриваем супералгебру Ли $\mathfrak{pe}(n)$ как подалгебру в $\mathfrak{osp}(2n|2n)$, то дуальной к $\mathfrak{pe}(n)$ является супералгебра Ли $\mathfrak{pe}(1)$, действие которой на поливекторных полях линейно порождается двумя операторами: нечетным оператором Δ («нечетным лапласианом» или *BRST-оператором*, см. [BnTn°]) и четным оператором $\deg_x-\deg_\theta$, где $\theta_i=\pi(\partial_{x_i})$.

В [ShM°] приведены примеры максимальных подсупералгебр и дуальных пар в супералгебрах Ли серий $\mathfrak{gl}$ и $\mathfrak{q}$. Вложив супералгебру Ли, объемлющую такую пару, в супералгебру Ли серии $\mathfrak{osp}$ или $\mathfrak{pe}$ (скажем, $\mathfrak{gl}(m|n)\subset\mathfrak{osp}(2m|2n)$ или $\mathfrak{gl}(m|n)\subset\mathfrak{pe}(m+n)$), мы получаем новые примеры Хау-дуальных пар. Разложения тензорной алгебры, соответствующие некоторым из этих примеров, см. в [CW°], где, в частности, написано: «Наши результаты независимо получены в работе А. Сергеева [Серг°]» (опубликованной на 5 лет раньше).

4.5. Замечания и вопросы. Первые суперизации классических результатов Г. Вейля [Вейль°] см. в [Berg°, Mol°, MoNa°, CW°]. Очень важна статья [KPet°].

О спинорах Дирака, Вейля и Майорана см. в [QFS*]. Аналогия между спинорным представлением алгебры Ли $\mathfrak{o}(m)$ и осцилляторным представлением алгебры Ли $\mathfrak{sp}(2n)$ совершенно очевидна. Зато возникают следующие **вопросы**.

Что такое аналоги спинорного и осцилляторного представлений, когда вместо (супер)алгебры Пуассона $\mathfrak{po}(2n|m)$ мы рассматриваем ее аналог — супералгебру Бюттен $\mathfrak{b}(n)$?

Что такое аналоги спинорного и осцилляторного представлений, связанные с супералгебрами Ли серии $\mathfrak{b}_\lambda(n)$?

Чтобы ответить на эти вопросы, надо реализовать результат той деформации супералгебры Бюттен $\mathfrak{b}(n)$, что отвечает нечетному параметру деформации, как супералгебру операторов. Необходимые ингредиенты перечислены в статье [ЛЩ°], но сам ответ не опубликован. Для $\mathfrak{b}_\lambda(n)$ надо рассмотреть деформации, трансверсальные «основной», см. [ЛЩ°] и гл. Д3, § 6.

4.5а. Неэквивалентные системы простых корней супералгебр Ли серии $\mathfrak{osp}$. В гл. Д2 мы видели, что одна и та же простая супералгебра Ли может иметь несколько **неэквивалентных** матриц Картана и систем образующих Шевалле. Соответственно и разделение корневых векторов на *положительные* и *отрицательные* будет различным.

Задача. (Уточните результаты работ [Ni°, Hai°].)

1) Как действуют на старший вес спинорно-осцилляторного представления нечетные отражения?

2) Если спинорно-осцилляторное представление супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ при $mn \neq 0$ отвечает вершине одного из «рогов» диаграммы $D^{\circ}_{m,n}$ или $D^{\otimes}_{m,n}$ из табл. Д2.7, то как реализовать фундаментальное представление, отвечающее вершине другого «рога»?

4.6. Задача. В работе [How°] при переформулировке основной теоремы теории инвариантов (и ее супер вариантов) в терминах дуальных пар на дуальные пары налагается еще одно требование: действие каждой из подалгебр Γ и Γ' на тавтологическом $\mathfrak{g}_0$-модуле (или даже в любом конечномерном модуле) должно быть **вполне приводимым**; поэтому дуальные пары иногда называют *редуктивными* парами. Однако в первом же примере из [How°], где Γ и Γ' не алгебры, а супералгебры (в доказательстве леммы Пуанкаре), это требование не выполняется. На самом деле, мы не знаем, когда оно бывает нужно, а И. Н. Бернштейн сказал нам однажды, что оно и вовсе не нужно для доказательства теорем об инвариантах, но мы не умеем это доказывать; нужная **задача** — либо доказать это (если верно), либо исследовать, *когда именно* (*в каких модулях*) *дуальные пары действуют редуктивно*, *разлагая модуль в прямую сумму неприводимых над* $\Gamma \oplus \Gamma$? В некоторых случаях ответ известен: см. статьи K. Coulembier'а в arXiv'e.

Д5. Автоморфизмы и вещественные формы (по В. Сергановой)

§ 1. Введение

С начала 1970-х физики-теоретики систематически используют калибровочные группы и их алгебры Ли. Простейшими из них являются алгебры «токов» на окружности S, которые иногда называют «алгебрами петель», т. е. функций на S со значениями в (как правило, простой конечномерной) алгебре Ли $\mathfrak{g}$ с поточечным умножением

$$[g_1 \otimes f_1,\ g_2 \otimes f_2] = [g_1,\ g_2] \otimes f_1 f_2, \quad \text{где } g_1,\ g_2 \in \mathfrak{g},\ \ f_1,\ f_2 \in \mathcal{F}(S),$$

а $\mathcal{F}(S)$ — алгебра функций на S из выбранного класса, например, C^∞ над $\mathbb{R}$ или $\mathcal{F}(S) = \mathbb{C}[t^{-1},\ t]$, причем $t = e^{ia}$, а a — угловой параметр на S.

Математикам часто проще работать с градуированными объектами, т. е. перейти к Фурье-образам этих петель, причем не к любым образам, а лишь к тем, что разлагаются в полиномы (или ряды) Лорана со значениями в с этого момента — комплексной, если иное не оговорено, алгебре Ли $\mathfrak{g}$. *Алгебра* (полиномиальных) *петель* обозначается $\mathfrak{g}^{(1)} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{-1},\ t]$. Пусть $\varepsilon_k = e^{2\pi i/k}$ — примитивный корень k-й степени из единицы; подалгебра Ли в $\mathfrak{g}^{(1)}$, выделенная автоморфизмом φ порядка k алгебры Ли $\mathfrak{g}$, обозначается $\mathfrak{g}^{(k)}_\varphi$ и называется *скрученной алгеброй петель*

$$\mathfrak{g}^{(k)}_\varphi := \bigoplus_{m\in\mathbb{Z},\, j\in\mathbb{Z}/k} \mathfrak{g}_j t^{mk+j}, \quad \text{где } \mathfrak{g}_j = \{g \in \mathfrak{g} \mid \varphi(g) = \varepsilon^j_k g\}. \qquad (Д5.1)$$

Определение *аффинной алгебры Каца—Муди* см. в книге [Кац2°] и в сноске на с. 179. Аффинные алгебры Каца—Муди хороши тем, что у каждой из них есть матрица Картана (а у аффинных **супер**алгебр Каца—Муди — не у каждой, см. гл. Д3).

В этой главе мы расклассифицируем и опишем супераналоги алгебр петель, их автоморфизмы и вещественные формы, а также симметрические суперпространства, как конечномерные, так и те бесконечномерные, что связаны с супералгебрами полиномиального роста.

Я изложу, таким образом, часть результатов бескорыстной и самоотверженной работы В. Сергановой на семинаре «SoS» в 1980х гг., наброски доказательства которых препринтированы в [SoS*], № 22, 1988-4. Некоторые из результатов этой главы составили кандидатскую диссертацию В. Сергановой. Они основаны на полученном ей явном описании автоморфизмов простых конечномерных супералгебр Ли (см. [Сг1°]–[Сг3°], [ЛСФ°]). Эти результаты исправили две теоремы (описания как неразложимых матриц Картана, так и вещественных форм простых конечномерных супералгебр Ли над $\mathbb{C}$) из [Kac1], а вместе с описанием вещественных форм единственной простой струнной алгебры Ли $\mathfrak{witt}$, см. [Cr4°], исправили также как описание вещественных форм алгебр Каца—Муди, опубликованное Ф. Левштейном, так и описание, опубликованное Ж. Баушем (J. Bausch) и Г. Руссо (G. Rousseau), см. [Кац2°]. Доказательство Бауша и Руссо чуть больше, чем в 10 раз более подробное, чем у Левштейна, и аккуратнее, но в нем тоже пропущены вещественные формы одного из трех типов, см. ниже. У Бауша и Руссо рассмотрены петли, разлагающиеся в полиномы Фурье, поэтому их доказательство гораздо сложнее и объемнее, чем доказательство В. Сергановой, рассматривавшей, как правило, гладкий случай. До В. Сергановой никто не заметил, что у супер (и не супер) алгебр петель и ассоциированных с ними алгебр Каца—Муди вещественные формы бывают трех типов, см. ниже. Один из этих типов до сего дня игнорируют, возможно, оттого, что соответствующие формы сложновато описать явно.

Внешние автоморфизмы простых алгебр Ли над $\mathbb{C}$ давным-давно описали Э. Картан и Ф. Р. Гантмахер. Они описали также и инволютивные автоморфизмы: таким автоморфизмам соответствуют (псевдо-)римановы симметрические пространства, см. [Хелг°, SySp°]. Полезные ссылки: [KW°], [KMTR°].

То, что не все борелевские подалгебры изоморфны друг другу (а в суперслучае их еще надо определить правильно, т. е. так, как это сделал И. Пенков в книге [ИНТ°]), приводит к наличию у одной простой супералгебры Ли нескольких *неэквивалентных* систем простых корней. Описать все неэквивалентные системы простых корней и соответствующие аналоги образующих Шевалле — задача важная, например, для приложений к суперсимметричным обобщениям уравнений математической физики, см. [ЛСС°] и [CCLL*], где приведено ее решение для «почти-аффинных» (гиперболических) супералгебр Каца—Муди.

1.1. Обозначения. Через $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ обозначим группу автоморфизмов (супер)алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Очевидно, что $\exp\operatorname{ad}_g \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ для произвольного элемента $g \in \mathfrak{g}_{\bar 0}$. Подгруппу $\operatorname{Int}\mathfrak{g} = \langle \exp\operatorname{ad}_g \mid g \in \mathfrak{g}_{\bar 0}\rangle$ назовем группой *внутренних автоморфизмов* супералгебры $\mathfrak{g}$. Через $\operatorname{Aut}^\circ\mathfrak{g}$ обозначим связную компоненту единицы (супер)группы $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$. Группы $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ и $\operatorname{Aut}^\circ\mathfrak{g}$ нормальны в $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$. Группами *внешних автоморфизмов* супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ назовем факторгруппы

$$\operatorname{Out}\mathfrak{g} = \operatorname{Aut}\mathfrak{g}/\operatorname{Int}\mathfrak{g} \quad \text{и} \quad \operatorname{Out}^\circ\mathfrak{g} = \operatorname{Aut}\mathfrak{g}/\operatorname{Aut}^\circ\mathfrak{g}. \tag{Д5.2}$$

Для простых конечномерных алгебр Ли $\mathfrak{g}$ имеет место равенство $\operatorname{Out}\mathfrak{g} = \operatorname{Out}^\circ\mathfrak{g}$. Как мы увидим, для построения неизоморфных **супер**алгебр петель (и ассоциированных с ними аффинных супералгебр Каца—Муди) нужна не группа $\operatorname{Out}\mathfrak{g}$, а меньшая группа $\operatorname{Out}^\circ\mathfrak{g}$.

Для произвольного $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ символом $\bar\varphi$ обозначим образ элемента φ при естественной проекции на фактор $\operatorname{Out}\mathfrak{g}$ или $\operatorname{Out}^\circ\mathfrak{g}$; пусть $\langle\bar\varphi\rangle$ — циклическая подгруппа, порожденная элементом $\bar\varphi$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная супералгебра Ли или ее непростая родственница, а φ — ее автоморфизм порядка k. Тогда φ задает $\mathbb{Z}/k$-градуировку на $\mathfrak{g} = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}/k} \mathfrak{g}_i$, заданную формулой (Д5.1).

Очевидно, что группа $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}^{(k)}_\varphi$ автоморфизмов супералгебры Ли $\mathfrak{g}^{(k)}_\varphi$ содержит две подгруппы: подгруппу, изоморфную

$$\mathbb{C}^\times = \{\delta_\lambda \mid \delta_\lambda(g\otimes t^i) = g\otimes(\lambda t)^i\}, \quad \text{где } \lambda\in\mathbb{C}^\times,$$

и подгруппу, изоморфную

$$G^{(k)}_\varphi = \{g \in (\operatorname{Aut}\mathfrak{g})\otimes\mathbb{C}[t^{-1}, t] \mid g(t)\in\operatorname{Aut}^\circ\mathfrak{g} \text{ и } g(\varepsilon_k t) = \varphi g(t)\varphi^{-1}\}.$$

Действие автоморфизма $g \in G^{(k)}_\varphi$ определено формулой

$$g(h\otimes f) = g(t)(h)\otimes f(t).$$

Группу $\operatorname{Int}\mathfrak{g}^{(k)}_\varphi := G^{(k)}_\varphi \rtimes \mathbb{C}^\times$ назовем *группой внутренних автоморфизмов* супералгебры Ли $\mathfrak{g}^{(k)}_\varphi$.

Таблица Д5.1

$\operatorname{per}\in\operatorname{Aut}\mathfrak{osp}_\varepsilon(4\vert 2)$, где $\varepsilon = \frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$ $d_{23}\in\operatorname{Aut}\mathfrak{osp}_\alpha(4\vert 2)$, где $\operatorname{Re}\alpha = -\frac{1}{2}$	$\operatorname{per}(a, u) = ((a_3, a_1, a_2), \varepsilon u_3\otimes u_1\otimes u_2)$ $d_{23}(a, u) = ((a_1, a_3, a_2), u_1\otimes u_3\otimes u_2)$ для любых $(a_1, a_2, a_3)\in\mathfrak{osp}_\alpha(4\vert 2)_{\bar 0}$, и $u_1\otimes u_2\otimes u_3\in\mathfrak{osp}_\alpha(4\vert 2)_{\bar 1}$.
$\mathcal{A}\in\operatorname{Aut}\mathfrak{po}(0\vert 2n)$ $\mathcal{B}\in\operatorname{Aut}\mathfrak{po}(0\vert 2n)$	$\mathcal{A}(\theta_i) = (-1)^{\delta_{1i}}\theta_i$, $\mathcal{B}(\theta_i) = \theta_i + \partial_{\theta_i}(\theta_1\dots\theta_{2n})$,
$\delta_\lambda\in\begin{cases}\operatorname{Aut}\mathfrak{vect}(0\vert n),\\ \operatorname{Aut}\mathfrak{gl}(n\vert m), \quad \text{где } \lambda\in\mathbb{C}^\times\end{cases}$	$\delta_\lambda(\theta_i) = \lambda\theta_i$ $\delta_\lambda\left(\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}A & \lambda B\\ \lambda^{-1}C & D\end{pmatrix}$
$\operatorname{Ad}_{J_{k,n}(X)}\in\operatorname{Aut}\mathfrak{osp}(k\vert 2n)$	$J_{k,2n}(X) = \operatorname{diag}(X, 1_{2n})$, где $X\in\mathrm{O}(k)$, $\det X = -1$, $XX^t = 1$
$-\operatorname{st}\in\operatorname{Aut}\mathfrak{gl}(n\vert m)$ $\Pi\in\operatorname{Aut}\mathfrak{gl}(n\vert n)$	$-\operatorname{st}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-A^t & C^t\\ -B^t & -D^t\end{pmatrix}$ $\Pi\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}D & C\\ B & A\end{pmatrix}$
$q\in\operatorname{Aut}\mathfrak{q}(n)$	$q\begin{pmatrix}A & B\\ B & A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-A^t & iB^t\\ iB^t & -A^t\end{pmatrix}$

Автоморфизм Ad_X, где $X\in\mathrm{GL}_C(m\vert n)$, супералгебры Ли $\mathfrak{gl}_C(m\vert n)$ определен формулой

$$\operatorname{Ad}_X(A) = X^{-1}AX; \quad \operatorname{Add}_{(a,\dots,z)} := \operatorname{Ad}_{\operatorname{diag}(a,\dots,z)}\,.$$

Для любой $\mathbb{Z}/2$-градуированной супералгебры Ли $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_+\oplus\mathfrak{g}_-$ зададим автоморфизм δ_{-1} формулой

$$\delta_{-1}|_{\mathfrak{g}_+}=\mathrm{id},\quad \delta_{-1}|_{\mathfrak{g}_-}=-\mathrm{id}\,.$$

Более общо, пусть $\lambda\in\mathbb{C}^\times$, а $\mathfrak{g}=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_i$ есть $\mathbb{Z}$-градуированная супералгебра Ли. Зададим автоморфизм $\tilde{\delta}_\lambda$, супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, положив

$$\tilde{\delta}_\lambda|_{\mathfrak{g}_i}=\lambda^i\,\mathrm{id}\,.$$

Если *$\mathbb{Z}$-градуировка супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ согласована с $\mathbb{Z}/2$-градуировкой*, т. е. $\mathfrak{g}_+=\bigoplus\limits_{i=2k}\mathfrak{g}_i$, а $\mathfrak{g}_-=\bigoplus\limits_{i=2k-1}\mathfrak{g}_i$, то $\tilde{\delta}_{-1}=\delta_{-1}$. Мы будем писать δ_λ вместо $\tilde{\delta}_\lambda$, предполагая согласованность градуировок.

Суммируем определения автоморфизмов в таблице Д5.1, содержащей еще несколько автоморфизмов, заданных формулами из правого столбца. Автоморфизмы, индуцированные теми, что перечислены в табл. Д5.1, на родственных супералгебрах Ли ($\mathfrak{sq}$ и $\mathfrak{psq}$; $\mathfrak{sl}$ и $\mathfrak{psl}$; $\mathfrak{po}$ и $\mathfrak{h}'$ и т. д.), будут обозначены теми же буквами.

Положим

$$T_{m,n}=\mathrm{diag}(-1,\ 1_{2m-1},\ 1_{2n}),\quad \text{где } m>0,$$
$$1^p_m \text{ или } I^p_m=\mathrm{diag}(1_p,\ -1_{m-p}),$$
$$B_{m,2n}=\mathrm{diag}(1_m,\ J_{2n}).$$

§ 2. Автоморфизмы простых конечномерных супералгебр Ли

2.1. Теорема. *Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная супералгебра Ли. Тогда* $\mathrm{Out}\,\mathfrak{g}=\{1\}$ *для* $\mathfrak{g}=\mathfrak{vect}(n)$, $\tilde{\mathfrak{s}}\mathfrak{vect}(2n)$, $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$, $\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$ *при* $\alpha\neq\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, $\mathfrak{ag}(2)$ *и* $\mathfrak{ab}(3)$. *В остальных случаях группы* $\mathrm{Out}\,\mathfrak{g}$ *описаны в табл.* Д5.2 *и точных последовательностях* (Д5.3)–(Д5.5):

$$1\longrightarrow\mathbb{C}\longrightarrow\mathrm{Out}\,\mathfrak{h}'(0|2n)\longrightarrow\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{C}^\times\longrightarrow 1\quad \text{при } n>2, \tag{Д5.3}$$

где $\mathbb{C}$— однопараметрическая подгруппа, порожденная автоморфизмом $\mathcal{B}$, а $\mathbb{Z}/2\cong\langle\bar{A}\rangle$, см. табл. Д5.1, *и где* $\mathbb{C}^\times\cong\{\delta_\lambda\mid\lambda^n\neq 1\}$:

$$1\longrightarrow\mathbb{C}^\times\longrightarrow\mathrm{Out}\,\mathfrak{psl}(n|n)\longrightarrow\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2\longrightarrow 1\quad \text{при } n>2, \tag{Д5.4}$$

где $\mathbb{C}^\times\cong\{\delta_\lambda\mid\lambda^n\neq 1\}$, *а* $\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2\simeq\langle\bar{\Pi}\rangle\oplus\langle\bar{-}\mathrm{st}\rangle$;

$$1\longrightarrow\mathrm{SL}(2)\longrightarrow\mathrm{Out}\,\mathfrak{psl}(2|2)\longrightarrow\mathbb{Z}/2\longrightarrow 1, \tag{Д5.5}$$

где $\mathbb{Z}/2\simeq\langle\bar{\Pi}\rangle$, *а действие алгебры Ли* $\mathfrak{sl}(2)$ *на* $\mathfrak{psl}(2|2)$ *задано формулой*

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&aB+bJ_2C^tJ_2^{-1}\\cJ_2B^tJ_2^{-1}+aC&0\end{pmatrix}, \tag{Д5.6}$$

где супералгебра Ли $\mathfrak{psl}(2|2)$ *реализована матрицами из* $\mathfrak{sl}(2|2)$ *со скобкой*

$$[X,\ Y]_{new}=XY-(-1)^{p(X)p(Y)}XY-(2\,\mathrm{str}\,XY)\cdot 1_4.$$

Таблица Д5.2. **Внешние автоморфизмы простых супералгебр Ли**

$\mathfrak{g}$	$\mathrm{Out}\,\mathfrak{g}$
$\mathfrak{sl}(n\vert m)$, где $n\neq m$	$\mathbb{Z}/2\cong\langle\bar{-}\mathrm{st}\rangle$
$\mathfrak{psl}(2\vert 2)$	$\mathbb{Z}/2\rtimes\mathrm{SL}(2)/\langle -1_2\rangle$, где $\mathbb{Z}/2=\langle\bar{\Pi}\rangle$, а $\mathfrak{sl}(2)$-действие на $\mathfrak{psl}(2\vert 2)$ описано формулой (Д5.6)
$\mathfrak{psl}(n\vert n)$, где $n>2$ и четно	$\{1\}\longrightarrow\mathbb{C}^\times\longrightarrow\mathrm{Out}\,\mathfrak{psl}(n\vert n)\longrightarrow\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2\longrightarrow\{1\}$, где $\mathbb{C}^\times\cong\{\bar{\delta}_\lambda\mid\lambda\in\mathbb{C}^\times/\langle\sqrt[n]{1}\rangle\}$, а $\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2\cong\langle\bar{\Pi}\rangle\times\langle\bar{-}\mathrm{st}\rangle$
$\mathfrak{osp}(2m\vert 2n)$	$\mathbb{Z}/2\cong\langle\bar{\mathrm{A}}\mathrm{d}_{T_{m,n}}\rangle$
$\mathfrak{psq}(n)$	$\mathbb{Z}/4\cong\langle\bar{q}\rangle$
$\mathfrak{osp}_\varepsilon(4\vert 2)$, где $\varepsilon=\varepsilon_3$	$\mathbb{Z}/3\cong\langle\bar{\mathrm{p}}\mathrm{er}\rangle$
$\mathfrak{spe}(n)$	$\mathbb{C}^\times\cong\left\{\bar{\delta}_\lambda\mid\lambda\in\begin{cases}\mathbb{C}^\times/\langle\sqrt[n]{1}\rangle & \text{при } n=2k+1,\\ \mathbb{C}^\times/\langle\sqrt[k]{1}\rangle & \text{при } n=2k\end{cases}\right\}$
$\mathfrak{svect}(n)$	$\mathbb{C}^\times\cong\{\bar{\delta}_\lambda\mid\lambda\in\mathbb{C}^\times/\langle\sqrt[n]{1}\rangle\}$
$\mathfrak{h}'(2n+1)$	$\mathbb{C}^\times\cong\{\bar{\delta}_\lambda\mid\lambda\in\mathbb{C}^\times\}$
$\mathfrak{h}'(2n)$, где $n>2$	$\mathbb{C}^\times\times\mathbb{Z}/2\rtimes\langle\bar{\mathcal{B}}_t\rangle$, где $\mathbb{C}^\times=\{\bar{\delta}_\lambda\mid\lambda\in\mathbb{C}^\times/\langle -1\rangle\}$ и $\mathbb{Z}/2\cong\langle\bar{\mathcal{A}}\rangle$, где $\bar{\delta}_\lambda\,\bar{\mathcal{B}}_t\,(\bar{\delta}_\lambda)^{-1}=(\bar{\mathcal{B}}_{\lambda t})^{2n-2}$ и $\bar{\mathcal{A}}\,\bar{\mathcal{B}}_t\,\bar{\mathcal{A}}=\bar{B}_{-t}$

2.2. Доказательство теоремы для случая, когда $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ — редуктивная алгебра Ли.

Лемма. *Пусть $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ — конечномерная алгебра Ли, причем $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ — неприводимый $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-модуль и $[\mathfrak{g}_{\bar{1}},\ \mathfrak{g}_{\bar{1}}]\neq 0$. Пусть $\varphi\in\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ и $\varphi|_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}}=\mathrm{id}$. Тогда $\varphi|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}=\pm\,\mathrm{id}$.*

Доказательство. Так как $[g,\ \varphi(x)]=\varphi([g,\ x])$ для любых $g\in\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, $x\in\mathfrak{g}_{\bar{1}}$, то $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}}(\mathfrak{g}_{\bar{1}},\ \mathfrak{g}_{\bar{1}})$. Но $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-модуль $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ неприводим. Следовательно, $\varphi|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}=\lambda\cdot\mathrm{id}$. Так как

$$[\varphi(g_1),\ \varphi(g_2)]=[\lambda g_1,\ \lambda g_2]=[g_1,\ g_2]\ \text{для любых}\ g_1,\ g_2\in\mathfrak{g}_{\bar{1}},$$

то $\lambda^2=1$, а $\lambda=\pm 1$. □

2.3. Пусть, далее, $\mathfrak{g}$ — одна из следующих супералгебр Ли:

$$\mathfrak{osp}(m|2n) \text{ при } m \neq 2, \quad \mathfrak{psq}(n) \text{ при } n \geqslant 3, \quad \mathfrak{ag}(2), \ \mathfrak{ab}(3), \ \mathfrak{osp}_\alpha(4|2) \text{ при } \alpha \neq 0, -1, \infty.$$

Рассмотрим естественный гомоморфизм $\sigma\colon \operatorname{Aut}\mathfrak{g} \to \operatorname{Aut}\mathfrak{g}_{\bar 0}$.

Так как $\sigma(\operatorname{Int}\mathfrak{g}) = \operatorname{Int}\mathfrak{g}_{\bar 0}$, то определен также гомоморфизм

$$\bar\sigma\colon \operatorname{Out}\mathfrak{g} \longrightarrow \operatorname{Out}\mathfrak{g}_{\bar 0}.$$

Так как группа $\operatorname{Out}\mathfrak{g}_{\bar 0}$ известна, то для описания группы $\operatorname{Out}\mathfrak{g}$ нам понадобится вычислить $\operatorname{Ker}\bar\sigma$ и $\operatorname{Im}\bar\sigma$.

2.3а. Так как $\mathfrak{g}$ удовлетворяет условию леммы 2.2, то $\operatorname{Ker}\sigma = \{\mathrm{id}, \delta_{-1}\}$. Заметим, что $\delta_{-1} \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}$ для всех рассматриваемых супералгебр Ли $\mathfrak{g}$, кроме $\mathfrak{psq}(n)$: действительно,

$$\delta_{-1} = \begin{cases} \mathrm{Add}_{(1_m,\, -1_{2n})}, & \text{если } \mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(m|2n), \\ \mathrm{Ad}_{-1_2}, \quad \text{где } -1_2 \in \mathrm{SL}(2), & \text{если } \mathfrak{g} = \mathfrak{ag}(2),\ \mathfrak{ab}(3) \text{ или } \mathfrak{osp}_\alpha(4|2). \\ \text{а } \mathrm{SL}(2) \text{ — подгруппа в группе} & \\ \text{Ли с алгеброй Ли } \mathfrak{g}_{\bar 0}. & \end{cases}$$

Таким образом, $\operatorname{Ker}\bar\sigma = \{\mathrm{id}\}$ для $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{psq}(n)$.

Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{psq}(n)$ очевидно, что $\delta_{-1} \notin \operatorname{Int}\mathfrak{g}$ и $\operatorname{Ker}\bar\sigma = \mathbb{Z}/2$.

2.3б. Опишем теперь $\operatorname{Im}\bar\sigma$. Так как $\operatorname{Out}\ \mathfrak{g}_{\bar 0} = \{\mathrm{id}\}$ для супералгебр Ли $\mathfrak{ag}(2)$, $\mathfrak{ab}(3)$ и $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ при $(m, n) \neq (1, 1)$ или $(2, 2)$, то $\operatorname{Im}\bar\sigma = \{\mathrm{id}\} \cong \operatorname{Out}\mathfrak{g}$.

а) Для супералгебры $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ при $m \neq 2$ или $m \neq 4$ мы видим, что

$$\operatorname{Out}\mathfrak{g}_{\bar 0} = \operatorname{Out}\mathfrak{o}(2m) \times \operatorname{Out}\mathfrak{sp}(2n) \cong \mathbb{Z}/2;$$

Кроме того, очевидно, что $\bar\sigma(\mathrm{Ad}_{T_{m,n}}) \neq 1$. Следовательно,

$$\operatorname{Im}\bar\sigma \cong \mathbb{Z}/2 \cong \operatorname{Out}\mathfrak{g}.$$

Разберем случаи $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(3|2)$, $\mathfrak{osp}(5|4)$ и $\mathfrak{osp}(8|2n)$, а случай $\mathfrak{osp}(4|2)$ разберем позднее, как $\mathfrak{osp}_1(4|2)$.

1°. $\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(3|2) \text{ или } \mathfrak{osp}(5|4)}$. Тогда $\operatorname{Out}\mathfrak{g}_{\bar 0} \cong \mathbb{Z}/2 \cong \langle \overline{\mathrm{per}} \rangle$, где per — перестановка прямых слагаемых алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar 0} = \mathfrak{g}^1 \oplus \ \mathfrak{g}^2$, где $\mathfrak{g}^1 \cong \mathfrak{g}^2$. Покажем, что $\sigma^{-1}(\mathrm{per}) = \varnothing$. Пусть $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, такой что $\sigma(\varphi) = \mathrm{per}$. Тогда φ переводит старший вектор $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модуля $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ в себя, и переставляет отметки веса относительно $\mathfrak{g}^1$ и $\mathfrak{g}^2$. Тем самым φ существует только, если $\mathfrak{g}_{\bar 1} = V^1 \otimes V^2$, где V^1 и V^2 — модули с одинаковыми старшими весами. В наших случаях это неверно, так как $\dim V^1 = 3$, а $\dim V^2 = 2$ для $\mathfrak{osp}(3|2)$, и $\dim V^1 = 5$, $\dim V^2 = 4$ для $\mathfrak{osp}(5|4)$. Таким образом, $\operatorname{Im}\bar\sigma = \{\mathrm{id}\} = \operatorname{Out}\mathfrak{g}$.

2°. $\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(8|2n)}$. Пусть $\Psi \in \operatorname{Im}\bar\sigma$. Тогда $\Psi|\mathfrak{sp}(2n) = \mathrm{id}$. Пусть $\varphi \in \sigma^{-1}(\Psi)$. Тогда $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{sp}(2n)}(\mathfrak{g}_{\bar 1}, \mathfrak{g}_{\bar 1})$. Но $\mathfrak{g}_{\bar 1} \cong V \otimes \dots \otimes V$ (8 сомножителей), где V — тавтологический $\mathfrak{sp}(2n)$-модуль. Поэтому существует матрица $Y \in \mathrm{GL}(8)$, такая что

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & A \\ J_{2n}A^t & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & YA \\ J_{2n}A^tY^t & 0 \end{pmatrix} \text{ для любой матрицы } A.$$

Так как $\varphi([g_1, g_2]) = [\varphi(g_1), \varphi(g_2)]$ для любых $g_1, g_2 \in \mathfrak{g}_{\bar 1}$, то $J_{2n}A^tY^tYA = J_{2n}A^tA$ для любой матрицы A. Следовательно, $Y \in \mathrm{O}(8)$ и

$$\operatorname{Im}\bar\sigma = \mathrm{O}(8)/\,\mathrm{SO}(8) \cong \mathbb{Z}/2 = \langle \bar{\mathrm{A}}\mathrm{d}_{T_{4,n}} \rangle.$$

3°. $\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}_\alpha(4|2)}$. Тогда

$$\operatorname{Out}\mathfrak{g}_{\bar 0} \cong S_3 = \{1, (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$$

— группа перестановок прямых слагаемых в $\mathfrak{g}_{\bar 0} = \mathfrak{sl}(2)_1 \oplus \mathfrak{sl}(2)_2 \oplus \mathfrak{sl}(2)_3$.

Пусть

$$h_1 \in (\mathfrak{sl}(2)_1, 0, 0),\ h_2 \in (0, \mathfrak{sl}(2)_2, 0),\ h_3 \in (0, 0, \mathfrak{sl}(2)_3)$$

— стандартный базис в подалгебре Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar 0}$, а v_1, v_2 — весовой базис в тавтологическом $\mathfrak{sl}(2)$-модуле. Очевидно, что векторы $\{v_i \otimes v_j \otimes v_k \mid i, j, k = 1, 2\}$ составляют базис в $\mathfrak{g}_{\bar 1}$.

1) Пусть $\sigma(\varphi) = (1, 2)$. Тогда

$$\varphi(v_i \otimes v_j \otimes v_k) = \lambda v_j \otimes v_i \otimes v_k,$$
$$\varphi([v_1 \otimes v_1 \otimes v_1,\ v_2 \otimes v_2 \otimes v_2]) = \varphi(h_1 + \alpha h_2 - (\alpha+1)h_3) =$$
$$= \alpha h_1 - h_2 - (\alpha+1)h_3 = \lambda^2(h_1 + \alpha h_2 - (\alpha+1)h_3).$$

Следовательно, $\sigma^{-1}(1, 2) \neq \mathrm{id}$ только при $\alpha = 1$, т. е. для $\mathfrak{osp}(4|2) \cong \mathfrak{osp}_{-1/2}(4|2) \cong \mathfrak{osp}_{-2}(4|2)$.

Аналогично, $\sigma^{-1}(2, 3) \neq \mathrm{id}$ при $\alpha = -\frac{1}{2}$, а $\sigma^{-1}(1, 3) \neq \mathrm{id}$ при $\alpha = -2$. Так что $\operatorname{Out}\mathfrak{osp}(4|2) \cong \mathbb{Z}/2$.

2) Пусть $\sigma(\varphi) = (1, 2, 3)$. Тогда $\varphi(v_i \otimes v_j \otimes v_k) = \lambda v_k \otimes v_i \otimes v_j$. Но

$$\varphi([v_1 \otimes v_1 \otimes v_1, v_2 \otimes v_2 \otimes v_2]) = \bar\varphi(h_1 + \alpha h_2 - (\alpha+1)h_3) =$$
$$= -(\alpha+1)h_1 + h_2 + \alpha h_3 = \lambda^2(h_1 + \alpha h_2 - (\alpha+1)h_3).$$

Следовательно, $\lambda^2 = -(\alpha+1)$ и $\alpha = \lambda^{-2}$, откуда $\alpha = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$. Итак,

$$\operatorname{Im}\sigma = \begin{cases} \langle \overline{(1, 2, 3)}, \overline{(1, 3, 2)} \rangle & \text{для } \alpha = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}), \\ \langle \overline{(1, 2)} \rangle & \text{для } \alpha = \frac{1}{2}, \\ \langle \overline{(2, 3)} \rangle & \text{для } \alpha = -\frac{1}{2}, \\ \langle \overline{(1, 3)} \rangle & \text{для } \alpha = -2, \\ \mathrm{id} & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

При $\alpha \neq (-2)^{\pm 1}$, $\sqrt[3]{1}$, из приведенных выше рассуждений и леммы 2.2 следует, что $\operatorname{Im}\sigma = \{\mathrm{id}\}$, т. е. $\operatorname{Out}\mathfrak{osp}_\alpha(4|2) = \{\mathrm{id}\}$.

4°. $\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{psq}(n)}$. Тогда $\mathfrak{g}_{\bar 0} = \mathfrak{sl}(n)$, а $\operatorname{Out}\mathfrak{g}_{\bar 0} \cong \mathbb{Z}/2 = \langle \overline{-t} \rangle$. Но поскольку $\sigma^{-1}(\overline{-t}) = \{q \circ \delta_{\pm 1}\}$, имеем $\operatorname{Im}\bar\sigma = \mathbb{Z}/2 = \langle \overline{-t} \rangle$. Отсюда видим, что $\operatorname{Out}\mathfrak{g} = \langle \bar q \rangle \cong \mathbb{Z}/4$.

2.4. Разберем случаи $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(m|n)$ при $m < n$, кроме $(m, n) = (1, 2)$; $\mathfrak{psl}(n|n)$ при $n \geqslant 2$; $\mathfrak{spe}(n)$ при $n \geqslant 3$. Пусть $\mathfrak{s}$ — максимальная полупростая подалгебра в $\mathfrak{g}_{\bar 0}$. Тогда

$$\mathfrak{g}_{\bar 0} = \begin{cases} \mathfrak{s} & \text{для } \mathfrak{g} = \mathfrak{spe}(n) \text{ или } \mathfrak{psl}(n|n), \\ \mathfrak{s} \oplus \mathbb{C}z, \quad \text{где } \mathbb{C}z \text{ — одномер-} & \\ \text{ный центр алгебры Ли } \mathfrak{g}_{\bar 0}, & \text{для } \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(m|n). \end{cases}$$

Пусть $\varphi \in \operatorname{Aut}\bar{\mathfrak{g}}$. Тогда $\varphi(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s}$, так как $\mathfrak{s} = [\mathfrak{g}_{\bar 0}, \ \mathfrak{g}_{\bar 0}]$. Следовательно, естественно определен гомоморфизм $\varkappa\colon \operatorname{Aut}\mathfrak{g} \longrightarrow \operatorname{Aut}\mathfrak{s}$. Очевидно, что $\varkappa(\operatorname{Int}\mathfrak{g}) = \operatorname{Int}\mathfrak{s}$. Поэтому естественно определен гомоморфизм $\bar\varkappa\colon \operatorname{Out}\mathfrak{g} \longrightarrow \operatorname{Out}\mathfrak{s}$. Опишем $\operatorname{Im}\bar\varkappa$ и $\operatorname{Ker}\bar\varkappa$.

Лемма. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— конечномерная супералгебра Ли с* $\mathbb{Z}$*-градуировкой вида* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, *причем* $\mathfrak{g}_{\bar 0} = \mathfrak{g}_0 = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1}]$. *Пусть* $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0$ *— подалгебра, такая что* $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ *— неприводимые неизоморфные* $\mathfrak{h}$*-модули. Пусть* $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, *такой что* $\varphi|_{\mathfrak{h}} = \mathrm{id}$. *Тогда* $\varphi|_{\mathfrak{g}_i} = \lambda^i\ \mathrm{id}$, *то есть* $\varphi = \delta_\lambda$, *для некоторого* $\lambda \in \mathbb{C}^\times$.

Доказательство. Так как $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}_{\bar 1}, \mathfrak{g}_{\bar 1})$, то $\varphi|_{\mathfrak{g}_1} = \lambda \cdot \mathrm{id}$, а $\varphi|_{\mathfrak{g}_{-1}} = \mu \cdot \mathrm{id}$ для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Так как $\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$ для любых $a \in \mathfrak{g}_{-1}$, $b \in \mathfrak{g}_1$, то $\lambda = \mu^{-1}$. Так как $\mathfrak{g}_{\bar 0} = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1}]$, то $\varphi|_{\mathfrak{g}_{\bar 0}} = \mathrm{id}$. ☐

Из леммы 2.4 следует, что $\operatorname{Ker}\varkappa \cong \mathbb{C}^\times = \{\delta_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}^\times\}$.

2.4а. Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(m|n)$. Тогда $\operatorname{Ker}\varkappa\subset\operatorname{Int}\mathfrak{g}$, потому что

$$\delta_\lambda=\operatorname{Add}_{(\mu\cdot 1_m,\ \nu\cdot 1_n)}\ \text{ при } \mu=\lambda\nu \text{ и } \mu^m\nu^n=1.$$

Поэтому $\operatorname{Ker}\bar\varkappa=\{\mathrm{id}\}$. Вычислим $\operatorname{Im}\bar\varkappa$.

Пусть $m\neq 2$. Тогда

$$\operatorname{Out}\mathfrak{s}=\operatorname{Out}(\mathfrak{sl}(m)\oplus\mathfrak{sl}(n))=\langle\bar 1\otimes(-t)\rangle\times\langle\overline{(-t)}\otimes 1\rangle\cong\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2.$$

Заметим, что $\overline{(-t)}\otimes(-t)\in\operatorname{Im}\bar\varkappa$, поскольку $\bar\varkappa(\overline{-\mathrm{st}})=\overline{(-t)}\otimes(-t)$. Покажем, что $\overline{(-t)}\otimes 1$ и $1\otimes\overline{(-t)}\notin\operatorname{Im}\bar\varkappa$. Достаточно показать, что $\varkappa^{-1}(\overline{(-t)}\otimes 1)=\varnothing$. Пусть $\varphi\in\varkappa^{-1}(\overline{(-t)}\otimes 1)$. Тогда $\varphi|_{\mathfrak{sl}(n)}=\mathrm{id}$, и, значит, $\varphi\in\operatorname{Hom}_{\mathfrak{sl}(n)}(\mathfrak{g}_{\bar 1},\,\mathfrak{g}_{\bar 1})$. Так как $\mathfrak{g}_{\bar 1}=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_1$, причем

$$\mathfrak{g}_{-1}\cong\underbrace{V^*\otimes\ldots\otimes V^*}_{m\text{ сомножителей}},\qquad \mathfrak{g}_1\cong\underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{m\text{ сомножителей}},$$

где V — тавтологический $\mathfrak{sl}(n)$-модуль, то $\varphi(\mathfrak{g}_{\pm 1})=\mathfrak{g}_{\pm 1}$ и

$$\varphi\Big(\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}\Big)=\begin{pmatrix}0&Y_1A\\BY_2&0\end{pmatrix}\ \text{для некоторых } Y_1,\,Y_2\in\mathrm{GL}(n).$$

Так как

$$\Big[\varphi\Big(\begin{pmatrix}0&A\\0&0\end{pmatrix}\Big),\,\varphi\Big(\begin{pmatrix}0&0\\B&0\end{pmatrix}\Big)\Big]=\varphi\Big(\Big[\begin{pmatrix}0&A\\0&0\end{pmatrix},\,\begin{pmatrix}0&0\\B&0\end{pmatrix}\Big]\Big),$$

то $BY_2Y_1A=BA$ для любых A и B. Отсюда получаем $Y_2=Y_1^{-1}$, значит,

$$\varphi\Big(\begin{pmatrix}C&0\\0&D\end{pmatrix}\Big)=\begin{pmatrix}Y_1CY_1^{-1}&0\\0&D\end{pmatrix},\ \text{ т. е. } \varphi\in\operatorname{Int}\mathfrak{g} \text{ и } \bar\varkappa(\bar\varphi)=1.$$

Таким образом, $\varkappa^{-1}(\overline{(-t)}\otimes 1)=\varnothing$, $\operatorname{Im}\bar\varkappa\cong\mathbb{Z}/2\cong\operatorname{Out}\mathfrak{g}=\langle\overline{-\mathrm{st}}\rangle$.

Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2|n)$. Тогда $\operatorname{Out}\mathfrak{s}=\langle\bar 1\otimes(-t)\rangle\cong\mathbb{Z}/2$. Так как

$$\varkappa(-\,\mathrm{st})=\operatorname{Add}_{(J_2,\,1_n)}\circ(1\otimes(-t)),$$

то $\bar\varkappa(\overline{-\mathrm{st}})=\bar 1\otimes(-t)$. Значит,

$$\operatorname{Im}\bar\varkappa=\operatorname{Out}\mathfrak{s}=\operatorname{Out}\mathfrak{g}\cong\mathbb{Z}/2\cong\langle\overline{-\mathrm{st}}\rangle.$$

2.4б. Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{psl}(n|n)$, где $n>2$. Тогда

$$\operatorname{Out}\mathfrak{s}=\langle\bar\Pi\rangle\times\langle\overline{(-t)}\otimes 1\rangle\times\langle\bar 1\otimes(-t)\rangle\cong\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2.$$

Очевидно, что $\bar\Pi$, $\overline{(-t)}\otimes(-t)\in\operatorname{Im}\bar\varkappa$, а $\overline{(-t)}\otimes 1$, $\bar 1\otimes(-t)\notin\operatorname{Im}\bar\varkappa$ (доказательство такое же, как для $\mathfrak{sl}(m|n)$, при $m\neq 2$). Тем самым

$$\operatorname{Im}\bar\varkappa\cong\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{Ker}\varkappa\cap\operatorname{Int}\mathfrak{g}=\{\delta_\lambda\mid\lambda^n=1\}.$$

Поэтому $\operatorname{Ker}\bar\varkappa\cong\mathbb{C}^\times\cong\mathbb{C}^\times/\langle\sqrt[n]{1}\rangle$. Имеет место точная последовательность

$$0\longrightarrow\operatorname{Ker}\bar\varkappa^\circ\longrightarrow\operatorname{Out}\mathfrak{g}\longrightarrow\operatorname{Im}\bar\varkappa^\circ\longrightarrow 0,$$

которая для $\mathfrak{g}=\mathfrak{psl}(n|n)$ имеет вид:

$$0\longrightarrow\mathbb{C}^\times\longrightarrow\operatorname{Out}\mathfrak{psl}(n|n)\longrightarrow\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2\longrightarrow 0.$$

При четном $n=2k$ имеем $(\overline{-\mathrm{st}})^2=\mathrm{id}$. Поэтому

$$\operatorname{Out}\mathfrak{psl}(2k|2k)\cong(\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2)\rtimes\mathbb{C}^\times=\langle\overline{-\mathrm{st}}\rangle\times\langle\bar\Pi\rangle\rtimes\mathbb{C}^\times.$$

2.5. Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{spe}(n)$, где $n\geqslant 3$. Тогда

$$\operatorname{Ker}\varkappa\cap\operatorname{Int}\mathfrak{g}=\{\delta_\lambda\mid(\sqrt{\lambda})^n=1\}.$$

Отсюда получаем $\operatorname{Ker}\bar\varkappa\cong\mathbb{C}^\times$. Вычислим $\operatorname{Im}\bar\varkappa$. Группа

$$\operatorname{Out}\mathfrak{s}=\operatorname{Out}\mathfrak{sl}(n)\cong\mathbb{Z}/2=\langle\overline{-t}\rangle.$$

Пусть $\varphi\in\varkappa^{-1}(-t)$. Тогда

$$[\varphi(g),\,-a^t]=\varphi[g,\,a]\ \text{для любых } g\in\mathfrak{g}_{\bar 1},\ a\in\mathfrak{g}_{\bar 0}.$$

Следовательно, φ устанавливает изоморфизм между $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модулями $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ и $\mathfrak{g}_{\bar 1}^*$. Но $\mathfrak{g}_{\bar 1}\not\cong\mathfrak{g}_{\bar 1}^*$. Поэтому $\varkappa^{-1}(-t)=\varnothing$. Следовательно, $\operatorname{Im}\bar\varkappa=\{\mathrm{id}\}$ и

$$\operatorname{Out}\mathfrak{g}\cong\operatorname{Ker}\varkappa\cong\mathbf{C}^\times=\{\delta_\lambda\mid\lambda\in\mathbb{C}^\times\}/\{\delta_\lambda\mid(\sqrt{\lambda})^n=1\}.$$

2.6. Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{osp}(2|2n)$. Положим $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}_{\bar 0}$. Тогда $\mathfrak{g}$ удовлетворяет условиям леммы 2.4 Следовательно, $\operatorname{Ker}\varkappa=\{\delta_\lambda\mid\lambda\in\mathbb{C}^\times\}$. Так как $\delta_\lambda=\operatorname{Add}_{(\mathrm{antidiag}(\lambda i,-\lambda i),1_{2n})}$, то $\delta_\lambda\in\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ для любого λ. Отсюда следует, что $\operatorname{Ker}\bar\varkappa=\{\mathrm{id}\}$.

Вычислим $\operatorname{Im}\bar\varkappa$. Так как $\mathfrak{g}_{\bar 0}=\mathfrak{sp}(2n)\oplus\mathbb{C}z$, то

$$\operatorname{Out}\mathfrak{g}_{\bar 0}\cong\mathbb{C}^\times\cong\{\bar\varphi_\lambda\mid\varphi_\lambda(z)=\lambda z,\ \ \varphi_\lambda|_{\mathfrak{sp}(2n)}=\mathrm{id}\}.$$

Так как $[z,\,g]=kg$ для $g\in\mathfrak{g}_k$, то $\varphi(z)=\pm z$ для любого $\varphi\in\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$. Следовательно, $\operatorname{Im}\bar\varkappa\subseteq\{\bar\varphi_{\pm 1}\}$. Так как $\varkappa^{-1}(\varphi_{-1})=\operatorname{Ad}_{T_{2,n}}$, то $\bar\varphi_{-1}\in\operatorname{Im}\bar\varkappa^\circ$. Следовательно, $\operatorname{Im}\bar\varkappa\cong\operatorname{Out}\mathfrak{g}\cong\mathbb{Z}/2$.

2.7. Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{psl}(2|2)$. В этом случае лемма 2.4 неприменима, так как $\mathfrak{h}$-модули $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_{-1}$ изоморфны. Вычислим $\operatorname{Ker}\bar\varkappa$ для этого случая.

Пусть $\varphi\in\operatorname{Ker}\bar\varkappa$. Тогда $\varphi|_{\mathfrak{g}_0}=\mathrm{id}$. Значит, $\varphi\in\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}(\mathfrak{g}_{\bar 1},\,\mathfrak{g}_{\bar 1})$. Но $\mathfrak{g}_{\bar 1}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_{-1}$, причем $\mathfrak{g}_1\cong\mathfrak{g}_{-1}\cong V\otimes V$, где V — тавтологический $\mathfrak{sl}(2)$-модуль. Поэтому $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}(\mathfrak{g}_{\bar 1},\,\mathfrak{g}_{\bar 1})\cong\mathfrak{gl}(2)$, и любой $\varphi\in\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}(\mathfrak{g}_{\bar 1},\,\mathfrak{g}_{\bar 1})$ имеет вид:

$$\varphi\Big(\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}\Big)=\begin{pmatrix}0&\alpha A+\beta J_2BJ_2^{-1}\\\gamma J_2AJ_2^{-1}+\delta B&0\end{pmatrix}\ \text{для некоторых } \alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\delta\in\mathbb{C}.$$

Пусть $\tau=(-\,\mathrm{st})\circ\operatorname{Add}_{(J_2,\,J_2)}$. Очевидно, что $\tau\in\operatorname{Ker}\bar\varkappa$. Тогда

$$\varphi(g)=\begin{cases}\alpha g-\gamma\tau(g) & \text{для любого } g\in\mathfrak{g}_1,\\ \delta g+\beta\tau(g) & \text{для любого } g\in\mathfrak{g}_{-1}.\end{cases}$$

Так как $[\varphi(g_1),\,\varphi(g_2)]=[g_1,\,g_2]$ для любых $g_1\in\mathfrak{g}_1$, $g_2\in\mathfrak{g}_{-1}$, то

$$[\varphi(g_1),\,y(g_2)]=[(\alpha g_1-\gamma\tau(g_1)),\,(\delta g_2+\beta\tau(g_2))]=(\alpha\delta-\beta\gamma)[g_1,\,g_2]=[g_1,\,g_2].$$

Отсюда $\alpha\delta-\beta\gamma=1$.

С другой стороны, если $\alpha\delta-\gamma\beta=1$, то набор $(\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\delta)$ задает автоморфизм супералгебры $\mathfrak{g}$. Поэтому $\operatorname{Ker}\bar\varkappa=\mathrm{SL}(2)$. Но $\operatorname{Ker}\bar\varkappa\cap\operatorname{Int}\mathfrak{g}=\{\pm 1_2\}$. Отсюда $\operatorname{Ker}\bar\varkappa=\mathrm{SL}(2)/\langle -1_2\rangle$.

Вычислим $\operatorname{Im}\bar\varkappa$. Так как $\operatorname{Out}\mathfrak{g}_{\bar 0}=\mathbb{Z}/2$ и $\bar\varkappa(\overline{\mathrm{per}})\neq 1$, то $\operatorname{Im}\bar\varkappa=\operatorname{Out}\mathfrak{g}_{\bar 0}\cong\mathbb{Z}/2$. Отсюда получаем точную последовательность:

$$\{1\}\longrightarrow\mathrm{SL}(2)/\langle -1_2\rangle\longrightarrow\operatorname{Out}\mathfrak{psl}(2/2)\longrightarrow\mathbb{Z}/2\longrightarrow\{1\}.$$

Очевидно, что имеет место разложение $\operatorname{Out}\mathfrak{psl}(2/2)\cong\langle\overline{\mathrm{per}}\rangle\rtimes\mathrm{SL}(2)/\langle -1_2\rangle$.

2.8. Доказательство теоремы 2.1 для векторных супералгебр Ли.

Лемма. *Автоморфизмы супералгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *сохраняют стандартную фильтрацию*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(-d)} \supset \mathfrak{g}_{(-d+1)} \supset \mathfrak{g}_{(0)} \supset \mathfrak{g}_{(1)} \supset \mathfrak{g}_{(2)} \supset \ldots .$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{r} = \mathfrak{g}_{(2)} \cap \mathfrak{g}_{\bar 0}$, $\mathfrak{g}'_{\bar 0} = [\mathfrak{g}_{\bar 0}, \mathfrak{g}_{\bar 0}]$. Тогда $\mathfrak{r}$ — радикал в $\mathfrak{g}'_{\bar 0}$. Поэтому $\varphi(\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}$. Так как $\mathfrak{g}_{(1)} = [\mathfrak{r}, \mathfrak{g}]$, и $\varphi(\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}$, то $\varphi(\mathfrak{g}_{(1)}) = \mathfrak{g}_{(1)}$. Так как $\mathfrak{g}_{(k+1)} = [\mathfrak{g}_{(k)}, \mathfrak{g}_{(1)}]$, то $\varphi(\mathfrak{g}_{(k)}) = \mathfrak{g}_{(k)}$ для любого $k \geqslant 1$. Но $\mathfrak{g}_{(0)} = \mathfrak{g}_{\bar 0} + \mathfrak{g}_{(1)}$. Поэтому $\varphi(\mathfrak{g}_{(0)}) = \mathfrak{g}_{(0)}$. Следовательно, φ сохраняет фильтрацию. □

2.8а. Лемма. *Положим* $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_{(i)}/\mathfrak{g}_{(i+1)}$. *Пусть* $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, *и* $\varphi|_{\mathfrak{g}_{-1}} = \mathrm{id}$. *Тогда* $\varphi = \mathrm{id}$.

Доказательство. Пусть $\varphi|_{\mathfrak{g}_k} = \mathrm{id}$. Рассмотрим $g \in \mathfrak{g}_{k+1}$. Тогда $[\varphi(g), x] = [g, x]$ для любого $x \in \mathfrak{g}_{-1}$. Значит, $[\varphi(g) - g, x] = 0$ для любого $x \in \mathfrak{g}_{-1}$. Так как $\varphi(g) \in \mathfrak{g}_{(k+1)}$, а $g \in \mathfrak{g}_{(k+1)}$, то $g' = \varphi(g) - g \in \mathfrak{g}_{(k+1)}$. Если $g' \in \mathfrak{g}_{(0)}$ и $[g', x] = 0$ для любого $x \in \mathfrak{g}_{-1}$, то $g' = 0$. Поэтому $\varphi(g) = g$. Индукцией по k получаем $\varphi = \mathrm{id}$. □

2.8б. Лемма. *Пусть* $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$. *Так как* $\varphi(\mathfrak{g}_{(0)}) = \mathfrak{g}_{(0)}$, *то определен гомоморфизм* $\varkappa\colon \operatorname{Aut}\mathfrak{g} \to \mathrm{GL}(n)$, *где* $n = \dim\mathfrak{g}_{-1}$. *Тогда*

$$\operatorname{Ker}\varkappa = \begin{cases} \operatorname{Exp}(\mathrm{ad}_{(\mathfrak{g}_{(2)})_{\bar 0}}) & \textit{при } \mathfrak{g} \neq \mathfrak{h}'(2k), \\ \operatorname{Exp}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}(2k)}) & \textit{при } \mathfrak{g} = \mathfrak{h}'(2k). \end{cases}$$

(*Так как* $\mathfrak{h}'(2k)$ *— идеал в* $\mathfrak{h}(2k)$, *то действие* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}(2k)}$ *в* $\mathfrak{h}'(2k)$ *определено.*)

Доказательство. Пусть $R = \operatorname{Ker}\varkappa$. Положив

$$R_{(q)} = \{\varphi \in R \mid \varphi(x) - x \in \mathfrak{g}_{(q-1)} \text{ для любого } x \in \mathfrak{g}_{-1}\},$$

получаем на R фильтрацию $R = R_{(2)} \supset R_{(3)} \supset \ldots$.

Докажем, что если $\varphi \in R_{(q)}$, то $\varphi = \exp(\mathrm{ad}_g) \cdot \varphi'$ для некоторого $\varphi' \in R_{(q+1)}$, если $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{h}(2k)$ и

$$g \in \begin{cases} \mathfrak{g}_{(q)}, & \text{если } \mathfrak{g} \neq \mathfrak{h}_{(2k)}, \\ \mathfrak{h}(2k)_{(q)}, & \text{если } \mathfrak{g} = \mathfrak{h}'(2k). \end{cases}$$

Отсюда, из леммы 2.8а, и конечности фильтрации сразу следует утверждение леммы 2.8б. □

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{vect}(n)$, а $\varphi \in R_{(q)}$. Тогда

$$\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\xi_i}\Big) = \frac{\partial}{\partial\xi_i} + \sum_{1\leqslant p\leqslant n} \Psi_i^p \frac{\partial}{\partial\xi_p} + v_i, \quad \text{где } \Psi_i^p \in \Lambda^q(\xi_1, \ldots, \xi_n),\ v_i \in \mathfrak{g}_{(q)}.$$

Так как $[\varphi(\xi_i),\ \varphi(\xi_j)] = 0$ для любых $i, j \leqslant n$, то $\dfrac{\partial\Psi_i^p}{\partial\xi_j} + \dfrac{\partial\Psi_j^p}{\partial\xi_i} = 0$. Тогда существует набор $\Psi^1, \ldots, \Psi^n \in \Lambda^{q+1}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, такой что $\Psi_j^p = \dfrac{\partial\Psi^p}{\partial\xi_j}$ для любых $j, p \leqslant n$.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{svect}(n)$. Тогда φ имеет такой же вид, что и для $\mathfrak{g} = \mathfrak{vect}(n)$, только $\sum\limits_{1\leqslant p\leqslant n} \dfrac{\partial\Psi_i^p}{\partial\xi_p} = 0$. Но тогда $\sum\limits_{1\leqslant p\leqslant n} \dfrac{\partial\Psi^p}{\partial\xi_p} = 0$ и $\operatorname{div} g = 0$. Поэтому $g \in \mathfrak{g}_{(q)}$.

Пусть $\mathfrak{g} = \widetilde{\mathfrak{svect}}(n)$. Тогда

$$\varphi\Big((1 + \xi_1 \ldots \xi_n)\frac{\partial}{\partial\xi_i}\Big) = (1 + \xi_1 \ldots \xi_n)\frac{\partial}{\partial\xi_i} + \sum_{1\leqslant p\leqslant n} \Psi_i^p \frac{\partial}{\partial\xi_p} + v_i,$$

где

$$\Psi_i^p \in \Lambda^q(\xi_1, \ldots \xi_n),\ v_i \in \mathfrak{g}_{(q)} \text{ и } \sum_{1\leqslant p\leqslant n} \frac{\partial\Psi_i^p}{\partial\xi_p} = 0.$$

Так как

$$\Big[\varphi\Big((1 + \xi_1 \ldots \xi_n)\frac{\partial}{\partial\xi_i}\Big),\ \varphi\Big((1 + \xi_1 \ldots \xi_n)\frac{\partial}{\partial\xi_j}\Big)\Big] \in \varphi(\mathfrak{g}_{(n-2)}) \subset \mathfrak{g}_{n-2}$$

для любых $i, j \leqslant n$, а $q \leqslant n - 2$, то $\dfrac{\partial\Psi_i^p}{\partial\xi_j} + \dfrac{\partial\Psi_j^P}{\partial\xi_i} = 0$. Дальнейшие рассуждения такие же, как и в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{svect}(n)$.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}'(n)$. Тогда $\varphi(\xi_i) = \xi_i + \Psi_i + \alpha_i$, где $\Psi_i \in \Lambda^{q+1}$, а $\deg\alpha_i > q + 2$. Так как $\{\varphi(\xi_i), \varphi(\xi_j)\} = 0$ для любых $i, j \leqslant n$, то $\dfrac{\partial\Psi_i}{\partial\xi_j} + \dfrac{\partial\Psi_j}{\partial\xi_i} = 0$. Существует $\Psi \in \Lambda^{q+2}$, такой что $\Psi_i = \{\Psi, \xi_i\}$. Пусть $g = \Psi \in \mathfrak{h}(n)$. Тогда $(\exp(\mathrm{ad}_g))^{-1} \circ \varphi \in R_{(q+1)}$.

Лемма 2.8б доказана. □

2.8в. Лемма. *Пусть* G *— подгруппа автоморфизмов* $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, *таких что* $\varphi(\mathfrak{g}_i) = \mathfrak{g}_i$. *Имеем*

а) $\operatorname{Im}\varkappa \cong G$;

б) $G \cong \begin{cases} \mathrm{GL}(n), & \textit{если } \mathfrak{g} = \mathfrak{vect}(n) \textit{ или } \mathfrak{svect}(n); \\ \mathrm{CO}(n), & \textit{если } \mathfrak{g} = \mathfrak{h}'(n); \\ \mathrm{SL}(n), & \textit{если } \mathfrak{g} = \widetilde{\mathfrak{svect}}(n); \end{cases}$.

в) $\operatorname{Aut}\mathfrak{g} = G \rtimes R$, *где* $R = \operatorname{Ker}\varkappa$.

Доказательство. Любой автоморфизм $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ можно представить в виде $\varphi = \varphi_0\varphi_i$, где $\varphi_0(\mathfrak{g}_i) = \mathfrak{g}_i$, $\varphi_i(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}_{(i+1)}$.

Если $\mathfrak{g} \neq \widetilde{\mathfrak{svect}}(n)$, то $\varphi_0 \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, то есть $\varphi_0 \in G$. Тогда $\varphi_0^{-1}\varphi \in R$. Следовательно, $\operatorname{Aut}\mathfrak{g} = G \rtimes R$. Но тогда $\operatorname{Im}\varkappa = \varkappa(G)$. Так как $G \cap R = \{\mathrm{id}\}$, то $\operatorname{Im}\varkappa \cong G$.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{vect}(n)$ или $\mathfrak{svect}(n)$. Рассмотрим $A \in \mathrm{GL}(n)$, такой что $\varphi(x) = Ax$ для любого $x \in \mathfrak{g}_{-1}$. Пусть $A^* \in \operatorname{Aut}(\Lambda(n))$ индуцированный автоморфизм супералгебры Грассмана. Рассмотрим автоморфизм $\varphi_A \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, заданный формулой

$$\varphi_A(D)(f) = A^*(D(A^*(f))), \quad \text{для любых } D \in \mathfrak{vect}(n) \text{ и } f \in \Lambda(n).$$

Тогда $\varphi_A \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, и $\varphi|_{\mathfrak{g}_{-1}} = \varphi_A|_{\mathfrak{g}_{-1}}$. По лемме 2.8а $\varphi = \varphi_A$. Значит, $G \cong \mathrm{GL}(n)$.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}'(n)$, $\varphi \in G$, а оператор A определен также, как и для $\mathfrak{g} = \mathfrak{vect}(n)$. Тогда $\varphi(g) = AgA^{-1}$ для любого $g \in \mathfrak{g}_0$, так как $[\varphi(g), \varphi(x)] = \varphi([g, x])$. Но $\varphi(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0$, а $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{o}(n)$, поэтому $A \in \mathrm{CO}(n)$. С другой стороны, если $A \in \mathrm{CO}(n)$, то $\varphi_A(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Поэтому $G \cong \mathrm{CO}(n)$.

Осталось разобрать случай $\mathfrak{g} = \widetilde{\mathfrak{svect}}(n)$. В этом случае $\varphi_0 \notin \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, но обладает следующим свойством:

$$\varphi_0([g, x]) = [\varphi_0(g), \varphi_0(x)] \text{ для любых } g \in \mathfrak{g},\ x \in \mathfrak{g}_{(0)}. \tag{Д5.7}$$

Пусть $\tilde\varphi = \varphi_0^{-1} \circ \varphi$. Тогда $\tilde\varphi$ удовлетворяет условию (Д5.7) с $\tilde\varphi$ вместо φ_0. Кроме того, так как $\varphi_0(\mathfrak{g}_i) = \mathfrak{g}_i$ и $\tilde\varphi(\mathfrak{g}_{n-2}) = \mathfrak{g}_{n-2}$, то выполнено условие:

$$[\tilde\varphi(x),\ \tilde\varphi(y)] \in \mathfrak{g}_{n-2} \text{ для любых } x, y \in \mathfrak{g}_{-1}. \tag{Д5.8}$$

Из построения автоморфизма $\tilde\varphi$ следует, что для него выполнено также условие

$$\tilde\varphi(g) - g \in \mathfrak{g}_{(i+1)} \text{ для любого } g \in \mathfrak{g}_i. \tag{Д5.9}$$

При доказательстве леммы 2.8а нам потребовалось только условие (Д5.7), а при доказательстве леммы 2.8б — только условия (Д5.7), (Д5.8), (Д5.9). Поэтому $\tilde\varphi \in \operatorname{Exp}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_{(2)}})$. Следовательно, $\tilde\varphi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, а, значит, и $\varphi_0 \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$. Но тогда $\varphi_0 \in G$. Такие же рассуждения, как для $\mathfrak{g} = \mathfrak{vect}(n)$, $\mathfrak{svect}(n)$ и $\mathfrak{h}'(n)$ показывают, что утверждения а) и в) верны для $\mathfrak{g} = \widetilde{\mathfrak{svect}}(n)$.

Для доказательства утверждения б) опишем группу G. Пусть $\varphi \in G$ и $\varphi(x) = Ax$ для любого $x \in \mathfrak{g}_{-1}$. Если $A \in \mathrm{SL}(n)$, то $\varphi = \varphi_A$. Пусть $A \notin \mathrm{SL}(n)$. Тогда $A = \lambda^{-1} \cdot B$ для некоторой матрицы $B \in \mathrm{SL}(n)$, причем $\lambda^n \neq 1$. Автоморфизм $\varphi' = \varphi_A^{-1}\varphi_B$ совпадает с δ_λ на $\mathfrak{g}_{-1}$. Тогда φ' совпадает с δ_λ на всей $\mathfrak{g}$, так как

$$[\lambda x,\, \varphi(g)] = \varphi[x,\, g] \ \text{ для любых } x \in \mathfrak{g}_{-1} \text{ и } g \in \mathfrak{g}_i.$$

Но $\delta_\lambda \notin \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ при $\lambda^n \neq 1$. Следовательно, $A \in \mathrm{SL}(n)$, и $G \cong \mathrm{SL}(n)$. □

Так как $\mathfrak{g}_{\bar 0} = \mathfrak{g}_0 \oplus (\mathfrak{g}_{(2)})_{\bar 0}$, то $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g} = G_0 \rtimes R_0$, где $G_0 = \mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0})$, а $R_0 = \mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_{(\mathfrak{g}_{(2)})_{\bar 0}})$. Подгруппы G_0 и R_0 нормальны в группах G и R соответственно. Поэтому

$$\mathrm{Out}\,\mathfrak{g} = (G/G_0) \rtimes (R/R_0).$$

а) Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{vect}(n)$ или $\tilde{\mathfrak{svect}}(n)$. Тогда $R_0 = R$, $G_0 = G$. Следовательно, $\mathrm{Out}\,\mathfrak{g} = \{\mathrm{id}\}$.

б) Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{svect}(n)$. Тогда $R_0 = R$, $G_0 = \mathrm{SL}(n)$, $G = \mathrm{GL}(n)$. Следовательно,

$$\mathrm{Out}\,\mathfrak{g} = \mathrm{GL}(n)/\,\mathrm{SL}(n) = \{\delta_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}^\times\}/\langle \delta_{\sqrt[n]{1}} \rangle \cong \mathbb{C}^\times.$$

в) Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}'(n)$. Тогда $R_0 = (\mathfrak{h}'(n)_{(2)})_{\bar 0}$, $R = (\mathfrak{h}(n)_{(2)})_{\bar 0}$, $G_0 = \mathrm{SO}(n)$, $G = \mathrm{CO}(n)$.

Если $n = 2k+1$, то $R_0 = R$, следовательно, $\mathrm{Out}\,\mathfrak{g} = \mathrm{CO}(n)/\,\mathrm{SO}(n) \cong \mathbb{C}^\times$.

Если $n = 2k$, то $R = R_0 \oplus \xi_1 \ldots \xi_n\, t$, $R/R_0 = \langle \bar{\mathcal{B}}_t \rangle$, $G/G_0 = \mathrm{CO}(n)/\,\mathrm{SO}(n) = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{Z}/2$, следовательно,

$$\mathrm{Out}\,\mathfrak{g} = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{Z}/2 \rtimes \langle \bar{\mathcal{B}}_t \rangle.$$

Теорема 2.1 доказана. □

§ 3. Вещественные структуры простых конечномерных супералгебр Ли

3.1. Утверждение. 1) *Пусть $\mathfrak{s}$ — простая конечномерная супералгебра Ли над $\mathbb{R}$, тогда либо $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ — некоторая простая конечномерная комплексная супералгебра Ли, рассмотренная над $\mathbb{R}$, либо $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{g}^\rho = \{g \in \mathfrak{g} \mid \rho(g) = g\}$, где ρ — вещественная структура на $\mathfrak{g}$.*

2) *Пусть ρ_1 и ρ_2 — вещественные структуры супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{g}^{\rho_2} \cong \mathfrak{g}^{\rho_2}$ как супералгебры Ли над $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\rho_1 \sim \rho_2$.*

В этом параграфе перечислены все с точностью до эквивалентности *вещественные* и *кватернионные* структуры простых конечномерных супералгебр Ли.

Для любой простой конечномерной комплексной супералгебры Ли, кроме супералгебр $\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$ при $\alpha \notin \mathbb{R}$, существует один *естественный* антилинейный инволютивный автоморфизм σ. Для линейных (синоним: матричных) супералгебр Ли этот автоморфизм σ задается как комплексное сопряжение матричных элементов. Для исключительных супералгебр Ли, заданных матрицами Картана и образующими Шевалле, определим σ как комплексное сопряжение коэффициентов элементов в базисе Шевалле. На супералгебрах Ли векторных полей автоморфизм σ задан формулой:

$$\sigma\Bigl(\sum f_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}\Bigr) = \sum \bar{f}_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}. \qquad (\text{Д}5.10)$$

3.2. Замечание. Любой другой антилинейный автоморфизм комплексной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно, конечно, представить в виде $\rho = \sigma \circ \varphi$ для некоторого линейного автоморфизма $\varphi \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$. Так мы сводим описание вещественных форм к описанию линейных автоморфизмов порядка $\leqslant 2$.

3.3. Теорема. *Все неэквивалентные вещественные структуры простых конечномерных комплексных супералгебр Ли перечислены в табл.* Д5.3, *а кватернионные структуры — в табл.* Д5.4.

В таблице Д5.5 *приводится явное описание вещественных форм простых конечномерных супералгебр Ли над $\mathbb{C}$.*

Таблица Д5.3. **Вещественные формы простых конечномерных супералгебр Ли**

Ниже $\tau_{\mathfrak{g}(2)}$ — автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}(2)$, выделяющий ее компактную вещественную форму.

$\mathfrak{g}$	ρ	Обозначение алгебры $\mathfrak{g}^\rho$
$\mathfrak{g}$ (для $\mathfrak{osp}_\alpha(4\|2)$ при $\alpha \in \mathbb{R}$)	σ	$\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ или $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$
$\mathfrak{sl}(m\|n)$ $\mathfrak{psl}(n\|n)$	$\sigma \circ (-\,\mathrm{st}) \circ \mathrm{Add}_{(I^p_m,\, I^q_n)} \circ \delta_i$ $\sigma \circ (-\,\mathrm{st}) \circ \mathrm{Add}_{(I^p_n,\, I^q_n)} \circ \delta_i$	$\mathfrak{su}(p,\, m-p\|q,\, n-q)$ $\mathfrak{psu}(p,\, n-p\|q,\, n-q)$
$\mathfrak{sl}(2m\|2n)$ $\mathfrak{psl}(2n\|2n)$	$\sigma \circ \mathrm{Add}_{(I^p_m, I^q_n)}$ $\sigma \circ \mathrm{Add}_{(I^p_n, I^q_n)}$	$\mathfrak{su}^*(m\|n)$ $\mathfrak{psu}^*(n\|n)$
$\mathfrak{psl}(n\|n)$	$\sigma \circ \Pi \circ (-\,\mathrm{st})$	$\mathfrak{supe}(n)$
	$\sigma \circ \Pi$	${}^\circ\mathfrak{pq}(n)$
$\mathfrak{osp}(m\|2n)$ $\mathfrak{osp}(2m\|2n)$	$\sigma \circ \mathrm{Add}_{(I^p_m, 1_{2n})}$ $\sigma \circ \mathrm{Add}_{(I_{2m}, I^q_n, I^q_n)} \circ \mathrm{Add}_{(1_{2m}, J_{2n})}$	$\mathfrak{osp}(p,\, m-p\|2n)$ $\mathfrak{osp}^*(2m\|2n-2q,\, 2q)$
$\mathfrak{spe}(2n)$	$\sigma \circ \mathrm{Add}_{(I_{2n}, I_{2n})}$	$\mathfrak{spe}^*(2n)$
$\mathfrak{psq}(n)$	$\sigma \circ \mathrm{Add}_{(I_n,\, I_n)}$	$\mathfrak{psq}^*(n)$
	$\sigma \circ (-\,\mathrm{st}) \circ \delta_i \circ \mathrm{Add}_{(I^p_n, I^p_n)}$	$\mathfrak{psuq}(p,\, n-p)$
$\mathfrak{h}'(n)$	$\sigma \circ \mathrm{Ad}_{I^p_n}$	$\mathfrak{h}'_\mathbb{R}(p,\, n-p)$
$\mathfrak{osp}_\alpha(4\|2)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$	$\sigma \circ \mathrm{Ad}_{1_2 \otimes J_2 \otimes J_2}$	$\mathfrak{osp}^\circ_\alpha(4\|2)$
	$\sigma \circ \mathrm{Ad}_{J_2 \otimes 1_2 \otimes J_2}$	$\mathfrak{osp}^\circ_{1/\alpha}(4\|2)$
	$\sigma \circ \mathrm{Ad}_{J_2 \otimes J_2 \otimes 1_2}$	$\mathfrak{osp}^\circ_{1/(1+\alpha)}(4\|2)$
$\mathfrak{osp}_\alpha(4\|2)$, где $\mathrm{Re}\,\alpha = -\frac{1}{2}$	$\sigma \circ d_{23}$	$\overline{\mathfrak{osp}}_\alpha(4\|2)$
$\mathfrak{ag}(2)$	$\sigma \circ \mathrm{id}_{\mathfrak{sl}(2)} \otimes \tau_{\mathfrak{g}(2)}$	$\mathfrak{ag}^c(2)$
$\mathfrak{ab}(3)$	$\sigma \circ \mathrm{Ad}_{1_2 \otimes \mathrm{diag}(1, \Pi_3)}$	$\mathfrak{ao}(7)$
	$\sigma \circ \mathrm{Ad}_{J_2 \otimes \mathrm{diag}(-1, \Pi_3)}$	$\mathfrak{uo}(1,\, 6)$
	$\sigma \circ \mathrm{Ad}_{J_2 \otimes \mathrm{diag}(1_3, \Pi_2, 1_2)}$	$\mathfrak{uo}(2,\, 5)$

Таблица Д5.4. **Кватернионные формы простых конечномерных супералгебр Ли**

$\mathfrak{g}$	ρ	$\mathfrak{g}^{\varphi}$
$\mathfrak{sl}(m\vert 2n)$	$\sigma\circ\mathrm{Add}_{(1_m,J_{2n})}$	$\mathfrak{sl}_{\mathbb{R}}(m)\oplus\mathfrak{su}^*(n)\oplus\mathbb{R}$
$\mathfrak{sl}(m\vert n)$	$\sigma\circ\mathrm{Add}_{(I^p_m,\, I^q_n)}\circ(-\,\mathrm{st})$	$\mathfrak{su}(m-p,p)\oplus\mathfrak{su}(n-q,q)\oplus\mathfrak{u}(1)$
$\mathfrak{psl}(n\vert n)$	$\sigma\circ\Pi\circ\delta_i$	$\mathfrak{sl}(n)$
$\mathfrak{psl}(2n\vert 2n)$	$\sigma\circ\mathrm{Add}_{(1_{2n},J_{2n})}$	$\mathfrak{sl}_{\mathbb{R}}(m)\oplus\mathfrak{su}^*(n)$
	$\sigma\circ\mathrm{Add}_{(I^p_n,\, I^q_n)}\circ(-\,\mathrm{st})$	$\mathfrak{su}(n-p,\,p)\oplus\mathfrak{su}(n-q,\,q)$
$\mathfrak{osp}(m\vert 2n)$	$\sigma\circ\mathrm{Add}_{(I^p_m,\,J_n)}\circ\mathrm{Add}_{(1_m,\,I^q_n,\,I^q_n)}$	$\mathfrak{o}(m-p,\,p)\oplus\mathfrak{sp}(2n-2q,\,2q)$
$\mathfrak{osp}(2m\vert 2n)$	$\sigma\circ\mathrm{Add}_{(J_{2m},1_n)}$	$\mathfrak{o}^*(2m)\oplus\mathfrak{sp}_{\mathbb{R}}(2n)$
$\mathfrak{h}'(2n)$, $\mathfrak{vect}(2n)$, $\mathfrak{svect}(2n)$	$\sigma\circ\mathrm{Ad}_{J_{2n}}$	$\ldots$
$\widetilde{\mathfrak{svect}}(2n)$	$\sigma\circ\mathrm{Ad}_{J_{2n}}\cdot\delta_\varepsilon$, где $\varepsilon=1$ или ε_{2n}	$\ldots$
$\mathfrak{osp}_\alpha(4\vert 2)$, где $\alpha\in\mathbb{R}$	$\sigma\circ\mathrm{Ad}_{J_2\otimes 1_2\otimes 1_2}$ (J_2 может занимать любое из трех мест, $\mathfrak{su}(2)$ будет сдвигаться соответственно)	$\mathfrak{sl}_{\mathbb{R}}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{sl}_{\mathbb{R}}(2)$
	$\sigma\circ\mathrm{Ad}_{J_2\otimes J_2\otimes J_2}\circ\delta_{\pm 1}$	$\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$
$\mathfrak{osp}_\alpha(4\vert 2)$, где $\mathrm{Re}\,\alpha=-\frac{1}{2}$	$\sigma\circ\mathrm{Ad}_{J_2\otimes 1_2\otimes 1_2}\circ d_{23}\circ\delta_{\pm 1}$	$\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$
$\mathfrak{ag}(2)$	$\sigma\circ(\mathrm{Ad}_{J_2}\otimes\mathrm{id})\circ\delta_{\pm 1}$	$\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{g}(2)_{\mathbb{R}}$
	$\sigma\circ(\mathrm{Ad}_{J_2}\otimes\omega)\circ\delta_{\pm 1}$	$\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{g}(2)^{comp}$
$\mathfrak{ab}(3)$	$\sigma\circ(\mathrm{Ad}_{J_2}\otimes\mathrm{diag}(1,\,\Pi_3))$	$\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{o}(7;\,\mathbb{R})$
	$\sigma\circ(\mathrm{Ad}_{J_2}\otimes 1_7)\circ\delta_{\pm 1}$	$\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{o}(3,\,4)$
	$\sigma\circ\mathrm{Ad}_{1_2\otimes\mathrm{diag}(-1,\Pi_3)})$	$\mathfrak{sl}_{\mathbb{R}}(2)\oplus\mathfrak{o}(1,\,6)$
	$\sigma\circ\mathrm{Ad}_{1_2\otimes\mathrm{diag}(1_3,\Pi_2,1_2)})$	$\mathfrak{sl}_{\mathbb{R}}(2)\oplus\mathfrak{o}(2,\,5)$

3.4. Две вещественные структуры ρ_1 и ρ_2 на комплексной супералгебре Ли $\mathfrak{g}$ называются *двойственными*, если $\rho_1|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}=i\rho_2|_{\mathfrak{g}_{\bar 1}}$.

Предложение. *Двойственные вещественные структуры простых конечномерных супералгебр Ли эквивалентны.*

Доказательство следует из теоремы 3.3, см. также [CoC1°]. □

Доказательство теоремы 3.3. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная супералгебра Ли над $\mathbb{C}$, ρ — вещественная структура типа $(\pm 1,\,-1,\,-1)$ на $\mathfrak{g}$, а $\rho_0=\rho|_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}$. Очевидно, что ρ_0 — вещественная структура на алгебре Ли $\mathfrak{g}_{\bar 0}$. Символом $\mathrm{CLRe}(\mathfrak{g}_{\bar 0})$ обозначим множество неизоморфных вещественных структур на $\mathfrak{g}_{\bar 0}$, взятых по одной из каждого класса сопряженности вещественных структур относительно группы $\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_{\bar 0}})$.

Таблица Д5.5. **Явный вид вещественных форм $\mathfrak{g}_r$ простых комплексных супералгебр Ли $\mathfrak{g}$**

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_r$	Описание элементов $X\in\mathfrak{g}_r$
$\mathfrak{sl}(m\vert n)$	$\mathfrak{su}(m,\,p\vert n,\,q)$	$\bar X^{\mathrm{st}}\,\mathrm{diag}(I^p_m,\,iI^q_n)+\mathrm{diag}(I^p_m,\,iI^q_n)\cdot X=0$
$\mathfrak{sl}(2m\vert 2n)$	$\mathfrak{su}^*(2m\vert 2n)$	$\left\{X=\begin{pmatrix}A_0A_1 & B_0B_1\\ -\bar A_1\bar A_0 & -\bar B_1\bar B_0\\ C_0C_1 & D_0D_1\\ -\bar C_1\bar C_0 & -\bar D_1\bar D_0\end{pmatrix}\right\}$
$\mathfrak{psl}(n\vert n)$	$^\circ\mathfrak{pq}(n)$	$\left\{X=\begin{pmatrix}A & B\\ \bar B & \bar A\end{pmatrix}\,\middle\vert\,\mathrm{tr}\,A=0\right\}$
$\mathfrak{psl}(n\vert n)$	$\mathfrak{supe}(n)$	$\left\{X=\begin{pmatrix}A & B\\ C- & \bar A^t\end{pmatrix}\,\middle\vert\,\bar B^t+B=0,\ \ \bar C^t=C,\ \ \mathrm{tr}\,A=0\right\}$
$\mathfrak{osp}(m\vert 2n)$	$\mathfrak{osp}(m,\,p\vert 2n)$	$\{X\in\mathfrak{sl}(m\vert 2n,\,\mathbb{R})\mid X^{\mathrm{st}}\,\mathrm{diag}(I^p_m,\,J_{2n})+\mathrm{diag}(I^p_m,\,J_{2n})X=0\}$
$\mathfrak{osp}(2m\vert 2n)$	$\mathfrak{osp}^*(2m\vert 2n,\,2p)$	$\left\{X\,\middle\vert\,\begin{matrix}\bar X\,\mathrm{diag}(J_{2m},\,I^p_n,\,I^p_n)+\mathrm{diag}(J_{2m},\,I^p_n,\,I^p_n)X=0;\\ X^{\mathrm{st}}\,\mathrm{diag}(1_{2m},\,J_{2n})+\mathrm{diag}(1_{2m},\,J_{2n})X=0\end{matrix}\right\}$
$\mathfrak{psq}(n)$	$\mathfrak{psuq}(n,\,p)$	$\left\{X=\begin{pmatrix}A & B\\ B & A\end{pmatrix}\,\middle\vert\,\begin{matrix}\mathrm{tr}\,B=\mathrm{tr}\,A=0;\ \bar A^tI^p_m+I^p_mA=0,\\ \bar B^tI^p_m+i\cdot I^p_m\cdot B=0\end{matrix}\right\}$
$\mathfrak{psq}(2n)$	$\mathfrak{psq}^*(2n)$	$\left\{X=\begin{pmatrix}A_0 & A_1 & B_0 & B_1\\ -\bar A_1 & \bar A_0 & -\bar B_1 & \bar B_0\\ B_0 & B_1 & A_0 & A_1\\ -\bar B_1 & \bar B_0 & -\bar A_1 & \bar A_0\end{pmatrix}\,\middle\vert\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,B_0=\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,A_0=0\right\}$
$\mathfrak{spe}(2n)$	$\mathfrak{spe}^*(2n)$	$\left\{X=\begin{pmatrix}A_0 & A_1 & B_0 & B_1\\ -\bar A_1 & \bar A_0 & -\bar B_1 & \bar B_0\\ C_0 & C_1 & -A_0^t & \bar A_1^t\\ -\bar C_1 & \bar C_0 & -A_1^t & \bar A_0^t\end{pmatrix}\,\middle\vert\,\begin{matrix}B_0^t=B_0,\ \ C_0^t=-C_0,\\ \bar B_1^t=-B_1,\ \ \bar C_1^t=C_1,\\ \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,A_0=0\end{matrix}\right\}$
$\mathfrak{h}'(n)$ при $n>4$	$\mathfrak{h}'(n,\,p)$	$\left\{X\in\mathfrak{vect}(0\vert n)\,\middle\vert\,X=H^{(p)}_f:=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant p}\frac{\partial f}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_i}-\sum\limits_{p+1\leqslant i\leqslant n}\frac{\partial f}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_i},\right.$ $\left.\text{где } f\in\Lambda_{\mathbb{R}}(\xi_1,\,\ldots,\,\xi_n)\backslash\mathbb{R}\cdot\xi_1\ldots\xi_n\right\}$

В правом столбце дано описание элементов из супералгебр вида $\mathfrak{pg}:=\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ в терминах их прообразов в $\mathfrak{g}$; скобка таких элементов получается из суперскобки матриц после факторизации по центру $\mathfrak{c}$.

3.4a. Лемма. *Пусть на супералгебре Ли $\mathfrak{g}$ задана вещественная структура типа* $(\pm 1,\,-1,\,-1)$. *Тогда ρ эквивалентна некоторой вещественной структуре ρ', такой что* $\rho'_0\in\mathrm{CLRe}(\mathfrak{g}_{\bar 0})$.

Доказательство легко следует из того, что любой автоморфизм $\Psi\in\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_{\bar 0}})$ продолжается на $\mathfrak{g}$. □

Пусть ρ_0 — инволюция алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar 0}$, а $\tilde\rho_0$ — множество всех антилинейных автоморфизмов ρ супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, ограничение которых на $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ совпадает с ρ_0. Положим

$$\rho_0^+:=\{\rho\in\tilde\rho_0\mid\rho^2=\mathrm{id}\},\qquad\rho_0^-:=\{\rho\in\tilde\rho_0\mid\rho^2=\delta_{-1}\}.\tag{Д5.11}$$

Если $\mathfrak{g}$ — линейная или исключительная супералгебра Ли, то алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ редуктивна, и множество $\mathrm{CLRe}(\mathfrak{g}_{\bar 0})$ известно (см. [ВиОн°]). С другой стороны, для любого $\rho_0\in\mathrm{CLRe}(\mathfrak{g}_{\bar 0})$

мы можем описать множество $\tilde{\rho}_0$, пользуясь теоремой 2.1. Действительно, если $\tilde{\rho}_0 \neq \varphi$, то для любого $\rho \in \tilde{\rho}_0$ имеет место равенство $\tilde{\rho}_0 = \rho \cdot \mathrm{Aut}_0$, где Aut_0 — подгруппа всех автоморфизмов супералгебры $\mathfrak{g}$, действующих на $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ тождественно.

Для описания всех неэквивалентных вещественных структур нам необходимо для произвольного элемента $\rho_0 \in \mathrm{CLRe}(\mathfrak{g}_{\bar 0})$, выбрать в множествах ρ_0^+ и ρ_0^- по одному элементу из каждого класса элементов, сопряженных в группе $\mathrm{Aut}\ \mathfrak{g}$. Проделаем это.

1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(m|n)$, где $m \neq n$, так что $\mathfrak{g}_{\bar 0} = \mathfrak{sl}(m) \oplus \mathfrak{sl}(n) \oplus \mathbb{C}$.

Возможны следующие случаи:

а) $\rho_0 = \sigma|_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}$. Тогда $\tilde{\rho}_0 = \{\rho \circ \delta_\lambda\}$, $\rho_0^+ = \{\rho \cdot \delta_\lambda \mid \lambda\bar{\lambda} = 1\}$ и $\rho_0^- = \varnothing$. Любой автоморфизм $\rho' = \rho \cdot \delta_\lambda \in \rho_0^+$ сопряжен с ρ автоморфизмом $\delta_{\sqrt{\lambda}}$.

б) $\rho_0 = (-\,\mathrm{st}) \circ \sigma \circ \mathrm{Add}_{(I_m^p,\, I_n^q)}$ для некоторых $0 \leqslant p \leqslant \left[\frac{m}{2}\right]$, $0 \leqslant q \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$. Тогда

$$\tilde{\rho}_0 = \{\rho \cdot \delta_\lambda\}, \quad \rho_0^+ = \{\rho \cdot \delta_\lambda \mid \lambda\bar{\lambda}^{-1} = -1\}, \quad \rho_0^- = \{\rho \cdot \delta_\lambda \mid \lambda\bar{\lambda}^{-1} = 1\}.$$

Любой автоморфизм $\rho' \in \rho_0^+$ сопряжен с $\rho \cdot \delta_{\pm i}$ автоморфизмом $\delta_{\sqrt{\lambda}}$. Аналогично, любой автоморфизм $\rho' \in \rho_0^-$, сопряжен с $\rho \circ \delta_{\pm 1}$. Автоморфизмы $\rho \circ \delta_i$ и $\rho \circ \delta_{-i}$ сопряжены автоморфизмом σ.

в) $\rho_0 = \sigma \circ \mathrm{Add}_{(J_m,\, J_n)}|_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}$, если m и n четны. Тогда $\tilde{\rho} = \{\rho \circ \delta_\lambda\}$, $\rho_0^+ = \{\rho \circ \delta_\lambda \mid \lambda\bar{\lambda} = 1\}$, $\rho_0^- = \varnothing$. Любой автоморфизм $\rho' \in \rho_0^+$ сопряжен с ρ автоморфизмом $\delta_{\sqrt{\lambda}}$.

г) $\rho_0 = \sigma \circ \mathrm{Add}_{(J_m,\, 1_n)}|_{\mathfrak{g}_0}$, если m четно. Тогда $\tilde{\rho}_0 = \{\rho_0 \circ \delta_\lambda\}$, $\rho_0^- = \{\rho_0 \circ \delta_\lambda \mid \lambda\bar{\lambda} = 1\}$, $\rho_0^+ = \varnothing$. Любой автоморфизм $\rho' \in \rho_0^-$ сопряжен с ρ при помощь автоморфизма $\delta_{\sqrt{\lambda}}$.

д) $\rho_0 = \sigma \circ \mathrm{Add}_{(1_m,\, J_n)}$, если n четно. Этот случай полностью аналогичен предыдущему.

2) $\mathfrak{g} = \mathfrak{psl}(n|n)$ при $n \neq 2$, так что $\mathfrak{g}_{\bar 0} = \mathfrak{sl}(n) \oplus \mathfrak{sl}(n)$. В этом случае, кроме вышеперечисленных ρ_0, возможны следующие:

а) $\rho_0 = \sigma \circ \Pi|_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}$. Тогда $\tilde{\rho}_0 = \{\rho \circ \delta_\lambda\}$, $\rho_0^\pm = \{\rho \circ \delta_\lambda \mid \lambda\bar{\lambda}^{-1} = \pm 1\}$. Любой автоморфизм $\rho' \in \rho_0^+$ сопряжен с $\rho \circ \delta_{\pm 1}$, а любой автоморфизм $\rho' \in \rho_0^-$ с $\rho \circ \delta_{\pm i}$ автоморфизмом $\delta_{\sqrt{\lambda}}$.

Автоморфизмы ρ и $\rho \circ \delta_{-1}$, сопряжены автоморфизмом $-\,\mathrm{st}$, а автоморфизмы $\rho \circ \delta_i$ и $\rho \circ \delta_{-i}$ — автоморфизмом Π.

б) $\rho_0 = \sigma \circ (-\,\mathrm{st}) \circ \Pi|_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}$. Тогда $\tilde{\rho}_0 = \{\rho \circ \delta_\lambda\}$, $\rho_0^+ = \{\rho \circ \delta_\lambda \mid \lambda\bar{\lambda} = 1\}$, $\rho_0^- = \varnothing$. Любой автоморфизм $\rho' \in \rho_0^+$ сопряжен с ρ автоморфизмом $\delta_{\sqrt{\lambda}}$.

3)$\mathfrak{g} = \mathfrak{psl}(2|2)$. Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$. Возможны следующие случаи:

а) $\rho_0 = \sigma|_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}$. В этом случае $\tilde{\rho}_0 = \{\rho \circ \beta \mid \beta \in \mathrm{SL}(2) = \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}\}$, где $\rho_0^\pm = \{\rho \circ \beta \mid \beta\bar{\beta} = \pm 1_2\}$. Если $\beta \in \mathrm{SL}(2)$ и $\beta\bar{\beta} = \pm 1_2$, то β приводится к виду 1_2 (соотв. J_2) преобразованиями $A\beta\bar{A}^{-1}$, где $A \in \mathrm{SL}(2)$. Поэтому любой автоморфизм $\rho' \in \rho_0^+$ (соотв. $\rho' \in \rho_0^-$) сопряжен с ρ (соотв. с $\rho_0 J_2$).

б) $\rho_0 = \sigma \circ \mathrm{Add}_{(1_2,\, J_2)}|_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}$. Тогда $\tilde{\rho}_0 = \{\rho \circ \beta \mid \beta \in SL(2)\}$, а $\rho_0^\pm = \{\rho \circ \beta \mid \beta\bar{\beta} = \pm 1\}$. Аналогично случаю а) любой автоморфизм $\rho' \in \rho_0^+$ (соотв. ρ_0^-) сопряжен с $\rho \circ J_2$ (соотв. с ρ_0).

в) $\rho_0 = \sigma \circ \mathrm{Add}_{(J_2,\, 1_2)}|_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}$. Сопряжением автоморфизмом Π этот случай сводится к предыдущему.

г) $\rho_0 = \sigma \circ \mathrm{Add}_{(J_2,\, J_2)}|_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}$. Тогда $\tilde{\rho}_0 = \{\rho \circ \beta \mid \beta \in \mathrm{SL}(2)\}$, а $\rho_0^\pm = \{\rho \circ \beta \mid \beta\bar{\beta} = (-)1\}$. Аналогично случаям а) и б) любой автоморфизм $\rho' \in \rho_0^+$ (соотв. ρ_0^-) сопряжен с ρ (соотв. с $\rho \circ J_2$).

д) $\rho_0 = \sigma \circ \Pi|_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}$. Тогда $\tilde{\rho} = \{\rho \circ \beta \mid \beta \in \mathrm{SL}(2)\}$, $\rho_0^+ = \{\beta \mid \Pi_2\bar{\beta}\Pi_2 = 1_2\}$, $\rho_0^- = \varnothing$. Так как матрица $\beta\Pi_2$ приводится либо к 1_2, либо к J_2, то любой автоморфизм $\rho' \in \rho_0^+$ сопряжен либо с ρ, либо с $\rho \circ J_2$.

Заметим, что автоморфизм супералгебры Ли $\mathfrak{psl}(2|2)$, индуцированный элементом $J_2 \in \mathrm{SL}(2)$, совпадает с автоморфизмом $-\,\mathrm{st} \circ \mathrm{Add}_{(J_2,\, J_2)}$. Подставив $-\,\mathrm{st} \circ \mathrm{Add}_{(J_2,\, J_2)}$ вместо автоморфизма J_2 в выражение для ρ, мы убеждаемся, что список вещественных структур для $\mathfrak{psl}(2|2)$ такой же, как для $\mathfrak{psl}(n|n)$.

4) $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(m|2n)$. Для ρ_0 имеются следующие возможности:

а) $\rho_0 = \mathrm{Add}_{(I_m^p,\, 1_{2n})}$ при некотором $p = 0, 1, \ldots, \left[\frac{m}{2}\right]$, а $\tilde{\rho}_0 = \rho_0^+ = \{\rho, \rho \circ \delta_{-1}\}$, $\rho_0^- = \varnothing$.

б) $\rho_0 = \mathrm{Add}_{(J_m,\, \mathrm{diag}(I_n^q,\, I_n^q)\cdot J_{2n})}$ при четном m и некотором $q = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$. Тогда $\tilde{\rho}_0 = \rho_0^+ = \{\rho, \rho \circ \delta_{-1}\}$, $\rho_0^- = \varnothing$.

в) $\rho_0 = \mathrm{Add}_{(I_m^p,\, \mathrm{diag}(I_n^q,\, I_n^q)\cdot J_{2n})}$ при некоторых $p = 0, 1, \ldots, \left[\frac{m}{2}\right]$ и $q = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$. Тогда $\tilde{\rho}_0 = \rho_0^- = \{\rho, \rho \circ \delta_{-1}\}$, $\rho_0^+ = \varnothing$.

г) $\rho_0 = \mathrm{Add}_{(J_m,\, 1_{2n})}$ при четном m. Тогда $\tilde{\rho}_0 = \rho_0^- = \{\rho, \rho \circ \delta_{-1}\}$, $\rho_0^+ = \varnothing$.

Автоморфизмы ρ и $\rho \circ \delta_{-1}$ сопряжены автоморфизмом $\mathrm{Add}_{(1_m,\, i\cdot\mathrm{diag}(1_n,\, -1_n))}$ в случаях а) и г) и автоморфизмом $\mathrm{Add}_{(I_m^{m/2},\, 1_{2n})}$ в случае б). В случае в) ρ и $\rho \circ \delta_{-1}$ не сопряжены.

5) $\mathfrak{g} = \mathfrak{psq}(n)$. Так как $\mathfrak{g}_{\bar 0} = \mathfrak{sl}(n)$, то ρ_0 принимает следующие значения:

а) $\rho_0(A) = I_n^p(\bar{A}^t)^{-1}I_n^p$ для любых $A \in \mathfrak{sl}(n)$ и $p = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$. Тогда $\tilde{\rho}_0 = \rho_0^+ = \{\sigma \circ q \circ \mathrm{Ad}_{I_n^p}, \sigma \circ q \circ \mathrm{Ad}_{I_n^p} \circ \delta_{-1}\}$, $\rho_0^- = \varnothing$.

б) $\rho_0 = \sigma|_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}$. Тогда $\tilde{\rho}_0 = \rho_0^+ = \{\rho,\ \rho \circ \delta_{-1}\}$, $\rho_0^- = \varnothing$.

в) $\rho_0 = \sigma \circ \mathrm{Ad}_{J_n}|_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}$ при четном n. Тогда $\tilde{\rho}_0 = \rho_0^+ = \{\rho,\ \rho \circ \delta_{-1}\}$, $\rho_0^- = \varnothing$.

Во всех трех случаях автоморфизмы ρ и $\rho \circ \delta_{-1}$ сопряжены автоморфизмом q.

6) $\mathfrak{g} = \mathfrak{spe}(n)$. Тогда возможны два случая:

а) $\rho_0 = \sigma$. Тогда $\tilde{\rho}_0 = \{\rho \circ \delta_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}^\times\}$, $\rho_0^+ = \{\sigma \circ \delta_\lambda \mid \lambda\bar{\lambda} = 1\}$, а $\rho_0^- = \varnothing$. Автоморфизмы σ и $\sigma \circ \delta_\lambda$ сопряжены автоморфизмом $\delta_{\sqrt{\lambda}}$.

б) $\rho_0 = \sigma \circ \mathrm{Ad}_{J_n}|_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}$ при четном n. Тогда $\tilde{\rho}_0 = \{\rho \circ \delta_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}^\times\}$, $\rho_0^+ = \{\rho \circ \delta_\lambda \mid \lambda\bar{\lambda} = 1\}$, $\rho_0^- = \varnothing$. Автоморфизмы ρ и $\rho \circ \delta_\lambda$ сопряжены автоморфизмом $\delta_{\sqrt{\lambda}}$.

Разберем теперь случай исключительных супералгебр.

7) $\mathfrak{g} = \mathfrak{ag}(2)$. Тогда $\mathfrak{g}_{\bar 0} = \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{g}(2)$, а $\mathfrak{g}_{\bar 1} = V \otimes W$, где V — тавтологический $\mathfrak{sl}(2)$-модуль, а W — неприводимый 7-мерный $\mathfrak{g}(2)$-модуль. У алгебры Ли $\mathfrak{g}(2)$, как известно (см. [ВиОн°]), имеются две неэквивалентные вещественные структуры: σ и τ, где τ — инволюция, задающая компактную вещественную форму алгебры Ли $\mathfrak{g}(2)$. Автоморфизмы σ и τ индуцируют антилинейные автоморфизмы второго порядка на $\mathfrak{g}$, поскольку σ^2 и τ^2 лежат в центре группы Ли G_2, а этот центр тривиальный. Из вышесказанного ясно, что для ρ_0 имеются 4 возможности:

а) $\rho_0 = \sigma|_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}$. Тогда $\tilde{\rho}_0 = \rho_0^+ = \{\rho \mid \rho \circ \delta_{-1}\}$ и $\rho_0^- = \varnothing$.

б) $\rho_0 = \tau|_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}$. Тогда $\tilde{\rho}_0 = \rho_0^+ = \{\rho \mid \rho \circ \delta_{-1}\}$ и $\rho_0^- = \varnothing$.

в) $\rho_0 = \sigma \circ \mathrm{Ad}_{J_2}|_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}$, где $J_2 \in \mathrm{SL}(2)$. Тогда $\tilde{\rho}_0 = \rho_0^- = \{\rho,\ \rho \circ \delta_{-1}\}$, $\rho_0^+ = \varnothing$.

г) $\rho_0 = \tau \circ \mathrm{Ad}_{J_2}|_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}$. Тогда $\tilde{\rho}_0 = \rho_0^- = \{\rho \mid \rho \circ \delta_{-1}\}$ и $\rho_0^+ = \varnothing$.

В случаях а) и б) автоморфизмы ρ и $\rho \circ \delta_{-1}$ сопряжены автоморфизмом $\mathrm{Add}_{(i,-i)} \in \mathrm{SL}(2)$, а в случаях в) и г) автоморфизмы ρ и $\rho \circ \delta_{-1}$ не сопряжены.

8) $\mathfrak{g} = \mathfrak{ab}(3)$. Тогда $\mathfrak{g}_{\bar 0} = \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{o}(7)$ и $\mathfrak{g}_{\bar 1} = V \otimes L^{\varphi_3}$. Пространство спинорного представления L^{φ_3} можно отождествить с алгеброй Грассмана $\Lambda(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Как известно (см. [ВиОн°]), у алгебры Ли $\mathfrak{o}(7)$ имеется 4 антилинейные инволюции, имеющих вид $\sigma \circ \alpha_p$, где $p = 0, \ldots, 3$, задающие вещественную форму $\mathfrak{o}(p, 7-p)$. Автоморфизмы α_p являются внутренними. Они индуцируют следующие преобразования пространства $\Lambda(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$:

$$\alpha_0(1) = \xi_1\xi_2\xi_3,\ \alpha_0(\xi_i) = \xi_j\xi_k,\ \ \alpha_0(\xi_j\xi_k) = \xi_i,$$

где (i, j, k) — циклическая перестановка символов 1, 2, 3,

$$\alpha_1(a) = (-1)^{p(a)} i\alpha_0(a) \ \text{ для любого } a \in \Lambda(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

$$\alpha_2(\xi_1) = \xi_2, \quad \alpha_2(\xi_2) = -\xi_1, \quad \alpha_2(1) = \xi_1\xi_2, \quad \alpha_2(\xi_1\xi_2) = -1,$$

$$\alpha_2(a \cdot \xi_3) = \alpha_2(a) \cdot \xi_3 \ \text{ для любого } a \in \Lambda(\xi_1, \xi_2);$$

$$\alpha_3 = \mathrm{id}\,.$$

У $\mathfrak{sl}(2)$ имеются две неэквивалентные инволюции: σ и $\sigma\circ\mathrm{Ad}_{J_2}$, поэтому всего для ρ_0 имеется восемь возможностей:

$$\rho_0=\sigma\circ(\alpha_p\times\mathrm{id}\,|_{\mathfrak{sl}(2)})\quad\text{или } \rho_0=\sigma\circ(\alpha_p\circ\mathrm{Ad}_{J_2}\,|_{\mathfrak{sl}(2)}).$$

Так что $\tilde\rho_0=\rho_0^+=\{\rho\mid\rho\circ\delta_{-1}\}$, если $\rho_0=\sigma\circ\alpha_0$, $\sigma\circ\alpha_3$, или $\sigma\circ\alpha_1\circ\mathrm{Ad}_{J_2}$ или $\sigma\circ\alpha_2\circ\mathrm{Ad}_{J_2}$. В остальных четырех случаях $\tilde\rho_0=\rho_0^-=\{\rho\mid\rho\circ\delta_{-1}\}$.

Осталось выяснить, когда ρ и $\rho\circ\delta_{-1}$ сопряжены. Если $\rho=\sigma\circ\alpha_i$, то ρ и $\rho\circ\delta_{-1}$ сопряжены автоморфизмом $\mathrm{Add}_{(i,-i)}$. Если $\rho=\sigma\circ\mathrm{Ad}_{J_2}\circ\alpha_3$, то автоморфизмы ρ и $\rho\circ\delta_{-1}$ сопряжены автоморфизмом α_1, продолженым на всю супералгебру Ли $\mathfrak{g}$.

Если $\rho=\sigma\circ\mathrm{Ad}_{J_2}\circ\alpha_1$, то автоморфизмы ρ и $\rho\circ\delta_{-1}$ сопряжены автоморфизмом α_0.

Если $\rho=\sigma\circ\mathrm{Ad}_{J_2}\circ\alpha_2$, то автоморфизмы ρ и $\rho\circ\delta_{-1}$ сопряжены автоморфизмом γ, ограничение которого на L^{φ_3} следующее:

$$\gamma(a)=(-1)^{p(a)}ia\quad\text{для любого } a\in\Lambda(\xi_1,\,\xi_2,\,\xi_3).$$

Если $\rho=\sigma\circ\mathrm{Ad}_{J_2}\circ\alpha_0$, то автоморфизмы ρ и $\rho\circ\delta_{-1}$ не сопряжены, поскольку ограничения автоморфизмов α_0 и $-\alpha_0$ на L^{φ_3} не сопряжены даже в $\mathrm{O}(8)$.

9) $\mathfrak{g}=\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$. Тогда либо $\rho_0=\sigma\circ\varphi$, где φ — внутренний автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar 0}$, либо $\rho_0=\sigma\circ d_{ij}\circ\varphi$, где d_{ab} — перестановка a-го и b-го прямых слагаемых в $\mathfrak{g}_{\bar 0}$.

Если $\rho_0=\sigma\circ\varphi$, то $\alpha\in\mathbb{R}$, а $\varphi=(\mathrm{Ad}^{(1)}_{J_2})^{k_1}\circ(\mathrm{Ad}^{(2)}_{J_2})^{k_2}\circ(\mathrm{Ad}^{(3)}_{J_2})^{k_3}$, где $k_i=0$ или 1, а $\mathrm{Ad}^{(a)}_X\in\mathrm{Aut}\,\mathfrak{sl}_a(2)$. Тогда

$$\tilde\rho_0=\{\rho_0,\,\rho_0\circ\delta_{-1}\}=\begin{cases}\rho_0^+, & \text{если } k_1+k_2+k_3 \text{ четно,}\\ \rho_0^-, & \text{если } k_1+k_2+k_3 \text{ нечетно.}\end{cases}$$

Автоморфизмы ρ и $\rho\circ\delta_{-1}$ сопряжены автоморфизмом $\mathrm{Ad}^{(a)}_{J_2}$, при $k_a\neq 0$. Если $k_1=k_2=k_3=1$, то ρ и $\rho\circ\delta_{-1}$ не сопряжены.

Пусть $\rho_0=\sigma\circ d_{ab}\circ\varphi$. Это возможно только, если $\rho_0=\sigma\circ d_{ab}$ продолжается до автоморфизма ρ супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $\rho(v)=\lambda\rho_0(v)$ для любого $v\in\mathfrak{g}_{\bar 1}$. Из условия $[\rho(v),\,\rho(w)]=\rho([v,\,w])$ следует, что $\lambda=\pm1$. Отсюда $\bar\alpha=-1-\alpha$. Ясно, что возможны два случая: (1) $\varphi=\mathrm{id}$, и (2) $\mathrm{Ad}^{(c)}_{J_2}$, где $\{a,\,b,\,c\}=\{1,\,2,\,3\}$.

В первом случае $\tilde\rho_0=\{\rho_0,\,\rho_0\circ\delta_{-1}\}=\rho_0^+$, а во втором $\tilde\rho_0=\{\rho_0,\,\rho_0\circ\delta_{-1}\}=\rho_0^-$. Автоморфизмы ρ_0 и $\rho_0\circ\delta_{-1}$ сопряжены автоморфизмом $\mathrm{Add}^{(c)}_{(i,-i)}\in\mathrm{SL}_1(2)$ в первом случае и не сопряжены во втором случае.

3.5. Перейдем к случаю, когда $\mathfrak{g}$ — одна из супералгебр Ли векторных полей. Пусть $\mathrm{Aut}_0\,\mathfrak{g}$ — множество всех автоморфизмов (линейных и антилинейных), сохраняющих стандартную градуировку в $\mathfrak{g}$ (в $\mathfrak{g}_{\bar 0}$, если $\mathfrak{g}=\widetilde{\mathfrak{svect}}(2n)$). Пусть $\mathrm{Re}_{sg}\,\mathfrak{g}$ — множество вещественных (кватернионных) структур супералгебры $\mathfrak{g}$, сохраняющих стандартную градуировку. Благодаря лемме 3.4а достаточно описать все классы эквивалентности вещественных структур в $\mathrm{CLRe}(\mathfrak{g})$.

Пусть $\widetilde{\mathrm{Aut}}\,\mathfrak{g}_{\bar 0}$ — группа всех автоморфизмов (линейных и антилинейных) алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar 0}$, а $\mathrm{CLRe}(\mathfrak{g}_{\bar 0})$ — множество антилинейных инволюций алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar 0}$. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\mathrm{pr}\colon\ \mathrm{Aut}_0\,\mathfrak{g}\to\widetilde{\mathrm{Aut}}\,\mathfrak{g}_{\bar 0}$. Тогда, во-первых, $\mathrm{pr}(\mathrm{CLRe}(\mathfrak{g}))\subseteq\mathrm{CLRe}(\mathfrak{g}_{\bar 0})$, а во-вторых, $\mathrm{Ker}\,\mathrm{pr}=\{\delta_\lambda\mid\lambda\in\mathbb{C}^\times\}$, если $\mathfrak{g}=\mathfrak{vect}$, $\mathfrak{svect}$ или $\mathfrak{h}'$, и $\mathrm{Ker}\,\mathrm{pr}=\{\delta,\,\delta_{-1}\}$, если $\mathfrak{g}=\widetilde{\mathfrak{svect}}(2n)$.

Лемма. а) *Для любого* $\rho\in\mathrm{CLRe}(\mathfrak{g})_0$ *либо* $\mathrm{pr}^{-1}(\rho)\cap\mathrm{Re}_{sg}\,\mathfrak{g}\neq\varnothing$, *либо* $\mathrm{pr}^{-1}(\rho)=\varnothing$.

б) *Если* $\rho_1\sim\rho_2$, *то* $\mathrm{pr}(\rho_1)\sim\mathrm{pr}(\rho_2)$.

Доказательство. а) Пусть $\rho'\in\mathrm{pr}^{-1}(\rho)$. Тогда $(\rho')^2=\delta_\lambda$, причем $\lambda=\pm1$ для $\mathfrak{g}=\widetilde{\mathfrak{svect}}(2n)$. Поэтому п. а) доказан для $\widetilde{\mathfrak{svect}}(2n)$.

Пусть $\mathfrak{g}\neq\widetilde{\mathfrak{svect}}(2n)$. Тогда $\lambda\in\mathbb{R}$, поскольку $\rho'\delta_\lambda=\delta_\lambda\rho'$. Тогда $\rho'':=\rho'\circ\delta_{\sqrt{|\lambda|}}\in\mathrm{pr}^{-1}(\rho)$ является вещественной структурой супералгебры Ли $\mathfrak{g}$.

б) очевидно, так как pr — гомоморфизм. ☐

$\mathfrak{g}=\mathfrak{vect}(n)$ или $\mathfrak{svect}(n)$. По лемме 3.5 автоморфизм $\rho\in\mathrm{CLRe}(\mathfrak{g})_0$ эквивалентен автоморфизму $\sigma\circ\delta_\lambda$ (или $\sigma\circ\mathrm{Ad}_{J_n}\circ\delta_\lambda$, если $n=2k$), причем $|\lambda|=1$. Так как ρ и $\rho\circ\delta_\lambda$, где $|\lambda|=1$, сопряжены автоморфизмом $\delta_{\sqrt{\lambda}}$, то у $\mathfrak{vect}(n)$ имеется две вещественные структуры: вещественная форма и кватернионная структура.

$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}'(n)$. По лемме 3.5 имеем $\rho\sim\sigma\circ\mathrm{Add}_{(1_k,\,-1_{n-k})}\circ\delta_\lambda$, где $k<\left[\frac{n+1}{2}\right]$, а если n четно, то возможно также, что $\rho\sim\sigma\circ\mathrm{Ad}_{J_n}\circ\delta_\lambda$, причем $|\lambda|=1$. Так же, как в случае $\mathfrak{g}=\mathfrak{vect}(n)$, автоморфизмы ρ и $\rho\circ\delta_\lambda$, где $|\lambda|=1$, сопряжены. Поэтому все неэквивалентные структуры в $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}'(n)$ описываются автоморфизмами $\sigma\circ\mathrm{Add}_{(1_k,\,1_{n-k})}$, где $k<\left[\frac{n+1}{2}\right]$, и $\sigma\circ\mathrm{Ad}_{J_{n/2}}$ для четного n.

$\mathfrak{g}=\widetilde{\mathfrak{svect}}(2n)$, $\rho\in\mathrm{CLRe}(\mathfrak{g})_0$. По лемме 3.5 структура, заданная автоморфизмом ρ, эквивалентен одной из структур, заданных автоморфизмами

$$\sigma,\quad \sigma\circ\delta_{-1},\quad \sigma\circ\mathrm{Ad}_{J_{2n}},\quad \sigma\circ\mathrm{Ad}_{-J_{2n}}\,.$$

Если $n=2k$, то σ и $\sigma\circ\delta_{-1}$ сопряжены автоморфизмом $\mathrm{Ad}_{i\cdot 1_{2n}}$. При $n=2k+1$ автоморфизмы σ и $\sigma\circ\delta_{-1}$ сопряжены автоморфизмом $\mathrm{Add}_{(-i,\,i\cdot 1_n)}$.

Теорема 3.3 доказана. ☐

§ 4. Классификация простых супералгебр петель

4.1. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— простая конечномерная супералгебра Ли,* φ *— ее автоморфизм порядка* k.

а) *Скрученная супералгебра петель* $\mathfrak{g}^{(k)}_\varphi$ *не содержит нетривиальных однородных относительно* $\mathbb{Z}$*-градуировки идеалов.*

б) *Пусть* φ_1, φ_2 *— автоморфизмы супералгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *порядков* k_1 *и* k_2 *соответственно. Если* $\varphi_1\varphi_2^{-1}\in\mathrm{Aut}^\circ\mathfrak{g}$, *то* $\mathfrak{g}^{(k_1)}_{\varphi_1}\cong\mathfrak{g}^{(k_2)}_{\varphi_2}$.

в) *В таблице Д5.6 перечислены все попарно неизоморфные простые супералгебры петель вида* $\mathfrak{g}^{(k)}_\varphi$.

Доказательство. Пусть $I=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}}I_j\otimes t^j$, где $I_j\subseteq\ \mathfrak{g}_j$, — однородный идеал в $\mathfrak{g}^{(k)}_\varphi$. Для каждого $m\in\mathbb{Z}$ рассмотрим $I^{(m)}=\bigoplus\limits_{0\leqslant j\leqslant k-1}I_{mk+j}$. Очевидно, что $I^{(m)}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, и $I^{(p)}=[\mathfrak{g},\,I^{(q)}]$. Так как $\mathfrak{g}$ — проста, то $I^{(0)}=\mathfrak{g}$ или $\{0\}$.

4.1а. Утверждение. *Если* φ_1, $\varphi_2\in\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ *сопряжены, то* $\mathfrak{g}^{(k_1)}_{\varphi_1}\cong\mathfrak{g}^{(k)}_{\varphi_2}$.

4.1б. Лемма. *Пусть* φ_1, $\varphi_2\in\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$, $\mathrm{ord}\,\varphi_i=k_i$, *где* $i=1,\,2$, *а* $\varphi_2\varphi_1^{-1}=\exp g$ *для некоторого* $g\in\mathfrak{der}\,\mathfrak{g}$, *и* $\varphi_1 g\varphi_1^{-1}=g$. *Тогда* $\mathfrak{g}^{(k_1)}_{\varphi_1}\cong\mathfrak{g}^{(k_2)}_{\varphi_2}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}_j=\left\{h\in\mathfrak{g}\mid g(h)=\frac{2\pi j\sqrt{-1}}{k_1k_2}h\right\}$. Так как $\exp g=\varphi_2\varphi_1^{-1}$, то $(\exp g)^{k_1k_2}=1$, и, следовательно, $\mathfrak{g}=\bigoplus\limits_{0\leqslant j\leqslant k_1k_2-1}\mathfrak{g}_j$. Рассмотрим функцию $\varphi(t)$ на окружности со значениями в группе $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$, заданную формулой:

$$\varphi(t)=\exp(k_1k_2a\cdot g),\quad\text{где } t=e^{ia}, \text{ а } a\in S.$$

Таблица Д5.6. **Супералгебры Ли $\mathfrak{g}_\varphi^{(m)}$ и суперпространства $\mathfrak{g}_i$, где $0\leqslant i\leqslant m-1$**

Все однородные компоненты $\mathfrak{g}_i$ описаны как $\mathfrak{g}_0$-модули, а $S_0^2(V)$ — подмодуль коразмерности 1 в $\mathfrak{osp}(m|2n)=\mathfrak{osp}_B(V)$-модуле $S^2(V)$, выделенный условием $\mathrm{str}(BX)=0$, где $X\in S^2(V)$.

$\mathfrak{g}$	φ	$\mathfrak{g}_0$	$\mathfrak{g}_1$	$\mathfrak{g}_2$	$\mathfrak{g}_3$
$\mathfrak{g}$	id	$\mathfrak{g}$	—	—	—
$\mathfrak{sl}(2m\|2n)$	$\mathrm{Ad}_{B_{2m,2n}}\circ(-\mathrm{st})$	$\mathfrak{osp}(2m\|2n)$	$S_0^2(\mathrm{id})$	—	—
$\mathfrak{sl}(2m+1\|2n)$	$\mathrm{Ad}_{B_{2m+1,2n}}\circ(-\mathrm{st})$	$\mathfrak{osp}(2m+1\|2n)$	$\Pi(\mathrm{id})$	$S^2(\mathrm{id})$	$\Pi(\mathrm{id})$
$\mathfrak{psl}(2n\|2n)$	$\mathrm{Ad}_{B_{2n,2n}}\circ(-\mathrm{st})$	$\mathfrak{osp}(2n\|2n)$	$S_0^2(\mathrm{id})/\mathbb{C}\langle\bar{1}\rangle$	—	—
$\mathfrak{psl}(n\|n)$ при $n>2$	Π	$\mathfrak{pq}(n)$	ad^*	—	—
$\mathfrak{psl}(n\|n)$ при $n>2$	$\Pi\circ(-\mathrm{st})$	$\mathfrak{spe}(n)$	ad^*	—	—
$\mathfrak{osp}(2m\|2n)$	$\mathrm{Ad}_{T_{m,n}}$	$\mathfrak{osp}(2m-1\|2n)$	id	—	—
$\mathfrak{osp}_\varepsilon(4\|2)$, где $\varepsilon=\varepsilon_3$	per	$\mathfrak{osp}(1\|2)$	$\Pi(E^3(\mathrm{id}))$	id	—
$\mathfrak{psq}(n)$ при $n>2$	q	$\mathfrak{o}(n)$	$\Pi(S^2(\mathrm{id})/\mathbb{C}\langle\bar{1}\rangle)$	$S^2(\mathrm{id})$	$\Pi(E^2(\mathrm{id}))$
$\mathfrak{psq}(n)$ при $n>2$	δ_{-1}	$\mathfrak{sl}(n)$	$\Pi(\mathrm{ad})$	—	—
$\mathfrak{h}'(2n)$ при $n>2$	$\mathcal{A}$	$\mathfrak{h}(2n-1)$	ad^*	—	—

Тогда

$$\varphi(t)(h)=t^jh \quad \text{для любого } h\in\mathfrak{g}_j.$$

Отсюда ясно, что $\varphi(t)\in C[t,\,t^{-1}]\otimes\mathrm{End}\,\mathfrak{g}$. Тогда $\varphi(t)$ определяет автоморфизм φ супералгебры Ли $\mathfrak{g}^{(1)}$ формулой:

$$\varphi(g\otimes f)=\varphi(t)(g)\otimes f.$$

Рассмотрим в $\mathfrak{g}^{(1)}$ две подалгебры ($j=1,\,2$):

$$\mathfrak{g}_j=\{f\in\mathfrak{g}^{(1)}\mid f(\varepsilon t)=\varphi_j(f(t))\},\quad \text{где } \varepsilon=e^{2\pi j\sqrt{-1}/k_1k_2}.$$

Очевидно, что $\mathfrak{g}_1\cong\mathfrak{g}_{\varphi_1}^{(k_1)}$, $\mathfrak{g}_2\cong\mathfrak{g}_{\varphi_2}^{(k_2)}$. С другой стороны, легко проверить, что $\varphi(\mathfrak{g}_1)=\mathfrak{g}_2$ и $\varphi^{-1}(\mathfrak{g}_2)=\mathfrak{g}_1$. Поэтому $\mathfrak{g}_1\cong\mathfrak{g}_2$. □

4.2. Напомним, что G — подгруппа автоморфизмов векторной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, сохраняющая градуировку (для $\mathfrak{g}=\tilde{\mathfrak{s}}\mathfrak{vect}(n)$ — градуировку четной части).

Предложение. *Пусть $\mathfrak{g}$ — векторная супералгебра Ли, φ — ее автоморфизм конечного порядка. Тогда существует $\Psi\in\mathrm{Aut}^\circ\mathfrak{g}$, такой что $\Psi^{-1}\varphi\Psi\in G$.*

Доказательство. В силу лемм 4.1а и 4.1б всякий автоморфизм $\varphi\in\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ продолжается до автоморфизма супералгебры Ли $\mathfrak{vect}(n)$, содержащей $\mathfrak{g}$. Пусть

$$\mathcal{Z}=\sum\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi_i},\qquad \mathcal{Z}'=\frac{1}{\mathrm{ord}\,\varphi}\sum_{p=1}^{\mathrm{ord}\,\varphi}\varphi^p(\mathcal{Z}).$$

Так как φ сохраняет фильтрацию, то $a=\mathcal{Z}'-\mathcal{Z}\in\mathfrak{vect}(n)_{(2)}$.

$\mathfrak{g}$ не из серии $\tilde{\mathfrak{s}}\mathfrak{vect}$. Тогда $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}'\in\mathfrak{der}\,\mathfrak{g}$, а, значит, и $a\in\mathfrak{der}\,\mathfrak{g}$. Тогда $a\in\mathfrak{der}\,\mathfrak{g}_{(i)}$, где $i\geqslant2$, и $\exp a(\mathcal{Z})-\mathcal{Z}'\in\mathfrak{der}\,\mathfrak{g}_{(i+2)}$. Так как фильтрация супералгебры Ли $\mathfrak{der}\,\mathfrak{g}$ конечна, получаем, используя индукцию по степени $\deg a$, что найдется $\Psi\in\mathrm{Exp}\,\mathfrak{der}\,\mathfrak{g}_{(2)}$, такой что $\Psi(\mathcal{Z})=\mathcal{Z}'$. Так как $\varphi(\mathcal{Z}')=\mathcal{Z}'$, то $\Psi^{-1}\varphi\Psi(\mathcal{Z})=\mathcal{Z}$. Следовательно, $\Psi^{-1}\varphi\Psi$ сохраняет градуировку, то есть лежит в G.

$\mathfrak{g}=\tilde{\mathfrak{s}}\mathfrak{vect}(n)$. Тогда $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}\simeq\mathrm{Aut}\,\mathfrak{svect}(n)$, причем $\mathfrak{der}\,\mathfrak{g}_{(2)}\simeq\mathfrak{der}\,\mathfrak{svect}(n)_{(2)}$ (см. теорему 2.1). Следовательно, предложение верно и в случае $\mathfrak{g}=\tilde{\mathfrak{s}}\mathfrak{vect}(n)$. □

4.3. Предложение. *Пусть φ_1 и φ_2 — автоморфизмы конечного порядка простой конечномерной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, такие что $\varphi_1\varphi_2^{-1}\in\mathrm{Aut}^\circ\mathfrak{g}$. Тогда существует автоморфизм $\Psi\in\mathrm{Aut}^\circ\mathfrak{g}$, для которого*

$$\Psi\varphi_1\Psi^{-1}=\varphi_2\circ\exp\tau\quad \textit{для некоторого } \tau\in(\mathfrak{der}\,\mathfrak{g})_{\bar0},\ \textit{такого что } \varphi_2\tau\varphi_2^{-1}=\tau.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\mathfrak{g}_{\bar0}$ — редуктивная алгебра Ли. Тогда в силу следствия 2.1 группа $\mathrm{Aut}^\circ\mathfrak{g}$ редуктивна. Ее алгебра Ли, очевидно, есть $(\mathfrak{der}\mathfrak{g})_{\bar0}$, которая также редуктивна. Пусть $(\bar{\mathfrak{d}}\mathfrak{er}\mathfrak{g})_{\bar0}$ — максимальная полупростая подалгебра в $(\mathfrak{der}\mathfrak{g})_{\bar0}$. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\varkappa\colon\ \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}\to\mathrm{Aut}(\mathfrak{der}\mathfrak{g})_{\bar0}$. Отметим, что $\mathrm{Ker}\,\varkappa=Z$, где Z — централизатор группы $\mathrm{Aut}^\circ\mathfrak{g}$. Из явного описания группы $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ (следствие 2.1) следует, что либо $Z=\{\delta_\lambda\mid\lambda\in\mathbb{C}^\times\}$, либо $Z=\{\mathrm{id},\,\delta_{-1}\}$. Пусть $\mathfrak{h}_i$ — подалгебра Картана в $(\bar{\mathfrak{d}}\mathfrak{er}\mathfrak{g})_{\bar0}$, инвариантная относительно $\varkappa(\varphi_i)$, где $i=1,\,2$. Тогда, как известно (см. [ВиОн°]), автоморфизм $\varkappa(\varphi_i)$ представим в виде

$$s_i\cdot\exp h_i\quad \text{для некоторого } h_i\in\mathfrak{h},\ \text{такого что } s_i(h_i)=h_i,$$

где s_i — автоморфизм, соответствующий симметрии графа Дынкина алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $\varphi\in\mathrm{Aut}^\circ(\mathfrak{der}\mathfrak{g})_{\bar0}$, такой что $\varphi(\mathfrak{h}_1)=\mathfrak{h}_2$. Тогда

$$\varphi\varkappa(\varphi_1)\varphi^{-1}=s_2\circ\exp\varphi(h_1),$$

Так как $\varkappa(\varphi_1)\varkappa(\varphi_2)^{-1}\in\mathrm{Aut}^\circ(\mathfrak{der}\,\mathfrak{g})_{\bar0}$, то $s_1=s_2$. Следовательно

$$\varphi\varkappa(\varphi_1)\varphi^{-1}=\varkappa(\varphi_2)\circ\exp h_0,\quad \text{где } h_0=\varphi(h_1)-h_2.$$

Так как $\varkappa(\mathrm{Aut}^\circ\mathfrak{g})=\mathrm{Aut}^\circ(\mathfrak{der}\mathfrak{g})_{\bar0}$, то найдется автоморфизм $\tilde\varphi\in\mathrm{Aut}^\circ\mathfrak{g}$, такой что $\varkappa(\tilde\varphi)=\varphi$. Тогда, очевидно,

$$\tilde\varphi\varphi_1\tilde\varphi^{-1}=\varphi_2\circ\exp h_0\circ\mathcal{Z}\quad \text{для некоторого } \mathcal{Z}\in Z\cap\mathrm{Aut}^\circ\mathfrak{g}.$$

Пусть $Z=\{\delta_\lambda\}$. Тогда произвольный элемент $\mathcal{Z}\in Z$ представим в виде $\mathcal{Z}=\exp h_{\mathcal{Z}}$ для некоторого $h_{\mathcal{Z}}\in(\mathfrak{der}\mathfrak{g})_{\bar0}$, причем $\varphi_2(h_{\mathcal{Z}})=\pm h_{\mathcal{Z}}$.

$$\Psi=\begin{cases}\tilde\varphi\circ\exp(h_{\mathcal{Z}}/2), & \text{где } h=h_0,\quad \text{если } \varphi_2(h_{\mathcal{Z}})=-h_{\mathcal{Z}},\\ \tilde\varphi, & \text{где } h=h_0+h_{\mathcal{Z}},\quad \text{если } \varphi_2(h_{\mathcal{Z}})=h_{\mathcal{Z}},\end{cases}$$

Пусть $Z\cap\mathrm{Aut}^\circ\mathfrak{g}=\{1,\,\delta_{-1}\}$. Тогда нетривиален только случай $\mathcal{Z}=\delta_{-1}$. Но в этом случае непосредственная проверка всех возможностей ($\mathfrak{osp}(m|2n)$, $\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$, $\mathfrak{ag}(2)$, $\mathfrak{ab}(3)$, $\mathfrak{psl}(2|2)$) показывает, что $\mathcal{Z}$ представим в виде $\exp h_{\mathcal{Z}}$ с теми же условиями, что и в предыдущем случае.

Перейдем к случаю, когда $\mathfrak{g}$ — супералгебра векторных полей. В силу предложения 4.2 без ограничения общности можно считать, что φ_1, $\varphi_2\in G$. Определим естественный гомоморфизм $\varkappa\colon\ G\to\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}_0$, как ограничение автоморфизма супералгебры $\mathfrak{g}$ на ее четную часть. Пусть $Z:=\mathrm{Ker}\,\varkappa$. Очевидно, что

$$Z=\begin{cases}\{\delta_\lambda\mid\lambda\in\mathbb{C}^\times\}, & \text{если } \mathfrak{g}\neq\tilde{\mathfrak{s}}\mathfrak{vect}(n),\\ Z=\{\delta_{\sqrt[n]{1}}\}\cong\mathbb{Z}/n, & \text{если } \mathfrak{g}=\tilde{\mathfrak{s}}\mathfrak{vect}(n).\end{cases}$$

Кроме того, очевидно, что $\varkappa(G^\circ)=\mathrm{Aut}^\circ\mathfrak{g}_0$, где G° — связная компонента единицы группы G. Рассуждения точно такие же, как в случае супералгебр с редуктивной четной частью, показывают, что найдутся h_0 из подалгебры Картана в $\mathfrak{g}_0$, и $\tilde\varphi\in G^\circ$ и $\mathcal{Z}\in Z$, такие что

$$\tilde\varphi\varphi_1\tilde\varphi^{-1}=\varphi_2\circ\exp h_0\circ\mathcal{Z}\quad \text{и}\quad \varphi_2(h_0)=h_0.$$

Случай $Z=\{\delta_\lambda\mid\lambda\in\mathbb{C}^\times\}$ уже был разобран выше для супералгебр с редуктивной четной частью.

Если $\mathfrak{g}=\tilde{\mathfrak{s}}\mathfrak{vect}(n)$, то $\varphi_2\in\mathrm{Exp}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}$. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}_0$, такая что

$$\varphi_2(h)=h\quad \text{для любого } h\in\mathfrak{h}.$$

Тогда найдется элемент $h_{\mathcal{Z}}\in\mathfrak{h}$, такой что $\mathcal{Z}=\exp h_{\mathcal{Z}}$. Предложение доказано. □

Утверждение б) теоремы следует из лемм 4.1а и 4.1б и предложения 4.2.

Таблица Д5.7. **Описание группы $\mathbf{Aut}\,\mathfrak{g}/\,\mathbf{Aut}^\circ\,\mathfrak{g}$**

$\mathfrak{g}$	$\mathrm{Aut}^\circ\,\mathfrak{g}$	$\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\,\mathrm{Aut}^\circ\,\mathfrak{g}$
$\mathfrak{sl}(m\vert n)$	$\mathrm{GL}(m)\times\mathrm{GL}(n)/(\mathbb{C}^\times\times\langle 1_m\times 1_n\rangle)$	$\mathbb{Z}/2=\langle\bar{-}\mathrm{st}\rangle$
$\mathfrak{psl}(n\vert n)$, где $n>2$	$\mathrm{GL}(n)\times\mathrm{GL}(n)/(\mathbb{C}^\times\times\langle 1_n\times 1_n\rangle)$	$\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2=\langle\bar{-}\mathrm{st}\rangle\times\langle\bar{\Pi}\rangle$
$\mathfrak{psl}(2\vert 2)$	$\dfrac{\mathrm{SL}(2)\times\mathrm{SL}(2)\times\mathrm{SL}(2)}{\langle -1_2\times 1_2\times -1_2\rangle\times\langle 1_2\times -1_2\times -1_2\rangle}$	$\mathbb{Z}/2=\langle\bar{\Pi}\rangle$
$\mathfrak{osp}(2m+1\vert 2n)$	$\mathrm{SO}(2m+1)\times\mathrm{SP}(2n)$	$\{1\}$
$\mathfrak{osp}(2m\vert 2n)$	$\mathrm{SO}(2m\times\mathrm{SP}(2n)/\langle -1_{2m}\times -1_{2n}\rangle$	$\mathbb{Z}/2\cong\langle\bar{\mathrm{A}}\mathrm{d}_{T_{m,n}}\rangle$
$\mathfrak{psq}(n)$	$\mathrm{SL}(n)/\langle\sqrt[n]{1}\cdot 1_n\rangle$	$\mathbb{Z}/4\cong\langle\bar{q}\rangle$
$\mathfrak{spe}(n)$	$\mathrm{GL}(n)/\langle -1\rangle$	$\{1\}$
$\mathfrak{osp}_\alpha(4\vert 2)$	$\dfrac{\mathrm{SL}(2)\times\mathrm{SL}(2)\times\mathrm{SL}(2)}{\langle -1_2\times 1_2\times -1_2\rangle\times\langle 1_2\times -1_2\times -1_2\rangle}$	$\begin{cases}\{1\}, & \text{если } \alpha^3\neq 1,\\ \mathbb{Z}/3\cong\langle\bar{\mathrm{p}}\mathrm{er}\rangle, & \text{если } \alpha=\varepsilon_3\end{cases}$
$\mathfrak{ag}(2)$	$G_2\times\mathrm{SL}(2)$	$\{1\}$
$\mathfrak{ab}(3)$	$\mathrm{SL}(2)\times\mathrm{spin}_7\,/\langle -1_2\times -1_8\rangle$	$\{1\}$
$\mathfrak{vect}(n)$	$\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}=\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{vect}(n)_{\bar 0}})$	$\{1\}$
$\mathfrak{svect}(n)$	$\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{svect}(n)_{\bar 0}})\times\langle\delta_\lambda\rangle/\langle\sqrt[n]{1}\rangle$	$\{1\}$
$\mathfrak{h}'(2n+1)$	$\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}'(2n+1)_{\bar 0}})\times\langle\delta_\lambda\rangle$	$\{1\}$
$\mathfrak{h}'(2n)$	$\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}(2n)_{\bar 0}})\times\langle\delta_\lambda\rangle/\langle\delta_{-1}\rangle$	$\mathbb{Z}/2\cong\langle\bar{\mathcal{A}}\rangle$

4.4. В силу уже доказанного утверждения б) теоремы для перечисления всех, с точностью до изоморфизма, простых супералгебр петель достаточно перечислить все попарно неизоморфные супералгебры Ли вида $\mathfrak{g}^{(k)}_\varphi$, где $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная супералгебра, а φ — представитель класса смежности из $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\,\mathrm{Aut}^\circ\,\mathfrak{g}$. В табл. Д5.7 перечислены все такие супералгебры, кроме $\mathfrak{psq}(n)^{(4)}_{q^3}$ и $\mathfrak{osp}_\alpha(4|2)^{(3)}_{\mathrm{per}^2}$, см. лемму 4.1а. Осталось доказать, что никакие две из перечисленных в табл. Д5.6 супералгебр не изоморфны.

Лемма. *Пусть* $\mathfrak{g}^{(k)}_\varphi\cong\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}_\Psi$. *Тогда*

а) $(\mathfrak{g}_{\bar 0})^{(k)}_\varphi\cong(\tilde{\mathfrak{g}}_{\bar 0})^{(1)}_\Psi$;
б) $\dim\mathfrak{g}=\dim\tilde{\mathfrak{g}}$;
в) *если* $\varphi=\Psi=\mathrm{id}$, *то* $\mathfrak{g}\cong\tilde{\mathfrak{g}}$.

Доказательство. а) Так как $(\tilde{\mathfrak{g}}_{\bar 0})^{(1)}_\Psi\cong(\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}_\Psi)$, то утверждение а) очевидно.

б) Пусть $\sigma\colon\mathfrak{g}^{(k)}_\varphi\to\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}_\Psi$ — изоморфизм. Рассмотрим семейство гомоморфизмов $r_\tau\colon\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}_\Psi\to\to\tilde{\mathfrak{g}}$, заданных формулой $r_\tau(g\otimes t^i)=g\tau^i$ для любых $g\in\tilde{\mathfrak{g}}$, $\tau\in\mathbb{C}^\times$. Пусть $\mathrm{em}\colon\mathfrak{g}\hookrightarrow\mathfrak{g}^{(k)}_\varphi$ — линейное вложение, заданное формулой

$$\mathrm{em}(g)=g\cdot t^i\quad\text{для } g\in\mathfrak{g}_i.$$

Очевидно, что $\mathrm{em}\,|_{\mathfrak{g}_0}$ — гомоморфизм. Так как $\mathfrak{g}$ проста, то при некотором τ_0 отображение $r_\tau\circ\sigma\circ\mathrm{em}$ не имеет ядра и осуществляет вложение $\mathfrak{g}\hookrightarrow\tilde{\mathfrak{g}}$. Тем самым $\dim\mathfrak{g}\geqslant\dim\tilde{\mathfrak{g}}$. Аналогично, $\dim\tilde{\mathfrak{g}}\geqslant\dim\mathfrak{g}$. Поэтому $\dim\mathfrak{g}=\dim\tilde{\mathfrak{g}}$.

в) В случае $\varphi=\Psi=\mathrm{id}$ отображение $r_{\tau_0}\circ\sigma\circ p$ является гомоморфизмом, что и доказывает в). ☐

Рассмотрим все возможные пары изоморфных супералгебр из табл. Д5.6 и учтем лемму 4.4. Таких пар только две: $\mathfrak{psq}(n)^{(1)}$ и $\mathfrak{psq}(n)^{(2)}_{\delta_{-1}}$, а также $\mathfrak{psl}(n|n)^{(2)}_\Pi$ и $\mathfrak{psl}(n|n)^{(2)}_{\Pi\circ(-\,\mathrm{st})}$. Докажем, что и в этих случаях изоморфизмов нет. Пусть, напротив, $\sigma\colon\mathfrak{g}^{(k_1)}_{\varphi_1}\to\mathfrak{g}^{(k_2)}_{\varphi_2}$ (изоморфизм в одном из этих двух случаев). Пусть $\alpha_\tau=r_\tau\circ\sigma\circ\mathrm{em}$ (обозначения такие же, как в доказательстве леммы 4.4 б)). Тогда

$$\alpha_\tau\in\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_0,\ \mathfrak{g}),\ \ \text{т. е.,}\ \alpha_\tau([g_0,\ g])=[\alpha_\tau(g_0),\ \alpha_\tau(g)]$$

при $g\in\mathfrak{g}$, $g_0\in\mathfrak{g}_0$, причем функция α_τ непрерывна по τ и $\alpha_\tau\not\equiv 0$. При этом $\alpha_\tau=\varphi_2\circ\alpha_{-\tau}$.

Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{psq}(n)$. Тогда $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}$, а

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_0,\ \mathfrak{g})=\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\ \mathfrak{g})=\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}\cup\{0\}.$$

Так как $\varphi_2=\delta_{-1}\notin\mathrm{Aut}^\circ\,\mathfrak{g}$, то либо α_τ и $\alpha_{-\tau}$ лежат в разных связных компонентах группы $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$, либо $\alpha_\tau=\alpha_{-\tau}=0$. В силу непрерывности функции α_τ, если $\alpha_\tau=0$ в некоторой точке $\tau\in S$, то $\alpha_\tau\equiv 0$. С другой стороны, α_τ и $\alpha_{-\tau}$ должны лежать в одной связной компоненте группы $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ опять же в силу непрерывности функции α_τ.

Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{psl}(n|n)$. Тогда $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{spe}(n)$, а $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_0,\ \mathfrak{g})$ — множество всех представлений супералгебры $\mathfrak{spe}(n)$ в пространстве V размерности $n|n$. Все эквивалентные друг другу представления образуют, как легко заметить, связную компоненту в $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_0,\ \mathfrak{g})$. Как известно, $\mathfrak{spe}(n)$ имеет только два неэквивалентных неприводимых $(n,\ n)$-мерных представления — V и $\Pi(V)$. Тем самым, α_τ и $\alpha_{-\tau}=\Pi\circ\alpha_\tau$ лежат в разных связных компонентах множества $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_0,\ \mathfrak{g})$, а это невозможно из-за непрерывности функции α_τ. Теорема 4.1 доказана. ☐

4.5. Нетривиальные центральные расширения супералгебр петель.

Утверждение. *Коцикл c, задающий нетривиальное центральное расширение супералгебры петель $\mathfrak{g}^{(m)}_\varphi$, можно получить одним из следующих двух способов (здесь $X,\ Y\in\mathfrak{g}^{(m)}_\varphi$):*

а) *Если B — инвариантная симметрическая невырожденная билинейная форма на $\mathfrak{g}$, то*

$$c_B(X,\ Y)=\mathrm{Res}_t\,B\Big(X,\ \frac{dY}{dt}\Big).\qquad\text{(Д5.12)}$$

б) *Если ω — инвариантная антисимметрическая билинейная форма на $\mathfrak{g}$, задающая ее нетривиальное центральное расширение, то у $\mathfrak{g}^{(m)}_\varphi$ имеется счетное множество нетривиальных центральных расширений*

$$c_i(X,\ Y)=t^i\omega(X,\ Y).\qquad\text{(Д5.13)}$$

На простых супералгебрах Ли с обратимой матрицей Картана, но с вырожденной формой Киллинга (например, на $\mathfrak{osp}(2n+2|2n)$), невырожденная симметрическая билинейная форма задается формой $\mathrm{str}(\rho_x\rho_y)$ в некотором неприводимом представлении ρ, отличном от присоединенного, например, в тавтологическом. На $\mathfrak{psl}(n|n)$ и $\mathfrak{h}'(n)$ невырожденная симметрическая билинейная форма задается ограничением формы в проективном

Таблица Д5.8. **Инвариантные билинейные формы на простых конечномерных супералгебрах Ли и их «родственницах»**

Нетривиальные центральные расширения

$\mathfrak{g}$	Форма	Имя расширения
$\mathfrak{psl}(2\mid 2)$	$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}A' & B'\\ C' & D'\end{pmatrix} \mapsto \begin{cases}\operatorname{tr}(CC')\\ \operatorname{tr}(BC'+CB')\\ \operatorname{tr}(BB')\end{cases}$	$\mathfrak{po}'(4)$ $\mathfrak{sl}(2\mid 2)$ $\mathfrak{po}'(4)$
$\mathfrak{psl}(n\mid n)$ при $n>2$	$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}A' & B'\\ C' & D'\end{pmatrix} \mapsto \operatorname{tr}(BC'+CB')$	$\mathfrak{sl}(n\mid n)$
$\mathfrak{psq}(n)$ при $n>2$	$(A, B), (A', B') \mapsto \operatorname{qtr}(BB')$	$\mathfrak{sq}(n)$
$\mathfrak{spe}(4)$	$\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A^t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}A' & B'\\ C' & -(A')^t\end{pmatrix} \mapsto \operatorname{tr}(CC')$ здесь $C=-C^t$, $C'=-(C')^t$	$\mathfrak{as}$
$\mathfrak{h}'(n)$ при $n>3$	$H_f, H_{f'} \mapsto \sum \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial f'}{\partial \xi_i}\right)\Big\vert_{\xi=0}$	$\mathfrak{po}'(n)$

Мы записываем элемент $X\in\mathfrak{psq}(n)$ парой матриц (A, B), где $A, B\in\mathfrak{gl}(n)$, имея ввиду, что $X=\begin{pmatrix}A & B\\ B & A\end{pmatrix}\in\mathfrak{q}(n)$, со скобкой, являющейся проекцией скобки в $\mathfrak{sq}(n)$ на $\mathfrak{psq}(n)$:

$$[(A, B), (A', B')] = ([A, A'] + [B, B']_+ - \frac{2}{n}\operatorname{tr}(BB')1_n, [A, B'] + [B, A']).$$

Симметрические невырожденные билинейные формы

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{ag}(2)$ $\mathfrak{ab}(3)$ $\mathfrak{osp}_\alpha(4\mid 2)$	$\mathfrak{gl}(n\mid n)$ $\mathfrak{sl}(m\mid n)$ при $m\neq n$ $\mathfrak{osp}(m\mid 2n)$ при $m\neq 2n+2$	$\mathfrak{q}(n)$	$\mathfrak{po}(0\mid n)$
Форма на $\mathfrak{g}$	$\operatorname{str}(\operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y)$	$\operatorname{str}(xy)$	$\operatorname{qtr}(xy)$	$\int(xy)\operatorname{vol}$

представлении, т. е. в представлении некоторого центрального расширения, в данных случаях — формами $\operatorname{str}(xy)$ и $\int(xy)\operatorname{vol}$ на $\mathfrak{sl}(n|n)$ и $\mathfrak{po}'(0|n)$, соответственно.

§ 5. Автоморфизмы и вещественные формы струнных супералгебр Ли

5.1. Введение. В статье [Сг4°] В. Серганова анонсировала описание внешних автоморфизмов и вещественных форм струнных супералгебр Ли и тех их нетривиальных центральных расширений, что были известны в 1984 году. Набросок доказательства препринтирован в [SoS*], №22-1988/4. Теперь, когда классификация простых струнных супералгебр Ли и их нетривиальных центральных расширений получена, см. [GLS1°] и главу Д3, можно закрыть проблему, рассмотрев струнные супералгебры и их нетривиальные центральные расширения, неизвестные В. Сергановой. Мы собираемся сделать это в отдельной статье.

Тот факт, что у окружности ТРИ класса сопряженности диффеоморфизмов порядка $\leqslant 2$ отражается на классификации вещественных форм супералгебр петель: этих форм тоже три типа, и один из них был не раз пропущен при классификации вещественных форм простых алгебр петель. Мы заметили это, сев описывать вещественные формы простых *супер*алгебр петель (см. [ЛСС°]), после чего естественно было заняться вплотную и струнными супералгебрами, см. [Сг4°].

5.1а. Супералгебры функций на суперокружности. Ниже $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, а $V=\operatorname{Span}(\theta)$. Пусть $R(n) := R_{\mathbb{K}}(n)$, где $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ — общее обозначение любой из следующих трех супералгебр:

$$F(n)=\mathbb{K}[x^{-1}, x, \theta], \quad F^c(n)=\mathbb{K}[x^{-1}, \theta][[x]], \quad \mathcal{F}(n)=C^\infty(S)\otimes\mathbb{K}[\theta]. \tag{Д5.14}$$

Мы рассматриваем функции из $C^\infty(S)$ как 2π-периодические функции из $C^\infty(\mathbb{R})$, где $a\in\mathbb{R}$, а переходя к их Фурье-образам, мы полагаем $x=e^{ai}$. В зависимости от изучаемой задачи мы будем различать три типа векторных полей, т. е. дифференцирований алгебр $R(n)$, в соответствии с (Д5.14). Элементы супералгебры Ли $\mathfrak{der}R(n)$ имеют при $R(n)=F(n)$ и $F^c(n)$ вид (при $R(n)=\mathcal{F}(n)$ надо заменить ∂_x на ∂_a)

$$D=f\partial_x+\sum f_i\partial_i, \quad \text{где } f, f_i\in R(n), \text{ а } \partial_i := \partial_{\theta_i}.$$

5.1б. Внутренние автоморфизмы. Любой автоморфизм супералгебры функций $R(n)$, т. е. любая обратимая замена переменных $\varphi\colon x\mapsto y$, индуцирует автоморфизм $\varphi_{\text{vect}}\colon D\mapsto D^\varphi$ супералгебры Ли $\mathfrak{der}\,R(n)$, где

$$D^\varphi f^\varphi := (Df)^\varphi, \quad \text{где } f^\varphi := f\circ\varphi^{-1}. \tag{Д5.15}$$

Описание автоморфизмов алгебр «функций» сильно зависит от типа этих «функций»; например описать автоморфизмы алгебры формальных степенных рядов от любого конечного числа переменных, а также алгебры многочленов от 1 или 2 переменных несложно, а вот у алгебры многочленов от $\geqslant 3$ переменных имеются «дикие» автоморфизмы, как недавно показали И. Шестаков и У. Умирбаев, доказав одну давнюю гипотезу. Чтобы не заботиться о таких тонкостях, А. Н. Рудаков предложил считать автоморфизмы алгебры Ли дифференцирований алгебры функций, заданные формулой (Д5.15) *внутренними*, см. [Руд°], и описывать то, что доступно описанию — *внешние автоморфизмы*, т. е. классы смежности по модулю группы внутренних автоморфизмов.

Вслед за А. Н. Рудаковым назовем автоморфизм ψ векторной супералгебры Ли, сохраняющей структуру (тензор) $\mathcal{S}$, *внутренним*, если ψ индуцирован автоморфизмом φ супералгебры функции $R(n)$, сохраняющим тензор $\mathcal{S}$ конформно, т. е. с точностью до множителя. Например, для супералгебры Ли $\mathfrak{k}^M(n)$, реализованной на пространстве $R^M(n)$ с контактной скобкой, можно описать внутренние автоморфизмы супералгебры Ли $\mathfrak{k}^M(n)$, как те, что индуцированы автоморфизмами φ супералгебры $R^M(n)$, такими что

$$\varphi(\hat{\alpha}) = h\hat{\alpha}, \quad \text{где} \ \ h \in (R^M(n))^\times.$$

Мы скажем, что автоморфизм ψ струнной супералгебры Ли является *внутренним*, если он имеет вид $\psi = \varphi_{\text{vect}}$, т. е. индуцирован автоморфизмом φ супералгебры функций $R(n)$, таким что (здесь $(R(n))^\times$ — группа обратимых элементов в $R(n)$)

$$\begin{aligned}
\varphi(x^\lambda \operatorname{vol}(x/\xi)) &= \mu x^\lambda \operatorname{vol}(x/\xi), && \text{где } \mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, && \text{если } \mathfrak{g} = \mathfrak{svect}^L_\lambda(n);\\
\varphi(\alpha_1) &= h\alpha_1, && \text{где } h \in (R(n))^\times, && \text{если } \mathfrak{g} = \mathfrak{k}^L(n);\\
\varphi(\hat{\alpha}) &= h\hat{\alpha}, && \text{где } h \in (R(n))^\times, && \text{если } \mathfrak{g} = \mathfrak{k}^M(n);\\
\varphi(\alpha_0) &= h\alpha_0, && \text{где } h \in (R(1))^\times, && \text{если } \mathfrak{g} = \mathfrak{m}(1).
\end{aligned}$$

Автоморфизмы (супер)алгебры Ли $\mathfrak{g}$ вида $\exp \operatorname{ad}_x$, где $x \in \mathfrak{g}$, такие что ad_x есть локально-нильпотентный оператор, обычно тоже называют *внутренними*. Чтобы различать два типа внутренних автоморфизмов, — те, что определены в начале пункта, от тех, что имеют вид $\exp \operatorname{ad}_x$ — последние назовем *алгебраическими*.

Наша цель в этом параграфе — описать автоморфизмы струнных супералгебр Ли по модулю внутренних автоморфизмов обоих типов.

5.2. Теорема. *Все автоморфизмы струнных супералгебр Ли серий* $\mathfrak{vect}^L$, $\mathfrak{svect}^L_\lambda$, $\mathfrak{k}^L$, $\mathfrak{k}^M$ *и исключительной* $\mathfrak{m}^L(1)$ — *внутренние.*

5.2а. Гипотеза. *Автоморфизмы исключительных супералгебр* $\mathfrak{k}^{L\prime}(4)$, $\mathfrak{k}^{M\prime}(5)$, $\mathfrak{kas}^L$ *индуцированы внутренними автоморфизмами супералгебр Ли* $\mathfrak{k}^L(4)$, $\mathfrak{k}^M(5)$, $\mathfrak{k}^L(1|6)$, *а автоморфизмы серийных супералгебр* $\mathfrak{svect}^{L\prime}_\lambda(1|n)$ *индуцированы внутренними автоморфизмами супералгебр Ли* $\mathfrak{svect}^L_\lambda(1|n)$ *за исключением* $\mathfrak{svect}^{L\prime}(1|2)$, *у которой есть дополнительный автоморфизм, см. табл.* Д3.10.

5.2б. Задача. Доказать эту гипотезу.

5.3. Доказательство теоремы 5.2.

5.3а. Лемма. *Все непрерывные автоморфизмы алгебры Ли* $\mathfrak{vect}^L(0)$ *индуцированы непрерывными автоморфизмами алгебры* $R(0)$.

Доказательство. Пусть $\Phi \in \operatorname{Aut} \mathfrak{vect}^L(0)$, $E = x\partial_x$ и $\Phi(E) = f(x)\partial_x$, а $\Phi(x^{k+1})\partial_x = g_k(x)\partial_x$. Так как $[E, x^{k+1}\partial_x] = kx^{k+1}\partial_x$, то

$$fg_k' - f'g_k = kg_k \quad \text{при любом } k \in \mathbb{Z}. \tag{Д5.16}$$

Мы рассмотрим два случая: гладкие функции и полиномы.

1) Пусть $R(0) = C^\infty(S)$. Из (Д5.16) мы выводим, что

$$\frac{fg_k' - f'g_k}{fg_k} = \frac{kg_k}{fg_k} \implies \frac{g_k'}{g_k} - \frac{f'}{f} = \frac{k}{f} \implies \left(\ln\left(\frac{g_k}{f}\right)\right)' = \frac{k}{f} \implies g_k = f \exp \int \frac{k}{f} dx.$$

Выберем значение интеграла $\int \frac{dx}{f}$ так, чтобы $g_1 = f \cdot g_0$, где $g_0 = \exp \int \frac{dx}{f}$. Тогда

$$g_k = c_k f \cdot g_0^k, \quad \text{где} \ \ c_1 = 1.$$

Так как $[x^{k+1}\partial_x, x^{m+1}\partial_x] = (m-k)x^{k+m+1}\partial_x$, то

$$g_k g_m' - g_m g_k' = (m-k)g_{k+m},$$

или

$$c_k c_m f(g_0^k f m g_0^{m-1} g_0' + g_0^{k+m} f' - g_0^m f k g_0^{k-1} g_0' - g_0^{k+m} f') = c_{k+m} f g_0^{k+m}.$$

Учитывая, что $g_0' = g_0 \cdot \frac{1}{f}$, получаем, что $c_k c_m = c_{k+m}$, откуда сразу следует, что $c_k = 1$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, т. е. $g_k = f g_0^k$.

Заметим, что подпространство $\operatorname{Span}(g_k\partial_x \mid k \in \mathbb{Z})$ плотно в $\mathfrak{vect}^L(0)$ и, следовательно, $f(x) \neq 0$ при всех x. Более того, ряды $\sum a_k x^{k+1}$ и $\sum a_k g_k$ сходятся или расходятся одновременно, а значит, $|g_0(x)| = 1$. Стало быть, отображение $x \mapsto g_0(x)$ переводит окружность S в себя и, кроме того, является инъективным, поскольку пространство $\operatorname{Span}(f g_0^k \mid k \in \mathbb{Z})$ плотно в $R(0)$. Значит, индекс этого отображения равен 1 или -1. Замена переменных $\varphi(x) = g_0(x)$ сохраняет коммутационные соотношения между векторными полями вида $x^{k+1}\partial_x$, т. е. индуцирует автоморфизм Φ алгебры $\mathfrak{vect}^L(0)$.

2) Для $R(0) = \mathbb{C}[x^{-1}, x]$ функции f и g_k являются полиномами Лорана. Пусть $N_k + 1$ — наибольшая, а $n_k + 1$ — наименьшая степени мономов, входящих в полином Лорана g_k, и пусть $N_0 + 1$ — наибольшая, а $n_0 + 1$ — наименьшая степени мономов, входящих в полином Лорана f. Так как функции f и g_k при $k \in \mathbb{Z}$ образуют базис в пространстве $\mathbb{C}[x^{-1}, x]$, то найдутся числа k_1 и k_2, такие что $N_{k_1} \neq N_0$ и $n_{k_2} \neq n_0$. Поэтому старший член левой части формулы (Д5.16) для $k = k_1$ имеет степень $N_0 + N_{k_1} + 1$, и значит, $N_0 = 0$, а младший член левой части формулы (Д5.16) для $k = k_2$ имеет степень $n_0 + n_{k_2} + 1$, и значит, $n_0 = 0$. Таким образом, $\Phi(E) = cE$, и раз спектры операторов ad_E и $\operatorname{ad}_{\Phi(E)}$ должны совпадать, то $c = \pm 1$.

Если $\Phi(E) = E$, то $\Phi(x^n\partial_x) = \lambda^{n-1}x^n\partial_x$, т. е. отображение Φ индуцировано заменой переменных $x \mapsto \lambda x$.

Если $\Phi(E) = -E$, то $\Phi(x^n\partial_x) = \lambda^{n-1}x^{2-n}\partial_x$, т. е. отображение Φ индуцировано заменой переменных $x \mapsto \lambda x^{-1}$. □

5.3б. На любой из вышеперечисленных струнных супералгебр $\mathfrak{g}$ определим фильтрацию, положив $\operatorname{fil}(f) = \min\{$степень монома-слагаемого в $f\}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \supset \mathfrak{g}_0 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_n, \quad \text{где} \ \deg \xi_i = 1, \ \deg x = 0. \tag{Д5.17}$$

Символом I обозначим идеал в алгебре Ли $\mathfrak{g}_{\bar 0}$, состоящий из элементов вида

$$\sum f_{ij}(x)\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j} + g, \quad \text{где } \operatorname{fil} g > 0. \tag{Д5.18}$$

Тогда $\mathfrak{g}_{\bar 0}/I \cong \mathfrak{vect}^L(0)$.

Лемма. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *одна из супералгебр*: $\mathfrak{svect}^L(n)$ *при* $n \geqslant 2$, *или* $\mathfrak{k}^L(n)$, *или* $\mathfrak{k}^M(n)$, *или* $\mathfrak{vect}^L(n)$. *Пусть* Φ — *автоморфизм супералгебры Ли* $\mathfrak{g}$. *Верны следующие утверждения*:

1) $\Phi(I) \subset I$;

2) *существует автоморфизм* $\Psi \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$, *индуцированный неким автоморфизмом* $\varphi \in \operatorname{Aut} R(n)$, *такой что* $\Psi^{-1}\Phi$ *индуцирует тождественный автоморфизм алгебры Ли* $\mathfrak{vect}^L(0) = \mathfrak{g}_{\bar 0}/I$;

3) *автоморфизм* Φ *сохраняет фильтрацию* (Д5.17).

Доказательство[1]. 1) Пусть

$$E = \begin{cases} x\partial_x & \text{для } \mathfrak{vect}^L(n), \\ x\partial_x - \dfrac{1+\lambda}{n}\sum \xi_i\partial_{\xi_i} & \text{для } \mathfrak{svect}^L_\lambda(n), \\ K^L_x & \text{для } \mathfrak{k}^L(n), \\ K^M_x & \text{для } \mathfrak{k}^M(n). \end{cases} \tag{Д5.19}$$

Для любого $k \in \mathbb{Z}$ существуют элементы $z_{k,a} \in \mathfrak{g}_{\bar 0}$ для некоторого множества индексов $a \in A$, такие что $[E,\, z_{k,a}] = kz_{k,a}$, а множество $\{z_{k,a}\}_{k\in\mathbb{Z},a\in A}$ является базисом (топологическим[2] в гладком случае) в I.

Во-первых, заметим, что любой элемент из идеала I либо нильпотентен (если его степень положительна), либо имеет конечный спектр. Стало быть, $\Phi(E) \notin I$.

Во-вторых, для любого элемента $z_{k,a} \notin I$ найдется элемент $z_{-k,b}$, такой что $[z_{k,a},\, z_{-k,b}] \equiv \mu E \pmod I$, где $\mu \neq 0$, и значит, $\Psi(z_{k,a}) \notin I$ для любого автоморфизма Ψ супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. В частности, это верно для $\Psi = \Phi^{-1}$, откуда следует включение $\Phi(z_{k,a}) \in I$ для любого элемента $z_{k,a} \in I$, т. е. $\Phi(I) \subset I$.

2) Пусть автоморфизм Φ индуцирует автоморфизм Φ' алгебры Ли $\mathfrak{vect}^L(0)$. По лемме 5.3а существует автоморфизм $\tilde\varphi \in \operatorname{Aut} R(0)$, который индуцирует автоморфизм Φ'. Пусть $\tilde\varphi(x) = f$. Продолжим автоморфизм $\tilde\varphi$ до автоморфизма $\tilde{\tilde\varphi} \in \operatorname{Aut} R(n)$, положив

$$\tilde{\tilde\varphi}(\xi_i) = \begin{cases} \left.\begin{matrix} \xi_i & \text{при } i \neq n, \\ (f')^{-1}\xi_n & \text{при } i = n, \end{matrix}\right\} & \text{если } \mathfrak{g} = \mathfrak{vect}^L(n) \text{ или } \mathfrak{svect}^L(n) \\ \sqrt{f'}\xi_i, & \text{если } \mathfrak{g} = \mathfrak{k}^L(n) \\ \left.\begin{matrix} \sqrt{f'}\xi_i & \text{при } i \neq n, \\ \sqrt{xf'f^{-1}}\,\xi_n & \text{при } i = n, \end{matrix}\right\} & \text{если } \mathfrak{g} = \mathfrak{k}^M(n). \end{cases} \tag{Д5.20}$$

Замечания. а) $(f')^{-1}$, $\sqrt{f'}$, $\sqrt{xf'f^{-1}} \in R(n)$.

б) Отображение Ψ, индуцированное отображением $\tilde{\tilde\varphi}$, является автоморфизмом супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, потому что в каждом из рассматриваемых случаев отображение $\tilde{\tilde\varphi}$ сохраняет структуру (объем или контактное распределение).

в) Отображение $\Psi^{-1}\Phi$ индуцирует тождественный автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar 0}/I$.

3) Так как фильтрация (Д5.17) определяется подалгеброй $\mathfrak{g}_0$ и условием

$$\mathfrak{g}_k = \{u\mathfrak{g} \mid [u,\, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_{k-1}\},$$

то достаточно показать, что $\Phi(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0$. Более того, поскольку $\mathfrak{g}_0$ является (непрямой) суммой подалгебр $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ и $\mathfrak{g}_1$, достаточно показать, что $\Phi(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_1$.

Пусть $u \in \mathfrak{g}_{\bar 1}$. Подалгебру в $\mathfrak{g}$, порожденную элементом u и идеалом I, обозначим I_u. Если $u \in \mathfrak{g}_1$, то $(I_u)_{\bar 0} \subset I$. Более того,

$$\text{если } \mathfrak{g}_2 \neq \{0\} \text{ и } u \notin \mathfrak{g}_1, \text{ то } (I_u)_{\bar 0} \not\subset I. \tag{Д5.21}$$

Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{vect}^L(n)$ или $\mathfrak{svect}^L(n)$, то нечетный элемент $u \in \mathfrak{g}_1$ имеет вид $u = \sum f_i(x)\partial_{\xi_i} + g$, где $\operatorname{fil} g > 0$, а идеал I содержит элементы $\xi_i\xi_j\partial_x$ (вот здесь мы используем тот факт, что $\mathfrak{g}_2 \neq 0$) и $\xi_i\partial_{\xi_i}$ для любых i, j. Если при этом $f_i \neq 0$, то младшая компонента коммутатора

---

[1] **Задача.** Модифицируйте рассуждение в п. 1) и формулу (Д5.20), чтобы учесть семейство $\mathfrak{svect}^L_\lambda(n)$.

[2] Семейство линейно независимых элементов $\{X_i\}_{i\in I}$ топологического суперпространства V называется его *топологическим базисом*, если линейная оболочка множества $\{X_i\}_{i\in I}$ плотна в V. Ясно, что для суперпространства с дискретной топологией любой топологический базис является базисом.

$[[[u,\, \xi_i\xi_j\partial_x],\, \xi_i\partial_{\xi_i}],\, u] \in I_u$ равна $f_i^2\partial_x$, а значит, сам коммутатор не лежит в $(I_u)_{\bar 0}$. Поскольку $\Phi(I) \subset I$ и $(\Phi(I_u))_{\bar 0} \subset (I_{\Phi(I_u)})_{\bar 0}$, это означает, что $\Phi(u) \notin \mathfrak{g}_1$ для любого автоморфизма Φ и любого нечетного элемента $u \notin \mathfrak{g}_1$. Аналогично рассуждению в п. 2 из этого уже можно сделать вывод[1], что $\Phi(u) \in \mathfrak{g}_1$ для любого элемента $u \in \mathfrak{g}_1$, т. е. $\Phi(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_1$.

Следовательно, если $u \in \mathfrak{g}_1$, то $\Phi(u) \in \mathfrak{g}_1$, поскольку $\Phi(I) \subset I$ и $(\Phi(I_u))_{\bar 0} \subset (I_{\Phi(u)})_{\bar 0}$. Легко проверить по индукции, что $\Phi(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}_i$.

Рассмотрим случай $\mathfrak{g}_2 = \{0\}$. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{svect}^{L\prime}(2)$ утверждение 3) выполняется, поскольку $\mathfrak{g}_1$ — единственный 1-мерный $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модуль. Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{vect}^L(1)$ см. в следующем предложении.

Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{vect}^L(1)$ или $\mathfrak{k}^L(1)$, или $\mathfrak{k}^L(2)$, или $\mathfrak{k}^M(1)$, или $\mathfrak{k}^M(2)$, то $\mathfrak{g}_1 = \{0\}$ и, следовательно, утверждение очевидно.

Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^L(3)$ или $\mathfrak{k}^M(3)$, то $\mathfrak{g}_1$ — единственный $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-подмодуль в $\mathfrak{g}_{\bar 1}$, поэтому $\Phi(\mathfrak{g}_1) \subset \mathfrak{g}_1$. □

5.3в. Лемма. *Пусть* $\Phi \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$. *Существует автоморфизм* $\varphi \in \operatorname{Aut} R(n)$, *такой что* $\varphi_{vect}\Phi = \mathrm{id} + \Phi_1$, *где* $\operatorname{fil} \Phi_1(b) > \operatorname{fil} b$ *для любого* $b \in \mathfrak{g}$.

Доказательство. (1) Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{vect}^L(n)$. По лемме 5.3б без ограничения общности можно предположить, что $\Phi|_{\mathfrak{vect}^L(0)} = \mathrm{id}$. Пусть

$$\Phi(\partial_{\xi_i}) = \sum_j p_i^j(x)\partial_{\xi_j} + D_i, \quad \Phi(\partial_x) = \partial_x + \sum_{i,j} s_j^i\xi_i\partial_{\xi_j} + D_0, \quad \text{где } \operatorname{fil} D_i > 0 \text{ при } i \geqslant 0.$$

Так как $[\Phi(\partial_{\xi_i}),\, \Phi(\partial_x)] = 0$, мы видим, что

$$P' - SP = 0, \quad \text{где } P = (p_i^j) \text{ и } S = (s_j^i), \text{ а } (P')_i^j = \partial_x(P_i^j).$$

Так что, $\det P \neq 0$, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{vect}^L(n)$ или $\mathfrak{svect}^L_\lambda(n)$, и $\det P = \mathrm{const}$, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{svect}^L(n)$.

Определим $\varphi \in \operatorname{Aut} R(n)$, положив $\varphi(\xi_j) = \sum\limits_i A_j^i\xi_i$, где $A = (P^t)^{-1}$, а $\varphi(x) = x$. Ясно, что $\varphi_{\mathrm{vect}} \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ и

$$\varphi_{\mathrm{vect}}^{-1}\Phi(\partial_{\xi_i}) = \partial_{\xi_i} + \Delta_i, \quad \varphi_{\mathrm{vect}}^{-1}\Phi(\partial_x) = \partial_x + \Delta_0, \quad \text{где } \operatorname{fil} \Delta_i > 0 \text{ при } i \geqslant 0.$$

Индукцией по $\operatorname{fil} D$ легко показать, что $\varphi_{\mathrm{vect}}^{-1}\Phi(D) = D + \widetilde{D}$, где $\operatorname{fil} \widetilde{D} > \operatorname{fil} D$, что и требовалось.

Ниже в случае (2) мы вместо K_f или K_f^M пишем f и пользуемся леммой 5.3б.

(2) Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^L(n)$, то предположим, что автоморфизм Φ таков, что

$$\Phi(1) = 1 + s_0, \quad \Phi(\xi_i) = \sum_j p_i^j\xi_j + s_i, \quad \text{где } \operatorname{fil} s_i > 0 \text{ при } i \geqslant 0.$$

Из соотношения $[\Phi(\xi_i),\, \Phi(\xi_j)] = \delta_{ij}\Phi(1)$ следует, что $PP^t = 1$, где $P = (p_i^j)$.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^M(n)$ реализована на суперпространстве $R^M(n) = R(n-1) \oplus R(n-1)\xi_n\sqrt{x}$ с контактной скобкой и сохраняет распределение, заданное контактной формой α. Положим

$$\Phi(1) = 1 + s_0, \quad \Phi(x) = x + X, \quad \Phi(\xi_i) = \sum_j p_i^j\xi_j + p_i^n\sqrt{x}\xi_n,$$

$$\Phi(\sqrt{x}\xi_n) = \sum_j p_n^j\xi_j + p_n^n\sqrt{x}\xi_n, \quad \text{где } i,\, j = 1,\, \ldots,\, n-1.$$

Из соотношений

$$[\Phi(\xi_i), \Phi(\xi_j)] = \delta_{ij}\Phi(1), \quad [\Phi(\xi_i), \Phi(\xi_n)] = 0, \quad [\Phi(\xi_n), \Phi(\xi_n)] = \Phi(x)$$

следует, что $PP^t = 1$, где $P = \begin{pmatrix} (p_i^j)_{i,j<n} & p_i^n\sqrt{x} \\ p_n^i\sqrt{x} & p_n^n\sqrt{x} \end{pmatrix}$.

---

[1] **Задача** Отчего утверждение (Д5.21) верно для контактных серий?

Рассмотрим теперь автоморфизм $\varphi \in \operatorname{Aut} R(n)$ (соотв. $\operatorname{Aut} R^M(n)$), заданный формулой

$$\varphi(x) = x, \quad \varphi(\xi_i) = \sum_j p_i^j \xi_j + s_i, \quad \text{где } \operatorname{fil} s_i > 1,$$

причем элементы $s_i \in R(n)$ (соотв. $R^M(n)$), выбраны так, что $\varphi(\alpha) = f\alpha$ для некоторой функции $f \in R(n)$ (соотв. $f \in R^M(n)$).

Осталось доказать существование таких элементов s_i. Пусть автоморфизм $\beta \in \operatorname{Aut} R(n)$ (соотв. $\operatorname{Aut} R^M(n)$) таков, что

$$\beta(x) = x, \quad \beta(\xi_i) = \sum_j p_i^j \xi_j \quad \text{при } 1 \leqslant i, \ j \leqslant n.$$

Тогда $\beta(\alpha) = \alpha + f dx$, где $\operatorname{fil} f = 2$. Выберем автоморфизм $\beta_1 \in \operatorname{Aut} R(n)$ (соотв. $\operatorname{Aut} R^M(n)$) так, что

$$\beta_1(x) = x, \quad \beta_1(\xi_i) = (1 + f)\xi_i.$$

Тогда

$$\beta_1\beta(\alpha) = (1 + f)\alpha + f_1 dx, \quad \text{где } \operatorname{fil} f_1 \geqslant 4.$$

Построив β_r таким образом, что

$$\beta_r(x) = x, \quad \beta_r(\xi_i) = (1 + f_r)\xi_i, \quad \text{где } \operatorname{fil} f_r > \operatorname{fil} f_{r-1},$$

мы получаем $\beta_n \circ \beta_{n-1} \circ \ldots \circ \beta_1 \circ \beta(\alpha) = \alpha$, что и требовалось. □

5.3г. Лемма. *Пусть* $\Phi \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ *и* $\Phi = \operatorname{id} + \Phi_1$, *где* $\operatorname{fil} \Phi_1(b) > \operatorname{fil} b$ *для любого* $b \in \mathfrak{g}$. *Тогда существуют элементы* $u_k \in \mathfrak{g}_k$, *такие что* $\Phi = \prod_{k \geqslant 1} \operatorname{Ad}_{u_k}$.

Доказательство. Положим $l(\Phi) := \operatorname{fil}(\Phi - \operatorname{id})$. Докажем, что

$$\Phi = \Phi_1 \circ \operatorname{Ad}_u, \quad \text{где } u \in \mathfrak{g}_{l(\Phi)} \text{ и } l(\Phi_1) > l(\Phi),$$

что очевидно докажет лемму. Докажем это для $\mathfrak{g} = \mathfrak{vect}^L(n)$ и $\mathfrak{svect}^L(n)$ (а для $\mathfrak{k}^L$ и $\mathfrak{k}^M$ доказательство аналогично). Пусть для единообразия обозначений $\xi_0 := x$. Тогда

$$\Phi(\partial_{\xi_i}) = \partial_{\xi_i} + \sum_j f_i^j \partial_{\xi_j} + v_i, \quad \text{где } \operatorname{fil} v_i > l(\Phi).$$

Так как $[\Phi(\partial_{\xi_i}), \Phi(\partial_{\xi_j})] = 0$ для любых i, j, то $\dfrac{\partial f_j^k}{\partial \xi_i} + \dfrac{\partial f_i^k}{\partial \xi_j} = 0$, значит, найдутся функции f_i, такие что $f_j^i = \dfrac{\partial f_i}{\partial \xi_j}$. Положим $u = \sum f_i \partial_{\xi_i}$ и заметим, что $\operatorname{div} u = 0$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{svect}^L(n)$. □

Лемма завершает доказательство теоремы 5.2. □

Ниже в этом параграфе $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, если не оговорено иное. Описание вещественных форм следует из описания всех, с точностью до сопряжения в группе $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$, антилинейных автоморфизмов порядка 2, т. е. из описания вещественных структур.

5.4. О вещественных формах $\mathbb{Z}$-градуированных (супер)алгебр Ли. Пусть $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_k$ — вещественная $\mathbb{Z}$-градуированная (супер)алгебра Ли, а $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ — ее комплексификация. Вложение $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ задает естественное

комплексное сопряжение: $x \otimes \lambda \mapsto x \otimes \bar{\lambda}$, где $x \in \mathfrak{g}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Пусть ρ — инволютивный автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, заданный формулой:

$$\rho|_{\mathfrak{g}_k} = (-1)^k \cdot \operatorname{id}, \quad \text{для любого } \ k \in \mathbb{Z}. \tag{Д5.22}$$

В композиции с естественным комплексным сопряжением автоморфизм ρ задает вещественную структуру на алгебре $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Вещественная форма, отвечающая этой вещественной структуре, — это (супер)алгебра Ли

$$\mathfrak{h} = \Big(\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{2k}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} i \cdot \mathfrak{g}_{2k+1}\Big).$$

Рассмотрим отображение $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, такое что

$$\varphi|_{\mathfrak{g}_{2k}} = \operatorname{id}, \quad \varphi|_{\mathfrak{g}_{2k+1}} = i \cdot \operatorname{id} \quad \text{для любого } \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ясно, что отображение φ является изоморфизмом линейных пространств, но не (супер)алгебр Ли: если элементы X, Y принадлежат однородным компонентам алгебры $\mathfrak{g}$ с нечетными номерами, то $[\varphi(X), \varphi(Y)] = -\varphi([X, Y])$. Поэтому может показаться, что вещественные формы $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ не изоморфны. Однако это не так, см. предложение 3.4. Явный изоморфизм ψ между ними задается следующей формулой:

$$\psi|_{\mathfrak{g}_k} = (i)^k \cdot \operatorname{id} \quad \text{для любого } \ k \in \mathbb{Z}. \tag{Д5.23}$$

А теперь давайте посмотрим на алгебры Витта, Вирасоро, а также все струнные и петель, но не в гладком варианте, а в любом $\mathbb{Z}$-градуированном. Пусть $\mathfrak{g}$ — одна из этих (супер)алгебр Ли. Тогда у $\mathfrak{g}$ есть «тривиальная» вещественная форма $\mathfrak{h}$, заданная комплексным сопряжением коэффициентов в каком-то базисе. Кроме того, есть три класса инволютивных автоморфизмов, порожденных диффеоморфизмами окружности. Первый класс определен тождественным отображением (и, стало быть, сам является тождественным отображением, т. е. выделяет в точности $\mathfrak{h}$), второй класс определен отображением $x \mapsto -x$, а третий класс определен чем-то еще, сейчас неважно чем: речь пойдет про первые два.

Если $x \mapsto -x$, то

$$x^k \mapsto (-1)^k \cdot x^k, \quad \partial_x \mapsto -\partial_x.$$

Значит, диффеоморфизм $x \mapsto -x$ порождает в точности инволютивный автоморфизм ρ из (Д5.22). Но это значит, что вещественная форма, им определяемая, изоморфна $\mathfrak{h}$.

Собственно, с гладкими коэффициентами все то же самое. Действительно, любую функцию на окружности можно представить в виде суммы четной и нечетной:

$$f = f_{ev} + f_{od}, \quad \text{где } \ f_{ev}(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \quad f_{od}(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Если функция f действительно-значная, то и ее четная и нечетная компоненты тоже действительны. А если вещественная форма выделяется автоморфизмом $x \mapsto -x$, то четная компонента действительна, а нечетная — чисто мнимая. Соответственно, описанный выше изоморфизм ψ, см. (Д5.23), этих вещественных форм как линейных пространств, но не как (супер)алгебр Ли, в этом случае задается формулой

$$\psi(f_{ev} + f_{od}) = f_{ev} + if_{od}. \tag{Д5.24}$$

Чтобы задать изоморфизм именно (супер)алгебр Ли, нужно вспомнить, что на окружности S действует, в частности, поворот на $\pi/4$, индуцирующий действие $R(x) = i \cdot x$ и в функциях, и в векторных полях на S. Поскольку $R^4 = \mathrm{id}$, каждое из этих пространств (и функций, и векторных полей) разлагается в сумму четырех собственных подпространств $\mathfrak{g}_s$ с собственными значениями $s = \pm 1$, $\pm i$. При этом пространство четных функций является суммой подпространств $\mathfrak{g}_{\pm 1}$, а подпространство нечетных функций — суммой подпространств $\mathfrak{g}_{\pm i}$. Изоморфизм ψ алгебр, описанный в (Д5.23), в гладком случае задается формулой:

$$\psi\colon f \mapsto (i^k) \cdot f, \quad \text{если } f \in \mathfrak{g}_{i^k}.$$

Это неудивительно, поскольку пространство, натянутое на мономы x^k, плотно в пространстве гладких функций, причем $x^k \in \mathfrak{g}_{i^k}$.

5.4а. Пример. Вещественные формы алгебры Витта. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^L(0) \simeq \mathfrak{vect}^L(0) = \mathfrak{witt}$. На алгебре $\mathfrak{g}$ определена естественная инволюция — комплексное сопряжение коэффициентов в мономиальном базисе. Композиция этого сопряжения с любой вещественной структурой задает линейную инволюцию алгебры $\mathfrak{g}$. В силу теоремы 5.2 все автоморфизмы этой алгебры Ли являются внутренними, т. е. порождаются диффеоморфизмами окружности. Поскольку у окружности есть в точности три (по модулю сопряжений) диффеоморфизма порядка $\leqslant 2$, у алгебры $\mathfrak{g}$ есть три неизоморфных типа вещественных форм.

В терминах углового параметра $a \in \mathbb{R}$ векторные поля на окружности имеют вид $D(a) = f(a)\partial_a$, где $f(a)$ — 2π-периодическая комплекснозначная функция с определенными свойствами гладкости (например, разлагающиеся в полиномы Фурье).

Три рассматриваемых антилинейных инволютивных автоморфизма ρ_i, где $i = 1, 2, 3$, алгебры Ли $\mathfrak{vect}^L(0)$ порождены следующими автоморфизмами прямой и имеют, соответственно, вид:

$$\begin{array}{lll}
a \mapsto a, & \partial_a \mapsto \partial_a : & \rho_1(D) = \overline{D(a)} = \overline{f(a)}\partial_a \Longrightarrow f(a) \in \mathbb{R};\\
a \mapsto -a, & \partial_a \mapsto -\partial_a : & \rho_2(D) = -\overline{f(-a)}\partial_a;\\
a \mapsto a + \pi, & \partial_a \mapsto \partial_a : & \rho_3(D) = \overline{f(a+\pi)}\partial_a.
\end{array} \tag{Д5.25}$$

Соответствующие вещественные формы обозначим $\mathfrak{h}_i$, где $i = 1, 2, 3$. В частности, $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{vect}^L_{\mathbb{R}}(0)$.

Переходя к переменной $x = e^{ia}$, мы прежде всего должны учесть, что

$$\partial_a = ix\partial_x.$$

Автоморфизмы, соответствующие диффеоморфизмам окружности, суть

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\rho_1(x) = \mathrm{id}(x) = \overline{\exp(ia)} = x^{-1} & \text{— тождественное отображение,}\\
\rho_2(x) = \mathrm{inv}(x) = \overline{\exp(-ia)} = x & \text{— отражение в горизонтальном}\\
 & \text{диаметре,}\\
\rho_3(x) = \mathrm{oin}(x) = \overline{\exp(i(a+\pi))} = -x^{-1} & \text{— центральная симметрия.}
\end{array}} \tag{Д5.26}$$

Для явного описания вещественной формы, выделяемой автоморфизмом ρ_2, представим функцию f в виде $f = f_{ev} + f_{od}$, где $f_{od}(-a) = -f_{od}(a)$, а $f_{ev}(-a) = f_{ev}(a)$. Тогда из общей формулы (Д5.24) следует, что $f_{od}(a) \in \mathbb{R}$, а $f_{ev}(a) \in i \cdot \mathbb{R}$. Таким образом,

$$\mathfrak{h}_2 = \{D = (f_{od}(a) + i \cdot f_{ev}(a))\partial_a \mid f_{od}(a), \quad f_{ev}(a) \in \mathbb{R}\}.$$

Если же аналогично представить произвольную функцию f в виде суммы функций $f = f_{sym} + f_{alt}$, таких что

$$f_{sym}(a+\pi) = f(a), \quad f_{alt}(a+\pi) = -f(a),$$

положив

$$f_{sym}(a) = \frac{1}{2}(f(a) + f(a+\pi)), \quad f_{alt}(a) = \frac{1}{2}(f(a) - f(a+\pi)), \tag{Д5.27}$$

то из (Д5.27) получим, что

$$\mathfrak{h}_3 = \{D = (f_{sym}(a) + i \cdot f_{alt}(a))\partial_a \mid f_{sym}(a),\ f_{alt}(a) \in \mathbb{R}\}.$$

Перейдем к рядам Фурье.

В случае алгебры $\mathfrak{h}_1$ функция f вещественная, и значит, разлагается в ряд Фурье по синусам и косинусам с вещественными коэффициентами, а в ряд по экспонентам — с комплексно-сопряженными коэффициентами при $\exp(ika)$ и $\exp(-ika)$. Значит, в переменной x векторное поле D из $\mathfrak{h}_1$ имеет вид

$$D = ic_0x\partial_x + \sum_{k>0}(a_kx^k + \overline{a_k}x^{-k})ix\partial_x = ic_0L_0 + \sum_k(c_kL_k - \overline{c_k}L_{-k}),$$
$$\text{где } L_k = x^{k+1}\partial_x,\ c_0 \in \mathbb{R}. \tag{Д5.28}$$

Это в точности соответствует замене $x \mapsto x^{-1}$.

В случае алгебры $\mathfrak{h}_2$ четные функции разлагаются, как известно, в ряд по косинусом, а нечетные — в ряд по синусам. Соответственно, векторное поле $D \in \mathfrak{h}_2$ будет иметь в переменной x следующий вид:

$$D = \sum_{k \geqslant 0} \left(a_k \frac{x^k - x^{-k}}{2i} + ib_k \frac{x^k + x^{-k}}{2} \right) ix\partial_x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k L_k, \quad \text{где } a_k,\ b_k,\ c_k \in \mathbb{R},$$

что отвечает преобразованию $x \mapsto x$, ибо $\rho_2(x) = \overline{\exp(-ia)} = x$.

В случае алгебры $\mathfrak{h}_3$ всякая π-периодическая функция разлагается в ряд по синусам и косинусам от $2ka$, где $k \in \mathbb{Z}$, а π-антипериодическая — в ряд по синусам и косинусам от $(2k+1)a$, где $k \in \mathbb{Z}$. Перейдя к переменной x, мы видим, что поле $D \in \mathfrak{h}_3$ имеет вид

$$D = \sum_{k \geqslant 0} (c_k L_{2k} - \overline{c_k} L_{-2k} + d_k L_{2k-1} + \overline{d_k} L_{-2k+1}),$$

что отвечает преобразованию $x \mapsto -x^{-1}$.

Из этих формул видно, что если φ — диффеоморфизм окружности (или, что то же самое, автоморфизм алгебры функций $R(0)$), то в реализации векторных полей в терминах углового параметра a вещественная структура ρ, соответствующая автоморфизму φ, задается формулой:

$$\rho(D) = \overline{\varphi_{\mathrm{vect}}(D)}.$$

Знание же того, как именно ρ действует на x и на поля L_k, см. (Д5.28), никак не помогает задать диффеоморфизм окружности, определяющий вещественную структуру. В частности, если диффеоморфизм $\psi\colon x \mapsto \rho(x)$ и векторное поле D заданы в переменной x, то $\rho(D)$ не совпадает ни с $\psi_{\mathrm{vect}}(D)$, поскольку ψ_{vect} линейно, ни с $\overline{\psi_{\mathrm{vect}}(D)}$, поскольку к L_k мы уже применили ρ, и нам осталось только применить черту к коэффициентам при L_k. Поэтому то, что такие диффеоморфизмы окружности как $\rho_1\colon x \mapsto x^{-1}$ и $\rho_3\colon x \mapsto -x^{-1}$ сопряжены, не имеет никакого отношения к вопросу об изоморфности вещественных форм $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_3$.

А теперь посмотрим на вещественные формы, порожденные именно этими диффеоморфизмами, которые в угловом параметре a задаются формулами $\rho_1\colon a \mapsto -a$ (отражение в действительной оси) и $\rho_3\colon a \mapsto \pi - a$ (центральная симметрия). Диффеоморфизм ρ_1, как мы уже видели, задает вещественную форму $\mathfrak{h}_2$, состоящую из рядов Лорана с действительными коэффициентами, а действие вещественной структуры, отвечающей диффеоморфизму ρ_3, имеет вид $x \mapsto -x^{-1}$. Соответствующая вещественная форма $\tilde{\mathfrak{h}}_2$ состоит из рядов Лорана с вещественными коэффициентами при L_{2k} и чисто мнимыми коэффициентами при L_{2k+1}. Диффеоморфизмы ρ_1 и ρ_3 сопряжены друг другу поворотом на $\pi/2$, задающим изоморфизм алгебр $\mathfrak{h}_2$ и $\tilde{\mathfrak{h}}_2$. В переменной x этот поворот действует как умножение на i. Соответственно, $L_k \mapsto i^k L_k$. Это и есть тот изоморфизм, который описан предложением 3.4, а явно — формулой (Д5.23).

Наконец, про «*центральные части*» алгебр $\mathfrak{h}_i$. У алгебры $\mathfrak{h}_2$ «центральная часть» натянута на ∂_x, $x\partial_x$, $x^2\partial_x$ и изоморфна $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{R})$. У алгебры $\mathfrak{h}_1$ «центральная часть» натянута на поля $-\partial_x + x^2\partial_x$, $ix\partial_x$, $i(\partial_x + x^2\partial_x)$. Это $\mathfrak{su}(1,1) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Однако изоморфизм этот не сохраняет $\mathbb{Z}$-градуировку, поэтому вещественные формы $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ неизоморфны. У $\mathfrak{h}_3$ «центральная часть» натянута на поля $i(-\partial_x + x^2\partial_x)$, $ix\partial_x$, $\partial_x + x^2\partial_x$; эта подалгебра, очевидно, изоморфна $\mathfrak{su}(2)$.

5.5. Вещественные формы струнных супералгебр Ли.

Теорема. 1) *Таблица* Д5.9 *содержит все вещественные формы* $\mathfrak{h}$ *супералгебр Ли* $\mathfrak{g}$ *серий* $\mathfrak{vect}^L(m)$ *и* $\mathfrak{svect}^L(n)$ *при* $n > 1$, *а также* $\mathfrak{k}^L(n)$ *и* $\mathfrak{k}^M(n)$ *и соответствующие инволютивные автоморфизмы* $\tilde{\varphi} \in \operatorname{Aut} R(n)$. *Кроме того, алгебра* $\mathfrak{h}$ *реализована как подалгебра в некоторой вещественной супералгебре Ли* $\tilde{\mathfrak{h}}$, *описанной явно в табл.* Д5.9.

2) *У супералгебр Ли серий* $\mathfrak{svect}^L_\lambda$, $\mathfrak{svect}^{L\prime}_\lambda$ *при* $\lambda \notin \mathbb{R}$ *вещественных форм нет.*

3) *Вещественные формы супералгебры Ли* $\mathfrak{kas}^L$ *суть* $\mathfrak{kas}^L_{6-a,a}$, *где* $a = 1, 3$, *а у* $\mathfrak{svect}^L(1|2)$ *есть, кроме описанных выше форм, форма* $\mathfrak{suvect}^L(1|2)$, *где верхний индекс* L *означает, что вещественные супералгебры Ли* $\mathfrak{kas}_{6-a,a}$ *и* $\mathfrak{suvect}(1|2)$ *из табл.* Д3.10 *нужно рассматривать с лорановскими полиномами в качестве коэффициентов.*

4) *Таблица* Д5.10 *содержит все кватернионные формы, которые описаны не автоморфизмами* $\varphi_{vect} \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$, *а соответствующими автоморфизмами* $\varphi \in \operatorname{Aut} R(n)$. (В частности, у супералгебры Ли $\mathfrak{k}^M(n)$ кватернионных форм нет.)

5.6. Доказательство теоремы 5.5. Мы рассмотрим случай гладких функций. Символом $\operatorname{Ant} \mathfrak{g}$ обозначим множество антилинейных автоморфизмов супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ и положим

$$\mathrm{Ant}^+ = \{\Phi \in \operatorname{Ant} \mathfrak{g} \mid \Phi^2 = \mathrm{id}\}, \quad \mathrm{Ant}^- = \{\Phi \in \operatorname{Ant} \mathfrak{g} \mid \Phi^2 = \delta_{-1}\}. \qquad (Д5.29)$$

Очевидно, что описание вещественных (соотв. кватернионных) форм супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ эквивалентно описанию классов сопряженности относительно $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ в Ant^+ (соотв. в Ant^-).

Рассмотрим ту же фильтрацию на $\mathfrak{g}$, что и в доказательстве теоремы 5.2. Из теоремы 5.2 следует, что вместо того, чтобы описывать вещественные структуры на $\mathfrak{g}$, мы можем описывать вещественные структуры на $R(n)$, удовлетворяющие некоторым ограничениям.

Пусть $I \subset \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ — идеал, описанный формулой (Д5.18). Тогда любой автоморфизм $\Phi \in \mathrm{Ant}^\pm$ переводит I в себя, а значит, естественно определяет автоморфизм $\Phi_0 \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}_{\bar{0}}/I)$. Так как $\mathfrak{g}_{\bar{0}}/I \cong \mathfrak{vect}^L(0)$, то автоморфизм Φ_0 сопряжен в группе $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ либо автоморфизму id, либо inv, либо oin. Из доказательства теоремы 5.2 следует, что автоморфизм Φ сопряжен автоморфизму $\tilde{\Phi}$, такому что $\tilde{\Phi}_0$ есть либо id, либо inv, либо oin. Поэтому можно с самого начала предположить, что $\Phi_0 = \mathrm{id}$, inv или oin.

5.6а. Лемма. *Пусть* $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathrm{Ant}^\pm \mathfrak{g}$, *причем* $\Phi_2 = \Phi_1 \operatorname{Ad}_u$, *где* $u \in \mathfrak{g}$ *и* $\operatorname{fil} u > 0$. *Тогда* Φ_1 *и* Φ_2 *сопряжены элементом группы* $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$.

Доказательство. Имеем $\Phi_1 \circ \mathrm{Ad}_u \circ \Phi_1 \circ \mathrm{Ad}_u = \delta_{\pm 1}$ и $\Phi_1^{-1} = \delta_{\pm 1}\Phi_1$; поэтому $\Phi_1^{-1} \circ \mathrm{Ad}_u \circ \Phi_1 \circ \mathrm{Ad}_u = \mathrm{id}$. Значит, $\mathrm{Ad}_{\Phi_1(u)} = \mathrm{Ad}_u^{-1} = \mathrm{Ad}_{-u}$. Следовательно, $\Phi_1(u) = -u$, так как $\mathrm{fil}\, u > 0$. Тогда

$$\Phi_2 = \Phi_1 \circ \mathrm{Ad}_{u/2} \circ \mathrm{Ad}_{u/2} = \mathrm{Ad}_{\Phi_1(u/2)} \circ \Phi_1 \circ \mathrm{Ad}_{u/2} = \mathrm{Ad}_{-u/2} \circ \Phi_1 \circ \mathrm{Ad}_{u/2},$$

т. е. автоморфизмы Φ_1 и Φ_2 сопряжены элементом $\mathrm{Ad}_{u/2}$. □

5.6б. Лемма. *Антилинейных автоморфизмов Φ супералгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^M(n)$, таких что $\Phi^2 = \delta_{-1}$, нет.*

Доказательство. Предположим противное: существует антилинейный автоморфизм Φ супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, такой что $\Phi^2 = \delta_{-1}$. Тогда по лемме 5.6а без потери общности можно предположить, что (мы снова обозначаем элементы K_f^M супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ их производящими функциями)

$$\Phi(x) = \pm x + u, \quad \text{где } \mathrm{fil}\, u > 0.$$

Пусть

$$\Phi(\xi_n\sqrt{x}) = f_n\xi_n\sqrt{x} + \sum_{i \leqslant n-1} f_i\xi_i + \beta, \quad \text{где } \mathrm{fil}\,\beta > 1 \text{ и } f_i \in R(0) \text{ при всех } i.$$

Тогда

$$f_n^2 x + \sum_{i \leqslant n-1} f_i^2 = \pm x,$$

откуда следует, что

$$f_n = \sqrt{\pm 1 - \frac{1}{x}\sum_{i \leqslant n-1} f_i^2}.$$

Функции $f_1, \ldots, f_n$ — гладкие, поэтому

$$f_n = \sqrt{\pm 1} \quad \text{и} \quad f_1 = \ldots = f_{n-1} = 0,$$

следовательно, $\Phi^2(\xi_n\sqrt{x}) = \xi_n\sqrt{x} + \gamma$, где $\deg\gamma > 1$. Противоречие с предположением. □

Пусть φ — антилинейный автоморфизм супералгебры $R(n)$, такой что $\varphi_0 = \mathrm{id}$, inv или oin, а $\tilde{\varphi}$ — автоморфизм супералгебры $R(n)$, такой что

$$\mathrm{fil}(\varphi(\xi_i) - \tilde{\varphi}(\xi_i)) > 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{fil}(\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)) > 0,$$

и пусть $\tilde{\varphi}(x) = x^{-1}$, x или $-x^{-1}$. Положим

$$\sigma = \tilde{\varphi}|_{R(0)}, \quad \tilde{\varphi}(\xi_i) = \sum_j a_i^j(x)\xi_j.$$

Если автоморфизм φ индуцирует автоморфизм Φ из $\mathrm{Ant}^+\,\mathfrak{g}$ (соотв. $\mathrm{Ant}^-\,\mathfrak{g}$), то

$$A(x)\bar{A}(\sigma(x)) = 1_n \quad (\text{соотв. } -1_n), \text{ где } A = (a_i^j), \text{ см. табл. Д5.11.}$$

Я не смог восстановить доказательства следующих двух весьма правдоподобных лемм. Предлагаю читателю рассматривать их доказательства как **упражнения**.

5.6в. Лемма. 1) *Функция A удовлетворяет условиям табл.* Д5.11.

2) *Линейный автоморфизм ψ_B, где $B = (b_i^j)$, супералгебры $R(n)$, такой что*

$$\psi_B(x) = x + X, \quad \textit{где} \;\; \mathrm{fil}\, X \geqslant 2,$$

$$\psi_B(\xi_i) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} b_i^j(x)\xi_i + s_i, \quad \textit{где} \;\; \mathrm{fil}\, s_i \geqslant 3,$$

индуцирует автоморфизм супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, если B удовлетворяет условиям табл. Д5.12.

Две матрично-значные функции A_1 и A_2 на окружности S, удовлетворяющие условиям табл. Д5.11, назовем *эквивалентными* и будем писать $A_1 \sim A_2$, если существует матрично-значная функция B, удовлетворяющая условиям табл. Д5.12 и такая, что

$$B(x)A_1(x)\bar{B}(\sigma(x))^{-1} = A_2(x). \tag{Д5.30}$$

Пусть $\sigma = \mathrm{id}$, oin или inv. Пусть $\mathfrak{a}_\sigma^\pm(\mathfrak{g})$ — набор матрично-значных функций $A(x)$ на S, удовлетворяющих условиям табл. Д5.11 и таких, что $A(x)\bar{A}(\sigma(x)) = \pm 1_n$.

Положим

$$\mathrm{Ant}_\sigma^\pm = \{\Phi \in \mathrm{Ant}^\pm \mid \Phi_0 = \sigma\}. \tag{Д5.31}$$

Очевидно, существует естественный эпиморфизм $\rho\colon \mathrm{Ant}_\sigma^\pm \longrightarrow \mathfrak{a}_\sigma^\pm(\mathfrak{g})$.

5.6г. Лемма. *Пусть $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathrm{Ant}_\sigma^\pm$. Если $\rho(\Phi_1) \sim \rho(\Phi_2)$, то автоморфизмы Φ_1 и Φ_2 сопряжены в группе* $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$.

Замечания. 1) Если $u_k \in \mathfrak{g}_k$, где $k \geqslant 1$, то оператор ad_{u_k} нильпотентен; поэтому оператор Ad_{u_k} корректно определен.

2) Таким образом, лемма сводит задачу описания вещественных структур к описанию классов эквивалентности матрично-значных функций на S. На сегодня эта задача решена лишь для случая гладких функций. Рассмотреть другие классы функций — открытая **задача**, ответ в которой может быть другим.

5.6д. Продолжение доказательства теоремы 5.5. Рассмотрим три возможных значения автоморфизма σ.

$\boxed{\sigma(x) = x}$ Перейдем к угловому параметру a на S. Тогда $A(a)\bar{A}(-a) = 1_n$ для вещественных форм (соотв. -1_n для кватернионных структур).

В частности, это означает, что антилинейные отображение ρ_0 и ρ_π, задаваемые матрицами $A(0)$ и $A(\pi)$ соответственно, инволютивны для вещественных структур, а для кватернионных структур $\rho_0^4 = \rho_\pi^4 = 1$. Иными словами, отображение ρ_0 (соотв. ρ_π) является вещественной (соотв. кватернионной) структурой в конечномерном пространстве. Поэтому матрицу такого преобразования можно привести к виду 1_n для вещественной структуры (соотв. к виду J_n для кватернионной структуры).

Если же нам доступны только ортогональные преобразования (в случаях $\mathfrak{k}^L$ и $\mathfrak{k}^M$), то матрицы преобразований приводятся к виду $\mathrm{diag}(1_k, 1_{n-k})$.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{vect}^L(n)$ или $\mathfrak{svect}^L(n)$. Во-первых, как легко видеть, мы можем сделать матрицу $A(a)$ равной 1_n (соотв. $J_{n/2}$, а значит, в этом случае n четно) в достаточно малой окрестности точки $a = 0$ (соотв. $a = \pi$). Далее, сопряжениями матрицей

$$B(a) = \begin{cases} A(a) & \text{при } a \in [0, \pi], \\ 1_n & \text{при } a \in [\pi, 2\pi], \end{cases} \tag{Д5.32}$$

мы приведем $A(a)$ к 1_n (соотв. к J_n).

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^L(n)$ или $\mathfrak{k}^M(n)$. Случай $A(a)\bar{A}(-a) = -1_n$ возможен лишь для $\mathfrak{k}^L(n)$ и полностью аналогичен предыдущему случаю.

Пусть $A(a)\bar{A}(-a) = 1_n$. Тогда сопряжением мы добьемся того, что

$$A(a) = \begin{cases} \mathrm{diag}(1_k, -1_{n-k}) & \text{в точке } a = 0, \\ \mathrm{diag}(1_l, -1_{n-l}) & \text{в точке } a = \pi. \end{cases} \tag{Д5.33}$$

Так как $(\det A)^2 = 1$, то $\det A(0) = \det A(\pi)$ и $k - l$ четно. Положим

$$m = \left|\frac{k-l}{2}\right|, \quad A_{k,l}(a) = \begin{cases} \mathrm{diag}(1_k, -\tau_m, -1_{n-l}), & \text{если } k \leqslant l, \\ \mathrm{diag}(1_l, \tau_m, -1_{n-k}), & \text{если } k \geqslant l. \end{cases}$$

Тогда матрицы $A(a)$ и $A_{k,l}(a)$ сопряжены матрицей

$$B(a)=\begin{cases} A_{k,l}(a)A^{-1}(a) & \text{при } a\in[0,\,\pi],\\ 1 & \text{при } a\in[\pi,\,2\pi]. \end{cases} \tag{Д5.34}$$

$\boxed{\sigma(x)=x^{-1}}$ $\underline{\mathfrak{g}=\mathfrak{vect}^L(n),\ A(a)\bar{A}(a)=1_n}$. Мы можем взять матрицу $B(a)$ так, что $B(a)A(a)\bar{B}(a)^{-1}=1_n$, и считать, что B — гладкая функция на $[0,\,2\pi]$. Однако в точках 0 и 2π функция B может принимать разные значения. Пусть $B(2\pi)=\gamma\cdot B(0)$. Так как $\bar{\gamma}=\gamma$, то $\gamma\in\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(n)$. У группы $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(n)$ две компоненты связности: в одной $\det\gamma>0$, в другой $\det\gamma<0$.

Если $\det\gamma>0$, то существует гладкая функция $\gamma(a)\in\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(n)$, такая что $\gamma(0)=1_n$ и $\gamma(2\pi)=\gamma$. Сопрягая матрицей $\gamma^{-1}(a)\cdot B(a)$, рассматриваемой как функция на S, мы превращаем $A(a)$ в единичную матрицу.

Если $\det\gamma<0$, то существует функция $\gamma(a)\in\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(n)$, такая что

$$\gamma(0)=1_n \quad\text{и}\quad \gamma(2\pi)=\mathrm{diag}(1_{n-1},\,-1)\gamma.$$

Сопрягая матрицей

$$\zeta(a)=\mathrm{diag}(1_{n-1},\,\sqrt{x})\gamma^{-1}(a)\cdot B(a),$$

превращаем $A(a)$ в $\mathrm{diag}(1_{n-1},\,x)$.

$\underline{\mathfrak{g}=\mathfrak{vect}^L(n)\ \text{и}\ A(a)\bar{A}(a)=-1_n}$. Существует матрично-значная функция B, определенная на отрезке $[0,\,2\pi]$, такая что $B(a)A(a)\bar{B}(a)^{-1}=J_n$. Пусть $B(2\pi)=\gamma\cdot B(0)$, где $\gamma\in\mathrm{U}^*(n)$. Кватернионная унитарная группа $\mathrm{U}^*(n)$ связна, см. [Хелг°], поэтому существует функция $\gamma(a)$, определенная на отрезке $[0,\,2\pi]$, со значениями в $\mathrm{U}^*(n)$ и такая, что $\gamma(0)=1$ и $\gamma(2\pi)==\gamma$. Сопряжение матрицей $\gamma(a)B(a)$ превращает матрицу $A(a)$ в J_n.

Случай $\mathfrak{g}=\mathfrak{svect}^L(n)$ аналогичен случаю $\mathfrak{vect}^L(n)$ с той только разницей, что теперь у нас есть лишь одна вещественная инволюция, поскольку группа $\mathrm{SL}_{\mathbb{R}}(n)$ связна. По той же причине имеется лишь один класс автоморфизмов порядка 4.

$\underline{\mathfrak{g}=\mathfrak{k}^L(n)\ \text{и}\ A(a)\bar{A}(a)=1_n}$. (Случай $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}^M(n)$ аналогичен.) Существует матрично-значная функция B, определенная на отрезке $[0,\,2\pi]$, удовлетворяющая условиям табл. Д5.12 и такая, что

$$B(a)A(a)\bar{B}(a)^{-1}=ix^{-1}\,\mathrm{diag}(1_k,\,-1_{n-k}),\qquad \text{где } k\leqslant n-k.$$

Пусть $B(2\pi)=\gamma B(0)$, где $\gamma\in\mathrm{SO}(k,\,n-k)$. Группа $\mathrm{SO}(n)$ связна и так же, как и в предыдущих случаях, матрицу $A(a)$ можно привести к виду $ix^{-1}\,\mathrm{diag}(1_k,\,-1_{n-k})$.

У группы же $\mathrm{SO}(k,\,n-k)$ две компоненты связности при $k\neq0$, и можно найти матрично-значную функцию γ, такую что

$$\gamma(0)=1_n \quad\text{и}\quad \gamma(2\pi)=\mathrm{diag}\left(\tau^M\left(\frac{a}{2}\right),\,1_{n-2}\right)\cdot\gamma(2\pi) \quad \text{при } n\geqslant2.$$

Сопряжение матрицей $B'(a)=\mathrm{diag}\left(\tau^M\left(\frac{a}{2}\right),\,1_{n-2}\right)\cdot\gamma(a)$ переводит матрицу $A(a)$ в матрицу $ix^{-1}\,\mathrm{diag}\left(\tau^M\left(\frac{a}{2}\right),\,1_{n-2}\right)$.

$\underline{\mathfrak{g}=\mathfrak{k}^L(n)\ \text{и}\ A(a)\bar{A}(a)=-1_n}$. Тогда матрично-значная функция A приводится к константной функции J_n. Доказательство аналогично предыдущим случаям и использует связность группы $\mathrm{SO}^*(n)$, см. [Хелг°].

Случай $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}^M(n)$ аналогичен случаю $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}^L(n)$ с учетом леммы 5.6б.

$\boxed{\sigma(x)=-x^{-1}}$ Тогда $A(a)\bar{A}(a+\pi)=1_n$ (соотв. -1_n).

$\underline{\mathfrak{g}=\mathfrak{vect}^L(n)\ \text{и}\ A(a)\bar{A}(a+\pi)=1_n}$. Положим

$$B_1(a)=\begin{cases} A(a)^{-1} & \text{при } 0\leqslant a\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 1_n & \text{при } \pi\leqslant a\leqslant\dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Тогда $A'(a):=B_1(a)A(a)\bar{B}_1(a+\pi)^{-1}=1_n$ на отрезках $\left[0,\,\frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{3\pi}{2},\,2\pi\right]$. Положим

$$B_2(a)=\begin{cases} A(a) & \text{при } 0\leqslant a\leqslant\dfrac{3\pi}{2},\\ 1_n & \text{при } \dfrac{3\pi}{2}\leqslant a\leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Тогда $B_2(a)A'(a)\bar{B}_2(a+\pi)^{-1}=1_n$.

$\underline{\mathfrak{g}=\mathfrak{vect}^L(n)\ \text{и}\ A(a)\bar{A}(a+\pi)=-1_n}$. Тогда $C(a)\bar{C}(a+\pi)=1_n$, где $C(a)=A(a)x^{-1}$. Так что этот случай сводится к предыдущему.

$\underline{\mathfrak{g}=\mathfrak{svect}^L(n)\ \text{и}\ A(a)\bar{A}(a+\pi)=1_n}$. Пусть $\det(A(a))=x^2$, а $A_0(a)=\mathrm{diag}(1_{n-1},\,x^2)$. Тогда существует матрично-значная функция B_1, удовлетворяющая условиям табл. Д5.12 и такая, что

$$B_1(a)=\begin{cases} A^{-1}(a)A_0(a) & \text{при } 0\leqslant a\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 1_n & \text{при } \pi\leqslant a\leqslant\dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Положим

$$\widetilde{A}(a)=B_1(a)A(a)\bar{B}_1(a+\pi)^{-1},\quad \text{где}\ \ B_2(a)=\begin{cases} \widetilde{A}^{-1}(a)A_0(a) & \text{при } 0\leqslant a\leqslant\dfrac{3\pi}{2},\\ 1_n & \text{при } \dfrac{3\pi}{2}\leqslant a\leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Тогда $B_2B_1(a)A(a)\bar{B}_1^{-1}B_2^{-1}(a+\pi)=A_0(a)$.

$\underline{\mathfrak{g}=\mathfrak{svect}^L(n)\ \text{и}\ A(a)\bar{A}(a+\pi)=-1_n}$ — случай, похожий на предыдущий, однако он реализуется только при четном n, так как

$$\det A(a)=c\cdot T^2,\quad \det\bar{A}(a-\pi)=\bar{c}x^{-2}\quad\text{и}\quad c\bar{c}=\det(-1_n)=(-1)^n>0.$$

$\underline{\mathfrak{g}=\mathfrak{k}^L(n)\ \text{и}\ A(a)\bar{A}(a+\pi)=1_n}$. Из табл. Д5.11 следует, что $\det A=\pm x^{-n}$, а значит, n четно. Ясно, что случаи $\det A(x)=x^{-n}$ и $\det A(x)=-x^{-n}$ неэквивалентны, тем не менее, в каждом из них доказательство такое, как для $\mathfrak{g}=\mathfrak{svect}^L(n)$.

$\underline{\mathfrak{g}=\mathfrak{k}^M(n)\ \text{и}\ A(a)\bar{A}(a+\pi)=1_n}$. Так как $\det A=\pm x^{1-n}$, то n нечетно. По тем же причинам, что и в предыдущем случае, существуют две неэквивалентные функции $A_\pm$, такие что $\det A_\pm(x)=\pm ix^{1-n}$, но так как они получаются друг из друга под действием автоморфизма Φ, такого что

$$\Phi(x)=x^{-1},\quad \Phi(\xi_j)=i\xi_jx^{-1}\ \text{при}\ j\leqslant n-1,\quad \Phi(\xi_n)=i\xi_n,$$

то они определяют эквивалентные инволюции супералгебры Ли $\mathfrak{g}$.

$\underline{\mathfrak{g}=\mathfrak{k}^L(n)\ \text{и}\ A(a)\bar{A}(a+\pi)=-1_n}$. Тогда $\det A=\pm x^{-n}$. Те же аргументы, что и для $\mathfrak{g}==\mathfrak{svect}^L(n)$, показывают, что функция $A(x)$ эквивалентна либо $x^{-1}\cdot\mathrm{diag}(-1,\,1_{n-1})$, либо $x^{-1}\cdot 1_n$. Для нечетного n автоморфизмы, соответствующие этим функциям, сопряжены под действием автоморфизма Φ. Чтобы завершить доказательство теоремы 5.4а, достаточно показать, что автоморфизмы, перечисленные в таблицах Д5.9 и Д5.10, не сопряжены друг другу. Это делается непосредственно и мы опускаем эту часть доказательства. □

Таблица Д5.9. **Вещественные формы $\mathfrak{h}$ струнных супералгебр $\mathfrak{g}$**

$\mathfrak{g}$	Имя супералгебры $\mathfrak{h}$	$\varphi(x)$	Матрица $A(x)$, такая что $\varphi(\xi_i)=\sum_j A_i^j\xi_j$	$\tilde{\mathfrak{h}}$
$\mathfrak{vect}^L(n)$,	$\mathfrak{vect}^L_{\rm id}(n)$	x	1_n	$\mathfrak{der}F_{\rm id}(n)$
где $n>0$	$\mathfrak{vect}^L_{\rm inv}(n)$	x^{-1}	1_n	$\mathfrak{der}F_{\rm inv}(n)$
	$\mathfrak{vect}^M_{\rm inv}(n)$	x^{-1}	$\operatorname{diag}(1_{n-1}, x)$	$\mathfrak{der}F^M_{\rm inv}(n)$
	$\mathfrak{vect}^L_{\rm oin}(n)$	$-x^{-1}$	1_n	$\mathfrak{der}F_{\rm oin}(n)$
$\mathfrak{svect}^L(n)$,	$\mathfrak{svect}^L_{\rm id}(n)$	x	1_n	$\mathfrak{vect}^L_{\rm id}(n)$
где $n>1$	$\mathfrak{svect}^L_{\rm inv}(n)$	x^{-1}	$\operatorname{diag}(1_{n-1}, x^2)$	$\mathfrak{vect}^L_{\rm inv}(n)$
	$\mathfrak{svect}^L_{\rm oin}(n)$	$-x^{-1}$	$\operatorname{diag}(1_{n-1}, x^2)$	$\mathfrak{vect}^L_{\rm oin}(n)$
$\mathfrak{k}^L(n)$	$\mathfrak{k}^L(n; k, 2l)$, где $2(k+l)\leqslant n$	x	$\operatorname{diag}(1_k, \tau_l, -1_{n-2l-k})$	$\mathfrak{vect}^L_{\rm id}(n)$
$n=2r$	$\mathfrak{k}^L(2r; k)$, где $k\leqslant r$	x^{-1}	$ix^{-1}\operatorname{diag}(1_k, -1_{2r-k})$	$\mathfrak{vect}^L_{\rm inv}(2r)$
$n=2r+1$	$\mathfrak{k}^M(2r+1; k)$, где $k<r$	x^{-1}	$ix^{-1}\operatorname{diag}(1_k, -1_{2r+1-k})$	$\mathfrak{vect}^M_{\rm inv}(2r+1)$
$n=2r$	$\mathfrak{uk}^L(2r)$	$-x^{-1}$	$x^{-1}J_{2r}$	$\mathfrak{vect}^L_{\rm oin}(2r)$
$n=2r$	$\mathfrak{uk}^L(2r)$	$-x^{-1}$	$x^{-1}\operatorname{diag}(\tau^M, J_{2r-2})$	$\mathfrak{vect}^L_{\rm oin}(2r)$
$\mathfrak{k}^M(n)$	$\mathfrak{k}^L(n; k, 2l+1)$, где $2(k+l)\leqslant n$	x	$\operatorname{diag}(1_k, \tau_l, -1_{n-2l-k})$	$\mathfrak{vect}^L_{\rm id}(n)$
$n=2r$	$\mathfrak{k}^M(2r; k)$, где $k\leqslant r$	x^{-1}	$ix^{-1}\operatorname{diag}(1_k, -1_{2r-k-1}, x)$	$\mathfrak{vect}^M_{\rm inv}(2r)$
$n=2r+1$	$\mathfrak{k}^L(2r+1; k)$, где $k<r$	x^{-1}	$ix^{-1}\operatorname{diag}(1_k, -1_{2r-k}, x)$	$\mathfrak{vect}^L_{\rm inv}(2r+1)$
$n=2r+1$	$\mathfrak{uk}^M(2r+1)$	$-x^{-1}$	$\operatorname{diag}(x^{-1}J_{2r}, i)$	$\mathfrak{vect}^L_{\rm oin}(2r+1)$
$\mathfrak{k}^L(2n)$	$\mathfrak{k}^L(2n; 0)$	x^{-1}	$ix^{-1}\operatorname{diag}(\tau^M, 1_{2n-2})$	$\mathfrak{vect}^L_{\rm inv}(2n)$
	$\mathfrak{k}^M(2n+1; 0)$	x^{-1}	$ix^{-1}\operatorname{diag}(\tau^M, 1_{2n-1})$	$\mathfrak{vect}^M_{\rm inv}(2n+1)$
$\mathfrak{k}^M(2n+1)$	$\mathfrak{k}^L(2n+1; 0)$, где $n\geqslant 1$	x^{-1}	$ix^{-1}\operatorname{diag}(\tau^M, 1_{2n-2}, x)$	$\mathfrak{vect}^L_{\rm inv}(2n+1)$
	$\mathfrak{k}^M(2n; 0)$, где $n\geqslant 2$	x^{-1}	$ix^{-1}\operatorname{diag}(\tau^M, 1_{2n-3}, x)$	$\mathfrak{vect}^M_{\rm inv}(2n)$

Обозначения в табл. Д5.9. Положим $\tau_l(a) = \operatorname{diag}_l(\tau(a), \ldots, \tau(a))$,

$$\tau(a) = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}, \qquad \tau^M(a) = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ \sin a & -\cos a \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} &F_{\rm id} = \{f\in R(0) \mid f(-a) = \bar f(a)\}, && F_{\rm id}(n) = F_{\rm id}[\xi], \\ &F_{\rm inv} = R_{\mathbb{R}}(0), && F_{\rm inv}(n) = F_{\rm inv}[\xi], \\ &F_{\rm oin} = \{f\in R(0) \mid f(a+\pi) = \bar f(a)\}, && F_{\rm oin}(n) = F_{\rm oin}[\xi], \\ &F^M_{\rm inv}(n) = F_{\rm inv}(n-1) \bigoplus \left(F_{\rm inv}(n-1)\cos\frac{a}{2} \oplus F_{\rm inv}(n-1)\sin\frac{a}{2}\right)\xi_n, \end{aligned} \tag{Д5.35}$$

5.6е. Упражнение. Какие структуры сохраняют супералгебры Ли $\mathfrak{h}$? Ответ дайте в терминах форм объема $\operatorname{vol}(t, \xi)$, $\operatorname{vol}(a, \xi)$ и следующих контактных форм:

$$\begin{aligned} &\alpha_{n,k} = da + \sum_{j\leqslant k}\xi_j d\xi_j - \sum_{j>k}\xi_j d\xi_j, \\ &\alpha^l_{n,k} = dx + \sum_{j\leqslant k}\xi_j d\xi_j + x\sum_{k<j\leqslant k+l}\xi_j d\xi_j - \sum_{j>k+l}\xi_j d\xi_j, \\ &\alpha_a = da + \sum_{j\geqslant 2}\xi_j d\xi_j + (\xi_1 d\xi_1 - \xi_2 d\xi_2)\cos a + (\xi_1 d\xi_2 - \xi_2 d\xi_1)\sin a. \end{aligned} \tag{Д5.36}$$

Таблица Д5.10. **Кватернионные формы струнных супералгебр Ли**

$\mathfrak{g}$	$\varphi(x)$	Функция A, такая что $\varphi(\xi_i) = \sum A_i^j\xi_j$
$\mathfrak{vect}^L(2n)$	x	J_{2n}
$\mathfrak{vect}^L(2n)$	x^{-1}	J_{2n}
$\mathfrak{vect}^L(n)$	$-x^{-1}$	$x\cdot 1_n$
$\mathfrak{svect}^L(2n)$	x	J_{2n}
$\mathfrak{svect}^L(2n)$	x^{-1}	$\operatorname{diag}(x\cdot J_2,\ J_{2n-2})$
$\mathfrak{svect}^L(2n)$	$-x^{-1}$	$\operatorname{diag}(x\cdot 1_2,\ J_{2n-2})$
$\mathfrak{k}^L(2n)$	x	J_{2n}
$\mathfrak{k}^L(2n)$	x^{-1}	$ix^{-1}\cdot J_{2n}$
$\mathfrak{k}^L(n)$	$-x^{-1}$	$x^{-1}\cdot 1_n$
$\mathfrak{k}^L(2n)$	$-x^{-1}$	$x^{-1}\cdot\operatorname{diag}(-1,\ 1_{2n-1})$

Таблица Д5.11. **Условия на функцию *A***

$\mathfrak{g}$	$\tilde\varphi(x)=x$	$\tilde\varphi(x)=x^{-1}$	$\tilde\varphi(x)=-x^{-1}$
$\mathfrak{vect}^L(n)$	$\det(A(x))\neq 0$	$\det(A(x))\neq 0$	$\det(A(x))\neq 0$
$\mathfrak{svect}^L(n)$	$\det(A)=\mathrm{const}$	$\det A(x)=\mathrm{const}\cdot x^{-2}$	$\det A(x)=\mathrm{const}\cdot x^{-2}$
$\mathfrak{k}^L(n)$	$A(x)A^t(x)=1_n$	$A(x)A^t(x)=-x^{-2}\cdot 1_n$	$A(x)A^t(x)=x^2\cdot 1_n$
$\mathfrak{k}^M(n)$	$A(x)\operatorname{diag}(1_{n-1},\ x)\cdot A^t(x)=$ $\operatorname{diag}(1_{n-1},\ x)$	$A(x)\operatorname{diag}(1_{n-1},\ x)\cdot A^t(x)=$ $=\operatorname{diag}(-x^{-2}\cdot 1_{n-1},\ -x)$	$A(x)\operatorname{diag}(1_{n-1},\ x)\cdot A^t(x)=$ $=\operatorname{diag}(x^{-2}\cdot 1_{n-1},\ -x)$

Таблица Д5.12. **Условия на функцию *B* и элементы *X* и s_i**

$\mathfrak{g}$	φ	X, s_i
$\mathfrak{vect}^L(n)$	$\det B(x)\neq 0$	$X=0,\ s_i=0$
$\mathfrak{svect}^L(n)$	$\det B(x)=\mathrm{const}$	$X=0,\ s_i=0$
$\mathfrak{k}^L(n)$	$B(x)B^t(x)=1_n$	см. доказательство леммы 5.3в (1)
$\mathfrak{k}^M(n)$	$B(x)\operatorname{diag}(1_{n-1},\ x)B^t(x)=$ $=\operatorname{diag}(1_{n-1},\ x)$	см. доказательство леммы 5.3в (2)

Таблица Д5.13. **Явные формулы**

Выражение df^* следует понимать как $d(K_f)^*\in\mathbb{E}^2(\mathfrak{g}^*)$, где $K_f\in\mathfrak{g}$, а $d\colon \mathfrak{g}^*\longrightarrow\mathbb{E}^2(\mathfrak{g}^*)$ — дифференциал в коцепном комплексе; здесь $\mathbb{E}^2$ — оператор второй внешней степени суперпространства. Образы мономов x^m, $\xi_i x^{m+1/2}$ и т. д., и центрального элемента Z под действием анти-автоморфизмов, выделяющих вещественные формы, где индексы (например, id_2) различают анти-автоморфизмы одного типа, следующие:

$\mathfrak{k}^L(0)=\mathfrak{vect}^L(0)$ и $\mathfrak{k}^M(1)$

Исходный моном	id	inv	oin
x^m	x^m	$-x^{2-m}$	$(-1)^m x^{2-m}$
$\xi x^{m+1/2}$	$\xi x^{m+1/2}$	$i\xi x^{1/2-m}$	$(-1)^m i\xi x^{1/2-m}$
Z	Z	$-Z$	$-Z$

$\mathfrak{k}^L(1)$

Исходный моном	id	inv
x^m	x^m	$-x^{2-m}$
ξx^m	ξx^m	$i\xi x^{1-m}$
Z	Z	$-Z$

$\mathfrak{k}^M(2)$

Исходный моном	id_0	id_1	inv_1	inv_2
x^m	x^m	x^m	$-x^{2-m}$	$-x^{2-m}$
ξx^m	ξx^m	ξx^m	$i\xi x^{1-m}$	$i\xi x^{1-m}$
$\theta x^{m+1/2}$	$\theta x^{m+1/2}$	$-\theta x^{m+1/2}$	$i\theta x^{1/2-m}$	$-i\theta x^{1/2-m}$
$\xi\theta x^{m+1/2}$	$\xi\theta x^{m+1/2}$	$-\xi\theta x^{m+1/2}$	$-\xi\theta x^{-m-1/2}$	$-\xi\theta x^{-m-1/2}$
Z	Z	Z	$-Z$	$-Z$

$\mathfrak{vect}^L(2)$: поле $\varphi_0(\xi,\eta,x)\frac{\partial}{\partial x}+\varphi_1(\xi,\eta,x)\frac{\partial}{\partial\xi}+\varphi_2(\xi,\eta,x)\frac{\partial}{\partial\eta}$ и элемент Z переходят в

id	в себя	Z
inv_1	$-\varphi_0(\xi,\eta,x^{-1})x^2\frac{\partial}{\partial x}+\varphi_1(\xi,\eta,x^{-1})\frac{\partial}{\partial\xi}+\varphi_2(\xi,\eta,x^{-1})\frac{\partial}{\partial\eta}$	$-Z$
inv_2	$-\varphi_0(\xi,\eta x,x^{-1})x^2\frac{\partial}{\partial x}+\varphi_1(\xi,\eta x,x^{-1})\frac{\partial}{\partial\xi}+$ $+(\varphi_2(\xi,\eta x,x^{-1})\cdot x^{-1}-\varphi_0(\xi,\eta x,x^{-1})\eta t)\frac{\partial}{\partial\eta}$	$-Z+d\Big(\Big(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)^*\Big)$
oin	$\varphi_0(\xi,\eta,-x^{-1})x^2\frac{\partial}{\partial x}+\varphi_1(\xi,\eta,-x^{-1})\frac{\partial}{\partial\xi}+\varphi_2(\xi,\eta,-x^{-1})\frac{\partial}{\partial\eta}$	$-Z$

$\mathfrak{svect}^L(2)$: поле

$$\varphi_0(x)\frac{\partial}{\partial x}+\varphi_1(x)\frac{\partial}{\partial\xi}+\varphi_2(x)\frac{\partial}{\partial\eta}+\varphi^{11}(x)\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\varphi^{22}(x)\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\varphi^{12}(x)\xi\frac{\partial}{\partial\eta}++\varphi^{21}(x)\eta\frac{\partial}{\partial\xi},$$

где $\varphi^{11}+\varphi^{22}=-\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}$, переходит в

id	в себя
inv	$-\varphi_0(x^{-1})x^2\frac{\partial}{\partial x}+\varphi_1(x^{-1})x^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}+\varphi_2(x^{-1})x^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta}+$ $+(\varphi^{11}(x^{-1})+\varphi_0(x^{-1})x)\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+(\varphi^{22}(x^{-1})+\varphi_0(x^{-1})x)\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+$ $+\varphi^{12}(x^{-1})\xi\frac{\partial}{\partial\eta}+\varphi^{21}(x^{-1})\eta\frac{\partial}{\partial\xi}$
oin	$\varphi_0(-x^{-1})x^2\frac{\partial}{\partial x}-\varphi_1(-x^{-1})x^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta}+\varphi_2(-x^{-1})x^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}+$ $+(\varphi^{11}(-x^{-1})-\varphi_0(-x^{-1})x)\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+(\varphi^{22}(-x^{-1})-\varphi_0(-x^{-1})x)\xi\frac{\partial}{\partial\xi}-$ $-\varphi^{12}(-x^{-1})\eta\frac{\partial}{\partial\xi}-\varphi^{21}(-x^{-1})\xi\frac{\partial}{\partial\eta}$

Под действием автоморфизма id элемент Z переходит в себя, а inv и oin переводят Z в $-Z+d\Big(\Big(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}-\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\Big)^*\Big)$.

$\mathfrak{k}^L(2)$

	id_0	id_1	id_2	inv_1	inv_2	inv_3	oin_1	oin_2
x^m	x^m	x^m	$x^m+2i\xi\theta x^{m-1}$	$-x^{2-m}$	$-x^{2-m}$	$-x^{2-m}+2\xi\theta x^{1-m}$	$(-1)^m x^{2-m}$	$(-1)^m(x^{2-m}+2x^{1-m}\xi\theta)$
ξx^m	ξx^m	ξx^m	$\xi\frac{x^{m+1}+x^{m-1}}{2}+\theta\frac{x^{m+1}-x^{m-1}}{2i}$	$i\xi x^{1-m}$	$i\xi x^{1-m}$	$\Big(\xi\frac{x^2+1}{2}+\theta\frac{x^2-1}{2i}\Big)ix^{-m}$	$(-1)^m\theta x^{1+m}$	$(-1)^m\Big(\xi\frac{x^2+1}{2}+\theta\frac{x^2-1}{2i}\Big)x^{-m}$
ηx^m	θx^m	$-\theta x^m$	$-\xi\frac{x^{m+1}-x^{m-1}}{2i}+\theta\frac{x^{m+1}+x^{m-1}}{2}$	$i\theta x^{1-m}$	$-i\theta x^{1-m}$	$\Big(\xi\frac{x^2-1}{2i}-\theta\frac{x^2+1}{2}\Big)ix^{-m}$	$(-1)^{m+1}\xi x^{1-m}$	$-(-1)^m\Big(\xi\frac{x^2-1}{2i}-\theta\frac{x^2+1}{2}\Big)x^{-m}$
$\xi\eta x^m$	$\xi\theta x^m$	$-\xi\theta x^m$	$\xi\theta x^m$	$\xi\theta x^{-m}$	$-\xi\theta x^{-m}$	$\xi\theta x^{-m}$	$(-1)^m\xi\theta x^{-m}$	$(-1)^{m+1}\xi\theta x^{-m}$
Z	Z	Z	$Z+4i\cdot d(\xi\theta)^*$	$-Z$	$-Z$	$-Z+4d((\xi\theta)^*)$	$-Z$	$-Z+4d((\xi\theta)^*)$

$\mathfrak{k}^L(3)$

	id_0	id_1	id_2	inv_1	inv_2	inv_3
x^m	x^m	x^m	$x^m+2i\xi\theta x^{m-1}$	$-x^{2-m}$	$-x^{2-m}$	$-x^{2-m}2\xi\theta x^{1-m}$
ξx^m	ξx^m	ξx^m	$\xi\frac{x^{m+1}+x^{m-1}}{2}+\theta\frac{x^{m+1}-x^{m-1}}{2i}$	$i\xi x^{1-m}$	$i\xi x^{1-m}$	$ix^{-m}\Big(\xi\frac{x^2+1}{2}+\theta\frac{x^2-1}{2i}\Big)$
θx^m	θx^m	θx^m	$-\xi\frac{x^{m+1}-x^{m-1}}{2i}+\theta\frac{x^{m+1}+x^{m-1}}{2}$	$i\theta x^{1-m}$	$i\theta x^{1-m}$	$ix^{-m}\Big(\xi\frac{x^2-1}{2i}-\theta\frac{x^2+1}{2}\Big)$
ηx^m	ηx^m	$-\eta x^m$	ηx^m	$i\eta x^{1-m}$	$-i\eta x^{1-m}$	$i\eta x^{1-m}$
$\xi\theta x^m$	$\xi\theta x^m$	$\xi\theta x^m$	$\xi\theta x^m$	$\xi\theta x^{-m}$	$\xi\theta x^{-m}$	$\xi\theta x^{-m}$
$\xi\eta x^m$	$\xi\eta x^m$	$-\xi\eta x^m$	$\eta x^m\Big(\xi\frac{x+x^{-1}}{2}+\theta\frac{x-x^{-1}}{2i}\Big)$	$\xi\eta x^{-m}$	$-\xi\eta x^{-m}$	$\eta x^{-m}\Big(\xi\frac{x^2+1}{2}+\theta\frac{x^2-1}{2i}\Big)$
$\theta\eta x^m$	$\theta\eta x^m$	$-\theta\eta x^m$	$\eta x^m\Big(-\xi\frac{x-x^{-1}}{2i}+\theta\frac{x+x^{-1}}{2}\Big)$	$\theta\eta x^{-m}$	$-\theta\eta x^{-m}$	$\eta x^{-m}\Big(\xi\frac{x^2-1}{2i}-\theta\frac{x^2+1}{2}\Big)$
$\xi\theta\eta x^m$	$\xi\theta\eta x^m$	$-\xi\theta\eta x^m$	$\xi\theta\eta x^m$	$i\xi\theta\eta x^{-1-m}$	$-i\xi\theta\eta x^{-1-m}$	$i\xi\theta x^{-1+m}$
Z	Z	Z	$Z+4i\cdot d((\xi\theta)^*)$	$-Z$	$-Z$	$-Z+4d((\xi\theta)^*)$

$\mathfrak{k}^M(3)$

	id_0	id_1	id_2	id_3	oin
x^m	x^m	x^m	x^m	$x^m + 2i\xi\theta x^{m-1}$	$(-1)^m x^{2-m}$
ξx^m	ξx^m	ξx^m	ξx^m	$\xi\frac{x^{m+1} + x^{m-1}}{2} + \theta\frac{x^{m+1} - x^{m-1}}{2i}$	$(-1)^m\theta x^{1-m}$
θx^m	θx^m	θx^m	$-\theta x^m$	$-\xi\frac{x^{m+1} - x^{m-1}}{2i} + \theta\frac{x^{m+1} + x^{m-1}}{2}$	$(-1)^{m+1}\xi x^{1-m}$
$\eta x^{m+1/2}$	$\eta x^{m+1/2}$	$-\eta x^{m+1/2}$	$\eta x^{m+1/2}$	$\eta x^{m+1/2}$	$i\eta x^{1/2-m}(-1)^m$
$\xi\theta x^m$	$\xi\theta x^m$	$\xi\theta x^m$	$-\xi\theta x^m$	$\xi\theta x^m$	$(-1)^m\xi\theta x^{-m}$
$\xi\eta x^{m+1/2}$	$\xi\eta x^{m+1/2}$	$-\xi\eta x^{m+1/2}$	$\xi\eta x^{m+1/2}$	$\eta x^{m+1/2}\left(\xi\frac{x + x^{-1}}{2} + \theta\frac{x - x^{-1}}{2i}\right)$	$(-1)^m i\xi\eta x^{-1/2-m}$
$\theta\eta x^{m+1/2}$	$\theta\eta x^{m+1/2}$	$-\theta\eta x^{m+1/2}$	$-\theta\eta x^{m+1/2}$	$\eta x^{m+1/2}\left(-\xi\frac{x - x^{-1}}{2i} + \theta\frac{x + x^{-1}}{2}\right)$	$(-1)^{m+1} i\theta\eta x^{-1/2-m}$
$\xi\theta\eta x^{m+1/2}$	$\xi\theta\eta x^{m+1/2}$	$-\xi\theta\eta x^{m+1/2}$	$-\xi\theta\eta x^{m+1/2}$	$\xi\theta\eta x^{m+1/2}$	$(-1)^m i\xi\eta\theta x^{-3/2-m}$
Z	Z	Z	Z	$Z + 4i \cdot d((\xi\theta)^*)$	$-Z$

	inv_1	inv_2	inv_3	inv_4
x^m	$-x^{2-m}$	$-x^{2-m}$	$-x^{2-m}$	$-x^{2-m} + 2\xi\theta x^{1-m}$
ξx^m	$i\xi x^{1-m}$	$i\xi x^{1-m}$	$i\xi x^{1-m}$	$\left(\xi\frac{x^2 + 1}{2} + \theta\frac{x^2 - 1}{2i}\right)ix^{-m}$
θx^m	$i\theta x^{1-m}$	$-i\theta x^{1-m}$	$i\theta x^{1-m}$	$\left(\xi\frac{x^2 - 1}{2i} - \theta\frac{x^2 + 1}{2}\right)ix^{-m}$
$\eta x^{m+1/2}$	$i\eta x^{1/2-m}$	$i\eta x^{1/2-m}$	$-i\eta x^{1/2-m}$	$i\eta x^{1/2-m}$
$\xi\theta x^m$	$\xi\theta x^{1-m}$	$-\xi\theta x^{-m}$	$\xi\theta x^{-m}$	$\xi\theta x^{-m}$
$\xi\eta x^{m+1/2}$	$\xi\eta x^{-1/2-m}$	$\xi\eta x^{-1/2-m}$	$-\xi\eta x^{-1/2-m}$	$\eta x^{-1/2-m}\left(\xi\frac{x^2 + 1}{2} + \theta\frac{x^2 - 1}{2i}\right)$
$\theta\eta x^{m+1/2}$	$\theta\eta x^{-1/2-m}$	$-\theta\eta x^{-1/2-m}$	$-\theta\eta x^{-1/2-m}$	$\eta x^{-1/2-m}\left(\xi\frac{x^2 - 1}{2i} - \theta\frac{x^2 + 1}{2}\right)$
$\xi\theta\eta x^{m+1/2}$	$i\xi\theta\eta x^{-3/2-m}$	$-i\xi\theta\eta x^{-3/2-m}$	$-i\xi\theta\eta x^{-3/2-m}$	$i\xi\theta\eta x^{-3/2-m}$
Z	$-Z$	$-Z$	$-Z$	$-Z + 4d((\xi\theta)^*)$

---

§ 6. Внешние автоморфизмы и вещественные формы супералгебр петель

6.1. Пусть $\tilde{\mathfrak{g}}_\varphi^{(k)}$ — гладкая версия скрученной супералгебры Ли полиномиальных петель $\mathfrak{g}_\varphi^{(k)}$, см. формулу (Д5.1), т. е. $\tilde{\mathfrak{g}}_\varphi^{(k)}$ состоит из $\mathfrak{g}$-значных петель $g(a) \in \tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}$, таких что $g(a + 2\pi/k) = \varphi g(a)$. Введем в пространстве $\tilde{\mathfrak{g}}_\varphi^{(k)}$ норму, для любой $\mathfrak{g}$-значной петли $g(a) \in \tilde{\mathfrak{g}}_\varphi^{(k)}$ положив

$$\|g(a)\| = \max_{a\in\mathbb{R}} |g(a)|, \quad \text{где } |\cdot| \text{ — какая-нибудь норма в пространстве } \mathfrak{g}. \tag{Д5.37}$$

Супералгебра $\mathfrak{g}_\varphi^{(k)}$, элементы которой — полиномы Лорана, является всюду плотным подмножеством в $\tilde{\mathfrak{g}}_\varphi^{(k)}$ (и подсупералгеброй Ли). Пусть $\operatorname{Aut}\tilde{\mathfrak{g}}_\varphi^{(k)}$ — группа автоморфизмов супералгебры $\tilde{\mathfrak{g}}_\varphi^{(k)}$, непрерывных относительно введенной нормы.

Пусть Diff — группа диффеоморфизмов окружности S, а Diff° — подгруппа диффеоморфизмов, сохраняющих ориентацию. Очевидно, что $\mathrm{Diff}/\mathrm{Diff}^\circ \cong \mathbb{Z}/2$. Пусть Diff_k — подгруппа диффеоморфизмов, коммутирующих с поворотом на угол $\frac{2\pi}{k}$, а $\mathrm{Diff}_k^\circ = \mathrm{Diff}_k \cap \mathrm{Diff}^\circ$. Всякий диффеоморфизм $\mathcal{X}$ окружности задается гладкой функцией $\mathcal{X}(a)$ на S, такой что $|\mathcal{X}(a)| = 1$, а диффеоморфизм, принадлежащий подгруппе Diff_k, функцией $\mathcal{X}(a)$, такой что $\mathcal{X}(\varepsilon_k t) = \varepsilon_k\mathcal{X}(t)$, где $t = e^{ia}$. Очевидно, что группа Diff_k совпадает с группой Diff_k° тогда и только тогда, когда $k > 2$. Очевидно также, что группа Diff_k естественным образом вложена в группу $\operatorname{Aut}\tilde{\mathfrak{g}}_\varphi^{(k)}$, поскольку каждый диффеоморфизм $\mathcal{X} \in \mathrm{Diff}_k$ индуцирует автоморфизм $\mathcal{X}$ супералгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}_\varphi^{(k)}$ по формуле

$$\mathcal{X}(g \otimes f(a)) = g \otimes f(\mathcal{X}(a)).$$

Кроме того, в группе $\operatorname{Aut}\tilde{\mathfrak{g}}_\varphi^{(k)}$ содержится подгруппа

$$\widetilde{G}_\varphi^{(k)} = \{F \in (\operatorname{End}\mathfrak{g}) \otimes C^\infty(S) \mid F(a) \in \operatorname{Aut}^\circ\mathfrak{g},\ \ F(\varepsilon_k t) = \varphi F(t)\varphi^{-1}\}.$$

Группу $\operatorname{Int}\tilde{\mathfrak{g}}_\varphi^{(k)} = \mathrm{Diff}_k^\circ \rtimes \widetilde{G}_\varphi^{(k)}$ назовем *группой внутренних автоморфизмов* супералгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}_\varphi^{(k)}$. Для параллельного описания гладких петель и их полиномиальных Фурье-образов, положим

$$\mathfrak{a} = \begin{cases} \mathfrak{g}_\varphi^{(k)}, \\ \tilde{\mathfrak{g}}_\varphi^{(k)}; \end{cases} \qquad \mathcal{F} = \begin{cases} \mathbb{C}[t,\ t^{-1}], \\ C^\infty(S); \end{cases} \qquad L = \begin{cases} \mathbb{C}^\times \times \mathrm{inv}, \\ \mathrm{Diff}\, S; \end{cases} \qquad L^\circ = \begin{cases} \mathbb{C}^\times, \\ \mathrm{Diff}^\circ S. \end{cases}$$

6.2. Теорема. *Пусть* $\operatorname{Out}\mathfrak{a} := \operatorname{Aut}\mathfrak{a}/\operatorname{Int}\mathfrak{a}$, *а* $\bar{\sigma}$ — *образ автоморфизма* $\sigma \in \operatorname{Aut}\mathfrak{a}$ *при естественной проекции* $\operatorname{Aut}\mathfrak{a} \to \operatorname{Out}\mathfrak{a}$. *Тогда*:

1) $\operatorname{Out}\mathfrak{g}_\varphi^{(k)} \cong \operatorname{Out}\tilde{\mathfrak{g}}_\varphi^{(k)}$;

2) $\operatorname{Out}\mathfrak{a} = \operatorname{Aut}\mathfrak{g}/\operatorname{Aut}^\circ\mathfrak{g} \times \langle\overline{\mathrm{inv}}\rangle$ *при* $k = 1$, $\varphi = \mathrm{id}$;

3) $\operatorname{Out}\mathfrak{a} \cong C(\tilde{\varphi})/\langle\bar{\tilde{\varphi}}\rangle \times \langle\overline{\mathrm{inv}}\rangle$ *при* $k = 2$, *где* $C(\tilde{\varphi})$ — *централизатор элемента* $\tilde{\varphi}$;

4) $\operatorname{Out}\mathfrak{o}(8)^{(3)} = \langle\overline{\mathrm{inv}} \rtimes \sigma\rangle$, *где* σ — *автоморфизм алгебры Ли* $\mathfrak{o}(8)$, *индуцированный какой-нибудь инволюцией графа Дынкина*;

5) $\operatorname{Out}\mathfrak{sl}(2m+1|2n+1)^{(4)}_{-\,\mathrm{st}} = \langle\overline{\mathrm{inv}} \rtimes \gamma_0\rangle \cong \mathbb{Z}/2$, *при* $n \neq m$, *где* $\gamma_0 = \mathrm{Add}_{(1_{2m+1},\, J_{2n},\, i)}$;

6) $\operatorname{Out}\mathfrak{psl}(2n+1|2n+1)^{(4)}_{-\,\mathrm{st}} = \langle\overline{\mathrm{inv}} \rtimes \gamma_0\rangle \times \langle\overline{\mathrm{inv}} \rtimes \gamma_1\rangle \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, *где* $\gamma_0 = \mathrm{Add}_{(1_{2m+1},\, J_{2n},\, i)}$, *а автоморфизм* $\gamma_1 \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ *задан формулой*

$$\gamma_1(a) = \mathrm{Add}_{(A(a)1_n,\,1,\,B(a)1_n,\,1)} \circ \Pi, \qquad \textit{где}$$

$$A(a) = \begin{pmatrix} \cos a \cdot 1_n & \sin a \cdot 1_n \\ -\sin a \cdot 1_n & \cos a \cdot 1_n \end{pmatrix}, \quad B(a) = \begin{pmatrix} \cos a \cdot 1_n & -\sin a \cdot 1_n \\ -\sin a \cdot 1_n & \cos a \cdot 1_n \end{pmatrix}.$$

7) $\operatorname{Out}\mathfrak{psq}(n)^{(4)}_q = \{\mathrm{id}\}$;
8) $\operatorname{Out}\mathfrak{osp}_\varepsilon(4|2)^{(3)} = \{\mathrm{id}\}$ *при* $\varepsilon = \varepsilon_3$.

Доказательство теоремы проведем параллельно для случаев $\mathfrak{g}^{(k)}_\varphi$ и $\tilde{\mathfrak{g}}^{(k)}_\varphi$, где $\mathfrak{g}$ и φ перечислены в табл. Д5.2. Очевидно, что подгруппа $\operatorname{Int}\mathfrak{a}$ нормальна в $\operatorname{Aut}\mathfrak{a}$. Определим гомоморфизм $r_a\colon \mathfrak{a} \to \mathfrak{g}$ (значение в точке a), положив:

$$r_a(g \otimes f) = gf(a), \qquad \text{где } a \in S. \tag{Д5.38}$$

Пусть $\sigma \in \operatorname{Aut}\mathfrak{a}$. Для любых $l \in \mathbb{Z}$, $a \in S$, и $g \in \mathfrak{g}_i$ положим

$$\beta_{a,l}(g) = r_a \circ \sigma(g \otimes t^{kl+i}).$$

6.2а. Лемма. а) $\beta_{a,l} \in (\operatorname{End}\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{F}$;
б) $\beta_{a,l}(g) \neq 0$ *ни для каких* $g \in \mathfrak{g}$, $a \in S$, $l \in \mathbb{Z}$;
в) $[\beta_{a,0}(g_0), \beta_{a,l}(g)] = \beta_{a,l}([g_0, g])$ *для любых* $g \in \mathfrak{g}$, $g_0 \in \mathfrak{g}_0$.

Доказательство п. а) следует из определения гомоморфизма $\beta_{a,l}$.

б) Пусть $\beta_{a,l}(g) = 0$ для некоторых $a \in S$, $g \in \mathfrak{g}$, $l \in \mathbb{Z}$. Любой элемент g можно представить в виде $g = \sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant k-1} g_i$, где $g_j \in \mathfrak{g}_j$. Пусть $F = \sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant k-1} g_j \otimes t^{kl+j} \in \mathfrak{a}$. Так как супералгебра $\mathfrak{g}$ проста, то $[F, \mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$. Но $r_a\sigma(F) = 0$. Поэтому $0 = r_a[\mathfrak{a}, \sigma(F)]$ и, значит, $[\mathfrak{a}, \sigma(F)] \neq \mathfrak{a}$, что невозможно, так как $\sigma \in \operatorname{Aut}\mathfrak{a}$.

в) Пусть $g \in \mathfrak{g}_j$. Тогда

$$[\beta_{a,0}(g_0), \beta_{a,l}(g)] = [r_a\sigma(g_0), r_a\sigma(g_i \otimes t^{kl+j})] = r_a\sigma([g_0, g] \otimes t^{kl+j}) = \beta_{a,l}(g).$$

Так как $\mathfrak{g} = \oplus\mathfrak{g}_j$, то п. в) доказан. □

6.2б. Лемма. *Пусть* $\rho_{a,l} = \beta^{-1}_{a,0} \circ \beta_{a,l}$. *Тогда* $\rho_{a,l} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ *для любых* $a \in S$, $l \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть $g_0 \in \mathfrak{g}_0$, $g \in \mathfrak{g}$. Тогда в силу п. в) леммы 6.2а

$$\beta^{-1}_{a,0} \circ \beta_{a,l}([g_0, g]) = \beta^{-1}_{a,0}([\beta_{a,0}(g_0), \beta_{a,l}(g)])$$

а также

$$\beta^{-1}_{a,0}[\beta_{a,0}(g_0), \beta_{a,0}(h)] = [g_0, h] \quad \text{для любого } h \in \mathfrak{g}.$$

Пусть $h = \beta^{-1}_{a,0}\,\beta_{a,l}(g)$. Тогда

$$\beta^{-1}_{a,0}[\beta_{a,0}(g_0), \beta_{a,l}(g)] = [g_0, \beta^{-1}_{a,0}\,\beta_{a,l}(g)].$$ □

Таблица Д5.14. **Вещественные формы типа 1 супералгебр скрученных петель**

Обозначения:
$\mathrm{GL}^\circ_{\mathbb{R}}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(n) \mid \det A > 0\}$;
$\langle\overline{+}|-\rangle$ означает подгруппу $\langle\{\overline{\mathrm{Add}_{(A,B)}} \mid \det A > 0,\ \det B < 0\}\rangle$
$\langle\overline{-}|+\rangle$ означает подгруппу $\langle\{\overline{\mathrm{Add}_{(A,B)}} \mid \det A < 0,\ \det B > 0\}\rangle$;
$\mathrm{SO}^\circ(1, n)$ — связная компонента единицы группы $\mathrm{SO}(1, n)$.

$\mathfrak{t}$	$\operatorname{Aut}\mathfrak{t}/\operatorname{Aut}^\circ\mathfrak{t}$
$\mathfrak{sl}_{\mathbb{R}}(2m\vert 2n)$, где $m \neq n$	$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \simeq \langle\overline{-}\mathrm{st}\rangle \times \langle\overline{+}\vert -\rangle \times \langle\overline{-}\vert +\rangle$
$\mathfrak{sl}_{\mathbb{R}}(2m+1\vert 2n)$	$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \simeq \langle\overline{-}\mathrm{st}\rangle \times \langle\overline{+}\vert -\rangle$
$\mathfrak{sl}_{\mathbb{R}}(2m+1\vert 2n+1)$, где $m \neq n$	$\mathbb{Z}/4 \simeq \langle\overline{-}\mathrm{st}\rangle$
$\mathfrak{psl}_{\mathbb{R}}(2n\vert 2n)$	$\mathbb{Z}/2 \ltimes [\mathbb{Z}/2 \ltimes (\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2)] \simeq \langle\overline{-}\mathrm{st}\rangle \ltimes [\langle\bar{\Pi}\rangle \ltimes (\langle\overline{+}\vert -\rangle \times \langle\overline{-}\vert +\rangle)]$
$\mathfrak{psl}_{\mathbb{R}}(2n+1\vert 2n+1)$	$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4 \simeq \langle\bar{\Pi}\rangle \times \langle\overline{-}\mathrm{st}\rangle$
$\mathfrak{su}(m, p\vert n, q)$, где $m \neq n$	$\{1\}$
$\mathfrak{psu}(m, p\vert m, q)$	$\begin{cases} \{1\} & \text{при } p \neq q \\ \mathbb{Z}/2 \simeq \langle\bar{\Pi}\rangle & \text{при } p = q \end{cases}$
$\mathfrak{su}^*(2m\vert 2n)$	$\mathbb{Z}/2 \simeq \langle\overline{-}\mathrm{st}\rangle$
$\mathfrak{psu}^*(2n\vert 2n)$	$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \simeq \langle\bar{\Pi}\rangle \times \langle\overline{-}\mathrm{st}\rangle$
${}^\circ\mathfrak{pq}(n)$	$\mathbb{Z}/2 \simeq \langle\bar{\Pi}\rangle$
$\mathfrak{spe}(n)$	$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \simeq \langle\overline{\Pi \circ (-\mathrm{st})}\rangle \times \langle\bar{\delta}_{-1}\rangle$
$\mathfrak{osp}(2m, p\vert 2n)$	$\mathbb{Z}/2 \simeq \mathrm{O}(2m, p)/\mathrm{SO}(2m, p)$
$\mathfrak{osp}(2m+1, p\vert 2n)$	$\begin{cases} \{1\} & \text{при } p \neq 1 \\ \mathbb{Z}/2 \simeq \mathrm{SO}(1, 2m)/\mathrm{SO}^\circ(1, 2m) & \text{при } p = 1 \end{cases}$
$\mathfrak{osp}^*(2m\vert 2n, 2p)$	$\{1\}$
$\mathfrak{psq}_{\mathbb{R}}(2n)$	$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \simeq \mathrm{GL}(2n)/\mathrm{GL}^\circ(2n) \times \langle\bar{\delta}_{-1}\rangle$
$\mathfrak{psq}_{\mathbb{R}}(2n+1)$	$\mathbb{Z}/2 \simeq \langle\bar{\delta}_{-1}\rangle$
$\mathfrak{psq}^*(2n)$	$\mathbb{Z}/2 \simeq \langle\bar{\delta}_{-1}\rangle$
$\mathfrak{psuq}(n, p)$	$\mathbb{Z}/2 \simeq \langle\bar{\delta}_{-1}\rangle$
$\mathfrak{psl}_{\mathbb{R}}(2n)$	$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \simeq \langle\bar{\delta}_{-1}\rangle \times \mathrm{GL}(2n)/\mathrm{GL}^\circ(2n)$
$\mathfrak{spe}_{\mathbb{R}}(2n+1)$	$\mathbb{Z}/2 \simeq \langle\bar{\delta}_{-1}\rangle$
$\mathfrak{spe}^*(2n)$	$\mathbb{Z}/2 \simeq \langle\bar{\delta}_{-1}\rangle$

6.2в. Лемма. *Для всех* $\mathfrak{g}$ *и* φ, *перечисленных в таблице* Д5.6 *найдется* $j < k/2$ *и* $\mathfrak{g}_0$*-модуль* $M \subseteq \mathfrak{g}_j$, *такой что* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_0}(M, \mathfrak{g}) \simeq \mathbb{C}$ *и* $[M, M] \neq 0$.

Доказательство. Во всех случаях, кроме $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$, в качестве M можно взять единственный неприводимый подмодуль в $\mathfrak{g}_1$. В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}_\alpha(4|2)$ положим $M = \mathfrak{g}_{\bar{1}}$. □

Таблица Д5.14 (продолжение)

$\mathfrak{osp}_\alpha(4\vert 2;\ \mathbb{R})$, где $\alpha\neq 1,\ (-2)^{\pm 1}$	$\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2\simeq$ $\simeq \mathrm{GL}(2)/\,\mathrm{GL}^\circ(2)\times \mathrm{GL}(2)/\,\mathrm{GL}^\circ(2)\times \mathrm{GL}(2)/\,\mathrm{GL}^\circ(2)$
$\mathfrak{osp}_\alpha(4\vert 2;\ \mathbb{R})$ $\mathfrak{osp}^\circ_\alpha(4\vert 2)$ при $\alpha\neq 1,\ (-2)^{\pm 1}$ $\mathfrak{osp}_\alpha(4\vert 2)$ при $\operatorname{Re}\alpha=-\frac{1}{2}$	$\{1\}$ $\{1\}$ $\{1\}$
$\mathfrak{ag}^c(2)$ $\mathfrak{ag}(2;\ \mathbb{R})$	$\{1\}$ $\{1\}$
$\mathfrak{ab}(3;\ \mathbb{R})$	$\{1\}$
$\mathfrak{uo}(7)$ $\mathfrak{uo}(1,\ 6)$ $\mathfrak{uo}(2,\ 5)$	$\{1\}$ $\mathbb{Z}/2\simeq \mathrm{SO}(1,\ 6)/\,\mathrm{SO}^\circ(1,\ 6)$ $\{1\}$
$\mathfrak{vect}_\mathbb{R}(n)$	$\mathbb{Z}/2\simeq \mathrm{GL}(n)/\,\mathrm{GL}^\circ(n)$
$\mathfrak{svect}_\mathbb{R}(n)$	$\mathbb{Z}/2\simeq \mathrm{GL}(n)/\,\mathrm{GL}^\circ(n)$
$\tilde{\mathfrak{s}}\mathfrak{vect}_\mathbb{R}(n)$	$\{1\}$
$\mathfrak{h}'_\mathbb{R}(n,\ k)$	$\mathbb{Z}/2\simeq \mathrm{O}(n,\ l)/\,\mathrm{SO}(n,\ k)$, если $p\neq 1$, $n\neq 2k$ $\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2\simeq \mathrm{O}(n,\ 1)/\,\mathrm{SO}^\circ(n,\ 1)$, если $k=1$ $\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2\simeq \mathrm{CO}(l,\ k)/\,\mathrm{CO}^\circ(l,\ k)$, если $n=2k$

Таблица Д5.15. **Вещественные формы типа 3 супералгебр скрученных петель**

$\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}$	Инволюция $\rho\in\operatorname{Ant}\mathfrak{g}$, задающая $\tilde{\mathfrak{g}}^{(2)}_\rho$
$\mathfrak{sl}(m\vert n)^{(1)}$, где $m\neq n$	$\sigma,\ \ -\mathrm{st}\circ\sigma\circ\delta_i$
$\mathfrak{psl}(n\vert n)^{(1)}$, где $n>2$	$\sigma,\ \ -\mathrm{st}\circ\sigma\circ\delta_i,\ \Pi,\ \ \Pi\circ\sigma$
$\mathfrak{osp}(2m\vert 2n)^{(1)}$	$\sigma,\ \ \sigma\circ\mathrm{Add}_{(-1,\,1_{2m+2n-1})}$
$\mathfrak{osp}(2m+1\vert 2n)^{(1)}$	σ
$\mathfrak{psl}(2\vert 2)^{(1)}$	$\sigma,\ \ \Pi\circ\sigma$
$\mathfrak{psq}(n)^{(1)}$	$\sigma,\ \ \sigma\circ\delta_{-1},\ \ \sigma\circ q,\ \ \sigma\circ q\circ\delta_{-1}$
$\mathfrak{psl}(n)^{(1)}$	σ
$\mathfrak{osp}_\alpha(4\vert 2)^{(1)}$	$\begin{cases}\sigma & \text{при } \alpha\in\mathbb{R},\\ \sigma\circ d_{23} & \text{при } \operatorname{Re}\alpha=-\frac{1}{2}\end{cases}$
$\mathfrak{ag}(2)^{(1)}$	σ
$\mathfrak{ab}(3)^{(1)}$	σ
$\mathfrak{vect}(n)^{(1)}$, $\mathfrak{svect}(n)^{(1)}$	σ
$\mathfrak{h}'(n)^{(1)}$	$\sigma,\ \ \sigma\circ A$

Следствие. 1) *Существует функция* ψ *на* S, *такая что*

$$\rho_{a,l}(m)=\psi^l(a)\cdot m \text{ для любых } m\in M \text{ и } a\in S.$$

2) $\sigma(g\otimes t^{kl+j})=\beta_{0,t}(g)\psi^l$ *для любого* $g\in\mathfrak{g}_j$.

3) *Существует функция* $\mathcal{X}$ *на* S, *такая что* $\psi=\mathcal{X}^k$.

Доказательство. 1) Так как $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}_0}(M,\ \mathfrak{g})=\mathbb{C}$, то $\rho_{a,l}(m)=\psi^l(a)\cdot m$ для некоторой функции ψ на S. Так как $[M,\ M]\neq 0$, то найдутся $m_1,\ m_2\in M$, такие что $[m_1,\ m_2]\neq 0$. Так как

$$[\rho_{a,l_1}(m_1),\ \rho_{a,l_2}(m_2)]=[\rho_{a,0}(m_1),\ \rho_{a,l_1+l_2}(m_2)]\neq 0,$$

то $\psi_{l_1}\cdot\psi_{l_2}=\psi_{l_1+l_2}$, а, значит, $\psi_l=\psi^l$, где $\psi=\psi_1$.

2) Пусть $g=[h,\ m]$ для некоторых $h\in\mathfrak{g}$, $m\in M$. Вычислим $\beta_{l,a}(g)$. По лемме 6.2а

$$\beta_{l,a}(g)=\beta_{l,a}([h,\ m])=[\beta_{0,a}(h),\ \beta_{l,a}(m)],$$

но $\beta_{l,a}(m)=\beta_{0,a}(p)\cdot\psi^l(a)$. Поэтому

$$\beta_{l,a}(g)=[\beta_{0,a}(h),\ \beta_{0,a}(m)]\cdot\psi^l(a)=\beta_{0,a}([h,\ m])\cdot\psi^l(a)=\beta_{0,a}(g)\cdot\psi^l(a).$$

Так как супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста, то $[\mathfrak{g},\ M]=\mathfrak{g}$. Поэтому

$$\beta_{l,a}(g)=\beta_{0,a}(g)\cdot\psi^l(a) \ \text{ для любого } g\in\mathfrak{g}.$$

Отсюда очевидно вытекает утверждение 2).

3) Так как $\sigma(g\otimes t^{kl+j})\in\mathfrak{a}$ для любого $g\in\mathfrak{g}_j$, то из п. 2) выводим, что $\psi(\varepsilon_k t)=\psi(t)$ для любого t, откуда получаем требуемое. □

6.3. Предложение. *Пусть* $\sigma\in\operatorname{Aut}\mathfrak{a}$. *Тогда существуют функция* $\mathcal{X}\in\mathcal{F}$, *равная* $\lambda t^{\pm 1}$ *в случае* $\mathcal{F}=\mathbb{C}[t,\ t^{-1}]$ (*или такая, что* $|\mathcal{X}(t)|=1$ *и функция* $\mathcal{X}$ *задает диффеоморфизм окружности на себя в случае* $\mathcal{F}=C^\infty(S)$) *и функция* $\zeta_t\in\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, *определяющие автоморфизм* σ *формулой*:

$$\sigma(g\otimes f(t))=\zeta_t(g)\otimes f(\mathcal{X}(t)). \tag{Д5.39}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{X}$ — функция такая же, как в п. 3) следствия 6.2в, а

$$\zeta_t(g)=\beta_{0,t}(g)\mathcal{X}^j \ \text{ для любого } g\in\mathfrak{g}.$$

Тогда в силу п. 2) следствия 6.2в имеем

$$\sigma(g\otimes t^{kl+j})=\zeta_t(g)\otimes\mathcal{X}(t)^{kl+j} \ \text{ для любых } g\in\mathfrak{g}_i \text{ и } l\in\mathbb{Z}.$$

$\underline{\mathfrak{a}=\mathfrak{g}^{(k)}_\varphi,\ \mathcal{F}=\mathbb{C}[t,\ t^{-1}]}$. В этом случае формула (Д5.39) очевидна в силу линейности автоморфизма σ. Из нее следует, что $\zeta_t(g)\in\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ для любого t.

Так как $\beta_{0,t}\in(\operatorname{End}\mathfrak{g})\otimes\mathbb{C}[t,\ t^{-1}]$ (лемма 6.2а), то $\mathcal{X},\ \mathcal{X}^{-1}\in\mathbb{C}[t,\ t^{-1}]$ и поэтому $\zeta_t\in(\operatorname{End}\mathfrak{g})\otimes\mathbb{C}[t,\ t^{-1}]$, а $\mathcal{X}=\lambda t^r$. Запишем σ^{-1} также в виде

$$\sigma^{-1}(g\otimes f(t))=\Theta_t(g)\otimes f(\varkappa(t)). \tag{Д5.40}$$

Тогда условие $\sigma\sigma^{-1}=\mathrm{id}$ перепишется в виде:

$$\zeta_t\circ\Theta_{\mathcal{X}(t)}=\mathrm{id},\qquad \mathcal{X}(\varkappa(t))=t. \tag{Д5.41}$$

Мы видим, что $\varkappa=\lambda t^{\pm 1}$, а $\mathcal{X}=\lambda^{-1}t^{\pm 1}$, что доказывает предложение в этом случае.

$\underline{\mathfrak{a}=\tilde{\mathfrak{g}}^{(k)}_\varphi,\ \mathcal{F}=C^\infty(S)}$. Автоморфизм σ определяется своими значениями на множестве $\mathfrak{g}^{(k)}_\varphi$ всюду плотном в $\mathfrak{a}$. Так как для любого сходящегося ряда $\gamma=\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\alpha_l g\otimes t^{kl+j}$ ряд $\sigma(\gamma)$ тоже должен сходиться, то значит сходится и ряд $\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\alpha_l\mathcal{X}^{kl}(t)$. Следовательно $|\mathcal{X}(t)|=1$. Написав формулу (Д5.40) для σ^{-1} так же, как в предыдущем случае, получим условие (Д5.41). Условие $\mathcal{X}(\varkappa(t))=t$ означает, что $\mathcal{X}$ и $\varkappa$ задают диффеоморфизм окружности S на себя, что доказывает предложение. □

6.4. Предложение. *В условиях предложения* 6.3 *функции* $\zeta_t \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ *и* $\mathcal{X}(t) \in \mathcal{F}$ *удовлетворяют одному из двух условий*:

$$\begin{aligned} &1)\ \mathcal{X}(\varepsilon_k t) = \mathcal{X}(t)\cdot\varepsilon_k, \qquad \zeta^{-1}_{\varepsilon_k t}\cdot\varphi\cdot\zeta_t = \varphi,\\ &2)\ \mathcal{X}(\varepsilon_k t) = \mathcal{X}(t)\cdot\varepsilon_k^{-1}, \quad \zeta^{-1}_{\varepsilon_k t}\cdot\varphi\cdot\zeta_t = \varphi^{-1}. \end{aligned}$$

Доказательство. Запишем условие

$$\sigma(g\otimes t^j)\in\mathfrak{a}\ \text{ для любого } g\in\mathfrak{g}_j$$

в виде

$$\mathcal{X}(\varepsilon_k t)^j\zeta_{\varepsilon_k t}(g) = \mathcal{X}(t)^j\varphi(\zeta_t(g)).$$

Иначе говоря,

$$\zeta^{-1}_{\varepsilon_k t}\varphi\zeta_t(g) = \Big(\frac{\mathcal{X}(\varepsilon_k t)}{\mathcal{X}(t)}\Big)^j g\ \text{ для любого } g\in\mathfrak{g}_j.$$

Так как

$$\zeta^{-1}_{\varepsilon_k t}\varphi\zeta_t\in\operatorname{Aut}\mathfrak{g}\ \text{ для любого } t\in S,$$

то

$$\mathcal{X}(\varepsilon_k t)/\mathcal{X}(t) = \varepsilon_k^s\ \text{ для некоторого } s\leqslant k-1.$$

Заметим, что во всех рассматриваемых нами случаях $k\leqslant 4$. Если $k\leqslant 3$, то, очевидно, $s=\pm 1$. Если $k=4$, то возможен случай $s=2$. Пусть $\bar\zeta_t$ — образ автоморфизма ζ_t при естественной проекции $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}\to\operatorname{Aut}\mathfrak{g}/\operatorname{Aut}^\circ\mathfrak{g}$. Тогда $\bar\zeta_t = \bar\zeta_{\varepsilon_k t}$ в силу непрерывности функции ζ_t. Поэтому $\bar\varphi^s = \bar\zeta_t^{-1}\varphi\bar\zeta_t$. Но тогда $s\neq 2$, поскольку $\operatorname{ord}\bar\varphi^2\neq\operatorname{ord}\bar\varphi$. □

6.4a. Следствие. *Пусть* $C((\varepsilon_k t,\ \varphi))$ — *централизатор элемента* $(\varepsilon_k t,\ \varphi)$ *в группе* $L\rtimes\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}\otimes\mathcal{F})$. *Группа*

$$\operatorname{Int}\mathfrak{a}\cong(C((\varepsilon_k t,\ \varphi))\cap(L^\circ\ltimes\operatorname{Aut}^\circ(\mathfrak{g}\otimes\mathcal{F})/\langle\overline{(\varepsilon_k t,\ \varphi)}\rangle)$$

нормальна в группе $\operatorname{Aut}\mathfrak{a}\cong C((\varepsilon_k t,\ \varphi))/\langle\overline{(\varepsilon_k t,\ \varphi)}\rangle$.

Доказательство. По предложению 6.4 существует эпиморфизм $C((\varepsilon_k t,\ \varphi))\to\operatorname{Aut}\mathfrak{a}$. Простое вычисление показывает, что ядро этого эпиморфизма есть $\langle\overline{(\varepsilon_k t,\ \varphi)}\rangle$. Утверждение о группе $\operatorname{Int}\mathfrak{a}$ очевидно. □

6.5. Пусть $\mathrm{Pr}\colon L\ltimes\operatorname{Aut}\mathfrak{g}\otimes\mathcal{F}\to\langle\overline{\mathrm{inv}}\rangle\times\operatorname{Aut}\mathfrak{g}/\operatorname{Aut}^\circ\mathfrak{g}$ — гомоморфизм, заданный формулой

$$\mathrm{Pr}((\mathcal{X}(t),\ \zeta_t)) = (\bar{\mathcal{X}}(t),\ \bar\zeta_t),$$

где $\bar{\mathcal{X}}(t)$ — образ элемента $\mathcal{X}$ при естественной проекции $L\to L/L^\circ$, а $\bar\zeta_t$ — образ автоморфизма ζ_t при естественной проекции $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}\to\operatorname{Aut}\mathfrak{g}/\operatorname{Aut}^\circ\mathfrak{g}$. (Напомним, что верхний индекс $\circ$ выделяет связную компоненту единицы группы.)

Пусть Γ_φ — подгруппа в группе $\langle\overline{\mathrm{inv}}\rangle\times\operatorname{Aut}\mathfrak{g}/\operatorname{Aut}^\circ\mathfrak{g}$, состоящая из элементов вида

$$(1\times g),\quad\text{где } g\in C(\bar\varphi),\quad\text{и}\quad(\mathrm{inv},\ g),\ \text{ где } g\bar\varphi g^{-1} = \bar\varphi^{-1}.$$

Очевидно, что $\mathrm{Pr}(C((\varepsilon_k t,\ \varphi)))\subset\Gamma_\varphi$. Так как $\mathrm{Pr}(\langle\overline{(\varepsilon_k t,\ \varphi)}\rangle) = \bar\varphi$, а

$$\operatorname{Aut}\mathfrak{a}\cong C((\varepsilon_k t,\ \varphi))/\langle\overline{(\varepsilon_k t,\ \varphi)}\rangle,$$

то можно естественным образом определить гомоморфизм $\mathrm{Pr}_\varphi\colon\ \operatorname{Aut}\mathfrak{a}\to\Gamma_\varphi/\langle\bar\varphi\rangle$.

Предложение. $\operatorname{Ker}\mathrm{Pr}_\varphi = \operatorname{Int}\mathfrak{a}$, *а* $\operatorname{Im}\mathrm{Pr}_\varphi = \Gamma_\varphi/\langle\bar\varphi\rangle$.

Доказательство. $\operatorname{Ker}\mathrm{Pr}_\varphi = \operatorname{Int}\mathfrak{a}$, поскольку $\operatorname{Ker}\mathrm{Pr} = L^\circ\ltimes\operatorname{Aut}^\circ\mathfrak{g}\otimes\mathcal{F}$.

Покажем, что $\operatorname{Im}\mathrm{Pr}_\varphi = \Gamma_\varphi/\langle\bar\varphi\rangle$. Пусть φ_1 — автоморфизм супералгебры $\mathfrak{g}$, такой что $\bar\varphi_1\in C(\bar\varphi)$. Пусть $\varphi_2 = \varphi_1\varphi\varphi_1^{-1}$. Тогда $\bar\varphi_2 = \bar\varphi$, причем $\operatorname{ord}\varphi_2 = \operatorname{ord}\varphi$. Поэтому по предложению 4.3 найдется $\psi\in\operatorname{Aut}^\circ\mathfrak{g}$, такой что

$$\psi\varphi_2\psi^{-1} = \varphi\circ\exp h\ \text{ для некоторого } h\in\operatorname{Der}\mathfrak{g},\ \varphi(h) = h.$$

Положим

$$\zeta_t = \psi\varphi_1\circ\exp(k\ a\ h),\quad\text{где } e^{ia} = t,\quad\mathcal{X}(t) = t.$$

Предложение 6.4 очевидно показывает, что $\zeta_t\in\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ и $\mathcal{X}(t)$ задают некоторый автоморфизм $\sigma\in\operatorname{Aut}\mathfrak{g}^{(k)}_\varphi$, причем $\mathrm{Pr}_\varphi(\sigma) = 1\times\bar\varphi_1$. Пусть φ_1 — автоморфизм супералгебры $\mathfrak{g}$, такой что

$$\bar\varphi_1\bar\varphi\bar\varphi_1{}^{-1} = \bar\varphi^{\,-1}.$$

По предложению 4.3 найдется автоморфизм $\psi\in\operatorname{Aut}^\circ\mathfrak{g}$, такой что

$$\psi\varphi_1\varphi\varphi_1^{-1}\psi^{-1} = \varphi^{-1}\circ\exp h\ \text{ для некоторого } h\in\mathfrak{der}\mathfrak{g},\ \text{такого что } \varphi(h) = h.$$

Положим

$$\zeta_t = \psi\varphi_1\exp(k\ a\ h),\quad\text{где } e^{ia} = t,\quad\mathcal{X}(t) = t^{-1}.$$

Тогда $\zeta_t\in\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ и $\mathcal{X}(t)$ задают автоморфизм $\sigma\in\operatorname{Aut}\mathfrak{g}^{(k)}_\varphi$, причем $\mathrm{Pr}_\varphi(\sigma) = \mathrm{inv}\times\bar\varphi_1$. □

Из предложения 6.5 вытекает утверждение теоремы 6.2. □

6.6. Три типа вещественных форм супералгебр петель. Две антилинейных инволюции σ_1 и σ_2 (скрученной) супералгебры петель $\tilde{\mathfrak{g}}^{(k)}_\varphi$ будем считать *эквивалентными*, если найдется автоморфизм $\psi\in\operatorname{Aut}^\circ(\tilde{\mathfrak{g}}^{(k)}_\varphi)$, такой что $\psi\sigma_1\psi^{-1} = \sigma_2$. Обозначим символом $\mathrm{CLRe}(\tilde{\mathfrak{g}}^{(k)}_\varphi)$ множество классов эквивалентности антилинейных инволюций супералгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}^{(k)}_\varphi$. По доказанному ранее, на основании замечания 3.2,[1] каждая инволюция (представитель класса) $[\sigma]\in\mathrm{CLRe}(\tilde{\mathfrak{g}}^{(k)}_\varphi)$ имеет в терминах углового параметра a на S вид

$$\sigma = \zeta(a)\otimes\mathcal{X}(a),$$

где $\zeta(a)\in(\mathrm{Ant}\,\mathfrak{g})^S$ — функция на S со значениями в множестве антиавтоморфизмов супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $\mathcal{X}(a)$ — функция, задающая репараметризацию окружности, т. е.

$$\sigma(g(a)) = \zeta(a)\big(g(\bar{\mathcal{X}}(a))\big)\ \text{ в каждой точке } a\in S.$$

Так как $\sigma^2 = \mathrm{id}$, то $\mathcal{X}(\mathcal{X}(a)) = a$; поэтому, с точностью до сопряжения в группе диффеоморфизмов окружности, репараметризация сопряжена одной из следующих функций:

$$\begin{aligned} &1)\quad \mathcal{X}_1(a) = a,\\ &2)\quad \mathcal{X}_2(a) = -a\\ &3)\quad \mathcal{X}_3(a) = a+\pi. \end{aligned}\tag{Д5.42}$$

Без потери общности можно считать, что $\mathcal{X}(a)$ — одна из этих функций, а инволюции и *вещественные формы* назовем соответственно инволюцией (формой) *типа* 1, 2 или 3.

---

[1] Чтобы воспользоваться замечанием, надо бы доказать, что σ коммутирует с инволюцией.

Для $\sigma = \zeta(a) \otimes \mathcal{X}(a) \in \mathrm{CLRe}(\tilde{\mathfrak{g}}_\varphi^{(k)})$ имеем

$$\zeta(a + 2\pi/k) = \begin{cases} \varphi\zeta(a)\varphi^{-1}, & \text{если } \sigma \text{ типа 1 или 3,} \\ \varphi\zeta(a)\varphi, & \text{если } \sigma \text{ типа 2.} \end{cases}$$

Если k четно, мы не будем рассматривать анти-инволюции типа 3, так как они сводятся к анти-инволюциям типа 1:

$$\zeta(a) \otimes \mathcal{X}_3(a) = \zeta(a)\varphi^{k/2} \otimes \mathcal{X}_1(a).$$

Результаты, полученные для (супер)алгебр петель, продолжаются на нетривиальные центральные расширения — аффинные (супер)алгебры Каца—Муди.

6.6a. Вещественные формы типа 1. В этом разделе используются антиавтоморфизмы и самой алгебры $\mathfrak{g}$, и ассоциированной с ней алгебры петель $\tilde{\mathfrak{g}}_\varphi^{(k)}$. Сохраним символ σ за автоморфизмами алгебры петель, а антиавтоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ обозначим буквой ρ. Очевидно, что если $\zeta(a)$ — непрерывное семейство антиинволюций алгебры $\mathfrak{g}$, то все эти $\zeta(a)$ сопряжены друг другу, и значит, всякая антиинволюция $\sigma = \zeta(a) \otimes \mathcal{X}_1(a)$ алгебры петель определяет некоторый класс эквивалентности $[\rho]$ антиинволюций самой алгебры $\mathfrak{g}$ и существует гладкая функция $X(a)$ на окружности со значениями в $\mathrm{Aut}^\circ(\mathfrak{g})$, такая что $\zeta(a) = X(a)\rho X^{-1}(a)$. Условие

$$\zeta\Big(a + \frac{2\pi}{k}\Big) = \varphi\zeta(a)\varphi^{-1},$$

которому должны удовлетворять автоморфизмы алгебры скрученных петель, накладывает на класс $[\rho]$ требование $\varphi[\rho]\varphi^{-1} = [\rho]$, или, что то же самое, $\varphi\rho\varphi^{-1} \sim \rho$ для любого $\rho \in [\rho]$. В свете вышеизложенного, для любого автоморфизма $\varphi \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ положим

$$\mathrm{Int}_\varphi\,\mathfrak{g} := \{[\rho] \in \mathrm{CLRe}(\mathfrak{g}) \mid \varphi[\rho]\varphi^{-1} = [\rho]\}.$$

Ясно, что множество $\mathrm{Int}_\varphi\,\mathfrak{g}$ зависит лишь от класса $[\varphi] \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Aut}^\circ\mathfrak{g}$.

Лемма. 1) *Если* $\rho \in \mathrm{Int}_\varphi\,\mathfrak{g}$, *то существует инволюция* $\zeta(a) \otimes \mathcal{X}_1(a)$ *типа* 1 *супералгебры Ли* $\tilde{\mathfrak{g}}_\varphi^{(k)}$, *такая что* $\zeta(a) \sim \rho$ *при всех* $a \in S$.

2) *Пусть* $\mathfrak{g}^\rho$ *— вещественная форма супералгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *выделенная анти-автоморфизмом* ρ. *Тогда*

$$\zeta_1(a) \otimes \mathcal{X}_1(a) \sim \zeta_2(a) \otimes \mathcal{X}_1(a) \iff \zeta_1(a) \sim \zeta_2(a),$$

поэтому найдутся $\mathrm{Aut}^\circ\mathfrak{g}$-*значные функции* $Y_i(a)$, *такие что* $\rho = Y_i^{-1}(a)\zeta_i(a)Y_i(a)$ *для* $i = 1$ *и* 2, *причем*

$$Y_1(2\pi/k)Y_2^{-1}(2\pi/k)\varphi^{-1}Y_2(0)Y_1^{-1}(0) \in \mathrm{Exp}(\mathfrak{der}\,\mathfrak{g})^\sigma.$$

3) *Любая вещественная форма типа* 1 *супералгебры токов* $\tilde{\mathfrak{g}}_\varphi^{(k)}$ *изоморфна супералгебре токов* $\tilde{\mathfrak{h}}_\psi^{(s)}$, *где* $\mathfrak{h}$ *— вещественная форма супералгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *а* $\psi \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{h}$ *— такой автоморфизм, что* $\varphi \equiv \psi \bmod \mathrm{Aut}^\circ\mathfrak{g}$, *причем в правой части этого сравнения автоморфизм* $\psi \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{h}$ *считается продолженным на комплексификацию* $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$.

4) *Пусть* $\mathfrak{h}_1$ *и* $\mathfrak{h}_2$ *— конечномерные вещественные* (*супер*)*алгебры Ли, а* $(\tilde{\mathfrak{h}}_1)_{\varphi_1}^{(k_1)}$ *и* $(\tilde{\mathfrak{h}}_2)_{\varphi_2}^{(k_2)}$ *— соответствующие скрученные супералгебры петель. Эти супералгебры петель изоморфны, если и только если* $\mathfrak{h}_1 \simeq \mathfrak{h}_2 \simeq \mathfrak{h}$, *а* $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \bmod \mathrm{Aut}^\circ\mathfrak{h}$.

Итак, чтобы описать все вещественные формы типа 1 супералгебр петель, достаточно описать группу $\mathrm{Out}^\circ\mathfrak{h} = \mathrm{Aut}\,\mathfrak{h}/\mathrm{Aut}^\circ\mathfrak{h}$ для всех простых вещественных супералгебр Ли $\mathfrak{h}$; ответ — в табл. Д5.14.

Доказательство. 1) Так как $\varphi[\rho]\varphi^{-1} = [\rho]$, то существует автоморфизм $y \in \mathrm{Aut}^\circ\mathfrak{g}$, такой что $\varphi\rho\varphi^{-1} = y\rho y^{-1}$. Соединим автоморфизм y с единицей произвольной гладкой кривой $X(a)$, где $a \in [0, 2\pi/k]$, такой что $X(0) = 1 \in \mathrm{Aut}^\circ\mathfrak{g}$, а $X(2\pi/k) = y \in \mathrm{Aut}^\circ\mathfrak{g}$, и продолжим функцию $X(a)$ на луч $[0, \infty)$, положив $X(a + 2\pi/k) = \varphi X(a)\varphi^{-1}y$. (Обращаем внимание читателя на то, что мы не требуем, чтобы функция X опускалась на окружность.) Положим $\zeta = X(a)\rho X(a)^{-1}$.

Тогда

$$\zeta(a + 2\pi/k) = \varphi X(a)\varphi^{-1}y\sigma y^{-1}\varphi X^{-1}(a)\varphi^{-1} = \varphi X(a)\sigma X^{-1}(a)\varphi^{-1} = \varphi\zeta(a)\varphi^{-1},$$

так что $\zeta(a) \otimes \mathcal{X}_1(a)$ — искомая инволюция.

2) Очевидно, что $\zeta_1(a) \otimes \mathcal{X}_1(a) \sim \zeta_2(a) \otimes \mathcal{X}_1(a) \Longrightarrow \zeta_1(a) \sim \zeta_2(a)$ при всех a и найдется $\mathrm{Aut}^\circ\mathfrak{g}$-значная функция на окружности Y на окружности, такая что $Y(a)\zeta_1(a)Y^{-1}(a) = \zeta_2(a)$. Очевидно, что $Y(a) = \mathcal{X}_1(a)\mathcal{X}_2^{-1}(a)Y_0(a)$, где $Y_0(a)\sigma = \sigma Y_0(a)$.

У нас есть три равенства:

$$\zeta_2(a) = Y(a)\zeta_1(a)Y(a)^{-1}, \quad \zeta_1(a) = Y_1(a)\rho Y_1(a)^{-1}, \quad \zeta_2(a) = Y_2(a)\rho Y_2(a)^{-1},$$

из которых следует, что

$$Y_2(a)\rho Y_2(a)^{-1} = Y(a)Y_1(a)\rho Y_1(a)^{-1}Y(a)^{-1}$$

откуда получаем, что

$$Y_2(a)^{-1}Y(a)Y_1(a)\rho = \rho Y_2(a)^{-1}Y(a)Y_1(a),$$

т. е. автоморфизм Y_0, перестановочный с инволюцией ρ и, значит, являющийся автоморфизмом вещественной формы $\mathfrak{g}^\rho$, имеет вид $Y_0(a) = Y_2(a)^{-1}Y(a)Y_1(a)$. Соответственно, $Y(a) = Y_2(a)Y_0(a)Y_1^{-1}$. Конечно, $Y_0(0)$ и $Y_0(2\pi/k)$ лежат на одной кривой и, значит, $Y_0(2\pi/k)Y_0(0)^{-1} \in \mathrm{Exp}\,\mathfrak{der}\,\mathfrak{g}^\rho$, но этот элемент не имеет нужного вида.

Задача. Как это исправить?

Так как $\zeta_1(a) \sim \zeta_2(a)$, то $\mathcal{Y}(a + 2\pi/k) = \psi\mathcal{Y}(a)\psi^{-1}$, а значит, $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1(0)\mathcal{X}_2^{-1}(0)$, а $\mathcal{Y} = \psi\mathcal{X}_1(2\pi/k)\mathcal{X}_2^{-1}(2\pi/k)\psi^{-1}$ принадлежит той же компоненте связности, что и $\mathcal{X}$, т. е. они различаются на элемент из $\mathrm{Exp}\,\mathfrak{der}\,\mathfrak{g}^\sigma$.

Обратно, если $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ лежат в одной компоненте связности, то можно выбрать $\mathrm{Exp}(\mathfrak{der}\,\mathfrak{g})^\sigma$-значную функцию $\mathcal{Y}_0$, такую что $\mathcal{Y}(a + 2\pi/k) = \psi\mathcal{Y}(a)\psi^{-1}$.

3), 4) Для $\mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{g}}_\varphi^{(k)}$ и $\sigma = \zeta(a) \otimes \mathcal{X}_1(a)$ опишем $\mathfrak{a}^\sigma$. У нас есть вещественная структура σ алгебры петель $\mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{g}}_\varphi^{(k)}$ типа 1. Она имеет вид $\zeta(a) \otimes \mathcal{X}_1(a)$ и, как мы уже обсудили, все $\zeta(a)$

принадлежат одному классу эквивалентности $[\rho]$ вещественных структур алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда $\zeta(a)=X(a)\rho X(a)^{-1}$. Пусть $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}^{\rho}$; что такое $\mathfrak{a}^{\sigma}$? По определению:

$$\mathfrak{a}^{\sigma}=\{g(a)\in\mathfrak{a}\mid\sigma(g(a))=g(a)\}.$$

Но $\sigma(g(a))=\zeta(a)g(a)=X(a)\rho X(a)^{-1}g(a)$ и

$$\sigma(g(a))=g(a)\Longleftrightarrow\rho(f(a))=f(a),\ \text{ где } f(a)=X^{-1}(a)g(a))\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow f(a)\in\mathfrak{h}\text{ для любой точки } a.$$

Какие при этом у нас есть условия на функцию f? На $g(a)$ и $\zeta(a)$ у нас такие условия:

$$g(a+2\pi/k)=\varphi g(a),\qquad\zeta(a+2\pi/k)=\varphi\zeta(a)\varphi^{-1}.$$

Из второго условия получаем

$$X(a+2\pi/k)\rho X(a+2\pi/k)^{-1}=\varphi X(a)\rho X(a)^{-1}\varphi^{-1}\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow X(a+2\pi/k)^{-1}\varphi X(a)\rho=\rho X(a+2\pi/k)^{-1}\varphi X(a)\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow X(a+2\pi/k)^{-1}\varphi X(a)\in\operatorname{Aut}^{\circ}(\mathfrak{h}).$$

Первое же равенство дает соотношение 1)

$$f(a+2\pi/k)=X(a+2\pi/k)^{-1}g(a+2\pi/k)=$$
$$=X(a+2\pi/k)^{-1}\varphi g(a)=X(a+2\pi/k)^{-1}\varphi X(a)f(a).\quad\square$$

6.6б. Вещественные формы типа 2.

Лемма. 1) *Пусть* $\mathfrak{a}=\tilde{\mathfrak{g}}_{\varphi}^{(k)}$, *а* $\sigma_1=\zeta_1(a)\otimes\mathcal{X}_2(a)$ *и* $\sigma_2=\zeta_2(a)\otimes\mathcal{X}_2(a)$ *— две ее инволюции. Тогда* $\sigma_1\sim\sigma_2$, *если и только если* $\zeta_1(\pi)\sim\zeta_2(\pi)$ *и* $\zeta_1(\pi-\pi/k)\varphi\sim\zeta_2(\pi-\pi/k)\varphi$.

2) *Каждой паре* $\sigma_1,\ \sigma_2\in\mathrm{CLRe}(\mathfrak{g})$ *вещественных структур супералгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *таких что* $\sigma_1^{-1}\sigma_2\equiv\varphi\bmod\operatorname{Aut}^{\circ}\mathfrak{g}$, *соответствует вещественная форма супералгебры Ли* $\tilde{\mathfrak{g}}_{\varphi}^{(k)}$, *заданная инволюцией* $\zeta(a)\otimes\mathcal{X}_2(a)$, *такой что* $\zeta(\pi)=\sigma_1$, *а* $\zeta(\pi-\pi/k)=\sigma_2\varphi^{-1}$.

3) *На множестве*

$$\mathfrak{R}_2(\tilde{\mathfrak{g}}_{\varphi}^{(k)}):=\{(\sigma_1,\ \sigma_2)\mid\sigma_1,\ \sigma_2\in\mathrm{CLRe}(\mathfrak{g}),\ \ a\ \sigma_1^{-1}\sigma_2\equiv\varphi\bmod\operatorname{Aut}^{\circ}\mathfrak{g}\}$$

зададим отношение эквивалентности R, *положив*

$$(\sigma_1,\ \sigma_2)\sim_R(\tau_1,\ \tau_2)\iff\sigma_1\sim\tau_1,\quad\sigma_2\sim\tau_2.$$

Множество вещественных форм типа 2 супералгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}_{\varphi}^{(k)}$ *находится во взаимно-однозначном соответствии с фактормножеством* $\mathrm{CLRe}_2(\tilde{\mathfrak{g}}_{\varphi}^{(k)}):=\mathfrak{R}_2(\tilde{\mathfrak{g}}_{\varphi}^{(k)})/R$.

---

1) **Вопросы** читателю: 1) сдвиг на $2\pi/k$ подкручивает нашу функцию на автоморфизм алгебры $\mathfrak{h}$, но почему этот автоморфизм не зависит от a? 2) Куда девается из него φ? 3) Почему всегда можно выбрать φ конечного порядка?

Доказательство. 1) Так как $\zeta_i(a)\zeta_i(-a)=\mathrm{id}$, а $\zeta_i(a+2\pi/k)=\varphi\zeta_i(a)\varphi$, то и $\zeta_i(\pi)$ и $\zeta_i(\pi-\pi/k)\varphi$ — инволюции.

С другой стороны, то, что $\sigma_1\sim\sigma_2$, означает, что существует $\operatorname{Aut}^{\circ}\mathfrak{g}$-значная функция Z на S, такая что

$$Z(a)\zeta_1(a)Z^{-1}(-a)=\zeta_2(a),\qquad Z(a+2\pi/k)=\varphi Z(a)\varphi^{-1}.$$

Поэтому $Z(\pi)\zeta_1(\pi)Z^{-1}(\pi)=\zeta_2(\pi)$, а

$$Z(\pi-\pi/k)\zeta_1(\pi-\pi/k)Z^{-1}(\pi+\pi/k)=$$
$$=Z(\pi-\pi/k)\zeta_1(\pi-\pi/k)\varphi Z^{-1}(\pi-\pi/k)\varphi^{-1}=\zeta_2(\pi-\pi/k),$$

т. е.

$$Z(\pi-\pi/k)\zeta_1(\pi-\pi/k)\varphi Z^{-1}(\pi-\pi/k)=\zeta_2(\pi-\pi/k)\varphi.$$

Обратно, если ζ_1 и ζ_2 удовлетворяют условиям леммы, то можно предположить, что их значения совпадают в точках π и $\pi-\pi/k$. Пусть $\zeta_1(a)=\zeta_2(a)Z(a)$, где $Z(a)\in\operatorname{Aut}^{\circ}\mathfrak{g}$. Зададим $\operatorname{Aut}^{\circ}\mathfrak{g}$-значную функцию Y на S, положив

$$Y(a)=\begin{cases}Z(a)&\text{при } a\in[\pi-\pi/k,\ \pi],\\1&\text{при } a\in[\pi,\ \pi+\pi/k]\end{cases}$$

и доопределив в остальных точках из условия $Y(a+2\pi/k)=\varphi Y(a)\varphi^{-1}$. Положим $\tau=Y(a)\otimes\mathcal{X}_1(a)$. Очевидно, что $\tau\in\operatorname{Aut}^{\circ}\mathfrak{a}$ и $\tau\sigma_1\tau^{-1}=\sigma_2$.

2) Достаточно построить функцию ζ, такую что $\zeta(a+2\pi/k)=\varphi\zeta(a)\varphi^{-1}$, $\zeta(\pi)=\sigma_1$, $\zeta(\pi-\pi/k)=\sigma_2\varphi^{-1}$. В классе гладких функций такую функцию построить легко, ср. замечание 6.6в.

3) Доказательство следует из пунктов 1) и 2). $\square$

6.6в. Замечание. Если петли полиномиальны, то такой функции $\mathcal{Y}$, как в п. 1) доказательства, может и не быть, и следовательно, надо полностью изменить доказательство, причем могут (хоть мы в это и не верим) появиться дополнительные, по сравнению с гладкими петлями, вещественные формы. «Существуют ли такие формы?» — открытый **вопрос**.

6.6г. Вещественные формы типа 3.

Обозначим символом $\operatorname{Ant}\mathfrak{g}$ множество антилинейных автоморфизмов комплексной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. Очевидно, что множество $\operatorname{Aunt}\mathfrak{g}:=\operatorname{Aut}\mathfrak{g}\cup\operatorname{Ant}\mathfrak{g}$ — вещественная группа Ли, а $\operatorname{Aut}^{\circ}\mathfrak{g}$ — нормальная подгруппа в ней. Положим

$$\operatorname{Ont}\mathfrak{g}:=\operatorname{Ant}\mathfrak{g}/\operatorname{Aut}^{\circ}\mathfrak{g},\qquad\operatorname{Ount}\mathfrak{g}:=\operatorname{Aunt}\mathfrak{g}/\operatorname{Aut}^{\circ}\mathfrak{g}.$$

Пусть $\operatorname{Ont}_2\mathfrak{g}$ — подмножество элементов порядка 2 в $\operatorname{Ont}\mathfrak{g}$, и пусть $\mathrm{pr}\colon\ \operatorname{Aut}^{\pm}\mathfrak{g}\to\operatorname{Ount}\mathfrak{g}$ — естественная проекция.

Лемма. 1) *Для каждого* $\tau\in\operatorname{Ont}_2$ *найдется вещественная структура* $\rho\in\mathrm{CLRe}(\mathfrak{g})$, *такая что* $\mathrm{pr}(\rho)=\tau$.

2) *Множество неизоморфных вещественных форм типа 3 супералгебры петель* $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}$ *находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством* $\operatorname{Ont}_2\mathfrak{g}$, *а именно, для любого* $\rho\in\mathrm{pr}^{-1}(\tau)$ *имеем*

$$\tilde{\mathfrak{g}}_{\rho}^{(2)}=\{f\in\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}\mid f(a+\pi)=\rho(f(a))\}\longleftrightarrow\tau\in\operatorname{Ont}_2\mathfrak{g}.$$

3) *У* $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}$, *где* $\mathfrak{g}=\mathfrak{osp}_{\varepsilon_3}(4|2)$, *нет вещественных форм типа* 3.

4) *Пусть* θ — *автоморфизм порядка* 3 *алгебры Ли* $\mathfrak{o}(8)$, *индуцированный симметрией графа Дынкина, а* τ — *инволюция алгебры Ли* $\mathfrak{o}(8)$, *коммутирующая с* θ. *У* $\widetilde{\mathfrak{o}(8)}_{\theta}^{(3)}$ *есть только один класс вещественных форм типа* 3:

$$\widetilde{\mathfrak{o}(8)}_{\tau\theta}^{(6)} = \{f \in \widetilde{\mathfrak{o}(8)}_{\theta}^{(3)} \mid f(a+\pi/3) = \tau\theta(f(a))\}.$$

Доказательство. 1) Доказательство непосредственное; ответ см. в табл. Д5.15.

2) Очевидно, что каждой вещественной структуре $\rho \in \mathrm{CLRe}(\mathfrak{g})$ можно сопоставить инволюцию $\rho \otimes \mathcal{X}_3(a)$ типа 3, которая задает вещественную форму $\tilde{\mathfrak{g}}_{\rho}^{(2)}$ супералгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)}$. Если $\mathrm{pr}(\sigma_1) = \mathrm{pr}(\sigma_2)$, то $\sigma_1 = \sigma_2 y$ для некоторого автоморфизма $y \in \mathrm{Aut}^\circ \mathfrak{g}$. Пусть Y — гладкая $\mathrm{Aut}^\circ \mathfrak{g}$-значная функция на S, равная 1 в точке 0 и равная y в точке π. Пусть $\mathcal{Y}_1 := = Y(a) \otimes \mathcal{X}_1(a)$, а $X(a)$ — такая что

$$\mathcal{Y}_1(\sigma_1 \otimes \mathcal{X}_3(a))\mathcal{Y}_1^{-1} = X(a) \otimes \mathcal{X}_3(a).$$

Тогда $X(0) = X(\pi) = \sigma_2$. Пусть $X(a) = \sigma_2 Z(a)$, а

$$\mathcal{Y}_2 = Z_1(a) \otimes \mathcal{X}_1(a), \quad \text{где} \quad Z_1(a) = \begin{cases} 1 & \text{при } a \in [0, \pi[, \\ Z(a) & \text{при } a \in [\pi, 2\pi[. \end{cases}$$

Тогда

$$\mathcal{Y}_2(X(a) \otimes \mathcal{X}_3(a))\mathcal{Y}_2^{-1} = \mathcal{Y}_2\mathcal{Y}_1(\sigma_1 \otimes \mathcal{X}_3(a))\mathcal{Y}_1^{-1}\mathcal{Y}_2^{-1} = \sigma_2 \otimes \mathcal{X}_3(a),$$

следовательно, $\sigma_1 \otimes \mathcal{X}_3(a) \sim \sigma_2 \otimes \mathcal{X}_3(a)$.

С другой стороны, пусть $\zeta \otimes \mathcal{X}_3(a)$ — инволюция типа 3. Тогда $\mathrm{pr}(\zeta(a))$ не зависит от a, и условие $\mathrm{pr}(\zeta_1(a)) = \mathrm{pr}(\zeta_2(a))$ необходимо для эквивалентности инволюций $\zeta_1 \otimes \mathcal{X}_3(a)$ и $\zeta_2 \otimes \mathcal{X}_3(a)$.

3, 4) Доказательство аналогично доказательству пункта 2). ☐

6.7. Упражнение. Опишите вещественные формы типов 1 и 3 (скрученных) алгебр петель со значениями в исключительных простых алгебрах Ли, опущенные в таблицах Д5.14 и Д5.15.

6.8. Задача. Опишите вещественные формы типа 2 (супер)алгебр петель (в том числе, скрученных) более явно, чем выше. Опишите действие антилинейных автоморфизмов супералгебр петель, выделяющих вещественные формы всех типов, в терминах образующих. Например, для супералгебр петель, чьи родственницы (супералгебры Каца—Муди) имеют матрицу Картана, в терминах образующих Шевалле.

§ 7. Симметрические суперпространства

7.1. Общие замечания. Однородные супермногообразия $\mathcal{G}/\mathcal{G}^\sigma$, где $\mathcal{G}$ — вещественная супергруппа Ли, а σ — ее инволютивный автоморфизм, а $\mathcal{G}^\sigma$ — множество неподвижных точек относительно автоморфизма σ, назовем *симметрическими суперпространствами*. Физики рассматривают также супермногообразия $\mathcal{G}/\mathcal{G}^\sigma$, где σ — автоморфизм супергруппы Ли,

инволютивный на ее подстилающей группе G; такие супермногообразия имеют интересные дополнительные структуры; назовем эти супермногообразия *полусимметрическими суперпространствами*.

В. Серганова описала все симметрические суперпространства с простой супергруппой движений, отвечающей простым конечномерным супералгебрам Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, с точностью до сопряжения в группе $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ (сопряженным автоморфизмам отвечают, очевидно, изоморфные суперпространства).

По сравнению с симметрическими пространствами у симметрических суперпространств есть следующие особенности.

1) Инвариантная метрика (т. е. симметрическая билинейная форма) на $\mathcal{G}/\mathcal{G}^\sigma$ получается из инвариантной метрики (т. е. симметрической билинейной формы) на $\mathfrak{g}$, если такая существует. Отметим, в очередной раз, что билинейная форма может быть нечетной, а одновременно невырожденной и инвариантной метрики может не быть.

2) Мы называем *компактными* те симметрические суперпространства, у которых компактна база (подстилающее многообразие). Как известно, симметрическое пространство компактно, если и только если инвариантная метрика на нем знакоопределена. У симметрических суперпространств с простой супергруппой движений отсутствует связь компактности со знакоопределенностью метрики, к тому же «метрику» следует заменить на билинейную или полуторалинейную (псевдоэрмитову) форму: кроме $\mathfrak{osp}(1|2n)$, простых вещественных супералгебр Ли, у которых ограничение инвариантной формы на четную часть знакоопределено, не существует.

Эрмитовым назовем симметрическое суперпространство, ассоциированное с такой парой $(\mathfrak{g}, \sigma)$, что на $\mathcal{G}/\mathcal{G}^\sigma$ существует $\mathcal{G}^\sigma$-инвариантная комплексная структура[1]. Отметим, что полусимметрическое суперпространство с эрмитовой базой эрмитово.

7.2. Обозначения в таблицах. В табл. Д5.16 (подробности см. в [SySp°]): $\mathfrak{s} = (\mathrm{Lie}(S_c))^{\mathbb{C}}$, КЭСП (соотв. НЭСП) — сокращение термина *компактное* (*соотв. некомпактное*) *эрмитово симметрическое пространство*, в графе Дынкина алгебры Ли $\mathfrak{s}$ максимальная параболическая подалгебра $\mathfrak{p} = \mathrm{Lie}(P)$, такая что X можно реализовать как $(S_c)^{\mathbb{C}}/P$, определяется одной вершиной: такая вершина — последняя в случаях 0, 2, 3, E_7, E_8, первая в случае 4, p-я в случае 1. У представления алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V_1) \oplus \mathfrak{gl}(V_2)$ в пространстве $V_1 \otimes V_2$ есть ядро, поэтому (см. строку 1) мы

---

[1] Препятствия к интегрируемости почти комплексных структур до комплексных (тензор Нийенхёйса) вычислены для некоторых примеров в [BGLS*]; там же определены *вещественно-комплексные структуры* и соответствующие аналоги тензора Нийенхёйса; последние вычислены для суперпространства Минковского и суперструн типа Невё—Шварца и Рамона.

обозначаем образ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V_1)\oplus\mathfrak{gl}(V_2)$, действующий в этом модуле, символом $\mathfrak{gl}(V_1)\odot\mathfrak{gl}(V_2)=\{A\otimes 1+1\otimes B\}$, где $A\in\mathfrak{gl}(V_1)$, $B\in\mathfrak{gl}(V_2)$, а сам $\mathfrak{gl}(V_1)\oplus\mathfrak{gl}(V_2)$-модуль мы обозначаем символом $V_1\odot V_2$.

В табл. Д5.19 мы говорим, что (супер)пространство $\mathcal{G}/\mathcal{P}$, где $\mathcal{G}$ — простая супергруппа Ли, а $\mathcal{P}$ — ее параболическая подсупергруппа, соответствующая нескольким пропущенным образующим Шевалле, имеет *глубину* d и *длину* l, если таковы параметры супералгебры Ли $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})$ в $\mathbb{Z}$-градуировке согласованной с $\mathbb{Z}$-градуировкой супералгебры Ли $\mathrm{Lie}(\mathcal{P})$, т. е. $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})=\bigoplus\limits_{-d\leqslant i\leqslant l}\mathfrak{g}_i$.

Символ $\mathfrak{s}(\mathfrak{g})$ означает бесследовую подалгебру супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $\mathfrak{pg}$ — фактор супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ по одномерному центру (натянутому на скалярные операторы). Пусть L^{α} — неприводимый $\mathfrak{g}_0$-модуль со старшим весом α и четным вектором старшего веса.

«Кривыми» (curved) называются грассманианы подсупер*многообразий* в супер*многообразии* (даже «линейном», $\mathcal{C}^{m|n}$, ассоциированном с суперпространством $\mathbb{C}^{m|n}$, см. п 2 гл. Д1; символом $\mathcal{F}^{m|n}$ обозначено пространство функций на $\mathcal{C}^{m|n}$) в отличие от «обычных» грассманианов линейных подсупер*пространств* в линейном супер*пространстве*.

Заметим, что все суперпространства в табл. Д5.19 эрмитовы (следовательно, глубины 1), кроме $PeGr$ (не эрмитово), PeQ (не эрмитово и глубины 2), $CGr^{0,n}_{0,k}$ и $SCGr^{0,n}_{0,k}$ (не эрмитовы, и их длины суть $n-k$ и соответственно $n-k-1$). Точками обозначены безымянные (пока) понятия и те, поименовать которые потребует слишком много места, а также (в паре случаев) градуирующий элемент.

Функции на окружности со значениями в грассманианах, перечисленных в табл. Д5.16 и Д5.19, доставляют очевидные бесконечномерные аналоги КЭСП и НЭСП, а также неэрмитовых «кривых» грассманианов.

В табл. Д5.20 перечислены бесконечномерные грассманианы, связанные со струнными супералгебрами Ли. Эрмитовы из них только «кривые» квадрики. В табл. Д5.21 перечислены бесконечномерные грассманианы, связанные со *скрученными* (супер)алгебрами петель.

7.2a. Случайные изоморфизмы.

$$Gr_p^{p+q}\cong Gr_q^{p+q},$$

$$Q_1\cong\mathbb{C}P^1,\qquad Q_2\cong S^2\times S^2,$$

$$Q_3\cong LGr_2,\qquad Q_4\cong Gr_2^4,$$

$$OGr_2\cong LGr_1\cong\mathbb{C}P^1,\qquad OGr_3\cong Gr_3^4.$$

Таблица Д5.16. **Эрмитовы симметрические пространства, см. [SySp°]**

	Имя КЭСП X	$X=S_c/G_c$	$\mathfrak{s}_0=(\mathfrak{g}_c)^{\mathbb{C}}$	$\mathfrak{s}_{-1}\sim T_0X$	$(S_c)^*$	Имя НЭСП
0	$\mathbb{C}P^n$	$\mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{U}(n)$	$\mathfrak{gl}(n)$	id	$\mathrm{SU}(1,\,n)$	$^*\mathbb{CP}^n$
1	Gr_p^{p+q}	$\mathrm{SU}(p+q)/(\mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(q))$	$\mathfrak{gl}(p)\oplus\mathfrak{gl}(q)$	$\mathrm{id}\bigodot\mathrm{id}^*$	$\mathrm{SU}(p,\,q)$	$^*Gr_p^{p+q}$
2	OGr_n	$\mathrm{SO}(2n)/\mathrm{U}(n)$	$\mathfrak{gl}(n)$	$\Lambda^2\,\mathrm{id}$	$\mathrm{SO}(n,\,n)$	$^*OGr_n$
3	LGr_n	$\mathrm{Sp}(2n)/\mathrm{U}(n)$	$\mathfrak{gl}(n)$	$S^2\,\mathrm{id}$	$\mathrm{Sp}(2n;\,\mathbb{R})$	$^*LGr_n$
4	Q_n	$\mathrm{SO}(n+2)/(\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(n))$	$\mathfrak{co}(n)$	id	$\mathrm{SO}(n,\,2)$	$^*Q_n$
E_7	$\mathbb{O}P^2$	$\mathrm{E}_7/(\mathrm{SO}(10)\times\mathrm{U}(1))$	$\mathfrak{co}(10)$	$R(\pi_5)$	E_6^*	$^*(\mathbb{O}P^2)$
E_8	$\mathbb{E}$	$\mathrm{E}_8/(E_7\times\mathrm{U}(1))$	$\mathfrak{ce}_7$	$R(\pi_1)$	E_7^*	$^*\mathbb{E}$

Таблица Д5.17. **Линейные автоморфизмы простых исключительных супералгебр Ли**

$\mathfrak{g}$	$\varphi\in\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_0$
$\mathfrak{ag}(2)$	Ad_{H_2}, где $H_2\in\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}(2)$, а $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана	$\mathfrak{osp}_3(4\|2)$
$\mathfrak{ab}(3)$	$\mathrm{Add}_{(J_2,\,1^1_7)}$ $\mathrm{Add}_{(J_2,\,-1^2_7)}$ $\mathrm{Add}_{(1_2,\,1^2_5)}$	$\mathfrak{sl}(1\|4)$ $\mathfrak{osp}(2\|4)\oplus\mathbb{C}$ $\mathfrak{osp}_2(4\|2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$

Таблица Д5.18. **Симметрические суперпространства с исключительной супергруппой движений**

$\mathfrak{h}$	$\varphi\in\mathrm{Aut}\,\mathfrak{h}$	$\mathfrak{h}_0$
$\mathfrak{ao}(7)$	$\mathrm{Add}_{(J_2,\,1^6_7)}$ $\mathrm{Add}_{(J_2,\,-1^5_7)}$ $\mathrm{Add}_{(1_2,\,-1^4_7)}$	$\mathfrak{u}(1\|4)$ $\mathfrak{osp}^*(2\|4)\oplus\mathfrak{u}(1)$ $\mathfrak{osp}^\circ_2(4\|2)\oplus\mathfrak{u}(2)$
$\mathfrak{ao}(6,\,1)$	$\mathrm{Add}_{(J_2,\,-1^6_7)}$ $\mathrm{Add}_{(J_2,\,-1^5_7)}$ $\mathrm{Add}_{(J_2,1,\,-1^4_6)}$ $\mathrm{Add}_{(1_2,\,1^4_7)}$ $\mathrm{Add}_{(1_2,\,-1^4_7)}$	$\mathfrak{u}(1\|4)$ $\mathfrak{osp}^*(2\|4)\oplus\mathbb{R}$ $\mathfrak{osp}^*(2\|4,\,2)\oplus\mathfrak{u}(1)$ $\mathfrak{osp}^\circ_2(4\|2)\oplus\mathfrak{u}(2)$ $\mathfrak{osp}^\circ_3(4\|2)\oplus\mathfrak{u}(2)$
$\mathfrak{ag}(2;\,\mathbb{R})$	…	$\mathfrak{osp}_4(4\|2)$
$\mathfrak{ag}^c(2)$	…	$\mathfrak{osp}^\circ_4(4\|2)$
$\mathfrak{ao}(4,\,3)$	$\mathrm{Add}_{(J_2,\,-1^1_7)}$ $\mathrm{Add}_{(J_2,\,-1^6_7)}$ $\mathrm{Add}_{(J_2,\,-1^5_7)}$ $\mathrm{Add}_{(J_2,\,1^2_7)}$ $\mathrm{Add}_{(1_2,\,1^3_7)}$ $\mathrm{Add}_{(1,\,1^2_4,\,1^1_3)}$	$\mathfrak{u}(1\|4,\,1)$ $\mathfrak{sl}(1\|4)$ $\mathfrak{osp}(2\|4)\oplus\mathfrak{u}(1)$ $\mathfrak{osp}^*(2\|4,\,2)\oplus\mathfrak{u}(1)$ $\mathfrak{osp}^\circ_2(4\|2)\oplus\mathfrak{u}(2)$ $\mathfrak{osp}^\circ_2(4\|2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$
$\mathfrak{ao}(5,\,2)$	$\mathrm{Add}_{(J_2,\,-1^1_7)}$ $\mathrm{Add}_{(J_2,\,-1^5_7)}$ $\mathrm{Add}_{(J_2,\,-1^2_7)}$ $\mathrm{Add}_{(1_2,\,1^4_7)}$ $\mathrm{Add}_{(1_2,\,-1^4_7)}$	$\mathfrak{u}(1\|4,\,1)$ $\mathfrak{osp}^*(2\|4)\oplus\mathfrak{u}(1)$ $\mathfrak{osp}^*(2\|4)\oplus\mathfrak{u}(1)$ $\mathfrak{osp}^\circ_2(4\|2)\oplus\mathfrak{u}(2)$ $\mathfrak{osp}^\circ_3(4\|2)\oplus\mathfrak{u}(2)$

Таблица Д5.19. **Классические суперпространства глубины 1**

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_0$	$\mathfrak{g}_{-1}$	Интерпретация	Подстилающая область	Имя суперобласти
$\mathfrak{sl}(m\vert n)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{gl}(p\vert q)\oplus\mathfrak{gl}(m-p\vert n-q))$	$\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}^*$	Суперграссманиан $p\vert q$-мерных подсуперпространств в $\mathbb{C}^{m\vert n}$	$Gr_p^m\times Gr_q^n$	$Gr_{p,q}^{m,n}$
$\mathfrak{psl}(m\vert m)$	$\mathfrak{ps}(\mathfrak{gl}(p\vert p)\oplus\mathfrak{gl}(m-p\vert m-p))$	$\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}^*$	то же самое при $m=n$, $p=q$	$G_p^m\times Gr_p^m$	$Gr_{p,p}^{m,m}$
$\mathfrak{osp}(m\vert 2n)$	$\mathfrak{cosp}(m-2\vert 2n)$	id	Суперквадрика $1\vert 0$-мерных изотропных (относительно невырожденной четной формы) прямых в $\mathbb{C}^{m\vert n}$	Q_{m-2}	$Q_{m-2,n}$
$\mathfrak{osp}(2m\vert 2n)$	$\mathfrak{gl}(m\vert n)$	$\Lambda^2(\mathrm{id})$	Ортосимплектический лагранжев суперграссманиан $m\vert m$-мерных изотропных (относительно невырожденной четной формы) подсуперпространств в $\mathbb{C}^{2m\vert n}$	$^*OGr_m\times LGr_n$	$OLGr_{m,n}$
$\mathfrak{sq}(n)$ $\mathfrak{psq}(n)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{q}(p)\oplus\mathfrak{q}(n-p))$ $\mathfrak{ps}(\mathfrak{q}(p)\oplus\mathfrak{q}(n-p))$	$\mathrm{id}\odot\mathrm{id}^*$	Странный грассманиан Π-симметричных $p\vert p$-мерных подсуперпространств в $\mathbb{C}^{n\vert n}$	Gr_p^n	QGr_p^n
$\mathfrak{pe}(n)$ $\mathfrak{spe}(n)$	$\mathfrak{cpe}(n-1)$ $\mathfrak{cspe}(n-1)$	id	Периплектическая суперквадрика $1\vert 0$-мерных изотропных (относительно невырожденной нечетной формы) прямых в $\mathbb{C}^{n\vert n}$	$\mathbb{C}P^{n-1}$	PeQ_{n-1}
$\mathfrak{pe}(n)$ $\mathfrak{spe}(n)$	$\mathfrak{gl}(p\vert n-p)$ $\mathfrak{sl}(p\vert n-p)$	$\Pi(S^2(\mathrm{id}))$ или $\Pi(\Lambda^2(\mathrm{id}))$	Периплектический лагранжев суперграссманиан $(p\vert n-p)$-мерных (и с фиксированным объемом в случае $\mathfrak{spe}$) подсуперпространства в $\mathbb{C}^{n\vert n}$ изотропные относительно нечетной суперсимметрической или суперантисимметрической формы	Gr_p^n	$PeGr_p^n$
$\mathfrak{osp}_\alpha(4\vert 2)$	$\mathfrak{cosp}(2\vert 2)\simeq\mathfrak{gl}(2\vert 1)$	$\mathrm{id}_{\mathfrak{gl}(2\vert 1)}$	...	$\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1$	E_α

Таблица Д5.19 (продолжение)

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_0$	$\mathfrak{g}_{-1}$	Интерпретация	Подстилающая область	Имя суперобласти
$\mathfrak{ab}(3)$	$\mathfrak{cosp}(2\vert 4)$	$L^{3\varphi_1}$	AB_3	$\mathbb{C}P^1\times Q_5$	...
$\mathfrak{vect}(0\vert n)$	$\mathfrak{vect}(0\vert n-k)\supsetplus\mathfrak{gl}(k;\ \Lambda(n-k))$	$\Lambda(n-k)\otimes\Pi(\mathrm{id}_{\mathfrak{gl}})$	Кривой суперграссманиан $0\vert k$-мерных подсупермногообразий в $\mathcal{C}^{0\vert n}$	...	$CGr_{0,k}^{0,n}$
$\mathfrak{svect}(0\vert n)$	$\mathfrak{vect}(0\vert n-k)\supsetplus\mathfrak{sl}(k;\ \Lambda(n-k))$	$\Pi(\mathrm{Vol})$ при $k=1$	То же с сохраняющимися элементами объема и в подсупермногообразии, и в объемлющем супермногообразии	...	$SCGr_{0,k}^{0,n}$
$\mathfrak{h}(0\vert m)$ $\mathfrak{h}'(m)$	$\mathfrak{h}(0\vert m-2)\supsetplus\Lambda(m-2)\cdot z$ $\mathfrak{h}'(m-2)\supsetplus\Lambda(m-2)\cdot z$	$\Pi(\Lambda(m-2))$	Кривая суперквадрика $0\vert 1$-мерных подсупермногообразий в $\mathcal{C}^{0\vert m}$ изотропных относительно расщепимой симметрической формы	...	$CQ_{m-2,0}$

Таблица Д5.20. **Бесконечномерные аналоги классических суперпространств глубины 1, связанные со струнными супералгебрами Ли**

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_0$	$\mathfrak{g}_{-1}$	Интерпретация	Подстилающая область	Имя суперобласти
$\mathfrak{vect}^L(1\vert n)$	$\mathfrak{vect}^L(1\vert n-k)\supsetplus\mathfrak{gl}(k;\ \mathcal{F}^{1\vert n-k})$	$\mathcal{F}^{1\vert n-k}\otimes\Pi(\mathrm{id}_{\mathfrak{gl}})$	Кривой суперграссманиан $0\vert k$-мерных подсупермногообразий в $\mathcal{C}^{1\vert n}$	...	$CGr_{1,k}^{1,n}$
$\mathfrak{svect}^L(1\vert n)$	$\mathfrak{vect}^L(1\vert n-k)\supsetplus\mathfrak{sl}(k;\ \mathcal{F}^{1\vert n-k})$	$\Pi(\mathrm{Vol})$ при $k=1$	То же с сохраняющимися элементами объема и в подсупермногообразии, и в объемлющем супермногообразии	...	$SCGr_{1,k}^{1,n}$
$\mathfrak{k}^L(1\vert m)$ $\mathfrak{k}^M(1\vert m)$	$\mathfrak{k}^L(1\vert m-2)\supsetplus\mathcal{F}^{1\vert m-2}\cdot z$ $\mathfrak{k}^M(1\vert m-2)\supsetplus\mathcal{F}^{1\vert m-2}\cdot z$	$\Pi(\mathcal{F}^{1\vert m-2})$	Кривая суперквадрика $0\vert 1$-мерных подсупермногообразий в $\mathcal{C}^{1\vert m}$ изотропных относительно расщепимой симметрической формы	...	$CQ_{m-2,1}$

Таблица Д5.21. **Градуировки скрученных (супер) алгебр петель, соответствующие КЭСП**

$\mathfrak{g}_{\varphi}^{(m)}$	φ	Градуирующий элемент	$(\mathfrak{g}_{\varphi}^{(m)})_0$
$\mathfrak{sl}(2m\|2n)^{(2)}$	$(-st)\circ \mathrm{Add}_{(\Pi_{2m},J_{2n})}$	$\mathrm{diag}(1_m,\ -1_m,\ 1_n,\ -1_n)$	$\mathfrak{sl}(m\|n)^{(1)}$
$\mathfrak{sl}(2m)^{(2)}$	$(-t)\circ \mathrm{Ad}_{\Pi_{2m}}$	$\mathrm{diag}(1_m,\ -1_m)$	$\mathfrak{sl}(m)^{(1)}$
$\mathfrak{sl}(2n)^{(2)}$	$(t)\circ \mathrm{Ad}_{J_{2n}}$	$\mathrm{diag}(1_n,\ -1_n)$	$\mathfrak{sl}(n)^{(1)}$
$\mathfrak{sl}(n\|n)^{(2)}$	Π	$\mathrm{diag}(1_p,\ 0_{n-p},\ 1_p,\ 0_{n-p})$	$\mathfrak{s}\Big(\mathfrak{gl}(p\|p)_{\Pi}^{(2)}\oplus \mathfrak{gl}(n-p\|n-p)_{\Pi}^{(2)}\Big)$
$\mathfrak{sl}(n\|n)^{(2)}$	$\Pi\circ(-st)$	$\mathrm{diag}(1_p,\ -1_{n-p},\ -1_p,\ 1_{n-p})$	$\mathfrak{s}\Big(\mathfrak{gl}(p\|p)_{\Pi\circ(-st)}^{(2)}\oplus \mathfrak{gl}(n-p\|n-p)_{\Pi\circ(-st)}^{(2)}\Big)$
$\mathfrak{osp}(2m\|2n)^{(2)}$	$T_{m,n}\circ \mathrm{Add}_{(1_{2m-1},1,1_{2n})}$	$\mathrm{diag}(J_2,\ 0_{2(m+n-1)})$	$(\mathfrak{cosp}(2m-2\|2n))_{T_{m-1,n}}^{(1)}$
$\mathfrak{o}(2m)^{(2)}$			$(\mathfrak{co}(2m-2))^{(1)}$
$\mathfrak{psq}(2n)^{(4)}$	$(-st)\circ\delta_{\sqrt{-1}}$	$\mathrm{diag}(J_{2n},\ J_{2n})$	$\mathfrak{psq}(n)_{\delta_{-1}}^{(2)}$
$\mathfrak{psq}(n)^{(2)}$	δ_{-1}	$\mathrm{diag}(1_p,\ 0_{n-p},\ 1_p,\ 0_{n-p})$	$\mathfrak{ps}(\mathfrak{q}(p)_{\delta_{-1}}^{(2)}\oplus \mathfrak{q}(n-p)_{\delta_{-1}}^{(2)})$
$\mathfrak{h}'(2n)^{(2)}$	$\mathcal{A}$	$\dots$	$(\mathfrak{h}'(2n-2)\oplus \mathfrak{po}(0\|2n-2))_{\mathcal{A}}^{(2)}$

Д6. Инвариантные многочлены на супералгебрах Ли (по А. Н. Сергееву)

Замечание. В препринтах семинара «СоС» (см. также [Srg1°]–[Srg4°]) А. Н. Сергеев уточнил теоремы, впервые сформулированные Ф. А. Березиным и В. Кацем, и доказал их, используя функтор точек, значения которого на алгебрах Грассмана Березин называл «грассмановой оболочкой». В этой главе эти результаты А. Н. Сергеева, составившие его кандидатскую диссертацию, воспроизведены практически дословно. Сам Березин доказывал по-другому; доказательства Сергеева много проще.

Недавно А. Н. Сергеев и А. П. Веселов нашли иной подход к доказательству теорем, описывающих инвариантные полиномиальные и рациональные функции на супералгебрах Ли. Заодно они предложили адекватную «супер» специфике замену группе Вейля — группоид Вейля, см. [SV°].

Совершенно другой подход к описанию инвариантных функций на супермногообразиях суперматриц принадлежит В. Н. Шандеру (см. гл. Д 7).

§ 1. Введение

Все алгебры Ли, супералгебры Ли и их представления рассматриваются над полем $\mathbb{C}$ и предполагаются конечномерными.

1.1. Алгебры Ли. Алгебры инвариантных многочленов на простых алгебрах Ли $\mathfrak{g}$ играют важную роль. В частности, они помогают описать структуру центра $Z(\mathfrak{g})$ универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ и вывести формулу Вейля для характера конечномерных неприводимых представлений; они важны для описания характеристических классов векторных расслоений, для описания аналогов уравнения Эйлера твердого тела и многого другого.

Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста, то на ней имеется инвариантная невырожденная симметрическая билинейная форма, которая индуцирует изоморфизм $\mathfrak{g}\simeq\mathfrak{g}^*$. Этот изоморфизм коммутирует с $\mathfrak{g}$-действием и сводит описание центра $Z(\mathfrak{g})$ к описанию $\mathfrak{g}$-инвариантных многочленов на $\mathfrak{g}$, т. е. элементов алгебры $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$, изучение которой имеет следующие важные аспекты.

1) Если $\mathfrak{g}$ проста, то описав $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$, мы одновременно описываем и $Z(\mathfrak{g})$: эти алгебры изоморфны.

2) Пусть $\mathfrak{g}$ проста, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана, а W — группа Вейля. Тогда *теорема Шевалле* утверждает, что ограничение гомоморфизма $S(\mathfrak{g}^*)\to S(\mathfrak{h}^*)$ на подалгебру Картана индуцирует изоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$-инвариантных многочленов на $\mathfrak{g}$ с алгеброй W-инвариантных многочле-

нов на $\mathfrak{h}$:

$$S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \cong S(\mathfrak{h}^*)^{W}. \qquad (Д6.1)$$

Более того, каждый инвариантный многочлен степени k является линейной комбинацией функций вида

$$\operatorname{tr} \rho(x)^k, \qquad (Д6.2)$$

где ρ пробегает конечное множество конечномерных представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

3) Алгебры W-инвариантных многочленов являются важными примерами алгебр инвариантных функций; например, для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ мы получаем классическую теорию инвариантов симметрических функций.

4) Для любой простой алгебры Ли существует канонический гомоморфизм, носящий имя *Хариш-Чандры*:

$$Z(\mathfrak{g}) \longrightarrow S(\mathfrak{h}) \simeq S(\mathfrak{h}^*). \qquad (Д6.3)$$

Образ центра относительно этого гомоморфизма называется алгеброй *сдвинутых* симметрических функций, связанных с *квантовыми имманентами* (которые составляют некоторый выделенный базис в $Z(\mathfrak{g})$, см. [ОкОл°]).

1.2. Супералгебры Ли. В этой главе суперизованы некоторые из фактов и конструкций 1)—4). Отметим основные различия:

1) Не каждая простая супералгебра Ли обладает невырожденной симметрической инвариантной билинейной формой. Если даже такая форма и имеется, то она может оказаться нечетной, в то время как для существования изоморфизма (Д6.1) нам нужна четная форма.

2) В суперситуациях понятие группы Вейля становится очень замысловатым. Ее определение варьируется в зависимости от ситуации; более того, даже для одной и той же задачи описание аналогов группы Вейля сильно различается для разных типов супералгебр Ли.

3) Не каждый неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль однозначно определяется своим центральным характером (это напоминает случай бесконечномерных модулей над классическими алгебрами Ли); следовательно центральные характеры — другими словами, инвариантные многочлены — дают нам формулу для характеров только для представлений общего положения — *типических* модулей.

4) Для некоторых простых супералгебр Ли не каждый инвариантный многочлен можно представить в виде линейной комбинации суперследов конечномерных представлений.

5) Для некоторых простых супералгебр Ли $\mathfrak{g}$ при описании инвариантных функций на $\mathfrak{g}$ роль подалгебры Картана играет ее максимальная диагонализирующая подалгебра — *максимальный тор*.

6) Существует несколько типов простых супералгебр Ли с очень разными свойствами:

а) имеющие матрицу Картана (и следовательно с редуктивной четной частью);

б) с невырожденной инвариантной нечетной суперсимметричной билинейной формой (у них тоже четная часть редуктивна — это $\mathfrak{psq}(n)$);

в) с редуктивной четной частью, но без матрицы Картана и без невырожденной билинейной формы (это $\mathfrak{spe}(n)$);

г) с нередуктивной четной частью (это серии $\mathfrak{vect}$, $\mathfrak{svect}$, $\widetilde{\mathfrak{svect}}$ и $\mathfrak{h}'$).

Наряду с некоторыми простыми супералгебрами Ли $\mathfrak{g}$ стóит рассматривать также и их «родственниц» — нетривиальные центральные расширения и/или супералгебры дифференцирований (как алгебры Каца—Муди и алгебры петель).

1.3. Аналоги группы Вейля в суперслучаях. Приведем несколько разных определений аналогов группы Вейля в суперслучаях (упорядоченных, скорее, по мере их открытия, т. е. исторически, чем как-нибудь еще).

А) Как множество, по которому производится суммирование в формуле для суперхарактера (формула Бернштейна—Лейтеса для суперхарактеров атипических представлений супералгебр $\mathfrak{osp}(2|2n)$ и $\mathfrak{sl}(1|n)$, см. [БЛ*] и [L°], а также ее обобщение, предложенное И. Пенковым и В. Сергановой [PS3°]).

Б) Как группа, порожденная «отражениями в простых корнях» (И. Скорняков, И. Пенков и В. Серганова, а также Г. Егоров [Egr*]).

В) Как множество *соседних* систем простых корней. Соседние системы, связанные отражениями в четных корнях, можно также считать эквивалентными относительно действия группы Вейля четной части супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. Неэквивалентные соседние системы связаны отражениями в нечетных корнях и произведения таких отражений a priori не определено (см. [Egr*]).

Г) Как группа, элементы которой нумеруют суперклетки Шуберта (Ю. И. Манин и А. Воронов, см. [ИНТ°]).

Как определить отражение в изотропном (нечетном) корне α, далеко не ясно. Например, в одном из простейших случаев, т. е. для общей матричной алгебры $\mathfrak{gl}(m|n)$ или ее бесследовой подалгебры, для любого нечетного корня имеем $(\alpha, \alpha) = 0$, а в формуле для отражения надо делить на этот скалярный квадрат; чтобы избежать деления на нуль, пришлось ввести сложную формулу, учитывающую несколько разных случаев.

Хотя И. Скорняков, И. Пенков и В. Серганова, а также Г. Егоров и (в другой задаче) Ю. И. Манин предложили несколько работающих определений аналога группы Вейля, само разнообразие ответов было одной из причин, по которой хотелось бы так переформулировать теорему Шевалле, чтобы полностью избежать понятия группы Вейля, а пользоваться только корневым разложением. Такая формулировка формально применима к любой (конечномерной) алгебре Ли или супералгебре Ли при условии, что мы соответствующим образом модифицируем понятие «корневого разложения». Соответствующее определение и теорема даны ниже в п. 1.5, а также в гипотезе 5.5, частично доказанной.

Описание инвариантов уже включает в себя много разных случаев. Чтобы облегчить чтение, описание инвариантных многочленов на супералгебрах Ли серии $\mathfrak{q}$ и ее «родственницах» $\mathfrak{sq}$ и $\mathfrak{psq}$ дано в § 5 вместе с описанием инвариантных многочленов на супералгебрах Пуассона $\mathfrak{po}$ и их «родственницах». Справедливость этих описаний гораздо труднее доказать, чем описание в тех случаях, которые мы рассматриваем в § 3 и § 4. Эти описания, в основном, гипотетические.

1.4. Обзор истории. Первым, кто полностью описал инвариантные многочлены, был Ф. А. Березин, который сделал это для унитарной вещественной формы супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(m|n)$; см. [Бун]. Одновременно он начал рассматривать общий случай вместе с В. Кацем. Совместная работа не задалась, и они опубликовали свои результаты (полученные разными методами) отдельно [Бун] и [Kac2].

Березинское доказательство опиралось на аналитические методы; его изложение не слишком доброжелательно по отношению к читателю. Несмотря на то, что *доказательства*, прямо сказать, ужасно изложены, березинские *результаты* служили источником вдохновения многим исследователям. Заметим, что Березин рассматривал только супералгебры Ли, чьи корневые подпространства одномерны, а на самой алгебре имеется невырожденная инвариантная суперсимметрическая четная билинейная форма. Сверх описанного Ф. А. Березиным, В. Кац [Kac2] описал также грубую структуру алгебры $I(\mathfrak{g})$ инвариантных многочленов на любой (комплексной) супералгебре $\mathfrak{g}$ того же вида, что и рассмотренная Березиным. Доказательство Каца довольно прозрачно. Березин и Кац показали, что

> *для супералгберы Ли с неразложимой матрицей Картана существует многочлен Q, такой что локализация алгебры $I(\mathfrak{g})$ по мультипликативной системе, порожденной многочленом Q, содержит все $W(\mathfrak{g}_{\bar 0})$-инвариантные многочлены.* (Д6.4)

В [Srg4°] и [Srg1°] описаны (немного более явно, чем в [Бун] и [Kac2], инвариантные многочлены на супералгебрах Ли серий $\mathfrak{gl}$, $\mathfrak{sl}$, $\mathfrak{osp}$ и на исключительных супералгебрах, а также на $\mathfrak{pe}$, $\mathfrak{spe}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{vect}$, $\mathfrak{svect}$, $\tilde{\mathfrak{s}}\mathfrak{vect}$.

В статье [Kac1°] приведен интересный метод описания центра алгебры $U(\mathfrak{g})$ для некоторых алгебр Ли.

М. Шейнерт [Sch°] описал центр супералгебры $U(\mathfrak{spe}(n))$ неявно; недавно М. Горелик [G2°] получила явное описание.

В статьях [Pen1°] и [PS2°] обсуждаются некоторые результаты Каца, Сергеева и Шейнерта, а также некоторые приложения этих результатов.

В. Серганова предложила более адекватную суперслучаю замену центра универсальной обертывающей супералгебры Ли в случаях, когда наивный центр $Z(\mathfrak{g})$ тривиален, т. е. в случаях, подобных $\mathfrak{spe}(n)$, см. [Se2*].

1.5. Основной результат главы и открытые задачи. Пусть $\mathfrak{g}$ — одна из следующих серийных или исключительных конечномерных супералгебр Ли:

$$\begin{gathered}\mathfrak{gl},\ \mathfrak{sl},\ \mathfrak{psl},\ \mathfrak{osp},\ \mathfrak{pe},\ \mathfrak{spe},\ \mathfrak{osp}_\alpha(4|2);\quad \mathfrak{ag}(2),\ \mathfrak{ab}(3);\\ \mathfrak{vect},\ \mathfrak{svect},\ \tilde{\mathfrak{s}}\mathfrak{vect}.\end{gathered}\tag{Д6.5}$$

Пусть $\mathfrak{h}$ — максимальная диагонализирующая подалгебра супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, т. е. *максимальный тор* в $\mathfrak{g}$, а $R = R_+ \cup R_-$ — множество ненулевых корней супералгебры $\mathfrak{g}$, разделенное на подмножество положительных и отрицательных корней. Положим

$$\widetilde{R}_+ = \{\alpha \in R_+ \mid -\alpha \in R_-\}.\tag{Д6.6}$$

Для каждого корня $\alpha \in \widetilde{R}_+$ пусть $\mathfrak{g}(\alpha)$ — супералгебра Ли, порожденная пространством $\mathfrak{h}$ и корневыми подпространствами $\mathfrak{g}_\alpha$ и $\mathfrak{g}_{-\alpha}$:

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \mathfrak{h} \oplus \Big(\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}\setminus 0} \mathfrak{g}_{k\alpha}\Big).$$

Эта супералгебра будет играть важную роль в нескольких конструкциях.

В случаях, которые разобраны ниже, супералгебра Ли $\mathfrak{g}(\alpha)$ изоморфна сумме $\mathfrak{h}$ и слагаемого изоморфного $\mathfrak{sl}(2)$, или $\mathfrak{osp}(1|2)$, или $\mathfrak{sl}(1|1)$.

Символом $I^\alpha(\mathfrak{h}^*)$ обозначим образ супералгебры $S(\mathfrak{g}(\alpha)^*)^{\mathfrak{g}(\alpha)}$ при ограничении на нее изоморфизма $S(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow S(\mathfrak{h}^*)$, а символом $I(\mathfrak{h}^*)$ — образ супералгебры $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$. Напомним (см. [PS3°]), что если $\mathfrak{h}$ — нильпотентная супералгебра Ли, а V есть $\mathfrak{h}$-модуль, то *обобщенным весовым разложением* модуля V относительно $\mathfrak{h}$ называется представление модуля V в виде $V = \bigoplus\limits_{\mu\in\mathfrak{h}^*} V(\mu)$, где каждый вес μ таков, что $\mu([\mathfrak{h}_{\bar 0}, \mathfrak{h}_{\bar 0}]) = 0$, а $V(\mu)$ является максимальным $\mathfrak{g}$-подмодулем, все неприводимые подфакторы которого изоморфны модулю вида $\operatorname{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{h}}(\mu)$, где $\mathfrak{b}$ является поляризацией[1] для μ.

---

[1] Напомним, что подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *поляризацией для* функционала μ (и часто обозначается $\mathfrak{p}(\mu)$), если $\lambda([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$, $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{g}_{\bar 0}$ и $\mathfrak{h}_{\bar 1}$ является максимальным изотропным подпространством для симметрической билинейной формы f_λ, заданной на $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ формулой $f_\lambda(\xi_1, \xi_2) = \lambda([\xi_1, \xi_2])$.

Теорема (основная теорема). *Для супералгебр Ли из списка* (Д6.5), *а также их «родственниц», т. е. нетривиальных центральных расширений и/или алгебр дифференцирований, имеем*

$$I(\mathfrak{h}^*) = \bigcap_{\alpha\in\widetilde{R}_+} I^{\alpha}(\mathfrak{h}^*). \tag{Д6.7}$$

Если $\widetilde{R}_+ = \varnothing$, *то формулу* (Д6.7) *нужно понимать как* $I(\mathfrak{h}^*) = S(\mathfrak{h}^*)^{\mathfrak{h}}$.

Равенство (Д6.7) *верно для всех алгебр Ли и супералгебр Ли при условии, что мы рассматриваем обобщенные веса относительно подалгебры Картана, точнее, максимальной диагонализирующей подалгебры.*

Заметим, что за исключением супералгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1|2n)$, алгебра $I(\mathfrak{h}^*)$ не является нётеровой, т. е. не обладает конечным числом образующих, а вот локализация алгебры $I(\mathfrak{h}^*)$ относительно мультипликативной системы, порожденной многочленом Q, нётерова.

Определим группу $W(\mathfrak{g})$, положив ее равной группе Вейля алгебры Ли

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_{\bar 0}, & \text{если } \mathfrak{g} \text{ из серий } \mathfrak{gl}, \mathfrak{sl}, \mathfrak{psl}, \mathfrak{osp}, \mathfrak{pe}, \mathfrak{spe} \text{ или } \mathfrak{ag}(2), \mathfrak{ab}(3);\\ \mathfrak{g}_0, & \text{если } \mathfrak{g} \text{ из серий } \mathfrak{vect}, \mathfrak{svect}, \widetilde{\mathfrak{svect}} \text{ в градуировках,}\\ & \text{ассоциированных с их фильтрациями минимальной}\\ & \text{коразмерности.} \end{cases} \tag{Д6.8}$$

Следствие. *Пусть*

$$Q = \prod_{\alpha\in R_{\bar 1}} \alpha. \tag{Д6.9}$$

Любой элемент алгебры частных алгебры $S(\mathfrak{h}^*)^{W(\mathfrak{g})}$ *представи́м в виде* P/Q, *где* $P \in I(\mathfrak{h}^*)$.

Задачи. 1) Вычислить ряд Пуанкаре для каждой из алгебр $I(\mathfrak{h}^*)$.

2) Описание алгебр $I(\mathfrak{h}^*)$, данное выше, зависит от выбора системы простых корней. Получить аналогичные описания алгебр $I(\mathfrak{h}^*)$ для всех $W(\mathfrak{g})$-неэквивалентных систем простых корней.

1.6. Теорема Шевалле для анти-инвариантных многочленов. Нижеследующее изложение намеренно напоминает описание инвариантных многочленов для алгебр Ли, хотя мы и изгнали группу Вейля. Хорошо известно (см. [Bern1°]), что существуют единственные продолжения присоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ до представлений в $S(\mathfrak{g})$ и в $U(\mathfrak{g})$, а каноническая симметризация $\omega\colon S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ является гомоморфизмом $\mathfrak{g}$-модулей. Для супералгебр Ли эта симметризация, точнее — суперсимметризация, задается формулой

$$\omega(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} c(p(x), \sigma)x_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(n)}, \tag{Д6.10}$$

где $p(x)$ — вектор четностей переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, знак $c(p(x), \sigma)$ определен из формулы (Д6.11), а $\mathfrak{S}_n$ — группа перестановок n элементов. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — элементы свободной суперкоммутативной супералгебры. Тогда

$$c(p(x), \sigma)a_1\ldots a_n = a_{\sigma(1)}\ldots a_{\sigma(n)} \quad \text{для всех } \sigma\in\mathfrak{S}_n. \tag{Д6.11}$$

Рассмотрим также продолжение $\tilde\omega\colon S(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g})$ симметризации $\omega\colon S(\mathfrak{g}_{\bar 0}) \longrightarrow U(\mathfrak{g}_{\bar 0})$, где $S(\mathfrak{g})$ рассматривается как индуцированный модуль $\operatorname{Ind}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}(S(\mathfrak{g}_{\bar 0}))$, а на $U(\mathfrak{g})$ мы рассматриваем $\mathfrak{g}$-действие, которое назовем *хитрым действием*, заданное не обычной формулой, а формулой

$$x * u = (-1)^{p(x)}xu - (-1)^{p(x)p(u)}ux \quad \text{для всех } x\in\mathfrak{g},\ u\in U(\mathfrak{g}). \tag{Д6.12}$$

Это хитрое действие на $U(\mathfrak{g})$ индуцирует также (не менее) хитрое действие на $S(\mathfrak{g}) = \operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$.

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *одна из супералгебр Ли из нашего списка* (Д6.5), $\mathfrak{h}$ — *ее расщепляющая подалгебра Картана* (*точнее, максимальный тор*), *а* $W(\mathfrak{g})$ — *группа Вейля, заданная формулой* (Д6.8). *Тогда ограничение гомоморфизма* $S(\mathfrak{g}^*) \to S(\mathfrak{h}^*)$ *на* $\mathfrak{h}$ *индуцирует гомоморфизм*

$$S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \cong S(\mathfrak{h}^*)^{W}, \tag{Д6.13}$$

где $\mathfrak{g}$-*инвариантность рассматривается относительно хитрого действия.*

1.7. Сводка результатов: описание алгебр инвариантных многочленов.

1.7а. $\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n|m)}$. Пусть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \delta_1, \ldots, \delta_m$ суть веса тавтологического $\mathfrak{gl}(n|m)$-модуля в стандартном базисе. Группа Вейля — это $W = \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$. Она действует на весах, по отдельности переставляя ε_i с помощью $\mathfrak{S}_n$ и δ_j с помощью $\mathfrak{S}_m$. Мы отождествляем алгебру многочленов $\mathbb{C}[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n; \delta_1, \ldots, \delta_m]$ с алгеброй $S(\mathfrak{h}^*)$. Положим [1]

$$I_{n,m} = \Big\{ f\in\mathbb{C}[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \delta_1, \ldots, \delta_m]^W \ \Big|\ \frac{\partial f}{\partial\varepsilon_i} + \frac{\partial f}{\partial\delta_j} \in (\varepsilon_i - \delta_j) \\ \text{для каждой пары } (i, j)\Big\}. \tag{Д6.14}$$

Тогда $I(\mathfrak{h}^*) \cong I_{n,m}$. Это алгебра суперсимметричных многочленов. В качестве ее образующих мы можем взять либо аналоги сумм степеней

$$\Delta_k = \sum\varepsilon_i^k - \sum\delta_j^k, \tag{Д6.15}$$

---

[1] Здесь $(\varepsilon_i - \delta_j)$ — идеал, порожденный элементом $\varepsilon_i - \delta_j$; аналогичные обозначения использованы и ниже в этой главе.

либо коэффициенты степеней при t в разложении в ряд по t функции

$$F(t)=\frac{\prod(t-\delta_j)}{\prod(t-\varepsilon_i)}. \tag{Д6.16}$$

1.7б. а) $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n|m)$. Тогда

$$I(\mathfrak{h}^*)\cong I_{n,m}/(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n-\delta_1-\ldots-\delta_m).$$

б) $\mathfrak{g}=\mathfrak{psl}(n|n)$. Пусть z — центральный элемент в $\mathfrak{sl}(n|n)$. Положим

$$\tilde{I}_{n,n}=\{f\in I_{n,n}\mid D_zf\in(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n-\delta_1-\ldots-\delta_n)\}. \tag{Д6.17}$$

где символ D_v здесь и всюду ниже означает производную в направлении вектора v.

Тогда $I(\mathfrak{h}^*)\cong\tilde{I}_{n,n}/(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n-\delta_1-\ldots-\delta_n)$.

1.7в. $\mathfrak{g}=\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$, $m>0$. Мы отождествляем алгебру $S(\mathfrak{h}^*)$ с алгеброй $\mathbb{C}[\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,\delta_1,\ldots,\delta_m]$, порожденной, как алгебра, весами тавтологического модуля. Группа Вейля — это

$$W=(\mathfrak{S}_n\ltimes(\mathbb{Z}/2)^n)\times(\mathfrak{S}_m\ltimes(\mathbb{Z}/2)^m).$$

Она действует на весах, переставляя отдельно элементы ε_i с помощью $\mathfrak{S}_n$ и отдельно элементы δ_j с помощью $\mathfrak{S}_m$ и меняя знаки весов. Положим

$$I(\mathfrak{h}^*)=\left\{f\in\mathbb{C}[\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,\delta_1,\ldots,\delta_m]^W\;\middle|\;\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_i}\pm\frac{\partial f}{\partial\delta_j}\in(\varepsilon_i\mp\delta_j)\right\}. \tag{Д6.18}$$

для каждой пары (i,j). Эта алгебра изоморфна алгебре $I_{n,m}$ суперсимметричных многочленов от $\varepsilon_1^2,\ldots,\varepsilon_n^2,\delta_1^2,\ldots,\delta_m^2$. В качестве ее образующих мы можем взять либо суммы степеней

$$\Delta_{2k}=\sum\varepsilon_i^{2k}-\sum\delta_j^{2k} \tag{Д6.19}$$

либо коэффициенты при степенях t в разложении в ряд по t функции

$$F(t)=\frac{\prod(t^2-\varepsilon_i^2)}{\prod(t^2-\delta_j^2)}. \tag{Д6.20}$$

1.7г. $\mathfrak{g}=\mathfrak{osp}(1|2n)$. Из всех простых супералгебр Ли в этом и только в этом частном случае $F(t)$ является многочленом.

1.7д. $\mathfrak{g}=\mathfrak{osp}(2m|2n)$, $m\geqslant 1$. Как и в пункте 1.7в, мы отождествляем $S(\mathfrak{h}^*)$ с алгеброй многочленов $\mathbb{C}[\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,\delta_1,\ldots,\delta_m]$. Группой Вейля является $W=(\mathfrak{S}_m\ltimes(\mathbb{Z}/2)^{m-1})\times(\mathfrak{S}_n\ltimes(\mathbb{Z}/2)^n)$. Она действует на весах, переставляя по отдельности ε_i и δ_j, а $(\mathbb{Z}/2)^{m-1}$ меняет знаки весов по формуле $\varepsilon_i\to\theta_i\varepsilon_i$, где $\theta_i=\pm 1$ и $\prod\theta_i=1$. В этом случае

$$I(\mathfrak{h}^*)=\left\{f\in\mathbb{C}[\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m,\delta_1,\ldots,\delta_n]^W\;\middle|\;\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_i}\pm\frac{\partial f}{\partial\delta_j}\in(\varepsilon_i\mp\delta_j)\right.$$
$$\left.\text{для каждой пары } (i,j)\right\}. \tag{Д6.21}$$

Любой элемент из $I(\mathfrak{h}^*)$ можно представить либо в виде

$$f=f_0+f_1\cdot\varepsilon_1\ldots\varepsilon_m\prod_{i,j}(\varepsilon_i^2-\delta_j^2), \tag{Д6.22}$$

где $f_0\in I_{n,m}(\varepsilon_1^2,\ldots,\varepsilon_n^2,\delta_1^2,\ldots,\delta_m^2)$, а $f_1\in\mathbb{C}[\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,\delta_1,\ldots,\delta_m]^W$, либо в виде коэффициентов при степенях t в разложении в ряд по t функции

$$F(t)=\frac{\prod(t^2-\delta_j^2)}{\prod(t^2-\varepsilon_i^2)}. \tag{Д6.23}$$

1.7е. $\mathfrak{g}=\mathfrak{osp}_\lambda(4|2)$. Мы отождествляем $S(\mathfrak{h}^*)$ с алгеброй $\mathbb{C}[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]$. Группа Вейля — это $W=\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2$. Она действует на весах, меняя знаки. Пусть

$$\lambda_1=-(1+\alpha),\qquad\lambda_2=1,\qquad\lambda_3=\alpha. \tag{Д6.24}$$

Тогда

$$I(\mathfrak{h}^*)=\left\{f\in\mathbb{C}[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]^W\;\middle|\;\theta_1\lambda_1\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_1}+\theta_2\lambda_2\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_2}+\right.$$
$$\left.+\theta_3\lambda_3\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_3}\in(\theta_1\varepsilon_1+\theta_2\varepsilon_2+\theta_3\varepsilon_3)\right\}. \tag{Д6.25}$$

Любой элемент из $I(\mathfrak{h}^*)$ можно представить в виде

$$f=f_0+f_1\cdot\prod(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2\pm\varepsilon_3), \tag{Д6.26}$$

где $f_0\in\mathbb{C}\left[\frac{1}{\lambda_1}\varepsilon_1^2+\frac{1}{\lambda_2}\varepsilon_2^2+\frac{1}{\lambda_3}\varepsilon_3^2\right]$ и $f_1\in\mathbb{C}[\varepsilon_1^2,\varepsilon_2^2,\varepsilon_3^2]$.

1.7ж. $\mathfrak{g}=\mathfrak{ag}(2)$. Мы отождествляем $S(\mathfrak{h}^*)$ с факторалгеброй

$$\mathbb{C}[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\delta]/(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3).$$

Группой Вейля является $W=(\mathfrak{S}_3\ltimes\mathbb{Z}/2)\times\mathbb{Z}/2$, где группа $\mathfrak{S}_3\ltimes\mathbb{Z}/2$ действует на веса ε_i, переставляя их и *одновременно* меняя знаки; отдельный сомножитель $\mathbb{Z}/2$ меняет знак у δ. В этом случае

$$I(\mathfrak{h}^*)=\left\{f\in S(\mathfrak{h}^*)^W\;\middle|\;\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_1}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_2}+2\frac{\partial f}{\partial\delta}\in(\delta-\varepsilon_1-\varepsilon_2)\right\}. \tag{Д6.27}$$

Любой элемент из $I(\mathfrak{h}^*)$ можно представить в виде

$$f=f_0+f_1\cdot\prod_{1\leqslant i\leqslant 3}(\delta^2-\varepsilon_i^2), \tag{Д6.28}$$

где $f_0\in\mathbb{C}[3\delta^2-2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)]$ и $f_1\in S(\mathfrak{h}^*)^W$.

1.7з. $\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{ab}(3)}$. Мы отождествляем $S(\mathfrak{h}^*)$ с $\mathbb{C}[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \delta]$. Группа Вейля — это $W = (\mathfrak{S}_3 \ltimes (\mathbb{Z}/2)^3) \times \mathbb{Z}/2$, где $\mathfrak{S}_3 \ltimes (\mathbb{Z}/2)^3$ действует на веса ε_i перестановками и заменами знаков, а отдельный множитель $\mathbb{Z}/2$ меняет знак у δ. В этом случае

$$I(\mathfrak{h}^*) = \left\{ f \in S(\mathfrak{h}^*)^W \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_2} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_3} - 3\frac{\partial f}{\partial \delta} \in (\delta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \right\}. \tag{Д6.29}$$

Любой элемент из $I(\mathfrak{h}^*)$ можно представить в виде

$$f = f_0 + \prod (\delta \pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3) \cdot f_1, \tag{Д6.30}$$

где $f_0 \in \mathbb{C}[L_2, L_6]$, $f_1 \in S(\mathfrak{h}^*)^W$ и где

$$\begin{aligned} &L_2 = 3(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) - \delta^2; \\ &L_6 = \delta^6 + \varepsilon_1^6 + \varepsilon_2^6 + \varepsilon_3^6 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^6 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^6 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^6 + \\ &\qquad + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^6 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)^6 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^6 - \frac{1}{64}\left(\sum (\delta \pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3)^6 \right). \end{aligned} \tag{Д6.31}$$

1.7и. $\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{pe}(n)}$. Мы отождествляем $S(\mathfrak{h}^*)$ с алгеброй $\mathbb{C}[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]$, порожденной весами тавтологического $\mathfrak{g}$-модуля. Группа Вейля $W = \mathfrak{S}_n$ действует на веса ε_i перестановками. Положим

$$I_n = \left\{ f \in S(\mathfrak{h}^*)^W \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i} - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_j} \in (\varepsilon_i + \varepsilon_j) \text{ для каждой пары } (i, j), \text{ где } i \neq j \right\}. \tag{Д6.32}$$

Тогда $I(\mathfrak{h}^*) \cong I_n$ — в точности *алгебра проективных функций Шура*. В качестве системы ее образующих мы можем взять либо суммы степеней

$$\Delta_{2k+1} = \sum x_i^{2k+1}, \tag{Д6.33}$$

либо коэффициенты при t в разложении в ряд по t функции

$$F(t) = \frac{\prod (t + \varepsilon_i)}{\prod (t - \varepsilon_i)}. \tag{Д6.34}$$

1.7к. $\underline{\mathfrak{g} \cong \mathfrak{spe}(n)}$. Тогда $I(\mathfrak{h}^*) = I_n/(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)$.

1.7л. $\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{vect}(0|n)}$. Мы отождествляем $S(\mathfrak{h})$ с алгеброй $\mathbb{C}[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]$, порожденной весами $\mathfrak{g}_0$-модуля $\mathfrak{g}_{-1}$ в стандартной градуировке супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. Группа Вейля $W = \mathfrak{S}_n$ действует на веса ε_i перестановками. Положим

$$J_n = \left\{ f \in S(\mathfrak{h}^*)^W \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i} \in (\varepsilon_j) \text{ для любых } i \neq j \right\}. \tag{Д6.35}$$

Тогда $I(\mathfrak{h}^*) \cong J_n$. Каждый элемент из $I(\mathfrak{h}^*)$ имеет вид

$$f = c + \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n g, \quad \text{где } c \in \mathbb{C}, \;\; g \in S(\mathfrak{h}^*)^W. \tag{Д6.36}$$

1.7м. $\underline{\text{а) } \mathfrak{g} = \mathfrak{svect}(0|n)}$. Тогда $I(\mathfrak{h}^*) \cong J_n/(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)$.

$\underline{\text{б) } \mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{s}}\mathfrak{vect}(n)}$. Алгебра инвариантных многочленов — такая же, как в недеформированном случае, т. е. $I(\mathfrak{h}^*) \cong J_n/(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{2n})$.

§ 2. Некоторые конструкции с функтором точек

В алгебраической геометрии функтор точек применяется с начала 1950-х годов, см. [W°]. Популяризация пространств, окольцованных структурными пучками с нильпотентами, последовавшая за открытием суперсимметрий, открыла глаза многим математикам и физикам на полезность языка точек. Ф. А. Березин был одним из первых, кто применил функтор точек (под именем «грассмановы оболочки») к изучению супералгебр Ли. Приведем некоторые конструкции. Мы предполагаем, что все супералгебры и модули конечномерны над $\mathbb{C}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — супералгебра Ли, V — модуль над $\mathfrak{g}$, а $\Lambda = \Lambda_q$. Определим отображение $\varphi\colon \Lambda \otimes V^* \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda \otimes V, \Lambda)$, положив

$$\varphi(\xi \otimes \alpha)(\eta \otimes v) = (-1)^{p(\alpha)(\eta)} \xi \eta \alpha(v) \quad \text{при любых } \xi, \eta \in \Lambda, \; \alpha \in V^*.$$

Рассмотрим $\Lambda \otimes V^*$ и $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda \otimes V, \Lambda)$ как $\Lambda \otimes \mathfrak{g}$-модули, расширив основное кольцо с $\mathbb{C}$ до Λ.

2.1. Лемма. *Отображение φ является изоморфизмом $\Lambda \otimes \mathfrak{g}$-модулей.*

Доказательство. Так как пространство V конечномерно, то φ — изоморфизм векторных пространств; кроме того, очевидно, что φ — гомоморфизм Λ-модулей. Теперь возьмем $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \Lambda$, $\alpha \in V^*$, $v \in V$, $x \in \mathfrak{g}$. Несложно показать, что

$$[(\xi_1 \otimes x)\varphi(\xi_2 \otimes \alpha)](\xi_3 \otimes v) = \varphi(\xi_1 \otimes x(\xi_2 \otimes \alpha))(\xi_3 \otimes v). \qquad \square$$

Рассмотрим композицию отображений

$$V^* \xrightarrow{\varphi_1} \Lambda \otimes V^* \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda \otimes V, \Lambda) \xrightarrow{\varphi_2} S_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda \otimes V, \Lambda)),$$

где $\varphi_1(\alpha) = 1 \otimes \alpha$, а φ_2 — каноническое вложение модуля в его симметрическую алгебру. Гомоморфизм $\mathbb{C}$-модулей $\varphi_2 \circ \varphi \circ \varphi_1$ индуцирует гомоморфизм алгебр

$$S(V^*) = S_{\mathbb{C}}(V^*) \longrightarrow S_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda \otimes V, \Lambda)),$$

а так как последняя алгебра еще и Λ-модуль, то мы получаем гомоморфизм алгебр

$$\Lambda \otimes S(V^*) \xrightarrow{\psi} S_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda \otimes V, \Lambda)).$$

Отметим, что на обеих алгебрах имеются естественные структуры $\Lambda \otimes \mathfrak{g}$-модулей.

2.2. Лемма. *Отображение ψ есть изоморфизм $\Lambda\otimes\mathfrak{g}$-модулей и $\Lambda\otimes\mathfrak{g}$-алгебр.*

Доказательство. Построим обратный гомоморфизм. Рассмотрим композицию

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda\otimes V,\,\Lambda)\xrightarrow{\varphi^{-1}}\Lambda\otimes V^*\longrightarrow\Lambda\otimes S(V^*).$$

Так как эта композиция — гомоморфизм Λ-модулей, она индуцирует гомоморфизм

$$\tilde{\psi}\colon S_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda\otimes V,\,\Lambda))\longrightarrow\Lambda\otimes S(V^*).$$

Несложно проверить, что

$$\psi\circ\tilde{\psi}|_{\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda\otimes V,\Lambda)}=\mathrm{id};\qquad \tilde{\psi}\circ\psi|_{\Lambda\otimes S(V^*)}=\mathrm{id};$$

значит, ψ — изоморфизм, а $\tilde{\psi}$ — обратный к нему. Следующее предложение показывает, что ψ — изоморфизм $\Lambda\otimes\mathfrak{g}$-модулей, что завершает доказательство леммы 2.2. □

2.3. Предложение. *Пусть A и B — Λ-супералгебры, $\mathfrak{g}$ — супералгебра Ли над Λ, действующая на A и B дифференцированиями. Пусть $M\subset A$ и $N\subset B$ — Λ-подмодули, которые в то же время являются $\mathfrak{g}$-модулями, порождающими $\mathfrak{g}$-модули A и B соответственно, а $f\colon A\to B$ — гомоморфизм алгебр, такой что $f(M)\subset N$, причем ограничение $f|_M$ — гомоморфизм $\mathfrak{g}$-модулей. Тогда f — гомоморфизм $\mathfrak{g}$-модулей.*

Доказательство. Пусть $a\in A$. Можно считать, что $a=a_1\ldots a_n$, где $a_i\in M$. Пусть $x\in\mathfrak{g}$. Тогда

$$f(x(a_1\ldots a_n))=f\Big(\sum\pm a_1\ldots xa_i\ldots a_n\Big)=\sum\pm f(a_1)\ldots f(xa_i)\ldots f(a_n)=$$
$$=\sum\pm f(a_1)\ldots xf(a_i)\ldots f(a_n)=x[f(a_1)\ldots f(a_n)]=xf(a_1\ldots a_n).\qquad\square$$

Теперь, пусть $\mathfrak{h}$ — супералгебра Ли над Λ, а U — модуль и над Λ, и над $\mathfrak{h}$. Рассмотрим $U_{\bar 0}$ как $\mathbb{C}$-модуль. Очевидно, что естественное вложение $U_{\bar 0}\to U$ продолжается до гомоморфизма Λ-модулей $\varphi\colon\Lambda\otimes U_{\bar 0}\longrightarrow U$.

2.4. Лемма. *Гомоморфизм φ есть гомоморфизм $\mathfrak{h}_{\bar 0}$-модулей.*

Доказательство. Пусть $x\in\mathfrak{h}_{\bar 0}$, $\xi\in\Lambda$, а $u\in U_{\bar 0}$. Тогда

$$\varphi(x(\xi\otimes u))=\varphi(\xi\otimes xu)=\xi xu,$$
$$x\varphi(\xi\otimes u)=x\xi u\ \overset{\substack{\text{по определению модуля}\\\text{над супералгеброй}}}{=}\ \xi xu.\qquad\square$$

Итак, присоединенное отображение $\mathrm{Hom}_\Lambda(U,\,\Lambda)\longrightarrow\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda\otimes U_{\bar 0},\,\Lambda)$ тоже гомоморфизм $\mathfrak{h}_{\bar 0}$-модулей, так что, по предложению 2.3 гомоморфизм алгебр

$$S_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(U,\,\Lambda))\longrightarrow S_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda\otimes U_{\bar 0},\,\Lambda)),$$

индуцированный этим отображением, является в то же время гомоморфизмом $\mathfrak{h}_{\bar 0}$-модулей. Алгебры и $\Lambda\otimes\mathfrak{h}_{\bar 0}$-модули $S_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda\otimes U_{\bar 0},\,\Lambda))$ и $\Lambda\otimes S(U^*_{\bar 0})$ изоморфны по лемме 2.2. В частности, они изоморфны как $\mathfrak{h}_{\bar 0}$-модули.

Пусть $U_{\bar 0}=(\Lambda\otimes V)_{\bar 0}=V_\Lambda$; пусть θ — композиция гомоморфизмов

$$S(V^*)\longrightarrow\Lambda\otimes S(V^*)\longrightarrow S_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda\otimes V,\,\Lambda))\longrightarrow S_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda\otimes U_{\bar 0},\,\Lambda)).\tag{Д6.37}$$

2.5. Предложение. *Если $q>\dim V_{\bar 1}$ и $\xi\in\Lambda_{\bar 1}$, то ограничение гомоморфизма θ на $\mathbb{C}[\xi]\otimes S(V^*)$ инъективно.*

Доказательство. Пусть $u\in V_\Lambda$. Определим линейную форму $L_u\colon\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda\otimes V_\Lambda,\,\Lambda)\longrightarrow\Lambda$, положив $L_u(l)=l(1\otimes u)$ и $L_u(\xi l)=\xi l(1\otimes u)=\xi L_u(l)$. Таким образом, L_u — гомоморфизм Λ-модулей, он однозначно продолжается до гомоморфизма

$$\varphi_u\colon\mathfrak{a}=S_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda\otimes V_\Lambda,\,\Lambda))\longrightarrow\Lambda.$$

Рассмотрим элементы пространства $\mathfrak{a}$ как функции на V_Λ, положив $f(u)=\varphi_u(f)$ для любых $f\in\mathfrak{a}$ и $u\in V_\Lambda$. Если $f\in\Lambda\otimes S(V^*)$, то положим $f(u)=\varphi_u\circ\theta(f)$. Для любых $\alpha\in V^*$ и $\xi\in\Lambda$ имеем

$$(\xi\otimes\alpha)(u)=\varphi_u\circ\theta(\xi\otimes\alpha)=L_u\circ\theta(\xi\otimes\alpha)=\theta(\xi\otimes\alpha)(1\otimes u).$$

Если $\{e_i\}_{i\in I}$ — базис в V, а $u=\sum\lambda_i\otimes e_i$, то

$$(\xi\otimes\alpha)(u)=\sum(-1)^{p(\alpha)p(e_i)}\xi\lambda_i\alpha(e_i).\tag{Д6.38}$$

С другой стороны, алгебра $\mathbb{C}[\xi]\otimes S(V^*)$ отождествляется со свободной суперкоммутативной супералгеброй, порожденной элементами e_i^* и ξ. Пусть $p(e_i^*)=\bar 0$ при $i\leqslant n$ и $\bar 1$ при $i>n$. Если $f\in\mathbb{C}[\xi]\otimes S(V^*)$, то $f=f_0+\xi f_1$, где

$$f_j=\sum_{i_1\ldots i_k}f_j^{i_1\ldots i_k}e^*_{i_1}\ldots e^*_{i_k},\qquad\text{где } j=0,\ 1,\ \text{ а } f_j^{i_1\ldots i_k}\in S(V^*_{\bar 0}).$$

Согласно равенству (Д6.38), имеем

$$f(u)=f_0(u)+\xi f_1(u)=\sum f_0^{i_1\ldots i_k}(u)e^*_{i_1}(u)\ldots e^*_{i_k}(u)+\sum f_1^{i_1\ldots i_k}(u)e^*_{i_1}(u)\ldots e^*_{i_k}(u).$$

Положим $\lambda_i=a_i$ при $i\leqslant n$ и ξ_{i-n} при $i>n$. Поскольку $q>\dim V_{\bar 1}$, мы можем предположить, что семейство $\{\xi_i\}_{i\in I}$ свободно порождает алгебру $S(V^*_{\bar 1})$ и

$$f(u)=\sum(-1)^kf_{i_1\ldots i_k}(a_1\ldots a_n)\xi_{i_1-n\ldots i_k-n}.\tag{Д6.39}$$

Если $\theta(f)=0$, то $f(u)=\varphi_u\circ\theta(f)$ при любых $u\in V_\Lambda$. Из уравнения (Д6.39) следует, что $f_{i_1\ldots i_k}(a)=0$ при любых $a\in\mathbb{C}^n$. Но так как поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто, то (по предложению 5.3.1 из книги [Бу1°]) $f_{i_1\ldots i_k}=0$, а значит, $f=0$. □

2.6. Лемма. *Пусть* $q>\dim V_{\bar 1}$. *Тогда* $f\in S(V^*)$ *есть* $\mathfrak g$-*инвариант тогда и только тогда, когда* $\theta(f)\in\Lambda\otimes S(V^*_\Lambda)$ *есть* $\mathfrak g_\Lambda$-*инвариант.*

Доказательство. Разложим отображение θ в композицию:

$$S(V^*)\xrightarrow{i_1}\Lambda\otimes S(V^*)\xrightarrow{i_2}$$

$$\xrightarrow{i_2} S_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda\otimes V,\,\Lambda))\xrightarrow{i_3} S_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda\otimes V_\Lambda,\,\Lambda))\xrightarrow{i_4}\Lambda\otimes S(V^*_\Lambda).$$

Пусть $f\in S(V^*)^{\mathfrak g}$, тогда

$$(\xi\otimes x)(i_1(f)=(\xi\otimes x)(1\otimes f)=\xi\otimes xf=0\quad\text{при любых}\quad \xi\in\Lambda,\quad x\in\mathfrak g.$$

Обратно, пусть $yi_1(f)=0$ при любых $y\in\mathfrak g_\Lambda$. Тогда

$$0=(\xi\otimes x)(1\otimes f)=\xi\otimes xf.$$

Если $p(y)=\bar 1$, то положим $p(\xi)=\bar 1$. Поэтому $\xi\otimes xf=0$ и $yf=0$. Итак,

$$f\in S(V^*)^{\mathfrak g}\longleftrightarrow i_1(f)\in(\Lambda\otimes S(V^*))^{\mathfrak g}_{\Lambda}.$$

Так как i_2, i_3, i_4 — гомоморфизмы $\mathfrak g_\Lambda$-модулей, то из предыдущего следует, что если f есть $\mathfrak g$-инвариант, то $\theta(f)=i_4\circ i_3\circ i_2\circ i_1(f)$ есть $\mathfrak g_\Lambda$-инвариант.

Обратно, пусть $\theta(f)$ есть $\mathfrak g_\Lambda$-инвариант, а $x\in\mathfrak g_{\bar 0}$. Тогда

$$\theta(1\otimes xf)=\theta((1\otimes x)(1\otimes f))=(1\otimes x)\theta(f)=0.$$

По предложению 2.5 имеем $1\otimes xf=0$ и $xf=0$. Пусть $x\in\mathfrak g_{\bar 1}$, а $\xi\in\Lambda_{\bar 1}$. Тогда $\theta(\xi\otimes xf)=(\xi\otimes x)\theta(1\otimes f)=0$ и $\xi\otimes xf=0$ снова по предложению 2.5; так что $xf=0$, а значит, $f\in S(V^*)^{\mathfrak g}$. □

2.7. Замечание. Смысл лемм и предложений этого параграфа в том, чтобы отыскивая инвариантные многочлены на V, мы могли бы их рассматривать как функции на V_Λ, инвариантные относительно алгебры Ли $\mathfrak g_\Lambda$. Такой подход делает возможным применение теории групп и алгебр Ли к исследованию супералгебр Ли.

2.8. Предложение. *Пусть* A — *коммутативная конечно-порожденная алгебра над* $\mathbb C$ *без нильпотентов и* $\mathfrak a=A\otimes\Lambda_p$. *Пусть* $q\geqslant p$, *а элемент* $f\in\mathfrak a$ *такой, что* $\varphi(f)=0$ *для любого гомоморфизма* $\varphi\colon\mathfrak a\to\Lambda_q$. *Тогда* $f=0$.

Доказательство. Пусть $\psi\colon A\to\mathbb C$ — произвольный гомоморфизм. Продолжим ψ до гомоморфизма $\varphi\colon\mathfrak a\to\Lambda_q$, положив $\varphi=\psi\otimes 1$. Если $\xi_1,\,\ldots,\,\xi_p$ — образующие алгебры Λ_p, а $f=\sum f_{i_1\ldots i_k}\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k}\in\mathfrak a$, тогда из условия $\varphi(f)=0$ следует, что $\psi(f_{i_1\ldots i_k})=0$, а так как гомоморфизм ψ произвольный, то по предложению 5.3.1 из [Бу1°] имеем $f_{i_1\ldots i_k}=0$; следовательно, $f=0$. □

§ 3. Предварительные результаты

3.1. Предложение ([Srg4°]). *Пусть* $\mathfrak g$ — *конечномерная супералгебра Ли,* V — *конечномерный* $\mathfrak g$-*модуль,* $L\subset V$ — *подпространство и* $w_0\in W_{\bar 0}$ — *такой элемент, что отображение* $\mathfrak g\times W\to V$, *заданное формулой*

$$x,\,w\mapsto xw_0+w,\tag{Д6.40}$$

сюрьективно. Тогда отображение ограничения $S(V^*)^{\mathfrak g}\longrightarrow S(W^*)$ *инъективно.*

Доказательство. Пусть $\rho\colon\mathfrak g_\Lambda\longrightarrow\mathfrak{gl}(V_\Lambda)$ — гомоморфизм алгебр Ли. Пусть G_Λ — связная и односвязная группа Ли, соответствующая алгебре Ли $\mathfrak g_\Lambda$. Согласно теории Ли (см. [ВиОн°]) существует единственный гомоморфизм $\pi\colon G_\Lambda\longrightarrow\mathrm{GL}(V_\Lambda)$, такой что производная гомоморфизма π в единице равна ρ. Рассмотрим отображение многообразий

$$\Phi\colon G_\Lambda\times L_\Lambda\longrightarrow V_\Lambda,\qquad \Phi(g,\,w)=gw.\tag{Д6.41}$$

Легко вычислить производную этого отображения в точке $(1,\,w_0)$. Она равна

$$(D\Phi)(1,\,w_0)(\tilde x,\,\tilde w)=\rho(\tilde x)w_0+\tilde w.\tag{Д6.42}$$

Пусть $f\in S(V^*)^{\mathfrak g}$ и $i(f)=0$. Тогда $\theta(f)|_{L_\Lambda}=0$, где гомоморфизм θ определен формулой (Д6.37). По лемме 2.6 $\theta(f)\in\Lambda\otimes S(V^*_\Lambda)$ является $\mathfrak g_\Lambda$-инвариантом. Согласно следствию 3 предложения 3.6.13 из книги [Бу2°] элемент $\theta(f)$ инвариантен относительного естественного G_Λ-действия на $\Lambda\otimes S(V^*_\Lambda)$.

Рассмотрим $\theta(f)$ как обычное полиномиальное отображение $V_\Lambda\to\Lambda$. Из формулы (Д6.42) следует, что отображение Φ субмерсивно в точке $(1,\,w_0)$. Поэтому образ отображения Φ содержит открытую окрестность точки w_0 в V_Λ. Следовательно множество $G_\Lambda L_\Lambda$ содержит открытую окрестность точки w_0, а значит $\theta(f)=0$. Из леммы 2.6 следует, что $f=0$. □

Следствие. *Если* $\mathfrak g$ — *конечномерная супералгебра Ли, а* $\mathfrak h$ — *ее подалгебра Картана (точнее, максимальный тор), то отображение ограничения* $S(\mathfrak g^*)^{\mathfrak g}\to S(\mathfrak h^*)$ *инъективно.*

Доказательство. Достаточно показать эпиморфность отображения $f\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$, заданного для некоторого $h_0\in\mathfrak{h}$ формулой

$$f\colon x,\, h\mapsto xh_0+h. \tag{Д6.43}$$

Пусть $\mathfrak{g}=\bigoplus\limits_{\alpha\in R}\mathfrak{g}(\alpha)$ — обобщенное весовое разложение пространства $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$ (см. пункт 1.5). Выберем $h_0\in\mathfrak{h}_{\bar 0}$ так, чтобы $\alpha(h_0)\neq 0$ при всех $\alpha\in R$. Тогда $\operatorname{Ker} f$ состоит из пар $(x,\, h)$, таких что $xh_0+h=0$. Поскольку $\alpha(h_0)\neq 0$ при всех $\alpha\in R$, мы видим, что $x\in\mathfrak{h}$ и $\dim\operatorname{Ker} f = \dim\mathfrak{h}$. Следовательно, отображение $\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$ сюръективно. □

3.2. Предложение. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— конечномерная супералгебра Ли, такая что алгебра Ли* $\mathfrak{h}:=\mathfrak{g}_{\bar 0}$ *коммутативна,* $\mathfrak{g}_{\bar 1}=\mathrm{Span}(u,\, v)$, *и выполняются следующие соотношения*:

$$\begin{aligned}&[h,\, v]=-\alpha(h)v,\quad [h,\, u]=\alpha(h)u\quad \textit{при всех } h\in\mathfrak{h} \textit{ и } \alpha\in\mathfrak{h}^*;\\ &[u,\, v]=h_\alpha\in\mathfrak{h},\quad \textit{где } \alpha(h_\alpha)=0.\end{aligned} \tag{Д6.44}$$

Положим

$$I^\alpha(\mathfrak{h}^*)=\{f\in S(\mathfrak{h}^*)\mid D_{h_\alpha}f\in(\alpha)\}. \tag{Д6.45}$$

Тогда гомоморфизм ограничения $S(\mathfrak{g}^*)\to S(\mathfrak{h}^*)$ *индуцирует изоморфизм* $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}\cong I^\alpha(\mathfrak{h}^*)$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана (точнее, максимальный тор), то отображение ограничения инъективно по предложению 3.1. Докажем, что его образ совпадает с $I^\alpha(\mathfrak{h}^*)$. Пусть $F\in S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$. В силу $\mathfrak{h}$-инвариантности элемент F должен иметь вид

$$F=f+gv^*u^*,\quad \text{где } v^* \text{ и } u^* \text{ — левые двойственные к } v \text{ и } u. \tag{Д6.46}$$

Легко проверить, что в $S(\mathfrak{g}^*)$ выполняются следующие соотношения:

$$\begin{gathered}v\cdot l=-l(h_\alpha)\cdot u^*\quad\text{и}\quad u\cdot l=-l(h_\alpha)\cdot v^*\quad\text{при } l\in\mathfrak{h}^*\\ v\cdot v^*=\alpha;\quad v\cdot u^*=0\quad\text{и}\quad u\cdot u^*=-\alpha;\ u\cdot v^*=0.\end{gathered} \tag{Д6.47}$$

Поэтому $v\cdot F=-D_{h_\alpha}f\cdot u^*+\alpha g u^*=0$. Следовательно $D_{h_\alpha}f=\alpha g$ и $f\in I^\alpha(\mathfrak{h}^*)$. Наоборот, если $f\in I^\alpha(\mathfrak{h}^*)$, то, как легко проверить,

$$F=f+\frac{1}{\alpha}D_{h_\alpha}fv^*u^*\in S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}. \tag{Д6.48}$$

□

3.3. Предложение. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— конечномерная супералгебра Ли, такая что алгебра Ли* $\mathfrak{h}:=\mathfrak{g}_{\bar 0}$ *коммутативна;* $\mathfrak{g}_{\bar 1}=\mathrm{Span}(v_1,\, u_1,\, v_2,\, u_2)$ *и выполняются следующие соотношения*

$$\begin{aligned}&[h,\, v_i]=-\alpha(h)v_i,\ \ [h,\, u_i]=\alpha(h)u_i\quad \textit{при всех } h\in\mathfrak{h},\ i=1,\,2 \textit{ и } \alpha\in\mathfrak{h}^*;\\ &[u_i,\, u_j]=[v_i,\, v_j]=0;\\ &[u_i,\, v_j]=0\quad \textit{при } i\neq j;\ [u_i,\, v_i]=h_i\in\mathfrak{h}\ (\textit{возможно, } h_1=h_2);\\ &\alpha([\mathfrak{g}_{\bar 1},\, \mathfrak{g}_{\bar 1}])=0.\end{aligned} \tag{Д6.49}$$

Положим

$$I^\alpha(\mathfrak{h}^*)=\bigl\{f\in S(\mathfrak{h}^*)\mid D_{h_1}f\in(\alpha),\ \ D_{h_2}f\in(\alpha),\ \ D_{h_1}D_{h_2}f\in(\alpha^2)\bigr\}. \tag{Д6.50}$$

Тогда гомоморфизм ограничения индуцирует изоморфизм алгебр $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}\cong I^\alpha(\mathfrak{h}^*)$.

Доказательство. Как и при доказательстве предложения 3.2 пусть $F\in S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$. В силу $\mathfrak{h}$-инвариантности, F должен иметь вид

$$F=f+gv_1^*u_1^*+sv_2^*u_2^*+rv_1^*u_1^*v_2^*u_2^*, \tag{Д6.51}$$

где v_i^* и u_i^* является левыми двойственными к v_i и u_i, соответственно.

Из условий $v_1F=0$ и $v_2F=0$ следует, что

$$\begin{aligned}D_{h_1}f-\alpha g=0,&\quad D_{h_1}s-\alpha r=0,\\ D_{h_2}f-\alpha s=0,&\quad D_{h_2}s-\alpha r=0.\end{aligned}$$

Из этих условий следует, что

$$D_{h_1}f\in(\alpha),\qquad D_{h_2}f\in(\alpha),\qquad D_{h_1}D_{h_2}f\in(\alpha^2). \tag{Д6.52}$$

Наоборот, если эти условия выполняются, то положив

$$F=f+\frac{1}{\alpha}D_{h_1}fv_1^*u_1^*+\frac{1}{\alpha}D_{h_2}fv_2^*u_2^*+\frac{1}{\alpha^2}D_{h_1}D_{h_2}fv_1^*u_1^*v_2^*u_2^*, \tag{Д6.53}$$

мы получаем элемент из $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$, чье ограничение на $\mathfrak{h}^*$ равно f. □

3.4. Пример. В условиях предложения 3.3, если $h_1=h_2$, то не каждый элемент из $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ может быть получен в виде линейной комбинации инвариантных многочленов вида $\mathrm{str}(\rho(x)^k)$, где ρ пробегает конечномерные представления супералгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Действительно, положим $h_1=h_2=h$, тогда имеется два типа представлений супералгебр Ли $\mathfrak{g}$:

1) 1-мерные, заданные линейными формами $\lambda\in\mathfrak{h}^*$, такими что $\lambda(h)=0$;

2) $4|4$-мерные, для которых $\lambda(h)\neq 0$. Такие представления имеют вид

$$T_\lambda=\mathrm{ind}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{h}\oplus\mathrm{Span}(u_1,u_2)}(\lambda). \tag{Д6.54}$$

Характер представления первого типа равен e^{λ} (с точностью до умножения на ε). Такие характеры порождают подалгебру инвариантов изоморфную $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^{\perp}]$, где

$$\mathfrak{h}^{\perp} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(h) = 0\}. \qquad (Д6.55)$$

Напомним, что *суперхарактер* $\operatorname{sch} V$, модуля V — это линейный функционал на $U(\mathfrak{g})$, такой что $\operatorname{sch} V(u) = \operatorname{str}_V(u)$ для любого $u \in U(\mathfrak{g})$. Здесь мы отождествляем пространство линейных функционалов $U(\mathfrak{g})^*$ на $U(\mathfrak{g})$ с алгеброй формальных степенных рядов. Теперь нетрудно проверить, что каждая однородная компонента суперхарактера, рассматриваемого как формальный степенной ряд, является инвариантным многочленом. И вправду, эта компонента *равна* $\operatorname{str}(\rho(x)^k)$, где ρ — соответствующее представление супералгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Таким образом, однородные компоненты суперхарактеров модулей T_{λ} являются инвариантными многочленами. Суперхарактер модуля T_{λ} равен $(1 - e^{-\alpha})^2 e^{\lambda}$, и линейная оболочка таких суперхарактеров есть $\operatorname{Span}(\alpha^2 \cdot \varphi \mid \varphi \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*])$. Итак, общий вид ограничения любого инвариантного многочлена равного линейной комбинации суперследов, имеет вид

$$\psi + \alpha^2 \cdot \varphi, \quad \text{где } \varphi \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*],\ \psi \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}^{\perp}]. \qquad (Д6.56)$$

С другой стороны по предложению 3.3 элемент вида $\alpha \cdot l$, где $l \in \mathfrak{h}^*$ и $l(h) \neq 0$, является ограничением инварианта и не имеет описанного выше вида. Таким образом, $\alpha \cdot l$ не принадлежит подалгебре, порожденной суперследами конечномерных представлений.

3.5. Предложение. *Пусть* $\mathfrak{g} = \bigoplus\limits_{-1 \leqslant i \leqslant N} \mathfrak{g}_i$ *— согласованная $\mathbb{Z}$-градуировка супералгебры Ли; пусть, сверх того, алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ редуктивна. Пусть $W = W(\mathfrak{g}_0)$ — группа Вейля алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — веса $\mathfrak{g}_0$-модуля $\mathfrak{g}_{-1}$.*

Тогда любой многочлен вида $\alpha_1 \ldots \alpha_n f$ на подалгебре Картана $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$, где $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W$, является ограничением $\mathfrak{h}$ инварианта.

Доказательство. Пусть λ — какой-то старший вес относительно $\mathfrak{g}_0$, а L^{λ} — соответствующий неприводимый $\mathfrak{g}_0$-модуль (с четным старшим весовым вектором). Пусть $\mathfrak{g}_i L^{\lambda} = 0$ при $i > 0$; положим

$$\mathfrak{g}_{\geqslant 0} = \bigoplus_{i \geqslant 1} \mathfrak{g}_i \text{ и } V^{\lambda} = \operatorname{ind}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{g}_{\geqslant 0}}(L^{\lambda}),\ \text{где } \mathfrak{g}_{\geqslant 0} = \bigoplus_{\geqslant 0} \mathfrak{g}_i.$$

Тогда

$$\operatorname{sch} V^{\lambda} = \operatorname{ch} L^{\lambda} \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (1 - e^{\alpha_i}). \qquad (Д6.57)$$

Согласно доказанному И. Н. Бернштейном (см. [Bern1°]) существует линейная комбинация $\sum c_{\lambda} \operatorname{ch} L^{\lambda}$ функций $\operatorname{ch} L^{\lambda}$, такая что однородная компонента низшей степени этой комбинации равна f. Но однородная компонента низшей степени выражения $\prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (1 - e^{\alpha_i}) \sum c_{\lambda} \operatorname{ch} L^{\lambda}$ равна как раз $\alpha_1 \ldots \alpha_n f$. □

3.6. Предложение. *Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar 0} \oplus \mathfrak{g}_{\bar 1}$ — супералгебра Ли с редуктивной $\mathfrak{g}_{\bar 0}$. Пусть $W = W(\mathfrak{g}_{\bar 0})$ — группа Вейля алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar 0}$, а $\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_n$ — веса $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модуля $\mathfrak{g}_{\bar 1}$. Тогда любая полиноминальная функция вида $\alpha_1 \ldots \alpha_n f$, где $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W$, на подалгебре Картана $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar 0}$, является ограничением $\mathfrak{h}$-инварианта.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 3.5. □

3.7. Предложение. *Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$, а L^n — конечномерный неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом $n\varphi$, где φ — фундаментальный вес. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ и любых $n_1, \ldots, n_{k+1} \in \mathbb{N}$ существуют $c_1, \ldots, c_{k+1} \in \mathbb{C}$ такие, что однородная компонента низшей степени линейной комбинации характеров $\sum c_i \operatorname{ch} L^{n_i}$ становится при ограничении на подалгебру Картана равной φ^{2k}.*

Доказательство. Поскольку

$$\operatorname{ch} L^{n_i} = \frac{\sinh(n_i + 1)\varphi}{\sinh \varphi}, \qquad (Д6.58)$$

достаточно доказать предложение не для характеров, а для суммы $\sum c_i \sinh(n_i + 1)\varphi$. Приравнивая нулю коэффициенты при x в степенях $1, 3, \ldots, 2k - 1$ и приравнивая единице коэффициент при x в степени $2k + 1$, мы получаем систему, детерминант которой отличен от нуля, если числа n_i различны:

$$\begin{aligned}
c_1(n_1 + 1) + \ldots + c_{k+1}(n_{k+1} + 1) &= 0\\
c_1(n_1 + 1)^3 + \ldots + c_{k+1}(n_{k+1} + 1)^3 &= 0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \qquad (Д6.59)\\
c_1(n_1 + 1)^{2k-1} + \ldots + c_{k+1}(n_{k+1} + 1)^{2k-1} &= 0\\
c_1(n_1 + 1)^{2k+1} \ldots + c_{k+1}(n_{k+1} + 1)^{2k+1} &= (2k + 1)!
\end{aligned}$$

□

Замечание. Из предложения 3.7 следует, что

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant k+1} c_i \sinh(n_i x)\varphi = x^{2k+1} + \ldots \qquad (Д6.60)$$

Дифференцируя это тождество по x, мы видим, что существуют такие числа $c'_1, \ldots c'_{k+1}$, что

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant k+1} c'_i \cosh(n_i x)\varphi = x^{2k} + \ldots \qquad (Д6.61)$$

3.8. Алгебра двойных чисел и модули над ассоциативными супералгебрами. Пусть A — ассоциативная супералгебра. Рассмотрим алгебру (а не супералгебру, т. е. мы игнорируем какую бы то ни было четность, хотя на A некоторая четность задана по определению)

$$A[\varepsilon] = \{a + b\varepsilon \mid a,\, b \in A,\ \ \varepsilon^2 = 1,\ \ \varepsilon a = (-1)^{p(a)} a\varepsilon\}. \tag{Д6.62}$$

Заметим, что наша алгебра $A[\varepsilon]$ почти то же самое, что *супер*алгебра $Q(A)$, но есть нюанс:

(1) мы игнорируем четность,

(2) в $Q(A)$ должно выполняться другое соотношение, а именно $\varepsilon^2 = -1$.

3.9. Лемма. *Категория $A[\varepsilon]$-модулей* Mods *эквивалентна категории $\mathbb{Z}/2$-градуированных A-модулей* SMods, *причем морфизмам в* Mods *соответствуют чисто четные гомоморфизмы в* SMods.

Доказательство. Построим функторы

$$F\colon \mathsf{Mods} \longrightarrow \mathsf{SMods} \quad \text{и} \quad G\colon \mathsf{SMods} \longrightarrow \mathsf{Mods}. \tag{Д6.63}$$

Пусть $V \in \operatorname{Ob}\mathsf{Mods}$, тогда $\varepsilon \in \operatorname{End}(V)$ и поскольку $\varepsilon^2 = 1$, то $F(V) = V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1}$, где

$$V_{\bar 0} = \{v \in V \mid \varepsilon v = v\} \quad \text{и} \quad V_{\bar 1} = \{v \in V \mid \varepsilon v = -v\}. \tag{Д6.64}$$

Итак, V можно рассматривать как объект из SMods. Легкая и стандартная проверка с помощью коммутационных соотношений на ε показывает, что если $f\colon V \to W$ является гомоморфизмом $A[\varepsilon]$-модулей, то f можно рассматривать как четный гомоморфизм (морфизм) A-модулей.

Каждое суперпространство $V = V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1} \in \operatorname{Ob}\mathsf{SMods}$ задается автоморфизмом четности Pty (Ф. А. Березин обозначал его **A**), таким что $\mathrm{Pty}(v) = (-1)^{p(v)} v$. Переводя ε в Pty, мы получаем объект из Mods. Проверка того, что FG и GF являются тождественными функторами, тривиальна. □

3.10. Лемма. *Пусть A — ассоциативная супералгебра, а A_{SL} — соответствующая*[1] *ей супералгебра Ли. Для любых a, $b \in A$ положим*

$$a * b = (-1)^{p(a)} ab - (-1)^{p(a)p(b)} ba. \tag{Д6.65}$$

Относительно присоединенного действия $*$ пространство A является A_{SL}-модулем. Более того, пусть V — $\mathbb{Z}/2$-градуированный A-модуль. Отображение $a \mapsto \operatorname{tr}_V(a)$ является A_{SL}-инвариантной функцией на A.

---

[1] При замене ассоциативного умножения $(a,\, b) \mapsto a \cdot b$ на суперкоммутатор $a,\, b \mapsto [a,\, b] := ab - (-1)^{p(a)p(b)} ba$ для любых a, $b \in A$. Аналогично, при замене умножения на коммутатор, ассоциативной алгебре A соответствует алгебра Ли A_L.

Доказательство. Рассмотрим $A[\varepsilon]$ как супералгебру с $p(\varepsilon) = \bar 0$. (Заметим, что в [BL2°] на $Q(A)$ введена другая суперструктура: $p(\varepsilon) = \bar 1$.) Вычислим $[a,\, \varepsilon b]$, где a, $b \in A$, а $[\cdot\,, \cdot]$ обозначает суперкоммутатор:

$$[a,\, \varepsilon b] = a \cdot \varepsilon b - (-1)^{p(a)p(b)} \varepsilon ba = \varepsilon((-1)^{p(a)} ab - (-1)^{p(a)p(b)} ba), \tag{Д6.66}$$

что и приводит к приведенной выше формуле для $a * b$.

Далее, V является $\mathbb{Z}/2$-градуированным $A[\varepsilon]$-модулем; а так как $\operatorname{str}[a,\, \varepsilon b] = 0$, то

$$\operatorname{tr}(a * b) = \operatorname{str}(\varepsilon a * b) = \operatorname{str}\ [a,\, \varepsilon b] = 0. \tag{Д6.67}$$

Ибо если $a \in A$, то $\operatorname{str}(a) = \operatorname{tr}(\varepsilon a)$ и $\operatorname{tr}(a) = \operatorname{str}(\varepsilon a)$. □

Замечание. А. Н. Сергеев ввел алгебру $A[\varepsilon]$ с указанными выше свойствами, чтобы рассматривать не только такие сплетающие операторы, которые превращаются в скаляры на неприводимых модулях, но и те, которые превращаются в кратные оператора четности Pty. Это направление мысли приводит нас к понятию антицентра, с успехом примененному М. Горелик [G1°, G2°, G3°].

§ 4. Инвариантные многочлены на супералгебрах Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — одна из супералгебр Ли (Д6.5). Пусть $\mathfrak{h}$ — максимальный тор супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $R = R^+ \cup R^-$ — множество ненулевых корней супералгебры $\mathfrak{g}$, разделенное на подмножества положительных и отрицательных корней. Пусть R_0 и R_1 — подмножества четных и нечетных корней; каждое из этих множеств может быть подразбито на подмножества $R_0^{\pm}$, $R_1^{\pm}$ положительных и отрицательных корней. Мы далее полагаем

$$\widetilde{R}^+ = \bigl\{\alpha \in R^+ \mid -\alpha \in R^-\bigr\}; \qquad \widetilde{R}_1^+ = \bigl\{\alpha \in R_1^+ \mid -\alpha \in R_1^-;\ 2\alpha \notin R_1^+\bigr\}. \tag{Д6.68}$$

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}^+ \bigoplus\limits_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha$ — весовое разложение; для любого $\alpha \in \widetilde{R}_1^+$ положим

$$\nu(\alpha) = \min(\dim \mathfrak{g}^\alpha,\, \dim \mathfrak{g}^{-\alpha}). \tag{Д6.69}$$

Для рассматриваемых супералгебр Ли либо $\nu(\alpha) = 1$, либо $\nu(\alpha) = 2$. Положим

$$I^\alpha(\mathfrak{h}^*) = \begin{cases} \{f \in S(\mathfrak{h}^*) \mid D_h f \in (\alpha) \text{ для } h \in [\mathfrak{g}_{\bar 1}^{-\alpha},\, \mathfrak{g}_{\bar 1}^{\alpha}]\}, & \text{если } \nu(\alpha) = 1,\\ \{f \in S(\mathfrak{h}^*) \mid D_h f \in (\alpha) \text{ для } h \in [\mathfrak{g}_{\bar 1}^{-\alpha},\, \mathfrak{g}_{\bar 1}^{\alpha}] & \\ \qquad\qquad \text{и } D_{h_1} D_{h_2} f \in (\alpha^2) \text{ для } h_1, h_2, & \\ \qquad\qquad \text{порождающих } [\mathfrak{g}_{\bar 1}^{-\alpha},\, \mathfrak{g}_{\bar 1}^{\alpha}]\}, & \text{если } \nu(\alpha) = 2. \end{cases} \tag{Д6.70}$$

Пусть W — группа, заданная формулой (Д6.8).

Теорема. *Гомоморфизм ограничения* $S(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow S(\mathfrak{h}^*)$ *индуцирует изоморфизм алгебры* $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ *с алгеброй*

$$I(\mathfrak{h}^*) = \left\{f \in S(\mathfrak{h}^*)^W \mid f \in I^\alpha(\mathfrak{h}^*) \text{ при всех } \alpha \in \tilde{R}_{\bar{1}}^+\right\}. \tag{Д6.71}$$

Доказательство. Докажем, что образ f любого $\mathfrak{g}$-инвариантного многочлена F принадлежит $I(\mathfrak{h}^*)$. Прежде всего заметим, что $f \in S(\mathfrak{h}^*)^W$.

Пусть $\mathfrak{g}_\alpha$ — подсупералгебра Ли в $\mathfrak{g}$, порожденная корневыми векторами весов пропорциональных α. Очевидно, что если $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ редуктивна, то $\mathfrak{g}_\alpha$ изоморфна супералгебре Ли из предложения 3.2, если $\nu(\alpha) = 1$ или супералгебре Ли из предложения 3.3, если $\nu(\alpha) = 2$, а $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2|2)$, $\mathfrak{psl}(2|2)$ или $\mathfrak{spe}(4)$.

Заметим, что ограничение функционала F на $\mathfrak{g}_\alpha$ принадлежит алгебре $S(\mathfrak{g}_\alpha^*)^{\mathfrak{g}_\alpha}$. Из предложений 3.2 и 3.3 мы выводим, что $f \in I^\alpha(\mathfrak{h}^*)$.

Если супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ векторного типа, т. е. из серии $\mathfrak{vect}$, $\mathfrak{svect}$ и т. д., то $\nu(\alpha) = 1$. Выбирая $u \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ и $v \in \mathfrak{g}^\alpha$, мы получаем подалгебру $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \operatorname{Span}(u, v)$, удовлетворяющую условиям предложения 3.2. Следовательно, и в этом случае $f \in I^\alpha(\mathfrak{h}^*)$.

Более того, предложение 3.1 показывает, что гомоморфизм ограничения инъективен. Докажем теперь, что каждый элемент из $I(\mathfrak{h}^*)$ можно продолжить до элемента из $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$. Доказательство будет проведено по отдельности для каждой из супералгебр Ли из списка (Д6.5).

$\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n|m)}$. Для любых $h \in \mathfrak{h}$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ и $e^\lambda \in \mathbb{C}[[\mathfrak{h}^*]]$ положим

$$D_h e^\lambda = \lambda(h) e^\lambda. \tag{Д6.72}$$

Положим

$$J(\mathfrak{h})^* = \left\{\begin{array}{ll} f \in \mathbb{C}[[\mathfrak{h}^*]]^W \mid & f \text{ является конечной линейной комбина-} \\ & \text{цией выражений } e^\lambda \text{, где } \lambda \text{ есть вес ко-} \\ & \text{нечномерного } \mathfrak{g}_{\bar{0}}\text{-модуля, а } D_h f \in (\alpha) \text{ для} \\ & \text{любых } \alpha \in R_{\bar{1}} \text{ и } h \in [\mathfrak{g}_{\bar{1}}^{-\alpha}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}^{\alpha}] \end{array}\right\}. \tag{Д6.73}$$

Докажем, что любой элемент из $J(\mathfrak{h}^*)$ является линейной комбинацией суперхарактеров конечномерных представлений. Действительно, поскольку однородные компоненты суперхарактеров суть инвариантные многочлены, то любая их линейная комбинация принадлежит $J(\mathfrak{h})^*$. Пусть $(\mathfrak{g}_{\bar{0}})_s$ есть полупростая часть алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, а $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ — форма Киллинга на $(\mathfrak{g}_{\bar{0}})_s$.

Для любого $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ пусть λ_s является ограничением формы λ на $\mathfrak{h} \cap (\mathfrak{g}_{\bar{0}})_s$. Положим

$$|\lambda|^2 = \langle \lambda_s, \lambda_s \rangle. \tag{Д6.74}$$

Для любого $f = \sum c_\nu e^\nu$ положим $r_f = \max\limits_{\nu \neq 0} |\nu_s|$ и проведем индукцию по r_f.

Если $r_f = 0$, то $\nu_s = 0$ при любом ν. Пусть $\alpha \in R_{\bar{1}}$ и $h \in [\mathfrak{g}_{\bar{1}}^{-\alpha}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}^{\alpha}]$. Если $\nu(h) = 0$, то из $\nu_s = 0$ следует, что функционал ν пропорционален суперследу, т. е. суперхарактеру одномерного представления. Поэтому можно считать, что $\nu(h) \neq 0$ для любого ν.

Рассмотрим ограничение многочлена $D_h f$ на $[\mathfrak{g}_{\bar{1}}^{-\alpha}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}^{\alpha}]$. Так как $\alpha(h) = 0$, то $D_h f = \sum c_\nu \nu(h) e^\nu = 0$, а так как экспоненты линейно независимы, то $c_\nu \nu(h) = 0$ при всех ν. Так как $\nu(h) \neq 0$, то каждый коэффициент c_ν равен 0. Следовательно $f = 0$. Итак, если $|\nu_s| = 0$, то $f = \sum c_\nu e^\nu$, где каждый функционал ν пропорционален суперследу.

Пусть $r_f > 0$ и $f = \sum c_\nu e^\nu$, где сумма пробегает веса ν, такие что $|\nu_s| = r_f$. Рассмотрим разность $f - \sum c_\nu \operatorname{sch} L^\nu$, где L^ν — неприводимый модуль со старшим весом ν. Поскольку эта разность W-инвариантна, она содержит слагаемые e^μ с $|\mu_s| < r_f$ по свойству представлений полупростых алгебр Ли (см. [Вегп1°]). Таким образом, мы можем применить предположение индукции.

Пусть теперь $P \in I(\mathfrak{h}^*)$. Рассмотрим P как многочлен от весов тавтологического модуля, т. е. $P = P(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n; \delta_1, \ldots, \delta_m)$ и положим

$$f = P(e^{\varepsilon_1} - 1, \ldots, e^{\varepsilon_n} - 1; e^{\delta_1} - 1, \ldots, e^{\delta_m} - 1). \tag{Д6.75}$$

Проверим, что $f \in J(\mathfrak{h}^*)$. Ясно, что многочлен f инвариантен относительно W. Пусть $\alpha = \varepsilon_i - \delta_j$ и $h \in [\mathfrak{g}_{\bar{1}}^{-\alpha}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}^{\alpha}]$. Тогда условие $D_h f \in (\alpha)$ эквивалентно тому, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i} + \frac{\partial f}{\partial \delta_j} \in (\varepsilon_i - \delta_j) \iff \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_i} e^{\varepsilon_i} + \frac{\partial P}{\partial \delta_j} e^{\delta_j} \in (e^{\varepsilon_i} - e^{\delta_j}) \iff \\ \iff e^{\delta_j}\left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon_i} e^{\varepsilon_i - \delta_j} + \frac{\partial P}{\partial \delta_j}\right) \in (e^{\varepsilon_i - \delta_j} - 1) e^{\delta_j} \iff \\ \iff \left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon_i} e^{\varepsilon_i - \delta_j} + \frac{\partial P}{\partial \delta_j}\right) \in (e^{\varepsilon_i - \delta_j} - 1). \end{aligned} \tag{Д6.76}$$

Так как $\dfrac{\partial P}{\partial \varepsilon_i} + \dfrac{\partial P}{\partial \delta_j} \in (\varepsilon_i - \delta_j)$, то последнее условие в (Д6.76) означает, что $\dfrac{\partial f}{\partial \varepsilon_i} + \dfrac{\partial f}{\partial \delta_j} \in (\varepsilon_i - \delta_j)$. Так как $f \in J(\mathfrak{h}^*)$, то любая однородная компонента многочлена f является ограничением инварианта; но P является однородной компонентой наименьшей степени в многочлене f, следовательно, P — ограничение инварианта. □

$\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n|m),\ n \neq m}$. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{gl}(n|m)$. Положим $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}$. Пусть $f \in I(\tilde{\mathfrak{h}}^*)$; положим

$$g(h) = f\left(h - \frac{\operatorname{str}\ h}{n - m} 1_{n+m}\right). \tag{Д6.77}$$

Тогда

$$(D_{h_\alpha} g)(h) = (D_{h_\alpha} f)(h - \frac{\operatorname{str}\ h}{n - m} 1_{n+m}) \in \alpha(h - \frac{\operatorname{str}\ h}{n - m} 1_{n+m}) = \alpha(h). \tag{Д6.78}$$

Следовательно, $g \in I(\tilde{\mathfrak{h}}^*)$ и по предыдущему g является ограничением инварианта. Следовательно, f тоже является ограничением инварианта.

$\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n|n),\ n \neq 2}$. Докажем сюръективность ограничения $I(\mathfrak{h}^*) \to I(\tilde{\mathfrak{h}}^*)$. Отождествим $S(\mathfrak{h}^*)$ с $\mathbb{C}[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n; \delta_1, \ldots, \delta_m]$, где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n; \delta_1, \ldots, \delta_m$ суть веса тавтологического представления. Нетрудно показать (см. [Prz°]), что

$$I(\mathfrak{h}^*) \cong \mathbb{C}[s_1, s_2, \ldots], \quad \text{где выражения } s_k = \sum \varepsilon_i^k - \sum \delta_j^k \text{ суть}$$
$$\text{суперследы симметрических степеней тавтологического представления id.} \tag{Д6.79}$$

Пусть $\tilde{\varepsilon}_i$ и $\tilde{\delta}_j$ суть образы функционалов ε_i и δ_j в $S(\tilde{\mathfrak{h}}^*))$. Поскольку $\tilde{\varepsilon}_i$ и $\tilde{\delta}_j$ алгебраически независимы при $j < n$, мы выводим, как и выше, что

$$I(\tilde{\mathfrak{h}}^*) \subset \mathbb{C}[\sigma_1, \sigma_2, \ldots], \quad \text{где } \sigma_k = \sum \tilde{\varepsilon}_i^k - \sum \tilde{\delta}_j^k. \tag{Д6.80}$$

Если $f \in I(\tilde{\mathfrak{h}}^*)$, то $f = F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots)$. Рассмотрим

$$d = f - F(\sigma_1 - \sigma_1, \sigma_2 - \sigma_1^2, \sigma_3 - \sigma_1^3, \ldots).$$

Ясно, что $d = 0$ при $\sigma_1 = 0$, а следовательно d делится на σ_1. Поскольку $F(\sigma_1 - \sigma_1, \sigma_2 - \sigma_1^2, \ldots)$ является образом элемента из $I(\mathfrak{h}^*)$, мы можем предположить, что f делится на σ_1, т. е. $f = \sigma_1 g$.

Для $\alpha = \varepsilon_n - \delta_n$ условие $D_{h_\alpha} f \in (\alpha)$ эквивалентно тому, что ограничение многочлена f на $\operatorname{Ker}\alpha$ инвариантно относительно сдвигов на вектор h_α. Так как $\sigma_1(h_\alpha) \neq 0$, то любой элемент из $\operatorname{Ker}\alpha$ можно представить в виде $h + th_\alpha$, где $h \in \operatorname{Ker}\alpha \cap \operatorname{Ker}\sigma_1$. Следовательно

$$f(h + th_\alpha) = \sigma_1(h + th_\alpha) g(h + th_\alpha) = t\sigma_1(h_\alpha) g(h + th_\alpha) = f(h) = 0. \tag{Д6.81}$$

Итак, $g(h + th_\alpha) = 0$ и $f|_{\operatorname{Ker}\alpha} = 0$. Следовательно, f делится на α, а из симметричности относительно W и того факта, что линейные функции $w\alpha$ попарно взаимно просты при $n > 2$, мы выводим, что

$$f = \tilde{\varphi} \prod_{\alpha \in R_{\bar{1}}^+} \alpha, \quad \text{где } \tilde{\varphi} \in \mathbb{C}[\tilde{\mathfrak{h}}^*]^W. \tag{Д6.82}$$

Ясно, что f является ограничением элемента вида

$$\varphi \prod_{\alpha \in R_{\bar{1}}^+} \alpha, \quad \text{где } \varphi \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W. \tag{Д6.83}$$

Предложение 3.5, примененное к $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n|n) = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_+$, где $\mathfrak{g}_+$ (соотв. $\mathfrak{g}_-$) есть линейная оболочка положительных (соотв. отрицательных) корневых векторов, показывает, что $\varphi \prod\limits_{\alpha \in R_{\bar{1}}^+} \alpha$ является ограничением инварианта.

$\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2|2)}$. В этом случае корневые пространства двумерны. Непосредственные вычисления показывают, что $I(\mathfrak{h}^*)$ состоит из многочленов вида

$$c + \alpha_1\alpha_2 g + \alpha_1^2\alpha_2^2\varphi, \tag{Д6.84}$$

где $c \in \mathbb{C}$, g является линейной комбинацией функций вида $\dfrac{\tilde{\varepsilon}_1^n - \tilde{\varepsilon}_2^n}{\tilde{\varepsilon}_1 - \tilde{\varepsilon}_2}$ для *четных* весов $\tilde{\varepsilon}_1$ и $\tilde{\varepsilon}_2$ тавтологического $\mathfrak{g}$-модуля, а $\varphi \in S(\mathfrak{h}^*)^W$.

Из предложения 3.5 следует, что $\alpha_1^2\alpha_2^2\varphi$ является ограничением инварианта. Чтобы показать, что член $\alpha_1\alpha_2 g$ тоже является ограничением инварианта, рассмотрим функцию $F(t) = \dfrac{(t - \tilde{\delta}_1)(t - \tilde{\delta}_2)}{(t - \tilde{\varepsilon}_1)(t - \tilde{\varepsilon}_2)}$, где $\tilde{\delta}_1$ и $\tilde{\delta}_2$ являются *нечетными* весами тавтологического $\mathfrak{g}$-модуля. Коэффициенты при степенях t в разложении $F(t)$ в ряд выражаются в терминах суперследов степеней тавтологического представления и потому являются ограничениями инвариантов.

Пусть $F(t) = \sum\limits_{k \geqslant 0} t^{-k}\mu_k$. Легко проверить, что $\mu_{k+2} = \alpha_1\alpha_2 \dfrac{\tilde{\varepsilon}_1^k - \tilde{\varepsilon}_2^k}{\tilde{\varepsilon}_1 - \tilde{\varepsilon}_2}$.

$\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{psl}(n|n),\ n > 1}$. Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}(n|n)$ — подалгебра Картана, а $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}/\mathbb{C} \cdot z$, где z — единичная матрица из $\mathfrak{sl}(n|n)$. Нетрудно проверить, что $I(\tilde{\mathfrak{h}}^*)$ можно вложить в $I(\mathfrak{h}^*)$ и что образ совпадает с множеством элементов из $I(\mathfrak{h}^*)$, инвариантных относительно сдвигов в направлении z, т. е. из многочленов f, таких что $f(h + tz) = f(h)$.

Продолжим такой многочлен f до инварианта F из $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$. Тогда F инвариантен также относительно сдвигов в направлении z, следовательно определяет элемент из $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$, ограничение которого на $S(\tilde{\mathfrak{h}}^*)$ равно f. Чтобы в этом убедиться, достаточно проверить, что производная в направлении z коммутирует с гомоморфизмом ограничения на $\tilde{\mathfrak{h}}$.

Заметим, что хотя на $\mathfrak{g}$ и существует невырожденная инвариантная суперсимметричная четная билинейная форма, эта форма никак не связана с каким-либо конечномерным представлением[1] супералгебры Ли $\mathfrak{g}$.

$\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(2|2n - 2),\ n > 1}$. Эта супералгебра Ли обладает согласованной (с четностью) $\mathbb{Z}$-градуировкой глубины 1, а следовательно для нее имеется взаимно однозначное соответствие между ее неприводимыми конечномерными представлениями и неприводимыми конечномерными представлениями ее четной части. Поэтому аргументы, примененные к $\mathfrak{gl}(m|n)$, применимы и здесь.

---

[1] Первым на этот феномен в суперслучае обратил внимание И. Капланский. Он сталкивался со ним, изучая алгебры Ли над полями положительной характеристики, см. его информационные сообщения в [Kapp°]. И. Капланский же отметил, что эти формы все-таки связаны с некоторыми представлениями, а именно, с проективными; т. е. с обычными представлениями нетривиальных центральных расширений.

А именно, также как и для $\mathfrak{gl}(m|n)$, определим алгебру

$$J(\mathfrak{h}^*)=\left\{\begin{array}{ll} f\in\mathbb{C}[[\mathfrak{h}^*]]^W \mid & f \text{ есть конечная линейная комбинация} \\ & \text{экспонент } e^{\lambda} \text{ с показателями, равными ве-} \\ & \text{сам конечномерных } \mathfrak{g}_{\bar 0}\text{-модулей и } D_h f\in(\alpha) \\ & \text{при любых } h\in[\mathfrak{g}_{\bar 1}^{-\alpha},\mathfrak{g}_{\bar 1}^{\alpha}] \text{ и } \alpha\in R_{\bar 1}^{+}=\bar R_{\bar 1}^{+} \end{array}\right\}. \tag{Д6.85}$$

Так же, как и для $\mathfrak{gl}(m|n)$, мы доказываем, что любой элемент из $J(\mathfrak{h}^*)$ является линейной комбинацией суперхарактеров.

Докажем теперь, что любой элемент из $I(\mathfrak{h}^*)$ является однородной компонентой подходящего элемента из $J(\mathfrak{h}^*)$. Действительно пусть $P\in I(\mathfrak{h}^*)$. Тогда $P=P(\varepsilon_1, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1})$, где $\varepsilon_1, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ суть веса тавтологического $\mathfrak{g}$-модуля. Положим

$$f=P\Big(\frac{e^{\varepsilon_1}-e^{-\varepsilon_1}}{2}, \frac{e^{\delta_1}-e^{-\delta_1}}{2}, \ldots, \frac{e^{\delta_{n-1}}-e^{-\delta_{n-1}}}{2}\Big). \tag{Д6.86}$$

Проверим, что $f\in J(\mathfrak{h}^*)$. Очевидно, что $f^W=f$. При $\alpha=\varepsilon_1-\delta_1$ условие $D_h f\in(\alpha)$ эквивалентно (благодаря тому, что ограничение инвариантной билинейной формы на $\mathfrak{h}$ пропорционально $\varepsilon_1^2-\sum\delta_j^2$) тому, что

$$\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_1}+\frac{\partial f}{\partial\delta_1}\in(\varepsilon_1-\delta_1).$$

Поскольку $P\in I(\mathfrak{h}^*)$, мы видим, что $\dfrac{\partial P}{\partial\varepsilon_1}+\dfrac{\partial P}{\partial\delta_1}=(\varepsilon_1-\delta_1)Q$, где многочлен Q определен формулой (Д6.9). Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial\varepsilon_1}+\frac{\partial f}{\partial\delta_1}=\frac{\partial P}{\partial\varepsilon_1}\cosh(\varepsilon_1)+\frac{\partial P}{\partial\delta_1}\cosh(\delta_1)&= \\ =\frac{\partial P}{\partial\varepsilon_1}\cosh(\varepsilon_1)+(\mathrm{sh}(\varepsilon_1)-\sinh(\delta_1))Q\cosh(\delta_1)-\frac{\partial P}{\partial\varepsilon_1}\cosh(\delta_1)&= \\ =\frac{\partial P}{\partial\varepsilon_1}(\cosh(\varepsilon_1)-\cosh(\delta_1))+(\sinh(\varepsilon_1)-\sinh(\delta_1))Q\cosh(\delta_1)\in(\alpha).& \end{aligned} \tag{Д6.87}$$

Таким образом, $f\in J(\mathfrak{h}^*)$ и компонента младшей степени этого многочлена f — равная P — является ограничением инварианта.

$\underline{\mathfrak{g}=\mathfrak{osp}(2m+1|2n)}$. В качестве базиса в $\mathfrak{h}^*$ возьмем веса $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ и $\delta_1, \ldots, \delta_n$ тавтологического представления. (Из двух весов $\pm\varepsilon_i$ мы выбираем любой вес и его и считаем положительным; аналогично выбираем один вес из пары $\pm\delta_j$.) Заметим, что нечетные корни $\pm\delta_j$ супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ коллинеарны аналогичным четным корням.

Группа Вейля переставляет отдельно веса $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ и отдельно веса $\delta_1, \ldots, \delta_n$ и меняет их знаки. Ограничение инвариантной билинейной формы на $\mathfrak{h}$ пропорционально $\sum\varepsilon_i^2-\sum\delta_j^2$, следовательно при $\alpha= =\varepsilon_i-\delta_j$ (заметим, что $\alpha\in\widetilde{R}_{\bar 1}$) условие $D_h f\in(\alpha)$ эквивалентно тому, что

$\dfrac{\partial f}{\partial\varepsilon_i}+\dfrac{\partial f}{\partial\delta_j}\in(\varepsilon_i-\delta_j)$, что, в свою очередь, означает, что f не зависит от t после подстановки $\varepsilon_i=\delta_j=t$. Ясно, что

$$f=f(\varepsilon_1^2, \ldots, \varepsilon_m^2, \delta_1^2, \ldots, \delta_n^2) \tag{Д6.88}$$

и, следовательно, f является многочленом суперсимметричным в смысле [Prz°] и, в качестве такового, может быть выражен через коэффициенты рациональной функции

$$F(t)=\frac{\prod(t^2-\delta_j^2)}{\prod(t^2-\varepsilon_i^2)}. \tag{Д6.89}$$

Эти коэффициенты, в свою очередь, выражаются через суперследы $s_k:= =\sum\limits_i\varepsilon_i^k-\sum\limits_j\delta_j^k$ симметрических степеней тавтологического представления.

$\underline{\mathfrak{g}=\mathfrak{osp}(2m|2n)}$. В качестве базиса в $\mathfrak{h}^*$ возьмем тот же базис $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$; $\delta_1, \ldots, \delta_n$, что и в предыдущем случае. Ограничение любого W-инвариантного многочлена имеет вид

$$f=P(\varepsilon_1^2, \ldots, \varepsilon_m^2, \delta_1^2, \ldots, \delta_n^2)+\varepsilon_1\cdot\ldots\cdot\varepsilon_m\cdot Q(\varepsilon_1^2, \ldots, \varepsilon_m^2, \delta_1^2, \ldots, \delta_n^2). \tag{Д6.90}$$

Более того, ограничение любого W-инвариантного многочлена не зависит от t после подстановки $\varepsilon_i=\delta_j=t$, в то время как после такой подстановки первое слагаемое P оказывается многочленом четной степени по t, а второе слагаемое — многочленом нечетной степени. Отсюда ясно, что оба слагаемых не зависят от t, а следовательно, и $P\in I(\mathfrak{h}^*)$ и $\varepsilon_1\ldots\varepsilon_m Q\in I(\mathfrak{h}^*)$, причем

$$Q=Q_1\prod(\varepsilon_i^2-\varepsilon_i^2)\quad\text{для некоторого многочлена } Q_1. \tag{Д6.91}$$

Те же аргументы, что и в предыдущем случае, показывают, что P — ограничение инварианта. Докажем, что $\varepsilon_1\ldots\varepsilon_m Q$ — тоже ограничение инварианта. Для этого возьмем в $\mathfrak{h}$ правый[1] двойственный базис $e_1, \ldots, e_m$; $f_1, \ldots, f_n$ к базису $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$; $\delta_1, \ldots, \delta_n$. В качестве системы простых корней возьмем

$$\delta_1-\delta_2,\ \ldots,\ \delta_{n-1}-\delta_n;\ \ \delta_n-\varepsilon_1,\ \varepsilon_1-\varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_{m-1}-\varepsilon_m,\ \varepsilon_{m-1}+\varepsilon_m. \tag{Д6.92}$$

Пусть $\Lambda\in\mathfrak{h}^*$ — функционал, такой что $\Lambda(e_i)=\lambda_i$ и $\Lambda(f_j)=\mu_j$. Для того, чтобы представление со старшим весом Λ было бы конечномерным, координаты старшего веса должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\mu_j\in\mathbb{Z}; \\ &\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\ldots\geqslant\mu_n\geqslant m; \\ &\lambda_1-\lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{m-1}-\lambda_m,\ \lambda_{m-1}+\lambda_m\in\mathbb{Z}_+. \end{aligned} \tag{Д6.93}$$

---

[1] О левых и правых двойственных базисах читайте в [CoC1°].

Если вес Λ таков, что $\lambda_m \neq 0$, то Λ — типический вес. Действительно, условие типичности означает, что

$$(\Lambda+\rho)(h_\alpha) \neq 0 \quad \text{при всех } \alpha \in R_{\bar 1}^+, \tag{Д6.94}$$

или, эквивалентно,

$$(\Lambda+\rho)(e_i) \neq 0 \ \text{ при любом } i \quad \text{и} \quad (\Lambda+\rho)(f_j) \neq 0 \ \text{ при любом } j; \tag{Д6.95}$$

здесь

$$\rho = \frac{1}{2}(\rho_0 - \rho_1), \quad \text{где } \rho_0 := \sum_{\alpha \in R_{\bar 0}^+} \alpha, \quad \rho_1 := \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in R_{\bar 1}^+} \alpha. \tag{Д6.96}$$

Относительно системы простых корней (Д6.92) имеем

$$\rho_0 = (m-1)\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{m-1} + n\delta_1 + \ldots + 2\delta_n, \tag{Д6.97}$$

$$\rho_1 = m \sum \delta_i; \tag{Д6.98}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} (\Lambda+\rho)(e_i) &= \lambda_i + m - i \neq 0, \\ (\Lambda+\rho)(f_j) &= \mu_j - m + m - j + 1 \neq 0, \end{aligned} \tag{Д6.99}$$

что и требовалось для типичности.

Пусть Λ — типический вес. Тогда суперхарактер неприводимого модуля L^Λ со старшим весом Λ есть

$$\begin{aligned} \operatorname{sch} L^\Lambda &= \frac{\prod\limits_{\alpha \in R_{\bar 1}^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})}{\prod\limits_{\alpha \in R_{\bar 0}^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})} \sum \varepsilon(w) e^{w(\Lambda+\rho)} = \\ &= \frac{\prod\limits_{\alpha \in R_{\bar 1}^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})}{\prod\limits_{\alpha \in R_{\bar 0}^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})} \sum \varepsilon(w) e^{w(\Lambda+\rho_0-\rho_1)} = \prod_{\alpha \in R_{\bar 1}^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) \operatorname{ch} L_0^{\Lambda-\rho_1}, \end{aligned} \tag{Д6.100}$$

где $L_0^{\Lambda-\rho_1}$ является неприводимым $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модулем со старшим весом $\Lambda - \rho_1$.

Рассмотрим веса Λ, такие что $\lambda_m \neq 0$ и $\mu_n \geqslant m$, т. е. рассмотрим старшие веса типических неприводимых конечномерных модулей. Тогда веса $\Lambda - \rho_1$ пробегают старшие веса $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модулей, для которых $\lambda_m \neq 0$. Потребуем, чтобы λ_m было полуцелым. Тогда условие $\lambda_m \neq 0$ выполнится автоматически. Пусть Q_1 — многочлен неявно определенный формулой (Д6.91), $T \in S(\mathfrak{h}_{\bar 0}^*)^W$ — инвариантный многочлен вида

$$T = \varepsilon_1 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_m \cdot Q_1(\varepsilon_1^2, \ldots, \varepsilon_m^2, \delta_1^2, \ldots, \delta_n^2). \tag{Д6.101}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} &\widetilde{T} = T(e^{\varepsilon_1/2} - e^{-\varepsilon_1/2}, \ldots, e^{\varepsilon_m/2} - e^{-\varepsilon_m/2}; e^{\delta_1/2} - e^{-\delta_1/2}, \ldots, e^{\delta_n/2} - e^{-\delta_n/2}) = \\ &= \left(\prod_{i=1}^m (e^{\varepsilon_i/2} - e^{-\varepsilon_i/2})\right) \times \\ &\quad \times S\left(2\sinh\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right), \ldots, 2\sinh\left(\frac{\varepsilon_m}{2}\right); 2\sinh\left(\frac{\delta_1}{2}\right), \ldots, 2\sinh\left(\frac{\delta_n}{2}\right)\right). \end{aligned} \tag{Д6.102}$$

Все веса множителя $\left(\prod\limits_{i=1}^m (e^{\varepsilon_i/2} - e^{-\varepsilon_i/2})\right)$ полуцелые и линейно независимы, следовательно, этот множитель является линейной комбинацией экспонент e^χ, где координаты χ_i веса χ суть полуцелые и ненулевые (в действительности вес χ является характером представления, похожего на спинорное). В то же время все веса множителя S целые, поэтому T является линейной комбинацией экспонент e^χ, таких что отличная от нуля координата $\chi_m \neq 0$ полуцелая. Это выражение является линейной комбинацией характеров конечномерных $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модулей:

$$\widetilde{T} = \sum C_\chi \operatorname{ch} L_0^\chi. \tag{Д6.103}$$

Так как веса μ, которые дают вклад в S, являются полуцелыми, и для них $\mu_m \neq 0$, то все координаты веса χ тоже полуцелые и $\chi_m \neq 0$. Умножив обе части равенства (Д6.103) на $L = \prod\limits_{\alpha \in R_{\bar 1}^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})$, мы получаем

$$L \cdot \widetilde{T} = \sum C_\chi L \cdot \operatorname{ch} L_0^\chi = C_\chi \operatorname{sch} L^{\chi+\rho_1}. \tag{Д6.104}$$

Таким образом, младшая компонента многочлена $L\widetilde{S}$ является ограничением инварианта. Но эта младшая компонента как раз и есть

$$\varepsilon_1 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_m \cdot Q(\varepsilon_1^2, \ldots, \varepsilon_m^2, \delta_1^2, \ldots, \delta_n^2).$$

$\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}_\lambda(4|2)}$. В этом случае $\mathfrak{g}_{\bar 0} = \mathfrak{sl}_1(2) \oplus \mathfrak{sl}_2(2) \oplus \mathfrak{sl}_3(2)$ (сумма трех экземпляров $\mathfrak{sl}(2)$, занумерованных, чтобы их различить) и $\mathfrak{g}_{\bar 1} = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$, где V_i является тавтологическим $\mathfrak{sl}_i(2)$-модулем. Пусть $\pm\varepsilon_1$, $\pm\varepsilon_2$, $\pm\varepsilon_3$ суть веса тавтологических модулей соответствующих слагаемых в $\mathfrak{g}_{\bar 0}$. Тогда система корней супералгебры $\mathfrak{g}$ следующая:

$$R_{\bar 0} = \{\pm 2\varepsilon_1,\ \pm 2\varepsilon_2,\ \pm 2\varepsilon_3\}, \quad R_{\bar 1} = \{\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3\}. \tag{Д6.105}$$

Ограничение невырожденной инвариантной суперсимметричной четной билинейной формы на подалгебру Картана имеет вид

$$\frac{1}{\lambda_1}\varepsilon_1^2 + \frac{1}{\lambda_2}\varepsilon_2^2 + \frac{1}{\lambda_3}\varepsilon_3^2, \quad \text{где } \lambda_1 = -(1+\lambda),\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = \lambda. \tag{Д6.106}$$

Из условия $(h_\alpha, h) = \alpha(h)$ для любого $h \in \mathfrak{h}$ мы выводим, что при $\theta_i = \pm 1$

$$\alpha = \theta_1\varepsilon_1 + \theta_2\varepsilon_2 + \theta_3\varepsilon_3 \Longrightarrow h_\alpha = \theta_1\lambda_1 H_1 + \theta_2\lambda_2 H_2 + \theta_3\lambda_3 H_3 \qquad (Д6.107)$$

для двойственного базиса в $\mathfrak{h}$, т. е. такого, что $\varepsilon_i(H_j) = \delta_{ij}$.

Непосредственные вычисления показывают, что

$$D_{h_\alpha} f = \theta_1\lambda_1 \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_1} + \theta_2\lambda_2 \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_2} + \theta_3\lambda_3 \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_3}. \qquad (Д6.108)$$

Группа Вейля в этом случае изоморфна $(\mathbb{Z}/2)^3$ и действует, меняя знаки у корней ε_i.

Опишем теперь алгебру $I(\mathfrak{h}^*)$. Несложные вычисления показывают, что $I(\mathfrak{h}^*)$ состоит из элементов вида

$$f = \psi\Big(\frac{1}{\lambda_1}\varepsilon_1^2 + \frac{1}{\lambda_2}\varepsilon_2^2 + \frac{1}{\lambda_3}\varepsilon_3^2\Big) + \varphi \prod_{\alpha \in R_{\bar{1}}^+} \alpha, \qquad (Д6.109)$$

Ясно, что первое слагаемое является ограничением инварианта. Докажем, что второе слагаемое — тоже ограничение инварианта.

В качестве системы простых корней возьмем

$$\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,\ -2\varepsilon_2,\ -2\varepsilon_3\}.$$

Применяя предложение 3.6 к $\mathfrak{g}$, мы видим, что любой элемент вида $\varphi \prod\limits_{\alpha \in R_{\bar{1}}^+} \alpha^2$ является ограничением инварианта. Так как на $\mathfrak{g}$ есть невырожденная инвариантная суперсимметричная четная билинейная форма, то можно применить гомоморфизм Хариш-Чандры и представить любой элемент из $S(\mathfrak{h})^W$ в виде

$$\frac{f}{Q^2}, \quad \text{где } f \text{ является образом элемента из } U(\mathfrak{g}), \text{ а } Q = \prod_{\alpha \in R_{\bar{1}}^+} h_\alpha. \qquad (Д6.110)$$

Отсюда следует, что

неприводимый конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль L^Λ типический, если $\prod\limits_{\alpha \in R_{\bar{1}}^+} \Lambda(h_\alpha) \neq 0$. (Д6.111)

Замечание. В работе В. Каца [Kac2] утверждение (Д6.111) высказано в качестве гипотезы, а достаточные условия типичности для модулей над $\mathfrak{osp}_\lambda(4|2)$, $\mathfrak{ag}(2)$ и $\mathfrak{ab}(3)$, приведенные там, ошибочны.

Так же, как для $\mathfrak{osp}(2n|2m)$, формулу для суперхарактера типического модуля можно представить в виде

$$\operatorname{sch} L^\Lambda = \operatorname{ch} L_0^{\Lambda - \rho_1} \prod_{\alpha \in R_{\bar{1}}^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}). \qquad (Д6.112)$$

Для выбранной системы простых корней имеем

$$\rho_0 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3; \quad \rho_1 = 2\varepsilon_1. \qquad (Д6.113)$$

Если $\Lambda = \chi_1\varepsilon_1 + \chi_2\varepsilon_2 + \chi_3\varepsilon_3$ — старший вес, то модуль L^Λ имеет конечную размерность тогда и только тогда, когда

$$\chi_1 \geqslant 2, \quad \chi_1, \chi_2, \chi_3 \in \mathbb{Z}_+; \qquad (Д6.114)$$

причем модуль L^Λ типический, если дополнительно выполняется условие (Д6.111).

Зафиксируем χ_2 и χ_3. Тогда полученное уравнение на χ_1 имеет конечное число решений. Следовательно, выбрав χ_1 достаточно большим, мы можем сделать вывод, что для произвольных χ_2 и χ_3 (однако таких, что $\chi_2, \chi_3 \in \mathbb{Z}_+$) модуль L^Λ с $\Lambda = \chi_1\varepsilon_1 + \chi_2\varepsilon_2 + \chi_3\varepsilon_3$ конечномерен и типический. Представим теперь $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ в виде $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{sl}(2) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_{\bar{0}}$ и положим

$$\mathfrak{h} = \operatorname{Span}(H_1) \oplus \tilde{\mathfrak{h}},$$

где $\tilde{\mathfrak{h}}$ — подалгебра Картана в $\tilde{\mathfrak{g}}$. Согласно одному результату И. Н. Бернштейна [Bern1°] любой $W(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$-инвариантный элемент P является компонентой младшей степени линейной комбинации T характеров конечномерных представлений алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}_{\bar{0}}$. По предложению 3.7 ε_1^k является линейной комбинацией $\widetilde{T}$ характеров конечномерных представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$, чьи старшие веса достаточно большие. Тогда произведение $\varepsilon_1^k \cdot P$ является линейной комбинацией характеров конечномерных представлений алгебры $\mathfrak{g}$, которые входят в произведение $\widetilde{T} \cdot T$, и каждый из которых удовлетворяет требованиям конечномерности и типичности.

Таким образом, выражение $\prod\limits_{\alpha \in R_{\bar{1}}^+} \big(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}\big)\, \varepsilon_1^k \cdot P$ является линейной комбинацией суперхарактеров супералгебр Ли $\mathfrak{g}$, а его младшая компонента равна $\prod\limits_{\alpha \in R_{\bar{1}}^+} \alpha \cdot \varepsilon_1^k \cdot P$.

$\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{ag}(2)}$. В этом случае $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{g}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ и $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = R(\pi_1) \otimes V$, где $R(\pi_1)$ является первым фундаментальным представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}(2)$ (см. [ВиОн°] или [Бу3°]), а V является тавтологическим представлением алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$. Выразим базис подалгебры Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}(2)$ в терминах элементов H_1, H_2, H_3, такие что $H_1 + H_2 + H_3 = 0$. Пусть λ_i — линейные формы, такие что $\lambda_i(H_j) = -1$ при $i \neq j$ и $\lambda_i(H_i) = 2$.

Пусть $\pm\delta$ — веса тавтологического $\mathfrak{sl}(2)$-модуля; выберем базисный элемент H в подалгебре Картана алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$, так чтобы $\delta(H) = 1$. Тогда система корней супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеет вид

$$R_{\bar{0}} = \{\lambda_i - \lambda_j;\ \pm\lambda_i;\ \pm 2\delta\}, \qquad R_{\bar{1}} = \{\pm\lambda_i \pm \delta;\ \pm\delta\}. \qquad (Д6.115)$$

В качестве системы простых корней выберем

$$\lambda_1+\delta,\ \lambda_2;\ \lambda_3-\lambda_2. \tag{Д6.116}$$

Тогда

$$\begin{aligned} R_{\bar 0}^+ &= \{\lambda_2,\, \lambda_3,\, -\lambda_1;\ \lambda_2-\lambda_1,\, \lambda_3-\lambda_2,\, \lambda_3-\lambda_1,\, 2\delta\},\\ R_{\bar 1}^+ &= \{\lambda_1+\delta,\, \lambda_2+\delta,\, \lambda_3+\delta,\, -\lambda_1+\delta,\, -\lambda_2+\delta,\, -\lambda_3+\delta,\, \delta\}. \end{aligned} \tag{Д6.117}$$

Заметим, что $\delta\in R_{\bar 1}^+$, причем $2\delta\in R_{\bar 0}^+$; следовательно $\widetilde{R}_{\bar 1}=R_{\bar 1}^+\setminus\{\delta\}$. Группа Вейля изоморфна $(S_3\ltimes\mathbb{Z}/2)\times\mathbb{Z}/2$, где S_3 переставляет λ_i-ы, первая группа $\mathbb{Z}/2$ одновременно меняет знаки всех корней λ_i, а вторая группа $\mathbb{Z}/2$ меняет знак у корня δ.

Нетрудно проверить, что

$$S(\mathfrak{h}^*)^W=\mathbb{C}[\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2,\ (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2,\ \delta^2]. \tag{Д6.118}$$

Ограничение невырожденной инвариантной суперсимметричной четной билинейной формы на $\mathfrak{h}$ пропорционально

$$3\delta^2-2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2). \tag{Д6.119}$$

Полагая $\alpha=\lambda_3+\delta$ и выразив базис в $\mathfrak{h}$ через элементы H_1, H_2, H, мы выводим из условия $(h_\alpha,\, h)=\alpha(h)$ для любого $h\in\mathfrak{h}$, что

$$h_\alpha=-H_1-H_2-2H. \tag{Д6.120}$$

Таким образом, условие $D_{h_\alpha}f\in(\alpha)$ эквивалентно следующему:

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda_1}+\frac{\partial f}{\partial\lambda_2}+2\frac{\partial f}{\partial\delta}\in(\delta-\lambda_1-\lambda_2). \tag{Д6.121}$$

Другие условия аналогичного типа следуют из W-инвариантности. Непосредственные вычисления показывают, что алгебра $I(\mathfrak{h}^*)$ состоит из элементов вида

$$f=\psi(3\delta^2-2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2))+\varphi\prod_{\alpha\in\widetilde{R}_{\bar 1}^+}\alpha. \tag{Д6.122}$$

Те же аргументы, что и при изучении супералгебры $\mathfrak{osp}_\lambda(4|2)$, показывают с помощью предложения 3.6, что, если выполняется условие (Д6.111), т. е. $\prod\limits_{\alpha\in R_{\bar 1}^+}\Lambda(h_\alpha)\neq 0$, то модуль L^Λ типический. В этом случае формулу для суперхарактера можно представить в виде

$$\operatorname{sch}L^\Lambda=\frac{\prod\limits_{\alpha\in R_{\bar 1}^+}(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})}{\prod\limits_{\alpha\in R_{\bar 0}^+}(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})^{-1}}\sum_{w\in W}\varepsilon'(w)e^{w(\Lambda+\rho)}, \tag{Д6.123}$$

где $\varepsilon'(w)=(-1)^{N(w)}$, а $N(w)$ есть четность числа отражений во всех четных корнях, кроме 2δ.

Группой Вейля алгебры Ли $\mathfrak{g}(2)$ является $W_1=S_2\ltimes\mathbb{Z}/2$. Пусть ρ_0' — полусумма положительных корней для $\mathfrak{g}(2)$, а $\rho_0''=\delta$ — полусумма положительных корней для $\mathfrak{sl}(2)$. Пусть $\rho_1=\dfrac{7}{2}\delta$ — полусумма нечетных положительных корней супералгебры Ли $\mathfrak{ag}(2)$.

Если w — отражение в корне 2δ, то $\varepsilon'(w)=1$. Поэтому формулу для суперхарактера можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{sch}L^\Lambda &= \prod_{\alpha\in\widetilde{R}_{\bar 1}^+}(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})\prod_{\alpha\in\widetilde{R}_{\bar 0}^+}(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})^{-1}(e^{\delta/2}-e^{-\delta/2})\times\\ &\times(e^{\delta}-e^{-\delta})^{-1}\Bigl(\sum_{w\in W_1}\varepsilon(w)e^{w(\Lambda'+\rho_0')}\Bigr)\cdot(e^{\Lambda''+\rho_0''-\rho_1}+e^{-(\Lambda''+\rho_0''-\rho_1)})=\\ &=\prod_{\alpha\in\widetilde{R}_{\bar 1}^+}(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})(e^{\delta/2}+e^{-\delta/2})^{-1}\operatorname{ch}L_0^{\Lambda'}(e^{\Lambda''+\rho_0''-\rho_1}+e^{-(\Lambda''+\rho_0''-\rho_1)}), \end{aligned} \tag{Д6.124}$$

где Λ' является ограничением веса Λ на подалгебру Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}(2)$, а Λ'' — ограничение веса Λ на подалгебру Картана алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$. Отметим, что

$$\Lambda''(H)\geqslant 7. \tag{Д6.125}$$

При этих условиях $\dim L^\Lambda<\infty$. Чтобы это увидеть, достаточно взять $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модуль $\operatorname{ch}L_0^\Lambda$ с тем же старшим весом и старшим вектором v, а затем в индуцированном модуле $\operatorname{Ind}_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}^{\mathfrak{g}}L_0^\Lambda$ рассмотреть подмодуль, порожденный элементом $\Bigl(\prod\limits_{\alpha\in R_{\bar 1}^+}h_\alpha\Bigr)v$ (этот подмодуль иногда называли «модулем Каца»).

Пусть $P\in I(\mathfrak{h}^*)$. Тогда, как мы уже показали,

$$P=P_1(3\delta^2-2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2))+P_2\prod_{\alpha\in R_{\bar 1}^+}\alpha, \tag{Д6.126}$$

где $P_2\in S(\mathfrak{h}^*)^W$. Как мы уже отмечали, $3\delta^2-2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)$ является ограничением формы $(x,\, y):=\operatorname{str}(\operatorname{ad}_x\cdot\operatorname{ad}_y)$ на подалгебру Картана. Покажем, что $P_2\prod\limits_{\alpha\in R_{\bar 1}^+}\alpha$ — тоже ограничение инварианта. Поскольку $P_2\in S(\mathfrak{h}^*)^W$, мы можем предположить, что $P_2=Q_2\cdot\delta^{2k}$, где $Q_2\in S((\mathfrak{g}_2\cap\mathfrak{h})^*)^{W_1}$.

Согласно одному результату И. Н. Бернштейна (см. [Bern1°]) Q_2 является младшей компонентой (компонентой младшей степени) линейной комбинации T характеров неприводимых $\mathfrak{g}(2)$-модулей. По замечанию 3.7 вес δ^{2k} является младшей компонентой линейной комбинации T' функций вида $\dfrac{\cosh(2k-5)\delta}{\cosh\delta}$. Поэтому P является младшей компонентой линейной комбинации TT'. Если мы теперь зафиксируем Λ', то уравнение для Λ'', полученное из условий типичности, будет иметь лишь конечное число решений. Следовательно, выбрав достаточно большие числа k в T', мы можем предположить, что любой старший вес линейной комбинации TT' удовлетворяет условиям конечномерности и типичности.

Отсюда следует, что у выражения $TT' \prod\limits_{\alpha \in \tilde{R}_{\bar 1}^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})$ младшая компонента, равная P_2, является ограничением инварианта.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{ab}(3)$. В этом случае $\mathfrak{g}_{\bar 0} = \mathfrak{o}(7) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ и $\mathfrak{g}_{\bar 1} = \mathrm{spin}(7) \otimes \mathrm{id}$. Пусть $\pm\varepsilon_1$, $\pm\varepsilon_2$, $\pm\varepsilon_3$ суть веса тавтологического $\mathfrak{o}(7)$-модуля, а $\pm\frac{1}{2}\delta$ — веса тавтологического $\mathfrak{sl}(2)$-модуля. Тогда

$$R_{\bar 0} = \{\pm\varepsilon_i;\ \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j;\ \pm\delta\}, \qquad R_{\bar 1} = \Big\{\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \delta)\Big\}. \tag{Д6.127}$$

В качестве системы простых корней выберем

$$\frac{1}{2}(\delta - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3),\ \ \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ \ \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\ \varepsilon_3. \tag{Д6.128}$$

Тогда

$$R_{\bar 0}^+ = \{\varepsilon_1;\ \ \varepsilon_2,\ \ \varepsilon_3,\ \ \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \text{ при } i < j,\ \ \delta\}, \qquad R_{\bar 1}^+ = \Big\{\frac{1}{2}(\delta \pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3)\Big\}. \tag{Д6.129}$$

Ясно, что $\rho_1 = 2\delta$.

Ограничение на подалгебру Картана инвариантной суперсимметрической четной билинейной формы $\mathrm{str}(\mathrm{ad}_x \cdot \mathrm{ad}_y)$ пропорционально

$$3(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) - \delta^2. \tag{Д6.130}$$

Из условия

$$(h_\alpha, h) = \alpha(h) \quad \text{для любого } h \in \mathfrak{h}$$

следует, что

$$\text{если } \alpha = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \delta), \text{ то } h_\alpha = \frac{1}{6}(H_1 + H_2 + H_3) - \frac{1}{2}H, \tag{Д6.131}$$

где H_1, H_2, H_3 и H — элементы из $\mathfrak{h}$, двойственные ε_1, ε_2, ε_3 и δ, соответственно. Поэтому условие $D_{h_\alpha} f \in (\alpha)$ эквивалентно следующему:

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_2} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_3} - 3\frac{\partial f}{\partial \delta} \in (\delta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3). \tag{Д6.132}$$

Другие условия подобного типа следуют из W-инвариантности. Заметим, что W изоморфна $(S_3 \ltimes (\mathbb{Z}/2)^3) \times \mathbb{Z}/2$. Непосредственные вычисления показывают, что $I(\mathfrak{h}^*)$ состоит из элементов вида

$$P_1(\mu_{-2}, \mu_2) + P_2 \prod_{\alpha \in R_{\bar 1}^+} \alpha, \tag{Д6.133}$$

где μ_i суть коэффициенты при t^i в разложении в ряд по t функции $\dfrac{\prod\limits_{\alpha \in R_{\bar 1}} (t - \alpha)}{\prod\limits_{\alpha \in R_{\bar 0}} (t - \alpha)}$, а $P_2 \in S(\mathfrak{h}^*)^W$. Ясно, что $\mu_{\pm 2}$ суть ограничения инвариантов; доказательство того, что $P_2 \prod\limits_{\alpha \in R_{\bar 1}^+} \alpha$ является ограничением инварианта, проводится с помощью тех же рассуждений, что и в двух предыдущих случаях. Поэтому мы его опустим.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{vect}(0|n)$, $\mathfrak{svect}(0|n)$ или $\tilde{\mathfrak{svect}}(2n)$. Пусть $\mathfrak{g} = \bigoplus\limits_{i \geqslant -1} \mathfrak{g}_i$ — стандартная $\mathbb{Z}$-градуировка, а $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — веса $\mathfrak{g}_0$-модуля $\mathfrak{g}_{-1}$. Нетрудно проверить, что $[\mathfrak{g}_{\bar 1}^{\alpha}, \mathfrak{g}_{\bar 1}^{-\alpha}] = \operatorname{Ker} \alpha$, где $\alpha = \varepsilon_i$, а из условия $D_{h_\alpha} f \in (\alpha)$ следует, что $f|_{\operatorname{Ker}\alpha} = \mathrm{const} = c$. Следовательно $f - c$ делится на α, а в силу W-симметричности также и на $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$, поскольку все сомножители здесь в совокупности взаимно просты. Таким образом, любой элемент из $I(\mathfrak{h}^*)$ имеет вид

$$c + \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \cdot P, \quad \text{где } P \in S(\mathfrak{h}^*)^W. \tag{Д6.134}$$

Из предложения 3.5 следует, что такой элемент является ограничением инварианта.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{pe}(n)$. Так как у $\mathfrak{g}$ есть согласованная $\mathbb{Z}$-градуировка глубины 1, то имеется взаимно однозначное соответствие между неприводимыми $\mathfrak{g}$-модулями и неприводимыми $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модулями. Поэтому аргументы аналогичные тем, которые мы применили к $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n|m)$, показывают, что любой элемент алгебры $J(\mathfrak{h}^*)$, которая определяется аналогично случаю $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n|m)$, является линейными комбинациями суперхарактеров конечномерных представлений. Пусть теперь $P \in I(\mathfrak{h}^*)$. Если $\pm\varepsilon_1, \ldots, \pm\varepsilon_n$ суть веса тавтологического $\mathfrak{g}$-модуля, то

$$R_{\bar 1} = \big\{\pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j) \text{ при } i \neq j,\ -2\varepsilon_i\big\}. \tag{Д6.135}$$

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в $\mathfrak{h}$, двойственный к $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. Тогда для $\alpha = \varepsilon_i + \varepsilon_j$ при любых $i \neq j$ и $h_\alpha = e_i - e_j$ условие $D_{h_\alpha} f \in (\alpha)$ означают, что

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon_i} - \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_j} \in (\varepsilon_i + \varepsilon_j). \tag{Д6.136}$$

Эквивалентным образом можно сказать, что P не зависит от t после подстановки $\varepsilon_i = -\varepsilon_j = t$.

Те же аргументы, что и для случая $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m|n)$, показывают, что если $P \in I(\mathfrak{h}^*)$, то

$$f = P(e^{\varepsilon_1/2} - e^{-\varepsilon_1/2}, \ldots, e^{\varepsilon_n/2} - e^{-\varepsilon_n/2}) \in J(\mathfrak{h}^*), \tag{Д6.137}$$

и однородная компонента многочлена f младшей степени равна P.

$\underline{\mathfrak{g}=\mathfrak{spe}(n),\ n\neq 4}$. Ответ одинаков для всех простых супералгебр Ли $\mathfrak{spe}(n)$, но доказательства, как мы увидим, в некоторых случаях различаются. Исключительный случай $n=4$ будет рассмотрен отдельно.

Покажем, что отображение ограничения $I(\mathfrak{h}^*)\longrightarrow I(\tilde{\mathfrak{h}}^*)$, где $\mathfrak{h}$ — максимальный тор в $\mathfrak{pe}(n)$, а $\tilde{\mathfrak{h}}$ — максимальный тор в $\mathfrak{spe}(n)$, сюръективно.

В обозначениях предыдущего случая заметим, что

$$I(\mathfrak{h}^*)=\mathbb{C}[\Delta_1,\,\Delta_3,\,\ldots,\,\Delta_{2k+1},\,\ldots],\tag{Д6.138}$$

где $\Delta_l=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\varepsilon_i^l$. Пусть $\tilde{\varepsilon}_i$ есть ограничение веса ε_i на $\tilde{\mathfrak{h}}$. Тогда

$$I(\tilde{\mathfrak{h}}^*)=\mathbb{C}[\sigma_1,\,\sigma_3,\,\ldots,\,\sigma_{2k+1},\,\ldots],\quad \text{где}\ \ \sigma_l=\sum_{1\leqslant i\leqslant n-1}\tilde{\varepsilon}_i^l.\tag{Д6.139}$$

Пусть $f\in I(\tilde{\mathfrak{h}}^*)$. Тогда $f=F(\sigma_1,\,\sigma_3,\,\ldots,\,\sigma_{2k+1},\,\ldots)$. Рассмотрим разность

$$f-F(\sigma_1-\sigma_1,\,\sigma_3-\sigma_1^3,\,\ldots,\,\sigma_{2k+1}-\sigma_1^{2k+1},\,\ldots).\tag{Д6.140}$$

При подстановке $\sigma_1=0$ эта разность обращается в нуль, следовательно, делится на σ_1. Поскольку $\sigma_{2k+1}-\sigma_1^{2k+1}$ является образом элемента $\Delta_{2k+1}\in I(\mathfrak{h}^*)$, мы можем предположить, что $f=\sigma_1 g$. Пусть $\alpha=\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n$. Условие $D_{h_\alpha}f\in(\alpha)$ означает, что ограничение многочлена f на $\operatorname{Ker}\alpha$ инвариантно относительно сдвигов на h_α. Так как $\sigma_1(h_\alpha)\neq 0$, то любой элемент из $\operatorname{Ker}\alpha$ можно представить в виде

$$h+th_\alpha,\qquad \text{где}\ h\in\operatorname{Ker}\alpha\cap\operatorname{Ker}\sigma_1.\tag{Д6.141}$$

Поэтому

$$f(h+th_\alpha)=\sigma_1(h+th_\alpha)g(h+th_\alpha)=t\sigma_1(h_\alpha)g(h+th_\alpha)=f(h),\tag{Д6.142}$$

следовательно $f(h+th_\alpha)=0$. Итак, f делится на α, а в силу W-симметричности и того факта, что при $n\neq 4$ линейные функции α из $\tilde{R}_{\bar 1}^+$ в совокупности взаимно просты, мы выводим, что f делится на $\prod\limits_{\alpha\in\tilde{R}_{\bar 1}}\alpha$, т. е.

$$f=\varphi\prod_{\alpha\in\tilde{R}_{\bar 1}}\alpha,\qquad \text{где}\ \ \varphi\in S(\tilde{\mathfrak{h}}^*)^W.\tag{Д6.143}$$

По предложению 3.5 такой элемент является ограничением инварианта.

$\underline{\mathfrak{g}=\mathfrak{spe}(4)}$. В этом подслучае корневые пространства 2-мерны.

Пусть $\tilde{\varepsilon}_i$ является ограничением функционала $\varepsilon_i\in\mathfrak{h}^*$ на $\tilde{\mathfrak{h}}$, где $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{pe}(4)$, а $\tilde{\mathfrak{h}}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{spe}(4)$. Тогда $\alpha_i=\tilde{\varepsilon}_1+\tilde{\varepsilon}_2+\tilde{\varepsilon}_3-\tilde{\varepsilon}_i$. Непосредственные вычисления показывают, что $I(\tilde{\mathfrak{h}}^*)$ состоит из элементов вида

$$c+\alpha_1\alpha_2\alpha_3 g+(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2\varphi,\tag{Д6.144}$$

где $c\in\mathbb{C}$, а g является линейной комбинацией коэффициентов при t в разложении в ряд по t функции

$$F(t)=\prod_{i=1}^{4}\frac{t-\tilde{\varepsilon}_i}{t+\tilde{\varepsilon}_i}.\tag{Д6.145}$$

По предложению 3.5 $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2\varphi$ является ограничением инварианта, а $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 g$ можно выразить через суперследы тавтологического $\mathfrak{spe}(4)$-модуля. Теорема полностью доказана. ☐

Следствие. *Для любой супералгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *из списка* (Д6.5) *любой элемент из кольца частных кольца* $S(\mathfrak{h}^*)^W$ *можно представить в виде* $\dfrac{P}{Q}$, *где* $P\in I(\mathfrak{h}^*)$, *а* $Q=\prod\limits_{\alpha\in\tilde{R}_{\bar 1}}\alpha$.

4.1. Анти-инвариантные многочлены. Инвариантные многочлены появились в § 2 не только как элементы из $S(\mathfrak{h}^*)^W$, но также как однородные компоненты суперхарактеров, рассматриваемых как формальные степенные ряды. В этом параграфе вместо суперхарактеров мы рассмотрим характеры и сформулируем и докажем соответствующий аналог теоремы Шевалле. Заметим, что в этом случае и формулировка, и доказательство не в пример проще.

4.1а. Две структуры $\mathfrak{g}$-модулей на $U(\mathfrak{g})$. Хорошо известно, что присоединенное представление супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно однозначно продолжить до представлений в $S(\mathfrak{g})$ и в $U(\mathfrak{g})$. Более того, каноническая суперсимметризация $\omega\colon S(\mathfrak{g})\to U(\mathfrak{g})$, заданная формулой

$$\omega(x_1\ldots x_n)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}c(p(x),\,\sigma)x_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(n)},\tag{Д6.146}$$

где число $c(p(x),\,\sigma)$ определено формулой (Д6.11), является изоморфизмом $\mathfrak{g}$-модулей.

Положив $U^n(\mathfrak{g})=\omega(S^n(\mathfrak{g}))$, мы получаем разложение модуля $U(\mathfrak{g})$ в прямую сумму $\mathfrak{g}$-модулей.

Как и в случае алгебр Ли, пространство $U(\mathfrak{g})^*$ можно снабдить структурой коалгебры, где коумножение $m^*\colon U(\mathfrak{g})^*\longrightarrow U(\mathfrak{g})^*\otimes U(\mathfrak{g})^*$ задано формулой $m^*(x)=x\otimes 1+1\otimes x$ для любого $x\in\mathfrak{g}^*$. Суперпространство $U(\mathfrak{g})^*$ изоморфно суперпространству супералгебры формальных степенных рядов от $\dim\mathfrak{g}_{\bar 0}$ четных и $\dim\mathfrak{g}_{\bar 1}$ нечетных переменных. Действительно, пусть $e_1,\,\ldots e_n$ — базис пространства $\mathfrak{g}$, а $x_1,\,\ldots,\,x_n$ — соответствующие переменные той же четности. Положим

$$e^{(\nu)}=\frac{e_1^{\nu_1}}{\nu_1!}\ldots\frac{e_n^{\nu_n}}{\nu_n!},\tag{Д6.147}$$

где $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{Z}_+$ для четных базисных векторов и равны 0 или 1 для нечетных. Тогда (отметьте обратный порядок переменных!)

$$U(\mathfrak{g})^* \ni f \longmapsto S_f = \sum f(e^{(\nu)}) x_n^{\nu_n} \ldots x_1^{\nu_1}. \qquad (Д6.148)$$

Однородной компонентой степени k функционала f является функционал f_k, такой что

$$f_k|_{U^k(\mathfrak{g})} = f|_{U^k(\mathfrak{g})} \quad \text{и} \quad f_k|_{U^l(\mathfrak{g})} = 0 \quad \text{при } l \neq k. \qquad (Д6.149)$$

Это разбиение функционала f на однородные компоненты задает вложение $S(\mathfrak{g}^*)$ в $U(\mathfrak{g})^*$: мы рассматриваем элементы из $S(\mathfrak{g}^*)$ как ряды, однородные компоненты достаточно высокой степени которых равны нулю.

Снабдим теперь $U(\mathfrak{g})$ структурой $\mathfrak{g}$-модуля с помощью леммы 3.2, а $U(\mathfrak{g})^*$ — структурой двойственного $\mathfrak{g}$-модуля.

4.1б. Предложение. *Рассмотрим симметризацию* $\omega\colon S(\mathfrak{g}_{\bar 0}) \to U(\mathfrak{g}_{\bar 0})$ *и продолжим ее до гомоморфизма* $\mathfrak{g}$-*модулей* $\tilde\omega\colon S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$, *где* $S(\mathfrak{g})$ *рассматривается как* $\operatorname{Ind}_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}^{\mathfrak{g}} S(\mathfrak{g}_{\bar 0})$, *а* $U(\mathfrak{g})$ *рассматривается как* $\mathfrak{g}$-*модуль относительно действия* (Д6.12). *Тогда*

1) *гомоморфизм* $\tilde\omega$ *является изоморфизмом* $\mathfrak{g}$-*модулей*;

2) *элемент* $\operatorname{tr}_V \in U(\mathfrak{g})^*$ *является* $\mathfrak{g}$-*инвариантом для любого конечномерного* $\mathfrak{g}$-*модуля* V;

3) *если* $\widetilde{U}^k(\mathfrak{g}) = \tilde\omega(\widetilde{S}^k(\mathfrak{g}))$, *где* $\widetilde{S}^k(\mathfrak{g})$ *является* $\mathfrak{g}$-*подмодулем, порожденным подпространством* $S^k(\mathfrak{g}_{\bar 0})$, *то*

$$U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k\geqslant 0} \widetilde{U}^k(\mathfrak{g}) \qquad (Д6.150)$$

и каждая однородная (*относительно разбиения* (Д6.150)) *компонента инвариантного элемента и сама является инвариантом.*

Доказательство. 1) Достаточно показать, что образ любого базиса пространства $S(\mathfrak{g})$ переходит под действием $\tilde\omega$ в базис пространства $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$. Но это очевидно.

2) Это следует из леммы 3.2.

3) Это следует из того, что $\widetilde{U}^k(\mathfrak{g})$ является $\mathfrak{g}$-подмодулем. □

4.1в. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *одна из супералгебр Ли из списка* (Д6.5), *а* $\mathfrak{h}$ — *ее максимальный тор*, W — *группа Вейля, заданная формулой* (Д6.8). *Тогда гомоморфизм ограничения на* $\mathfrak{h}$ *индуцирует изоморфизм* $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \longrightarrow S(\mathfrak{h}^*)^W$.

Доказательство. Вложение $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ индуцирует гомоморфизм ограничения $U(\mathfrak{g})^* \to S(\mathfrak{h}^*)$. Поскольку $U(\mathfrak{g}) = \operatorname{Ind}_{\mathfrak{g}_{\bar 0}}^{\mathfrak{g}} U(\mathfrak{g}_{\bar 0})$, существует биекция множества $\mathfrak{g}$-инвариантных элементов из $U(\mathfrak{g})^*$ на множество $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-инвариантных элементов из $U(\mathfrak{g}_{\bar 0})^*$. Поэтому можно считать, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar 0}$. Если $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ редуктивна, то теорема получается как следствие теоремы Шевалле для алгебр Ли. Если $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ не редуктивна, то достаточно доказать, что можно заменить $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ на $\mathfrak{g}_0$ для стандартной $\mathbb{Z}$-градуировки соответствующей супералгебры, а в этом случае $\mathfrak{g}_0$ редуктивна, и мы снова можем применить теорему Шевалле для алгебр Ли. □

§ 5. Открытые задачи

Этот параграф — версия статьи [LSg°], см. также [Sho°], где доказана наша гипотеза, касающаяся $\mathfrak{vect}(0|m)$, см. ниже.

5.1. Напоминания. Под *элементами Казимира* для (супер)алгебры Ли $\mathfrak{g}$ мы понимаем образующие (как алгебры) центра $Z(\mathfrak{g})$ алгебры $U(\mathfrak{g})$. Применения элементов Казимира как при описании физических явлений, так и в математике хорошо известны и многочисленны, см. [CoEn*].

Если на $\mathfrak{g}$ имеется инвариантная невырожденная суперсимметрическая билинейная форма B, то, как $\mathfrak{g}$-модуль, $\mathfrak{g} \simeq \begin{cases} \mathfrak{g}^*, & \text{если } p(B) = \bar 0, \\ \Pi(\mathfrak{g}^*), & \text{если } p(B) = \bar 1. \end{cases}$ В первом из этих случаев описание элементов Казимира для $\mathfrak{g}$ эквивалентно описанию алгебры $I(\mathfrak{g})$, состоящей из $\mathfrak{g}$-инвариантных полиномов на $\mathfrak{g}$, поскольку $Z(\mathfrak{g}) \simeq I(\mathfrak{g})$ (как $\mathfrak{g}$-модули). Описать же алгебру $I(\mathfrak{g})$ почему-то легче, чем $Z(\mathfrak{g})$. Описание алгебр $I(\mathfrak{g})$ для большинства конечномерных супералгебр Ли, как простых, так и их «родственниц», приведено в предыдущих параграфах этой главы.

Это описание алгебры $I(\mathfrak{g})$ не охватывает ни $\mathfrak{q}(n)$, ни $\mathfrak{po}(0|m)$, ни их «родственниц»: это гораздо более трудная задача; по крайней мере для ее решения нужны новые, не известные нам методы.

Итак, элементы Казимира описаны на сегодня в следующих случаях:

- для супералгебр Ли с неразложимой матрицей Картана и их «родственниц» [Srg4°];
- для $\mathfrak{q}(n)$ (но не для «родственниц»), см. [Srg1°, ЛЛ*];
- для $\mathfrak{pe}(n)$ (элементов Казимира нет) и $\mathfrak{spe}(n)$, см. [Sch°] (описание неявное) и [Srg4°] (явное описание, но лишь для $n = 3$); полная картина дана в [G2°], см. также [G1°, G3°];
- для $\mathfrak{vect}(0|m)$ (при $m > 2$ элементов Казимира нет), доказательство см. в [Ш°].

Проблема. Разобрать оставшиеся случаи:

- для супералгебр Ли бездивергентных векторных полей: для $\mathfrak{svect}(0|m)$, сохраняющей элемент объема vol, и ее деформации $\widetilde{\mathfrak{svect}}(m)$ (в обоих случаях гипотетически элементов Казимира нет при $m > 3$);

возможно, аналоги элементов Казимира имеются в предложенном В. Сергановой подходе к описанию центра алгебры $U(\mathfrak{g})$, см. [Se2*];

- для $\mathfrak{sq}(n)$ и $\mathfrak{psq}(n)$;
- для $\mathfrak{po}(0|m)$, $\mathfrak{po}'(0|m)$, а также $\mathfrak{h}(0|m)$ и $\mathfrak{h}'(0|m)$.

5.2. Примеры. 1) Для алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ элементы Казимира, соответствующие n инвариантным многочленам $\operatorname{tr}(X^k)$, где $X \in \mathfrak{g}$, а $k = 1, \ldots, n$, порождают центр универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$. Форма B задана следом.

2) Супералгебра Ли $\mathfrak{gl}(m|n)$ есть супераналог алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n)$, а форма B задана суперследом. Центр алгебры $U(\mathfrak{gl}(m|n))$ НЕ конечно порожден, как несложно показать. В качестве образующих можно взять многочлены $\operatorname{str}(X^k)$ при всех целых положительных k.

Замечание. Предположим, что мы как-либо доказали, что на $\mathfrak{gl}(n)$ нет никаких инвариантных многочленов, кроме следов степеней. Чтобы доказать, что лишь конечное их число пораждает алгебры инвариантных многочленов, рассмотрим разложение функции $\det(X - \lambda 1_n)$ в ряд по степеням параметра λ. Коэффициенты при степенях параметра λ — многочлены от выражений $\operatorname{tr}(X^k)$; характеристический многочлен дает, таким образом, рекуррентную формулу для $\operatorname{tr}(X^{n+1})$. В отличие от детерминанта березиниан — *рациональная* функция от выражений $\operatorname{str}(X^k)$, чтобы выразить разложение Березиниана в ряд по суперследам степеней, нам нужны все степени.

С другой стороны, любую *рациональную* функцию на $\mathfrak{gl}(m|n)$ можно представить в виде рациональной же функции от суперследов первых $n + m$ степеней, ср. [Srg4°] с [Bern1°] и [Kac2].

3) Супералгебра Ли $\mathfrak{po}(0|m)$, т. е. супералгебра Пуассона, является еще одним аналогом алгебры Ли $\mathfrak{gl}(m)$. Действительно, хорошо известна деформация супералгебры Ли $\mathfrak{po}(0|m)$ (которую физики называют *квантованием*) с параметром $\hbar$, так что значению $\hbar = 0$ соответствует супералгебра Ли $\mathfrak{po}(0|m)$, а значениям $\hbar \neq 0$ — супералгебры Ли из параметрического семейства, каждый член которого изоморфен супералгебре Ли $\mathfrak{gl}(2^{n-1}|2^{n-1}) = \mathfrak{gl}(\Lambda(n))$, если $m = 2n$, или $\mathfrak{q}(2^{n-1}) = \mathfrak{q}(\Lambda(n))$, если $m = 2n - 1$. Квантование превращают интеграл на пространстве функций, порождающих супералгебру Ли $\mathfrak{po}(0|m)$, в суперслед на $\mathfrak{gl}(2^{n-1}|2^{n-1})$ при $m = 2n$, а при $m = 2n - 1$ в странный след на $\mathfrak{q}(2^{n-1})$.

Суперпространство супералгебры Ли $\mathfrak{po}(0|m)$ изоморфно супералгебре Грассмана с $2n$ образующими, разбитыми на пары n-векторов ξ и η, если $m = 2n$, или такими же образующими ξ, η, а еще и θ, если $m = 2n + 1$.

Форма B на $\mathfrak{po}(0|m)$ задается при любом m формулой

$$B(f, g) = \int fg \operatorname{vol}(\zeta),$$

где $\zeta = (\xi, \eta)$ или (ξ, η, θ), и очевидно, что следующие функции $\mathfrak{po}(0|m)$-инварианты:

$$r_k = \int f^k \operatorname{vol}(\zeta), \qquad \text{где } k = 1, 2, \ldots \tag{Д6.151}$$

Однако, в отличие от супералгебры $\mathfrak{gl}(m|n)$, многочлены r_k не порождают всю алгебру инвариантных многочленов, если $n \geqslant 2$. Контрпримером низшей степени при $m = 4$ служит элемент Казимира, чья радиальная часть есть

$$x_1^2 x_2^2 (x_1^2 - x_2^2). \tag{Д6.152}$$

5.3. Замечание. Для любой супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ и ее конечномерного представления ρ многочлены $P_{k,\rho} = \operatorname{str} \rho(X)^k$ инвариантны. Для $\mathfrak{gl}(m|n)$ любой однородный степени k инвариантный многочлен можно представить в виде $\sum\limits_{\rho} c_\rho P_{k,\rho}$, где сумма пробегает по всем конечномерным представлениям ρ, см. [Srg4°].

Для супералгебры Ли $\mathfrak{po}(0|2n)$ с $n \geqslant 2$ и $k \geqslant 6$ ситуация отлична: многочлен (Д6.152) невозможно представить в виде какой бы то ни было конечной суммы вида (Д6.151), так что имеются строгие включения

$$I(\mathfrak{g}) \supset I_{(*)}(\mathfrak{g}) \supset I_{(**)}(\mathfrak{g}),$$

где $I_{(*)}$ и $I_{(**)}$ — алгебры многочленов вида (Д6.152) и (Д6.151) соответственно.

Чтобы описать полный набор $\mathfrak{po}(0|2n)$-инвариантов, напомним, что супералгебру Грассмана $\mathbb{C}[\xi, \eta]$ можно продеформировать в супералгебру Клиффорда $\operatorname{Cliff}_\hbar(\hat{\xi}, \hat{\eta})$, образующие которой удовлетворяют соотношениям

$$\hat{\xi}_i \hat{\eta}_j + \hat{\eta}_j \hat{\xi}_i = \delta_{ij} \hbar.$$

Для любого подмножества $I = \{i_1 < \ldots < i_l\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ положим

$$\xi_I = \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_l} \quad \text{и} \quad \eta_I = \eta_{i_1} \ldots \eta_{i_l}.$$

Пусть обозначения $\hat{\xi}_I$ и $\hat{\eta}_I$ аналогичны. Определим линейное отображение

$$Q : \mathbb{C}[\xi, \eta] \longrightarrow \operatorname{Cliff}_\hbar(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \qquad Q(\xi_I \eta_J) = \hat{\xi}_I \hat{\eta}_J;$$

причем прежде, чем применять отображение Q к одночлену, одночлен нужно привести к нормальной форме, например, к $\xi\eta$-форме (когда все ξ_i идут слева от любых η_j).

5.4. Лемма. $[Q(f), Q(g)] = \hbar Q(\{f, g\}) + \mathcal{O}(\hbar^2)$, *где слева — суперкоммутатор в супералгебре Клиффорда, а* $\{\cdot, \cdot\}$ *— скобка Пуассона.*

Супералгебра Ли, построенная по ассоциативной супералгебре Клиффорда $\operatorname{Cliff}_\hbar(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ заменой ассоциативного умножения на суперкоммутатор, есть $\mathfrak{gl}(2^{n-1}|2^{n-1})$; инвариантные многочлены на ней описаны в этой главе выше. Супералгебра Ли, построенная по ассоциативной супералгебре Клиффорда с $2n-1$ образующими, есть $\mathfrak{q}(2^{n-1})$; для нее алгебра элементов Казимира описана в [Srg1°].

5.5. Гипотеза. Пусть F — инвариантный многочлен на $(\mathrm{Cliff}_\hbar)_{\mathrm{SL}}$, рассматриваемой как супералгебра Ли относительно естественной четности, т. е. на $\mathfrak{gl}(2^{n-1}|2^{n-1})$ или на $\mathfrak{q}(2^{n-1})$. Представим F в виде

$$F = \sum_{k\geqslant k_0} F_k \hbar^k.$$

Если многочлен $P \in I(\mathfrak{po}(0|m))$ таков, что $Q(P) = F_{k_0}$, то P — инвариантный многочлен на $\mathfrak{po}(0|m)$. Все инвариантные многочлены на $\mathfrak{po}(0|m)$ при любом $m > 4$, как четном, так и нечетном, можно получить таким способом.

Другими словами, компонента младшей степени по $\hbar$ инвариантного многочлена на $\mathfrak{gl}(2^{n-1}|2^{n-1})$ или $\mathfrak{q}(2^{n-1})$ (пространстве операторов), является инвариантным многочленом на $\mathfrak{po}(0|m)$ (соответственно при $m = 2n$ или $2n-1$) — пространстве символов этих операторов. В частности, легко видеть, что

$$\mathrm{str}(Q(f)^k) \quad (\text{или } \mathrm{qtr}(Q(f)^k)) = \frac{1}{k}\left(\int f^k \,\mathrm{vol}\right)\hbar^n + \mathcal{O}(\hbar^n). \qquad (\text{Д}6.153)$$

Эта гипотеза доказана для четных значений $m \leqslant 6$. Чтобы доказать ее в полной общности, нужны новые идеи: степень сложности вычислений, проведенных так, как в предыдущих параграфах этой главы, быстро растет вместе с m. Доказать эту гипотезу — открытая и непростая **задача**.

Д7. Инвариантные функции на супермногообразиях суперматриц

(В. Шандер)

§ 1. Введение

Эта глава — версия статьи [Ш°]. Основное поле — $\mathbb{C}$.

1.1. Предварительные сведения. Пусть сперва C — произвольная алгебра, а алгебра $n \times n$-матриц $\mathrm{Mat}_C(n)$ действует слева на пространстве вектор-столбцов длины n. Если L — свободный правый C-модуль ранга n, то зафиксировав базис $e_1, \ldots, e_n$ в L, мы задаем изоморфизм $\mathrm{End}_C(L) \simeq \mathrm{Mat}_C(n)$, такой что матрица каждого оператора действует слева на столбец правых координат вектора, а замена базиса осуществляется с помощью обратимой матрицы — элемента из $\mathrm{GL}_C(n)$, который действует естественным образом на матрицы операторов. Если элемент $c \in C$ принадлежит центру алгебры C, то его действие на L дается скалярной матрицей.

Если $C = C_{\bar 0} \oplus C_{\bar 1}$ — суперкоммутативная супералгебра, а I_C — идеал в C, порожденный множеством $C_{\bar 1}$, то символом $\mathrm{cpr}\colon C \to C/I_C$ обозначим каноническую проекцию.

Любая суперматрица $A \in \mathrm{Q}_C(n)_{\bar 0}$ может быть однозначно представлена в виде $A_0 + A_1$, где A_0 и A_1 суть $n \times n$ матрицы, такие что все элементы матрицы A_0 четные, а все элементы матрицы A_1 нечетные и $\mathrm{cpr}\, A = \mathrm{cpr}\, A_0 \in \mathrm{Mat}_{C/I_C}(n)$.

Известно, см., например, [CoC1°], что матрица A обратима (соответственно нильпотентна) тогда и только тогда, когда обратима (соответственно нильпотентна) матрица $\mathrm{cpr}\, A$. В частности, группа $\mathrm{GQ}_C(n)$ состоит из всех матриц $A_0 + A_1$, таких что матрица $\mathrm{cpr}\, A_0$ обратима.

Аналогами следа и определителя для $\mathrm{Q}_C(n)$ служат $\mathrm{GQ}_C(n)$-инвариантные функции $\mathrm{qtr}\colon \mathrm{Q}_C(n)_{\bar 0} \to C_{\bar 1}$ и $\mathrm{qet}\colon \mathrm{GQ}_C(n) \to C_{\bar 1}$, заданные формулами

$$\mathrm{qtr}(A_0 + A_1) = \mathrm{tr}\, A_1, \qquad \mathrm{qet}(A_0 + A_1) = \sum_{1\leqslant i} \frac{\mathrm{tr}(A_0^{-1}A_1)^i}{i}.$$

1.2. Формулировка задачи. Для классических групп Ли $G \subset \mathrm{GL}(V)$, т. е. для самой $\mathrm{GL}(V)$ и ее подгрупп $\mathrm{O}(V)$ и $\mathrm{Sp}(V)$, если $\dim V$ — четно, Г. Вейль (H. Weyl) полностью описал инварианты тензорной алгебры $T(V \oplus V^*) \simeq T(V) \otimes T(V^*)$ и даже алгебры

$$T\Bigl(\underbrace{V \oplus \ldots \oplus V}_{p \text{ слагаемых}} \bigoplus \underbrace{V^* \oplus \ldots \oplus V^*}_{q \text{ слагаемых}}\Bigr) \simeq \underbrace{T(V) \otimes \ldots \otimes T(V)}_{p \text{ сомножителей}} \otimes \underbrace{T(V^*) \otimes \ldots \otimes T(V^*)}_{q \text{ сомножителей}},$$

а для $\mathrm{O}(V)$ и $\mathrm{Sp}(V)$ — инварианты тензорной алгебры $T(V)$ и даже алгебры $T(\underbrace{V\oplus\ldots\oplus V}_{p\text{ слагаемых}})$. Отсюда вытекает и описание инвариантов относительно алгебры Ли $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$ каждой из этих классических групп Ли G в тензорной алгебре $T(\mathfrak{g})$ присоединенного модуля.

Пусть $\mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)=\mathrm{Mat}(p|q)\otimes\Lambda$ и $\mathrm{Q}_\Lambda(n)=\mathrm{Q}(n)\otimes\Lambda$, где Λ — суперкоммутативная супералгебра, — два супераналога матричной алгебры. На каждом из этих аналогов действуют сопряжениями соответствующие группы обратимых матриц $\mathrm{GL}_\Lambda(p|q)$ и $\mathrm{GQ}_\Lambda(n)$, которые являются группами Λ-точек соответствующих супергрупп Ли. Действия групп $\mathrm{GL}_\Lambda(p|q)$ и $\mathrm{GQ}_\Lambda(n)$ сопряжениями сохраняют четности матриц, т. е. разложение матриц в сумму четной и нечетной:

$$\mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)=\mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)_{\bar 0}\oplus\mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)_{\bar 1};$$
$$\mathrm{Q}_\Lambda(n)=\mathrm{Q}_\Lambda(n)_{\bar 0}\oplus\mathrm{Q}_\Lambda(n)_{\bar 1},$$

и поэтому можно отдельно описывать инварианты четных матриц и отдельно — нечетных. Благодаря каноническому изоморфизму $\mathrm{GQ}_\Lambda(n)$-модулей $\mathrm{Q}_\Lambda(n)_{\bar 0}\cong\mathrm{Q}_\Lambda(n)_{\bar 1}$, мы приходим к следующим трем проблемам: описать

1) $\mathrm{GL}_\Lambda(p|q)$-инвариантные функции на $\mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)_{\bar 0}$;
2) $\mathrm{GL}_\Lambda(p|q)$-инвариантные функции на $\mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)_{\bar 1}$;
3) $\mathrm{GQ}_\Lambda(n)$-инвариантные функции на $\mathrm{Q}_\Lambda(n)_{\bar 0}$.

Именно эти задачи мы и будем рассматривать в этой главе. Более точно, в соответствии с общими принципами семинара SoS мы рассмотрим эти задачи функториально по Λ (выражаясь попросту, ответ не должен зависеть от Λ).

Напомним (см. [Вейль°]), что описание $\mathrm{GL}(n)$-инвариантов на пространстве $\mathrm{Mat}(n)$ состоит из двух отдельных утверждений:

(A) любая инвариантная функция от матрицы $A\in\mathrm{Mat}(n)$ является функцией от n переменных

$$\mathrm{tr}\,A,\ \ldots,\ \mathrm{tr}\,A^n; \tag{Д7.1}$$

(B) любая полиномиальная инвариантная функция *полиномиально* зависит от следов (Д7.1).

Первое утверждение связано с тем, что в $\mathrm{Mat}(n)$ существует плотное множество матриц, которые можно привести к диагональному виду. Второе утверждение связано с теоремой о симметрических многочленах.

В классической теории инвариантов алгебра $\mathfrak{g}$-инвариантных многочленов на любой «классической» алгебре Ли $\mathfrak{g}$ имеет конечное число полиномиальных образующих (нётерова). В суперслучае, также как и над полями простой характеристики, это не так: решения вышеприведенных задач 1)–3) дают контрпримеры к «классическим» формулировкам.

Для задачи 1) Ф. А. Березин и В. Кац доказали, тем не менее, что

любой инвариантный многочлен на $\mathrm{Mat}(p|q)_{\bar 0}$ *можно представить в виде рациональной функции от суперследов степеней суперматриц* $\mathrm{str}\,A,\ \ldots,\ \mathrm{str}\,A^{p+q}$. (Д7.2)

Эта теорема, доказательство которой содержится в книге [Ber*] и гл. Д6, тоже состоит из двух утверждений.

(S_A) Существует плотное в $\mathrm{Mat}(p|q)_{\bar 0}$ множество диагонализируемых матриц с различными собственными значениями.

(S_B) Любой многочлен от (четных) переменных $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_p$ и $\mu_1,\ \ldots,\ \mu_q$ симметричный отдельно по λ и по μ можно представить в виде *рациональной* функции от $s_1(\lambda,\mu),\ \ldots,\ s_{p+q}(\lambda,\mu)$, где

$$s_i(\lambda,\mu)=\sum_j\lambda_j^i-\sum_j\mu_j^i. \tag{Д7.3}$$

Так как березиниан — замечательная инвариантная функция на $\mathrm{Mat}(p|q)_{\bar 0}$ — не многочлен, а рациональная функция, естественно интерпретировать утверждение (Д7.2) так:

кольцо частных кольца инвариантных полиномиальных функций на $\mathrm{Mat}(p|q)_{\bar 0}$ *изоморфно кольцу* ***рациональных*** *функций от* $p+q$ *четных переменных* $\mathrm{str}\,A,\ \ldots,\ \mathrm{str}\,A^{p+q}$. (Д7.4)

1.3. Близкие результаты. В настоящий момент[1] о $\mathrm{GQ}_\Lambda(n)$-инвариантах известно немного. На $\mathrm{Q}_\Lambda(n)_{\bar 0}$ имеется аналог следа и определителя — нечетные $\mathrm{GQ}_\Lambda(n)$-инвариантные функции $\mathrm{qtr}\,A$ и $\mathrm{qet}\,A$.

А. Н. Сергеев доказал (см. гл. Д6), что алгебра $\mathrm{GQ}_\Lambda(n)$-инвариантных *полиномиальных функций* на $\mathrm{Q}_\Lambda(n)_{\bar 0}$ порождена бесконечным набором многочленов

$$\mathrm{qtr}\,A,\ \ \mathrm{qtr}\,A^2,\ \ \ldots,\ \ \mathrm{qtr}\,A^n,\ \ \ldots$$

Описание антисимметрических инвариантных многочленов на $\mathrm{Q}_\Lambda(n)$ (впрочем, неявное) см. в [FuLe°, Gru°].

Имеются естественное отображение

$$\mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)_{\bar 1}\longrightarrow\mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)_{\bar 0};\qquad M\longmapsto M^2 \tag{Д7.5}$$

и естественное вложение (реализация алгебры $Q_\Lambda(n)$ как централизатора $C(J_{2n})$):

$$\mathrm{Q}_\Lambda(n)_{\bar 0}\longrightarrow\mathrm{Mat}_\Lambda(n|n)_{\bar 0};\quad (A_0+\varepsilon A_1)\longmapsto\begin{pmatrix}A_0&A_1\\A_1&A_0\end{pmatrix},\quad \text{где } A_i\in\mathrm{Mat}_\Lambda(n|n)_{\bar i},$$

---

[1] Это было написано в 1988. С тех пор ничего не изменилось. — *Прим. Д. Л.*

но эти отображения не дают нам никаких инвариантов на $\mathrm{Mat}_\Lambda(p|q)_{\bar 1}$ или $\mathrm{Q}_\Lambda(n)$, поскольку суперследы образов относительно этих отображений равны нулю.

Отметим два обескураживающих обстоятельства, касающихся инвариантных функций на $\mathrm{Q}_\Lambda(n)$. Во-первых, можно показать (см. § 4), что никакое конечное множество $\mathrm{GQ}_\Lambda(n)$-инвариантных функций не может породить всех инвариантных функций. Во-вторых, $\mathrm{GQ}_\Lambda(n)$-инвариантные функции на $\mathrm{Q}_\Lambda(n)$ несут очень мало информации о соответствующих $\mathrm{GQ}_\Lambda(n)$-орбитах. В частности, по значениям всех инвариантных многочленов на данной матрице невозможно определить даже, обратима ли эта матрица.

1.4. Основные результаты. Описаны $\mathrm{GQ}_\Lambda(n)$-инвариантные функции на $\mathrm{Q}_\Lambda(n)$ и $\mathrm{GL}_\Lambda(n)$-инвариантные функции на $\mathrm{Mat}_\Lambda(n|n)_{\bar 1}$ функториально по Λ. Другими словами, *описаны инварианты действия супергруппы* $\mathcal{GQ}(n)$ *на супермногообразии* $\mathcal{Q}(n)$, Λ-*точки которых составляют* $\mathrm{Q}_\Lambda(n)$.

Аналогично *описаны действия супергруппы* $\mathcal{GL}(n|n)$ *на супермногообразии* $\mathcal{O}\mathrm{dd}(n)$, Λ-*точки которого составляют* $\mathrm{Mat}_\Lambda(n|n)_{\bar 1}$. Ответ проинтерпретирован в терминах $\mathrm{GL}_\Lambda(n)$-инвариантных функций на $\mathrm{Q}_\Lambda(n)$ и $\mathrm{GL}_\Lambda(n|n)$-инвариантных функций на $\mathrm{Mat}_\Lambda(n|n)_{\bar 1}$, описанных функториально по Λ.

Ниже, для того, чтобы описать инвариантные функции, нам потребуются *полуинварианты*, т. е. функции, которые сами не инварианты, но под действием супергруппы изменяются на слагаемые, принадлежащие идеалу, порожденному инвариантными функциями. Мы покажем, что любая $\mathcal{GQ}(n)$-инвариантная функция на $\mathcal{Q}(n)$ может быть представлена как функция от n нечетных инвариантов $\mathrm{qtr}\,A, \ldots, \mathrm{qtr}\,A^n$ и *n нечетных полуинвариантных рациональных функций*

$$t_1(A), \ldots, t_n(A). \tag{Д7.6}$$

Мы начнем с изучения голоморфных инвариантных функций, а затем перейдем к рациональным и полиномиальным функциям.

Алгебра $\mathcal{GL}(n|n)$-инвариантных функций на $\mathcal{O}\mathrm{dd}(n)$ оказывается изоморфной алгебре $\mathcal{GQ}(n)$-инвариантных функций (того же класса, т. е. голоморфных, рациональных или полиномиальных, соответственно) на $\mathcal{Q}(n)$, несмотря на то, что этот изоморфизм алгебр инвариантов не индуцирован никаким естественным отображением $\mathcal{Q}(n) \to \mathcal{O}\mathrm{dd}(n)$ или $\mathcal{O}\mathrm{dd}(n) \to \mathcal{Q}(n)$.

Описание всех инвариантных функций на нечетных матрицах общего вида аналогично описанию инвариантов на $\mathcal{Q}(n)$, но несколько более замысловато и будет дано отдельно.

1.4а. Содержание этой главы. В § 2 мы даем необходимые предварительные сведения. В § 3 мы подробно рассматриваем случай $n = 1$. В § 4 мы изучаем функции на $\mathcal{C}^{n|n}$, инвариантные относительно действия полупрямого произведения симметрической группы S_n на $0|n$-мерную абелеву супергруппу $\mathcal{C}^{0|n}$. В частности, мы доказываем следующий суперaналог теоремы о симметрических функциях:

любая симметрическая функция от n неоднородных (*относительно четности*) *инвариантов может быть единственным способом выражена в терминах n симметрических неоднородных* функций.

В § 5 мы докажем основные результаты об инвариантных функциях на $\mathcal{Q}(n)$ и $\mathcal{O}\mathrm{dd}(n)$. В § 6 мы приведем несколько примеров.

§ 2. О нормальном виде суперматриц

2.1. Аналог теоремы о жордановой нормальной форме. Следующая теорема была доказана в 1978 году, но не была опубликована. Поскольку последующие публикации ее не покрывают, и лишь в [Ber*] доказаны первые два утверждения из следствия, мы дадим полное ее доказательство, тем более что оно такое простое.

Теорема. *Пусть C — локальная суперкоммутативная супералгебра с единицей над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ и все элементы максимального идеала $I \subset C$ нильпотентны. Тогда*:

1) *для любого свободного C-модуля L ранга n и любого эндоморфизма $A \in \mathrm{End}_C(L)$ подмодули $L(\lambda) = \bigcup\limits_i \mathrm{Ker}(A - \lambda)^i$, где $\lambda \in C$, либо тождественно равны нулю, либо свободны и $L = \bigoplus\limits_{\lambda \in k} L(\lambda)$.*

2) *Пусть $A \in \mathrm{Q}_C(n)_{\bar 0}$, и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — набор всех различных собственных значений матрицы* $\mathrm{cpr}\,A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(n)$ (мы применяем каноническую проекцию $\mathrm{cpr}\colon C \to C/I$ к каждой матрице поэлементно) *и пусть $n_1, \ldots, n_s$ — их соответствующие кратности.*

Тогда существует матрица $G \in \mathrm{GQ}_C(n)$, такая что матрица $G^{-1}AG$ имеет блочно-диагональный вид

$$\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_s), \quad \text{где } A_i \in Q_C(n_i)$$

где λ_i единственное собственное значение матрицы $\mathrm{cpr}\,A_i$. *Матрица A_i, отвечающая собственному значению λ_i определена однозначна с точностью до $\mathrm{GL}_C(n_i)$-действия.*

3) *Пусть $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_C(p|q)_{\bar 0}$ и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — набор различных собственных значений матрицы* $\mathrm{cpr}\,A = \begin{pmatrix} \mathrm{cpr}\,X & 0 \\ 0 & \mathrm{cpr}\,T \end{pmatrix}$. *Тогда найдется матрица $G \in \mathrm{GL}_C(p|q)$ и разбиение множества*

$\{1, \ldots, p+q\}$ *на непересекающиеся подмножества* $J_1, \ldots, J_s$, *такие что все элементы матрицы* $G^{-1}AG$, *для которых число строк и число столбцов принадлежат различным подмножествам разбиения, равны нулю.*

Квадратная подматрица A_i, *отвечающая подмножеству* J_i, *принадлежит* $\mathrm{Mat}_C(p_i|q_i)_{\bar 0}$, *где* p_i *и* q_i *суть кратности собственного значения* λ_i *в спектрах матриц* $\mathrm{cpr}\, X$ *и* $\mathrm{cpr}\, T$ *соответственно и где* λ_i — *единственное собственное значение матрицы* $\mathrm{cpr}\, A_i$.

Матрица A_i, *отвечающая собственному значению* λ_i, *определена однозначно с точностью до* $\mathrm{GL}_C(p_i|q_i)$*-действия.*

4) *Пусть* $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_C(p|q)_{\bar 1}$, *и пусть* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — *множество всех собственных значений матрицы* $\mathrm{cpr}\, A^2$. *Тогда существует матрица* $G \in \mathrm{GL}_C(p|q)$ *и разбиение множества* $\{1, \ldots, p+q\}$ *на непересекающиеся подмножества* $J_1, \ldots, J_s$, *такие что все элементы матрицы* $G^{-1}AG$, *для которых число строк и число столбцов принадлежат разным подмножествам разбиения, обращаются в нуль, а квадратная матрица* A_i, *отвечающая множеству* J_i, *принадлежит* $\mathrm{Mat}_C(p_i|q_i)_{\bar 1}$, *где* p_i *и* q_i *суть кратности собственного значения* λ_i *в спектрах матриц* $\mathrm{cpr}(YZ)$ *и* $\mathrm{cpr}(ZY)$, *соответственно, а* λ_i — *единственное собственное значение матрицы* $\mathrm{cpr}\, A_i^2$.

С точностью до $\mathrm{GL}_C(p_i|q_i)$*-действия матрица* A_i, *отвечающая собственному значению* λ_i, *определена однозначно и если* $\lambda_i \neq 0$, *то* $p_i = q_i$, *а матрицу* A_i *можно привести к виду* $\begin{pmatrix} R & T \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$, *где у матрицы* $\mathrm{cpr}\, T$ *есть лишь одно собственное значение, а именно,* λ_i.

Следствие. *При тех же условиях на алгебру* C, *что и в теореме имеем*:

1) *Если* $A \in \mathrm{Q}_C(n)_{\bar 0}$, *а у* $\mathrm{cpr}\, A$ *нет кратных собственных значений, то* $\mathrm{GQ}_C(n)$*-действием можно привести матрицу* A *к диагональному виду.*

2) *Если* $A \in \mathrm{Mat}_C(p|q)_{\bar 0}$ *и у матрицы* $\mathrm{cpr}\, A$ *нет кратных собственных значений, то* $\mathrm{GL}_C(p|q)$*-действием можно привести матрицу* A *к диагональному виду.*

3) *Если* $A \in \mathrm{Mat}_C(n|n)_{\bar 1}$ *и у матрицы* $\mathrm{cpr}\, A^2$ *нет кратных собственных значений, то* $\mathrm{GL}_C(n|n)$*-действием можно привести матрицу* A *к виду* $\begin{pmatrix} R & T \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$, *где* R *и* T — *диагональные матрицы.*

Замечания. 1) В этой главе приведенная выше теорема используется лишь в случае, когда C является алгеброй Грассмана над $\mathbb{C}$, а $I = I_C$. Более общая постановка гарантирует возможность работать, при необходимости, с алгебрами, полученными из алгебры Грассмана присоединением к ней корней алгебраических уравнений. Например, если C — суперкоммутативная супералгебра над $\mathbb{C}$ с двумя нечетными образующими ξ_1 и ξ_2, и одной четной образующей t, удовлетворяющей соотношению $t^2 = \xi_1\xi_2$, то C/I_C — двумерная алгебра, но, тем не менее, $C/I = \mathbb{C}$, и поэтому теорему можно применить к матрицам над C.

2) Формулировка теоремы для суперматриц произвольного формата довольно муторная, поскольку мы ограничились суперматрицами стандартного формата. Если мы разрешим произвольные форматы, то можно приводить матрицы из $\mathrm{Mat}_C(p|q)$ к привычному блочно-диагональному виду жордановой нормальной формы.

Доказательство теоремы. 1), 2) Эти два утверждения доказываются одновременно. Зафиксируем базис в L, и пусть $A^{(0)}$ — матрица оператора A в этом базисе. Так как $C/I = \mathbb{C}$, то существует конечномерная подалгебра в C, содержащая все элементы из $A^{(0)}$, и поэтому всюду ниже мы можем считать, что убывающая фильтрация алгебры C степенями идеала I конечна.

Пусть $B \in \mathrm{Mat}(n_1)$ и $D \in \mathrm{Mat}(n_2)$ не имеют общих собственных значений. Докажем, что если $\mathrm{cpr}\, A^{(0)} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, то при любом $i > 0$ существуют $G_i \in \mathrm{GL}_C(n_1|n_2)$, такие что $\mathrm{cpr}\, G_i = 1_{n_1|n_2}$ и

$$A^{(i)} = G_i^{-1} A^{(0)} G_i \equiv \begin{pmatrix} B_i & 0 \\ 0 & D_i \end{pmatrix} \bmod I^i.$$

Если $A^{(i)} \equiv \begin{pmatrix} B_i & 0 \\ 0 & D_i \end{pmatrix} \bmod I^i$, то $A^{(i)} \equiv \begin{pmatrix} B_i + \Delta_1 & \Delta_2 \\ \Delta_3 & D_i + \Delta_4 \end{pmatrix} \bmod I^i$, где $\Delta_j \equiv \equiv 0 \bmod I^i$ при $j = 1, 2, 3, 4$. Так как у B и D нет общих собственных значений, то линейные отображения

$$x \mapsto Bx - xD \quad \text{и} \quad y \mapsto Dy - yB,$$

определенные соответственно на пространствах $(n_1 \times n_2)$-матриц и $(n_2 \times n_1)$-матриц с элементами из $\mathbb{C}$ соответственно, являются взаимно однозначными (см. [Ган°, гл. 8]). Таким образом, существует матрица $\Delta \in I^i \cdot \mathrm{Mat}_C(n)$, такая что $\left[\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \Delta\right] = -\begin{pmatrix} 0 & \Delta_2 \\ \Delta_3 & 0 \end{pmatrix}$; а следовательно, $1 + \Delta \in \mathrm{GQ}_C(n)$ и

$$(1+\Delta)^{-1} A^{(i)} (1+\Delta) \equiv A^{(i)} + [A^{(i)}, \Delta] \equiv \begin{pmatrix} B_i + \Delta_1 & 0 \\ 0 & C_i + \Delta_4 \end{pmatrix} \bmod I^{i+1}.$$

Итак, приведя сперва $\mathrm{cpr}\, A^{(0)}$ к жордановой нормальной форме, мы получаем базис в L, в котором матрица оператора A имеет блочно-диагональную форму, описанную в утверждении 2) теоремы:

$$A^{(\infty)} = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_s).$$

Так как у $\operatorname{срг} A_i$ лишь одно собственное значение, а именно, λ_i, то матрица $A_i - \lambda$ обратима при $\lambda \neq \lambda_i$, а $A_i - \lambda_i$ — нильпотентна. Это означает, что подмодуль модуля L, натянутый на базисные векторы, отвечающие блоку A_i, совпадает с $L(\lambda_i)$, а если λ не совпадает ни с одним из собственных значений матрицы $\operatorname{срг} A^{(0)}$, то $L(\lambda) = 0$.

Теперь мы полностью доказали первые два утверждения теоремы: матрицы A_i определены однозначно с точностью до выбора базиса в подмодуле $L(\lambda_i)$.

3) Если A — четный оператор, то все модули $L(\lambda_i)$ суть однородные подмодули и выбирая в каждом из них базис, состоящий из однородных элементов, мы получаем утверждение 3).

4) Если A — нечетный оператор, то модули $L(\lambda_i)$ суть неоднородные подмодули. Однако A^2 — четный оператор и к нему можно применить утверждение 3).

Если $A_i = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_C(p_i|q_i)_{\bar{1}}$ и у $\operatorname{срг} A_i^2 = \begin{pmatrix} \operatorname{срг} YZ & 0 \\ 0 & \operatorname{срг} ZY \end{pmatrix}$ есть лишь одно собственное значение, а именно, $\lambda_i \neq 0$, то $p_i = q_i$ и матрицы Y и Z обратимы. Следовательно, матрица

$$\begin{pmatrix} Z & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} T + ZXZ^{-1} & ZY - ZXZ^{-1}T \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет нужный вид. Теорема доказана. □

2.2. Обозначения и напоминания. Пусть M — супермногообразие. Пусть F_M или просто F — пучок функций на M, и если f — функция на M, т. е. сечение пучка F, то $\operatorname{срг} f$ отождествляется с ограничением функции f на канонически вложенное в M подстилающее многообразие M_{rd}. Любое открытое подсупермногообразие $V \subset M$ задано согласно [CoC1°, гл. 3] открытым подмножеством $V_{rd} \subset M_{rd}$ и нечетной размерностью $d_{\bar{1}}$. Всюду ниже мы будем работать с комплексно-аналитическими супермногообразиями и за исключением пункта 5.6, все супермногообразия — суть суперобласти, т. е. открытые подсуперобласти в $\mathcal{C}^{p|q}$. Отсюда следует, что их подстилающие многообразия являются областями в $\mathbb{C}^p$, а F — пучок аналитических функций на $\mathbb{C}^p$ со значениями в алгебре Грассмана от q переменных.

На $\mathcal{C}^{p|q}$ существует глобальная система координат, состоящая из p четных функций $u_1, \ldots, u_p$ и q нечетных функций $\xi_1, \ldots, \xi_q$. Произвольную функцию $f \in F(M)$ можно единственным образом представить в виде

$$f = \sum f_\alpha(u_1, \ldots, u_p)\xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_q^{\alpha_q}, \quad \text{где} \ \ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \in \{0, 1\}^q.$$

Морфизм суперобластей $\varphi\colon V \to W \subseteq \mathcal{C}^{p|q}$ задается морфизмом супералгебр $\varphi^*\colon F(W) \to F(V)$, который, в свою очередь, однозначно определен своей координатной записью — набором из p четных функций $\varphi^*(u_1), \ldots$ $\ldots, \varphi^*(u_p)$ и q нечетных функций $\varphi^*(\xi_1), \ldots, \varphi^*(\xi_q)$.

Нам потребуются лишь супермногообразия ассоциированные с

$$\operatorname{Mat}_\Lambda(p|q)_{\bar{0}}, \quad \operatorname{Mat}_\Lambda(p|q)_{\bar{1}}, \quad \operatorname{GL}_\Lambda(p|q), \quad \operatorname{Q}_\Lambda(n)_{\bar{0}}.$$

Специально выбранные одинаковые обозначения для работы с разными категориями не приведут к недоразумению, поскольку всегда ясно из контекста, о какой категории идет речь.

Удобно думать, что координаты супермногообразия $\mathcal{Q}(n) = \mathcal{C}^{n^2|n^2}$ заполняют две квадратные матрицы, каждая размера $n \times n$: одна — это $X = (X_{ij})$, состоящая из четных координат, а другая — это $\xi = (\xi_{ij})$, состоящая из нечетных координат. Ясно, что $\operatorname{Q}(n)_{rd} = \operatorname{Mat}(n)$; а супермногообразие $\mathcal{G}\operatorname{Q}(n)$ является открытым подсупермногообразием в $\mathcal{Q}(n)$ и подстилающей группой супергруппы $\mathcal{G}\operatorname{Q}(n)$ является $\operatorname{GL}(n)$.

Определено действие $\operatorname{Ad}\colon \mathcal{G}\operatorname{Q}(n) \times \mathcal{Q}(n) \to \mathcal{Q}(n)$. В координатах X, ξ на $\mathcal{Q}(n)$ и Y, η на $\mathcal{G}\operatorname{Q}(n)$ оно задано формулой

$$\operatorname{Ad}^*_{Y+\eta}(X + \xi) = (Y + \eta)^{-1}(X + \xi)(Y + \eta). \tag{Д7.7}$$

Аналогично на супермногообразии четных матриц $\mathcal{E}v(p|q) \simeq \mathcal{C}^{p^2+q^2|2pq}$, координаты заполняют суперматрицу стандартного формата

$$g = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{где элементы матриц } X \text{ и } T \text{ четные,} \\ \text{элементы матриц } Y \text{ и } Z \text{ нечетные.} \end{array} \tag{Д7.8}$$

Супергруппа $\mathcal{GL}(p|q)$ является открытым подсупермногообразием в $\mathcal{E}v(p|q)$, таким что

$$\mathcal{GL}(p|q)_{rd} = \mathcal{E}v(p|q)_{rd} \cap \mathcal{GL}(p + q). \tag{Д7.9}$$

Координаты супермногообразия $\mathcal{O}dd(p|q) = \mathcal{C}^{2pq|p^2+q^2}$ нечетных матриц заполняют матрицу стандартного формата $\begin{pmatrix} X' & Y' \\ Z' & T' \end{pmatrix}$, где элементы матриц X' и T' нечетные, элементы матриц Y' и Z' четные. Подобно действию Ad на $\mathcal{Q}(n)$ координатная запись действия имеет вид:

$$\begin{gathered} \operatorname{Ad}\colon \mathcal{GL}(p|q) \times \mathcal{O}dd(p|q) \longrightarrow \mathcal{O}dd(p|q), \\ \operatorname{Ad}^*_g\left(\begin{pmatrix} X' & Y' \\ Z' & T' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X' & Y' \\ Z' & T' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{Д7.10}$$

Всюду ниже обозначение $\mathcal{O}dd(n|n)$ сокращено до $\mathcal{O}dd(n)$.

Как хорошо известно, в отличие от обычного анализа на многообразиях, в суперанализе функция на супермногообразии не определяется своими значениями в $\mathbb{C}$-точках и поэтому следует явно вводить зависимость от параметров (особенно нечетных).

Будем считать для удобства, что параметры пробегают произвольное супермногообразие $\mathcal{U}$, хотя *в наших задачах* в качестве $\mathcal{U}$ достаточно взять суперточку $\mathcal{C}^{0|s}$ с достаточно большим s. Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{U}$ — супермногообразия, то *$\mathcal{U}$-семейством точек супермногообразия* $\mathcal{M}$ называется любой морфизм $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{M}$, а любая функция f на $\mathcal{U} \times \mathcal{M}$ называется *$\mathcal{U}$-семейством функций на* $\mathcal{M}$, и так далее. О необходимости введения параметров, особенно нечетных, см. [CoC1°]. Когда возню с параметрами можно проводить автоматически, мы о них не будем упоминать.

§ 3. Инвариантные функции на $\mathcal{Q}(1)$ и $\mathcal{O}\mathrm{dd}(1)$

3.1. Действие $\rho\colon \mathcal{G}Q(1) \times \mathcal{Q}(1) \to \mathcal{Q}(1)$ супергруппы $\mathcal{G}Q(1)$ задано в стандартных координатах (a, α) на $\mathcal{Q}(1)$ и (g, γ) на $\mathcal{G}Q(1)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho^*(\alpha) &= \big((g+\gamma)^{-1}(a+\alpha)(g+\gamma)\big)_{\bar 1} = \alpha, \\ \rho^*(a) &= \big((g+\gamma)^{-1}(a+\alpha)(g+\gamma)\big)_{\bar 0} = a + 2g^{-1}\gamma\alpha. \end{aligned} \tag{Д7.11}$$

Заметим, что α — это ни что иное, как функция qtr на $\mathcal{Q}(1)$. Следующее утверждение очевидно:

Теорема. *Множество функций на $\mathcal{Q}(1)$ инвариантных относительно присоединенного действия супергруппы $\mathcal{G}Q(1)$ совпадает с множеством функций вида $\alpha \cdot f(a) + c$, где f — произвольная функция от одной переменной, а c — константа.*

Поэтому любую инвариантную функцию на $\mathcal{Q}(1)$ можно выразить в терминах одной инвариантной функции $\alpha = \mathrm{qtr}\, A$ и одной неинвариантной функции a. Эта неинвариантная функция является так сказать «инвариантом *второй очереди*»: a инвариантна на подсупермногообразии, выделенном уравнением $\alpha = 0$. Кроме того, отображение, переводящее a в $\mathrm{cpr}(a)$, — функцию на $\mathbb{C} = \mathcal{Q}(1)_{rd}$, является $\mathrm{GQ}_{\mathbb{C}}(1)$-инвариантом.

3.2. Инвариантные функции на $\mathcal{O}\mathrm{dd}(1)$. Пусть $\widetilde{\mathcal{O}\mathrm{dd}}(1)$ — плотное открытое подсупермногообразие в $\mathcal{O}\mathrm{dd}(1)$, выделенное уравнением

$$\mathrm{cpr}(a_{12}a_{21}) \neq 0,$$

где функции a_{ij} суть стандартные координаты на $\mathcal{O}\mathrm{dd}(1)$, отвечающие матричным единицам. Отождествим супермногообразие $\mathcal{C}^{1|1}$ с замкнутым подсупермногообразием супермногообразия $\mathcal{O}\mathrm{dd}(1)$, состоящим из суперматриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Определим следующие четную и нечетную функции на $\mathcal{O}\mathrm{dd}(1)$:

$$g = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}, \qquad \gamma = a_{11} + a_{22}.$$

Мы задали, таким образом, морфизм супермногообразий

$$\pi\colon \widetilde{\mathcal{O}\mathrm{dd}}(1) \longrightarrow \mathcal{C}^{1|1} \hookrightarrow \mathcal{O}\mathrm{dd}(1), \qquad \text{где } \pi^*(a) = g, \ \pi^*(\alpha) = \gamma.$$

Лемма. *Любое семейство матриц $\varphi\colon \mathcal{U} \to \widetilde{\mathcal{O}\mathrm{dd}}(1)$ эквивалентно* (относительно $\mathcal{GL}(1|1)$-действия) *семейству* $\pi \circ \varphi\colon \mathcal{U} \to \widetilde{\mathcal{O}\mathrm{dd}}(1)$. *Морфизм π переводит множество всех семейств эквивалентных семейству φ в множество всех семейств вида $\begin{pmatrix} \alpha & a+\varepsilon\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, где ε — произвольная нечетная функция на $\mathcal{U}$.*

Доказательство. Ясно, что

$$\begin{pmatrix} 1 & -a_{22} \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a_{22} \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{22} & a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix},$$

где x, t — четные функции, y, z — нечетные функции, а xt — обратимая функция, то $\alpha = \beta$, поскольку суперслед — инвариант; легко проверить, что $b - a = (2t^{-1}za)\alpha$.

С другой стороны,

$$\begin{pmatrix} 1 + a^{-1}\alpha\varepsilon & \varepsilon \\ a^{-1}\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + a^{-1}\alpha\varepsilon & \varepsilon \\ a^{-1}\varepsilon & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & a+2\varepsilon\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Теорема. *Множество $\mathcal{G}Q(1)$-инвариантных функций на $\widetilde{\mathcal{O}\mathrm{dd}}(1)$ совпадает с множеством функций вида $\gamma \cdot h(g) + c$, где h — произвольная функция на $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а $c \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Пусть f — инвариантная функция. Положим $\tilde f(a, \alpha) := \pi^* f$. Из леммы вытекает, что $\tilde f(a, \alpha) = \tilde f(a + \varepsilon\alpha, \alpha)$, откуда следует, что

$$\tilde f(a, \alpha) = \alpha h(a) + c, \qquad f = \tilde f \circ \pi^* = \gamma h(g) + c.$$

Наоборот, если $f = \gamma h(g)$, то по лемме γ является инвариантом, а неинвариантность функции g эквивалентна тому, что координата g заменяется на $g + \delta\gamma$, откуда следует, что

$$\gamma h(g + \varepsilon\gamma) = \gamma h(g) + \gamma\varepsilon\gamma h'(g) = \gamma h(g). \qquad \square$$

Упражнение. Покажите, что $\mathrm{str}\, A^{2n} = 0$ и $\mathrm{str}\, A^{2n+1} = (2n+1)\gamma g^n$ для любой суперматрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}\mathrm{dd}(1)$.

3.3. Как следует из леммы 3.2, матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ эквивалентна любой из матриц вида $\begin{pmatrix} \gamma & g+\varepsilon\gamma \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, поэтому, чтобы описать инвариантные функции на $\mathcal{O}\mathrm{dd}(1)$, мы могли бы использовать вместо g любую функцию вида $\tilde{g} = g + \varepsilon\gamma$. Произвол в выборе функции g связан со слегка более общим вопросом.

Что нужно знать об $\mathcal{U}$-семействах матриц A (другими словами о матрично-значных функциях A на $\mathcal{U}$) чтобы мы могли вычислить значение всех инвариантных функций?

Пусть a — функция на $\mathcal{U}$, такая что значение любой инвариантной функции $f = \gamma h(g)$ на A равно $\operatorname{str} A \cdot h(a)$. Тогда, в частности,

$$\operatorname{str} A^3 = 3a \cdot \operatorname{str} A. \tag{Д7.12}$$

Мы получили условие на a эквивалентное уравнению

$$(a - g(A)) \operatorname{str} A = 0. \tag{Д7.13}$$

Оказывается, что этого условия достаточно.

Теорема. *Пусть A — матрично-значная функция на $\mathcal{U}$ со значениями в $\widetilde{\mathcal{O}\mathrm{dd}}(1)$, а a — четная функция на $\mathcal{U}$, такая что выполняется* (Д7.12). *Тогда для любой функции h на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ имеем*

$$\gamma(A) h(g(A)) = \operatorname{str} A \cdot h(a).$$

Доказательство. Пусть $u_1, \ldots, u_k$ — четные координаты на $\mathcal{U}$, а $v_1, \ldots, v_l$ — нечетные. Тогда условие (Д7.13) означает, что для любого фиксированного значения координат $u_1, \ldots, u_k$ либо $\operatorname{str} A = 0$, либо (напомним, что символ (S) означает идеал, порожденный множеством S)

$$\Delta := a - g(A) \in (v_1, \ldots, v_l).$$

В первом случае обе части равенства обращаются в нуль, а во втором мы имеем

$$\gamma(A) \cdot h(a) = \gamma(A)\left(h(g(A)) + \sum_{i=1}^{l} \frac{\Delta^i}{i!} \frac{d^i b}{dz^i}(g(A))\right) = \gamma(A) \cdot h(g(A)). \qquad \square$$

Следствие. *Пусть A_1 и A_2 — два $\mathcal{U}$-семейства матриц из $\widetilde{\mathcal{O}\mathrm{dd}}(1)$. Никакие $\mathcal{GL}(1|1)$-инвариантные функции на $\widetilde{\mathcal{O}\mathrm{dd}}(1)$ не различают эти семейства тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{str} A_1 = \operatorname{str} A_2 \quad \text{и} \quad \operatorname{str} A_1^3 = \operatorname{str} A_2^3.$$

Замечания. 1) Из условия (Д7.13) не следует, вообще говоря, что

$$a = g(A) + \varepsilon(A)\gamma(A),$$

даже если $\gamma(A) \neq 0$; например, возьмите $A = \begin{pmatrix} v_1 v_2 v_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $a = 1 + v_1 v_2$, где v_1, v_2, v_3 суть нечетные координаты на $\mathcal{U}$.

Однако если g' — нечетная функция (или семейство функций) на открытом подсупермногообразии $\mathcal{U} \subset \widetilde{\mathcal{O}\mathrm{dd}}(1)$, для которого $\gamma \cdot g' = \gamma \cdot g|_U$, тогда $g' = g + \varepsilon\gamma$ для некоторой нечетной функции (или семейства функций) ε на $\mathcal{U}$. Чтобы в этом убедиться, достаточно взять в качестве нечетных координат на $\mathrm{Odd}(1)$ функции γ и $a_{11} - a_{22}$.

2) Нетрудно проверить, что все сказанное в этом подпункте можно перенести практически буквально на случай супермногообразия $\mathcal{Q}(1)$ с несущественными изменениями: во-первых, на $\mathcal{Q}(1)$ имеется выделенная четная функция, а именно a, а во-вторых, появление ненулевого слагаемого εa возможно лишь в присутствии нечетных параметров.

Итак, на $\mathcal{Q}(1)$ и $\mathcal{O}\mathrm{dd}(1)$ существуют пары, состоящие из одной нечетной инвариантной функции τ (соответственно α или γ) и одной четной неинвариантной функции t (соответственно a или g) такие, что любую инвариантную функцию можно выразить в виде

$$\tau h(t) + \mathrm{const}, \quad \text{где } \tau \text{ и } t \text{ — многочлены.}$$

В этом параграфе мы свели изучение инвариантных функций на $\mathcal{Q}(1)$ и $\mathcal{O}\mathrm{dd}(1)$ к изучению функций инвариантных относительно действий суперкоммутативных супергрупп $\mathcal{C}^{0|1}$ и $\mathcal{C}^{1|1}$.

Следующий параграф посвящен $S_n \ltimes \mathcal{C}^{0|n}$-инвариантным функциям на $\mathcal{C}^{n|n}$. Эти функции играют похожую роль в изучении $\mathcal{GQ}(n)$-инвариантных функций на $\mathcal{Q}(n)$ и $\mathcal{GL}(n|n)$-инвариантных функций на $\mathcal{O}\mathrm{dd}(n)$.

§ 4. Инвариантные функции на $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$

4.1. Группа S_n перестановок n элементов действует на супермногообразии $\mathcal{C}^{n|n}$ с четными координатами $a_1, \ldots, a_n$ и нечетными координатами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, переставляя координатные функции одной четности. Пусть a_i и α_i, где $i = 1, \ldots, n$, — координаты на $\mathcal{C}^{n|n}$, а $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — координаты на $\mathcal{C}^{0|n}$. Зададим действие $\rho\colon \mathcal{C}^{0|n} \times \mathcal{C}^{n|n} \to \mathcal{C}^{n|n}$, положив

$$\rho^*(\alpha_i) = \alpha_i, \quad \rho^*(a_i) = a_i + \varepsilon_i \alpha_i \quad \text{при } i = 1, \ldots, n. \tag{Д7.14}$$

Таким образом, *полупрямое произведение* $S_n \ltimes \mathcal{C}^{0|n}$ действует на $\mathcal{C}^{n|n}$. Положим

$$\widetilde{\mathcal{C}}^n := \{\text{наборы из } n \text{ попарно различных комплексных чисел}\}, \tag{Д7.15}$$

и пусть $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$ есть $n|n$-мерное супермногообразие, подстилающим многообразием которого является открытое множество $\widetilde{\mathcal{C}}^n \subset \mathbb{C}^n$.

Всюду ниже $S_n \ltimes \mathfrak{C}^{0|n}$-инвариантные функции на $\widetilde{\mathfrak{C}}^{n|n}$ называются просто *инвариантными функциями*, а S_n-инвариантные функции называются *симметрическими функциями*. В этом параграфе никаких других типов инвариантности не встретится.

Теорема. *Множество инвариантных функций на* $\widetilde{\mathfrak{C}}^{n|n}$ *совпадает с множеством функций вида*

$$f = f_0 + \sum_i \alpha_i f_1(a_i) + \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j f_2(a_i, a_j) + \ldots + \alpha_1 \ldots \alpha_n f_n(a_1, \ldots, a_n), \quad (Д7.16)$$

где f_k *— четная функция от* k*-четных переменных антисимметрическая относительно этих переменных при* $k > 1$.

Доказательство. Выразим произвольную инвариантную функцию в виде

$$f = g_0(a_1, \ldots, a_n) + \sum \alpha_i g_i(a_1, \ldots, a_n) + \ldots = \\ = \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j g_{ij}(a_1, \ldots, a_n) + \ldots + \alpha_1 \ldots \alpha_n g_{12\ldots n}(a_1, \ldots, a_n).$$

Инвариантность относительно супергруппы $\mathfrak{C}^{0|n}$ эквивалентна условию

$$\alpha_i \cdot \frac{\partial f}{\partial a_i} = 0 \quad \text{при всех } i,$$

поэтому функция $g_{i_1 \ldots i_s}$ зависит лишь от произведения $a_{i_1} \ldots a_{i_s}$.

Если элемент $\delta \in S_n$ таков, что $\delta(i_1, \ldots, i_s) = (1, \ldots, s)$, то сравнивая коэффициенты при $\alpha_1 \ldots \alpha_s$ у f и δf, мы видим, что $g_{i_1 \ldots i_s} = g_{1 \ldots s}$, и если перестановка δ сохраняет $s+1, \ldots, n$, то

$$\alpha_1 \ldots \alpha_s g_{1\ldots s}(a_1 \ldots a_s) = \alpha_{\delta_1} \ldots \alpha_{\delta_s} g_{1\ldots s}(a_{\delta_1} \ldots a_{\delta_s}) = \\ = (-1)^{p(\delta)} \alpha_1 \ldots \alpha_s g_{1\ldots s}(a_{\delta_1} \ldots a_{\delta_n}), \quad (Д7.17)$$

где $p(\delta)$ — *четность перестановки* δ, а $\delta_i = \delta(i)$. Условие (Д7.17) эквивалентно антисимметричности функции $f_s = g_{1\ldots s}$. Инвариантность функций вида (Д7.16) очевидна. ☐

Замечание. Ясно, что f — рациональная (соответственно полиномиальная) функция тогда и только тогда, когда все функции $f_1, \ldots, f_n$ тоже рациональные (соответственно полиномиальные). Положим

$$\tau_k = \sum \alpha_i a_i^{k-1}, \qquad t_k = \sum a_i^k. \quad (Д7.18)$$

Из теоремы следует, что функции τ_k инвариантны, а вот функции t_k не инвариантны.

Нетрудно видеть, что алгебра инвариантных функций не имеет конечнонабора образующих вне зависимости от типа функций (полиномиальных, рациональных, аналитических и т. д.), с которыми мы работаем: из формулы (Д7.16) следует, что любая инвариантная функция на константу отличается от нильпотентного элемента, принадлежащего идеалу, порожденному функциями $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, и поэтому конечное множество инвариантных функций может породить лишь конечномерное пространство (даже если мы разрешим рациональное выражение) в бесконечномерной алгебре (поскольку все функции τ_k линейно независимы) инвариантных функций.

4.2. Теорема (супераналог основной теоремы о симметрических функциях, см. [Вейль°]). *Если* $f(a, \alpha)$ *— симметрическая функция, то*

1) *существует единственная функция* $g(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, *определенная на открытом подсупермногообразии в* $\mathfrak{C}^{n|n}$, *такая что* $g(t_1, \ldots, t_n, \tau_1, \ldots, \tau_n) = f$;

2) *если* f *— полиномиальная функция, то* g *тоже полиномиальная функция, а если* f *— рациональная функция, то и* g *— рациональная функция.*

Нам потребуется дополнительное утверждение. Пусть

$$V_{a_1,\ldots,a_n} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & \ldots & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad (Д7.19)$$

— *матрица Вандермонда* (Vandermonde).

Лемма. *Существует полиномиальная матрица* M, *такая что*

$$V^{-1}_{a_1,\ldots,a_n} = \operatorname{diag}\left(\prod_{i \neq 1} \frac{1}{a_1 - a_i}, \ldots, \prod_{i \neq n} \frac{1}{a_n - a_i} \right) M.$$

Доказательство леммы. Пусть M — матрица, s-я строка которой состоит из коэффициентов многочлена $\prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (x - a_i)$, написанных в порядке возрастания степеней по x. Тогда

$$(MV_{a_1,\ldots,a_n})_{kl} = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n,\ i \neq k} (a_l - a_i). \qquad ☐$$

Доказательство теоремы. Выразим функции $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ в терминах $\tau_1, \ldots, \tau_n$ и $a_1, \ldots, a_n$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = V^{-1}_{a_1,\ldots,a_n} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_n \end{pmatrix}$$

Из уравнения (Д7.18) следует, что набор $\tau_1, \ldots, \tau_n, a_1, \ldots, a_n$ может служить глобальной системой координат на $\widetilde{\mathbb{C}}^{n|n}$. Пусть $f(a, \alpha)$ — симметрическая функция. Выразим ее в терминах координат τ, a:

$$f = c_0(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{1\leqslant s\leqslant n} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_s\leqslant n} \tau_{i_1} \ldots \tau_{i_s} c_{i_1\ldots i_s}(a_1, \ldots, a_n). \quad (Д7.20)$$

Так как координаты S_n-инвариантны, то все коэффициенты $c_{i_1\ldots i_s}$ симметричны относительно $a_1, \ldots, a_n$, а следовательно, их можно выразить в терминах функций $t_1, \ldots, t_n$, поскольку якобиан отображения

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \left(\sum a_i, \sum a_i^2, \ldots, \sum a_i^n\right) \quad (Д7.21)$$

есть обратимая на $\widetilde{\mathbb{C}}^n$ матрица $V_{a_1,\ldots,a_n}$, а значит, отображение (Д7.21) задает диффеоморфизм многообразия $\widetilde{\mathbb{C}}^n/S_n$ с открытым подмногообразием $U \subset \mathbb{C}^n$ (дополнение к нулям некоего многочлена).

Проверим, что симметрическую функцию $f(a, \alpha)$ можно единственным образом представить в виде $g(t, \tau)$. Функции $a_1, \ldots, a_n, \tau_1, \ldots, \tau_n$ составляют глобальную систему координат на $\widetilde{\mathbb{C}}^{n|n}$; поэтому если

$$d_0(t_1, \ldots, t_n) + \sum_{1\leqslant s\leqslant n} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_s\leqslant n} \tau_{i_1} \ldots \tau_{i_s} d_{i_1\ldots i_s}(t_1, \ldots, t_n) = 0,$$

то d_0 и все $d_{i_1\ldots i_s}$ обращаются в нуль на U.

Если $f(a, \alpha)$ — рациональная функция, то коэффициенты $c_{i_1\ldots i_s}$ в (Д7.20) тоже рациональные, поскольку они являются линейными комбинациями рациональных функций $f_s(a_{i_1}, \ldots, a_{i_s})$ с рациональными коэффициентами — многочленами от матричных элементов матрицы $V^{-1}_{a_1,\ldots,a_n}$. Из теоремы о симметрических многочленах теперь немедленно следует, что функции $d_{i_1\ldots i_s}$, определенные из условий

$$c_{i_1\ldots i_s}(a_1, \ldots, a_n) = d_{i_1\ldots i_s}(t_1, \ldots, t_n),$$

тоже рациональны.

Пусть теперь

$$f(a, \alpha) = f_0 + \sum_{1\leqslant s\leqslant n} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_s\leqslant n} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_s} f_{i_1\ldots i_s},$$

где f_0, $f_{i_1\ldots i_s}$ — многочлены от $a_1, \ldots, a_n$. Тогда

$$f_{i_1\ldots i_s}(a_1, \ldots, a_n) = q_{i_1\ldots i_s}(a_1, \ldots, a_n) \prod_{1\leqslant k<l\leqslant s} (a_{i_k} - a_{i_l}) \quad \text{при } s > 1,$$

где $q_{i_1\ldots i_s}$ тоже многочлены, поскольку $f_{i_1\ldots i_s}$ — антисимметрические функции относительно перестановок переменных $a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}$.

По лемме

$$\alpha_j = \left(\prod_{1\leqslant s\leqslant n} \frac{1}{a_j - a_s}\right) \sum_k M_{jk}\tau_k;$$

Следовательно,

$$\alpha_{i_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i_s} \prod_{1\leqslant k<l\leqslant s} (a_{i_k} - a_{i_l}) =$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_s} \left(\prod_{i\leqslant k<l\leqslant s} (a_{i_k} - a_{i_l})\right)\left(\prod_{1\leqslant r\leqslant n, r\neq i_l} \frac{1}{a_{i_l} - a_r}\right)\left(\prod_{1\leqslant r\leqslant n, r\neq i_s} \frac{1}{a_{i_s} - a_r}\right) \times$$

$$\times M_{i_1 j_1} \ldots M_{i_s j_s} \tau_{j_1} \ldots \tau_{j_s} = P_{i_1\ldots i_s} \prod_{i\leqslant k<l\leqslant n} \frac{1}{a_k - a_l},$$

где $P_{i_1\ldots i_s}$ — многочлен от $a_1, \ldots, a_n, \tau_1, \ldots, \tau_n$.

Действительно, множитель $a_{i_k} - a_{i_l}$ появляется в этом выражении трижды: в $\prod(a_{i_k} - a_{i_l})$, в $\prod(a_{i_s} - a_r)^{-1}$ и в $\prod(a_{i_l} - a_r)^{-1}$, а следовательно, его полная степень равна -1. Отсюда следует, что

$$f(a, \alpha) = P(a, \tau) \prod_{k<l} \frac{1}{a_k - a_l},$$

где P — многочлен. Так как f — симметрическая функция, то функция

$$P(a, \tau) = f(a, \alpha) \prod_{k<l} (a_k - a_l)$$

антисимметрическая и поэтому делится на $a_k - a_l$, т. е.

$$P = Q(a, \tau) \prod_{k<l} (a_k - a_l),$$

где $Q(a, \tau)$ — многочлен от $a_1, \ldots, a_n$ и $\tau_1, \ldots, \tau_n$ симметрический относительно перестановок координат $a_1, \ldots, a_n$. Таким образом, $f(a, \alpha) = Q(a, \tau)$, и осталось выразить функцию $Q(a, \tau)$ в виде многочлена от $t_1, \ldots, t_n$ и $\tau_1, \ldots, \tau_n$, что возможно, благодаря теореме о симметрических многочленах. ☐

Замечание. Доказанная теорема будет выглядеть более естественно, если мы разрешим рассматривать функции от аргументов, неоднородных[1] относительно четности. Тогда теорема означает в точности следующее: *в алгебре всех (полиномиальных, рациональных и т. д.) функций от неоднородных аргументов* $x_1 = a_1 + \alpha_1, \ldots, x_n = a_n + \alpha_n$,

---

[1] Подробнее о неоднородных элементах см. в гл. 2 в [CoC2*]. — *Прим. Д. Л.*

подалгебра симметрических функций порождена элементами

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \sum(a_i + \alpha_i),\\
y_2 &= \sum(a_i^2 + 2a_i\alpha_i),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
y_n &= \sum(a_i^n + n\alpha_i a_i^{n-1}).
\end{aligned}
$$

4.3. Сформулируем условия, которые выделяют инвариантные функции из множества всех функций от $t_1, \ldots, t_n$ и $\tau_1, \ldots, \tau_n$, т. е. из всех симметрических функций на $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$.

Обозначим символом $\breve{\mathcal{C}}^{n|n}$ образ супермногообразия $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$ относительно отображения в $\mathcal{C}^{n|n}$, заданного функциями $t_1, \ldots, t_n$ и $\tau_1, \ldots, \tau_n$. Любая функция h на $\breve{\mathcal{C}}^{n|n}$ будет называться *сбалансированной функцией*, если $h(t_1(a, \alpha), \ldots, \tau_n(a, \alpha))$ — инвариантная функция.

Лемма. *Функция $h(u, \xi)$ сбалансирована, если и только если*

$$\sum_{s=1}^{n} s\cdot\tau_{i+s-1}\frac{\partial h}{\partial u_s}(t_1, \ldots, t_n, \tau_1, \ldots, \tau_n) = 0 \quad \textit{при любых}\ \ i = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Выразим условие $\mathcal{C}^{0|n}$-инвариантности, а именно,

$$\alpha_i\frac{\partial f}{\partial a_i} = 0 \quad \text{при всех}\ \ i = 1, \ldots, n,$$

в терминах обратимой матрицы $V_{a_1,\ldots,a_n}$. Это приведет нас к эквивалентным, но симметричным условиям

$$\sum_j \alpha_j a_j^{i-1}\frac{\partial f}{\partial a_j} = 0 \quad \text{при всех}\ \ i = 1, \ldots, n;$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_j \alpha_j a_j^{i-1}\frac{\partial}{\partial a_i}h(t_1, \ldots, t_n, \tau_1, \ldots, \tau_n) =\\
&= \sum_s\sum_j s\alpha_j a_j^{i+s-2}\frac{\partial h}{\partial u_s}(t_1, \ldots, t_n, \tau_1, \ldots, \tau_n) = \sum_s s\tau_{i+s-1}\frac{\partial h}{\partial u_s}(t, \tau). \ \square
\end{aligned}
$$

Лемма дает нам возможность описать полиномиальные сбалансированные функции, т. е. инвариантные многочлены на $\mathcal{C}^{n|n}$. Инвариантные многочлены вообще-то уже описаны А. Н. Сергеевым, см. [Srg4°] и гл. Д6. Здесь мы дадим новое доказательство, основанное на двух фактах:

1) переход к симметрическим многочленам от бесконечного числа переменных делает переменные независимыми (см. [Мак°]);

2) гомологии векторного поля $\sum\xi_i\dfrac{\partial}{\partial u_i}$ на $\mathcal{C}^{n|n}$ в пространстве функций состоят лишь из констант.

Теорема (описание инвариантных многочленов). *Алгебра инвариантных многочленов на $\mathcal{C}^{n|n}$ порождена функциями τ_i, где $i \in \mathbb{N}$: любой инвариантный многочлен можно единственным образом представить в виде*

$$\sum_{0\leqslant s\leqslant n}\ \sum_{i_1<\ldots<i_s} c_{i_1,\ldots,i_s}\tau_{i_1}\ldots\tau_{i_s}, \tag{Д7.22}$$

где лишь конечное число коэффициентов $c_{i_1,\ldots,i_s}$ отлично от нуля. Все соотношения между функциями τ_i порождены тождествами вида

$$\tau_{i_1}\ldots\tau_{i_{n+1}} = 0. \tag{Д7.23}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}_n$ — градуированная супералгебра симметрических многочленов от $a_1, \ldots, a_n$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, где $\deg\alpha_i = \deg a_i = 1$ при всех i, и пусть $\pi_n\colon \mathcal{P}_{n+1} \to \mathcal{P}_n$ — проекция, переводящая a_{n+1} и α_{n+1} в 0, а оставшиеся образующие — в их тезок тождественно; пусть $\mathcal{P}_\infty$ — проективный предел алгебр $\mathcal{P}_n$ в категории $\mathbb{Z}$-градуированных колец.

Из теоремы 4.2 следует, что $\mathbb{Z}$-градуированная суперкоммутативная супералгебра $\mathcal{P}_\infty$ изоморфна градуированной супералгебре $\mathtt{Q} := \mathbb{C}[f_i, \varphi_i]_{i\in\mathbb{N}}$, где $p(f_i) = \bar{0}$, $p(\varphi_i) = \bar{1}$, и $\deg f_i = \deg\varphi_k = i$ при всех i.

Действительно, функции $t_1, \ldots, t_n, \tau_1, \ldots, \tau_n$ алгебраически независимы в $\mathcal{P}_n$, и следовательно, функции t_i, τ_i для всех $i \in \mathbb{N}$ алгебраически независимы в $\mathcal{P}_\infty$. В алгебре $\mathtt{Q}$ действие производных

$$v_k = \sum_{s=1}^{\infty} s\varphi_{k+s}\frac{\partial}{\partial f_s}$$

корректно определено при всех $k \in \mathbb{N}$, поскольку каждый элемент алгебры $\mathtt{Q}$ зависит лишь от конечного числа образующих f_s. Рассмотрим диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_{n+1} \arrow[r, "\sum\limits_i \alpha_i a_i^{k-1}\frac{\partial}{\partial a_i}"] \arrow[d] & \mathcal{P}_{n+1} \arrow[d] \\
\mathcal{P}_n \arrow[r, "\sum\limits_i \alpha_i a_i^{k-1}\frac{\partial}{\partial a_i}"] & \mathcal{P}_n
\end{tikzcd}
\quad \text{и} \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_{n+1} \arrow[r, "\sum\limits_i \alpha_i a_i^{k-1}\frac{\partial}{\partial a_i}"] \arrow[d] & \mathcal{P}_{n+1} \arrow[d] \\
\mathcal{P}_n \arrow[r, "v_k"] & \mathcal{P}_n
\end{tikzcd}
$$

Коммутативность первой диаграммы очевидна, а коммутативность второй диаграммы доказана вместе с леммой 4.3; поэтому предел подсупералгебр инвариантных многочленов в супералгебрах $\mathcal{P}_n$ есть подсупералгебра в $\mathcal{P}_\infty$, которая при изоморфизме $\mathcal{P}_\infty \cong \mathtt{Q}$ превращается в подсупералгебру выделенную уравнениями

$$v_k f = 0 \quad \text{при всех}\ \ k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $R \in \mathcal{P}_n$ — инвариантный многочлен степени k. По теореме 4.1 он определен множеством $r_0, \ldots, r_n$, где r_i — многочлен от i переменных, и поэтому при любых $m > n$ существуют инвариантные многочлены $R_m \in \mathcal{P}_n$, определенные теми же функциями $r_0, \ldots, r_k$. Образы разных многочленов R_m в $\mathtt{Q}$ стабилизируются при $m > k$, превращаясь в некий многочлен S. Условие

$$0 = v_{k+1} S = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} j \varphi_{j+k+1} \frac{\partial S}{\partial f_j}$$

означает, что $\dfrac{\partial S}{\partial f_k} = 0$, поскольку S не зависит от φ_j и f_j при $j > k$, и образующие алгебры $\mathtt{Q}$ алгебраически независимы. Поэтому S есть многочлен от $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, т. е.

$$S = c_0 + \sum_{\substack{j_1 < j_2 < \ldots < j_i \\ j_1 + \ldots + j_i \leqslant k}} c_{j_1 \ldots j_i} \varphi_{j_1} \ldots \varphi_{j_i},$$

$$R = S(\tau_1, \ldots, \tau_k) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j_1 < j_2 < \ldots < j_i \\ j_1 + \ldots + j_i \leqslant k}} c_{j_1 \ldots j_i} \tau_{j_1} \ldots \tau_{j_i},$$

где мы приняли во внимание, что в супералгебре $\mathcal{P}_n$ имеют место тождества $\tau_{i_1} \ldots \tau_{i_{n+1}} = 0$ при любых $i_1, \ldots, i_{n+1}$.

Осталось доказать, что в супералгебре $\mathcal{P}_n$ все многочлены $\tau_{i_1} \ldots \tau_{i_s}$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$ и $s \leqslant n$, линейно независимы. В супералгебре $\mathcal{P}_n$ зададим градуировку, положив $\deg \alpha_i = \deg a_i = i$. Тогда младший член в $\tau_{i_1} \ldots \tau_{i_s}$ равен $\alpha_1 \ldots \alpha_s a_1^{i_s} a_2^{i_{s-1}} \ldots a_s^{i_1}$ и равенство $\tau_{i_1} \ldots \tau_{i_{n+1}} = 0$ очевидно. □

4.4. По аналогии со случаем $n = 1$, рассмотренным в пункте 3.3, мы видим, что действие супергруппы $\mathcal{C}^{0|n}$ на множестве функций t_i приводит к новому набору четных функций равно подходящему для вычисления инвариантных функций. Чтобы изучить эту неединственность, полезно заменить набор $t_1, \ldots, t_n$ другим набором образующих в алгебре симметрических функций от $a_1, \ldots, a_n$. Положим

$$s_j = (-1)^{j-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_j \leqslant n} a_{i_1} \ldots a_{i_j}. \tag{Д7.24}$$

Тогда наборы $\{t_i\}$ и $\{s_j\}$ полиномиально выражаются друг через друга, а функции $(s_1, \ldots, s_n, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ составляют координатную систему на $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$.

Лемма. *Справедливо равенство*

$$\tau_{n+k} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \tau_{n+k-j} s_j$$

Доказательство. Из равенства

$$\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (x - a_i) = x^n - \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} s_j x^{n-j}$$

следует, что $a_i^n = \sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} s_j a_i^{n-j}$, т. е. коэффициенты при α_i в левой и правой частях формулы (Д7.17) совпадают.

Ниже символом $\mathcal{U}$ мы обозначим произвольное супермногообразие параметров, а пучок идеалов в пучке функций $\mathcal{F}(\mathcal{U})$, порожденных нечетными функциями, обозначим символом $I_{\mathcal{U}}$ или просто I. Два семейства $\mathcal{U}$-точек $\varphi_j \colon \mathcal{U} \to \widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$, где $j = 1, 2$, супермногообразия $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$ будут назовем *эквивалентными*, если при всех i и j выполняются условия

$$\psi_1^*(\alpha_i) = \psi_2^*(\alpha_i), \qquad \psi^*(\alpha_j)(\psi_1^*(a_i) - \psi_2^*(a_i)) = 0.$$

Из теоремы 4.1 следует, что значения любой инвариантной функции f на эквивалентных семействах ψ_1 и ψ_2 совпадают, т. е. $\psi_1^*(f) = \psi_2^*(f)$. □

Теорема. *Пусть* $\varphi \colon \mathcal{U} \to \widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$ *— семейство $\mathcal{U}$-точек супермногообразия* $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$, *а* $g_1, \ldots, g_n$ *— функции на* $\mathcal{U}$, *такие что*

$$\varphi^*(\tau_{n+k}) = \sum_{i=1}^{n} g_i \varphi^*(\tau_{n+k-i}) \quad \textit{при} \;\; k = 1, \ldots, n$$

и

$$\textit{либо } \varphi^*(\alpha_i) \neq 0 \qquad \textit{при всех } \; i \leqslant n, \tag{Д7.25}$$

$$\textit{либо } g_j \equiv \varphi^*(s_j) \bmod I_{\mathcal{U}} \quad \textit{при всех } \; j \leqslant n. \tag{Д7.26}$$

Тогда существует единственное эквивалентное морфизму φ *семейство морфизмов* $\psi \colon \mathcal{U} \to \widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$, *такое что* $g_j = \psi^*(s_j)$ *при всех* j.

Доказательство. Прежде всего, рассмотрим однородную систему координат

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_j \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i^{n+k-j-1} \right) = 0 \quad \text{при} \;\; k = 1, \ldots, n, \tag{Д7.27}$$

где β_i — нечетные функции на $\mathcal{U}$, а Δ_j и b_i — четные функции. Тогда элемент $\prod\limits_{i \neq j} (b_i - b_j)$ обратим в алгебре функций.

Пусть $M_{b_1, \ldots, b_n}$ есть $(n \times n)$-матрица, i-й столбец которой совпадает с коэффициентами многочлена $\prod\limits_{i \neq j} (x - b_j)$, записанными в убывающем порядке относительно степеней x. Тогда, как и в лемме 4.2, имеет место равенство

$$V_{b_1,\ldots,b_n}M_{b_1,\ldots,b_n} = \operatorname{diag}_n\left(\prod_{i\neq 1}(b_1-b_i),\ \ldots,\ \prod_{i\neq n}(b_n-b_i)\right). \qquad (Д7.28)$$

В частности, оба сомножителя в левой части формулы (Д7.28) обратимы. Так как

$$0=\sum_j \Delta_j\left(\sum_i \beta_i b_i^{n+s-j-1}\right)=\sum_i\left[\beta_i\left(\sum_j \Delta_j b_i^{n-j-1}\right)\right]b_i^s, \qquad (Д7.29)$$

то система (Д7.27) эквивалентна системе

$$\beta_i\left(\sum_j \Delta_j b_i^{n-j-1}\right)=0 \quad \text{при } i=1,\ \ldots,\ n. \qquad (Д7.30)$$

Положим

$$\Delta_j^0 = g_j-\varphi^*(s_j) \quad \text{при } j=1,\ \ldots,\ n.$$

Тогда функции $\Delta_1^0,\ \ldots,\ \Delta_n^0$ удовлетворяют системе (Д7.27), а следовательно, они удовлетворяют и системе (Д7.29), где $\beta_i=\varphi^*(\alpha_i)$, $b_i=\varphi^*(a_i)$. Если $\sum_j \Delta_j b_i^{n-j-1}\not\equiv 0 \bmod I_{\mathfrak{U}}$ при некотором i, то из уравнений (Д7.29) следует, что $\beta_i=0$, и значит, в условиях теоремы всегда имеет место сравнение $g_j\equiv\varphi^*(s_j) \bmod I_{\mathfrak{U}}$.

Покажем, что при любом $k\geqslant 0$ существует семейство $\psi^{(k)}$, эквивалентное морфизму φ, такое что $\psi^{(k)*}(s_j)\equiv g_j \bmod I_{\mathfrak{U}}^{k+1}$.

При $k=0$ достаточно взять $\psi^{(0)}=\varphi$. Пусть

$$\Delta_j^{(k)}=\psi^{(k)}(s_j)-g_j$$

и

$$\begin{pmatrix}\square_1^{(k)}\\ \vdots\\ \square_n^{(k)}\end{pmatrix} := M^{-1}(\psi^{(k)*}(a_1),\ \ldots,\ \psi^{(k)*}(a_n))\begin{pmatrix}\Delta_1^{(k)}\\ \vdots\\ \Delta_n^{(k)}\end{pmatrix}.$$

Тогда $\square_i^{(k)}\in I_{\mathfrak{U}}^{k+1}$ и $\square_i^{(k)}\square_l^{(k)}\equiv 0 \bmod I_{\mathfrak{U}}^{k+2}$; следовательно, положив

$$\psi^{(k+1)*}(a_i):=\psi^{(k)*}(a_i)+\square_i,$$

мы получаем

$$\psi^{(k+1)*}(s_j)\equiv\psi^{(k)*}(s_j)-\sum_i\psi^{(k)*}(s_{j-1}(a_1,\ \ldots,\ \widehat{a}_i,\ \ldots,\ a_n))\square^{(k)}\equiv g_j \bmod I_{\mathfrak{U}}^{k+2}$$

(здесь, как обычно, крышечка над символом означает, что его следует проигнорировать). Пусть $\beta_i=\varphi^*(\alpha_i)$ и $b_i=\varphi^{(k)*}(a_i)$. Тогда из (Д7.28) и (Д7.30) следует, что

$$\begin{pmatrix}b_1^{n-1} & \ldots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_n^{n-1} & \ldots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta_1^{(k)}\\ \vdots\\ \Delta_n^{(k)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\prod\limits_{i\neq 1}(b_1-b_i) & \square_1^{(k)}\\ & \vdots \\ \prod\limits_{i\neq n}(b_n-b_i) & \square_n^{(k)}\end{pmatrix}.$$

Так как морфизм $\psi^{(k)}$ эквивалентен морфизму φ, то функции $\Delta_j^{(k)}$ удовлетворяют условиям (Д7.27) и (Д7.29), где $\beta_i=\varphi^*(\alpha_i)$ и $b_i=\varphi^{(k)*}(a_i)$, откуда следует, что $\beta_i\square_i^{(k)}=0$, т. е. рассмотренный морфизм $\psi^{(k+1)}$ тоже эквивалентен φ. Чтобы завершить доказательство теоремы, осталось воспользоваться тем обстоятельством, что $I_{\mathfrak{U}}^k=0$ при достаточно большом k. □

Следствие. *Если семейства морфизмов* $\varphi_i\colon\mathfrak{U}\to\widetilde{\mathfrak{C}}^{n|n}$, *где* $i=1,\ 2$, *таковы, что* $\varphi_1^*(\tau_i)=\varphi_2^*(\tau_i)$ *при* $i=1,\ \ldots,\ 2n$, *и выполняется по крайней мере одно из условий*

(i) $\varphi_1^*(\alpha_i)\neq 0$ *при* $i=1,\ \ldots,\ n$,

(ii) $\varphi_2^*(\alpha_i)\neq 0$ *при* $i=1,\ \ldots,\ n$,

(iii) $\varphi_1^*(s_i)\equiv\varphi_2^*(s_i) \bmod I_{\mathfrak{U}}$ *при* $i=1,\ \ldots,\ n$,

то значения инвариантных функций на φ_1 *и* φ_2 *совпадают.*

Доказательство. Предположим, что выполняется либо условие (i), либо условие (iii). Тогда по теореме 4.4, примененной к $\varphi=\varphi_1$ и $g_i=\varphi_2^*(s_i)$ существует семейство точек $\psi\colon\mathfrak{U}\to\widetilde{\mathfrak{C}}^{n|n}$, эквивалентное морфизму φ_1 и такое, что $\psi^*(s_i)=\varphi_2^*(s_i)$. Если $H=H(s_1,\ \ldots,\ s_n,\ \tau_1,\ \ldots,\ \tau_n)$ — инвариантная функция, то

$$\begin{aligned}\varphi_1^*(H)=\psi^*(H)=H(\psi^*(s_1),\ \ldots,\ \psi^*(s_n),\ \varphi_1^*(\tau_1),\ \ldots,\ \varphi_1^*(\tau_n))&=\\ =H(\varphi_2^*(s_1),\ \ldots,\ \varphi_2^*(s_n),\ \varphi_2^*(\tau_1),\ \ldots,\ \varphi_2^*(\tau_n))&=\varphi_2^*(H).\end{aligned}$$

Если выполняется условие (ii), то переставим φ_1 и φ_2. □

Замечание. Условие $g_j\equiv\varphi^*(s_j) \bmod I_{\mathfrak{U}}$ в теореме 4.4 существенно: если какие-то из функций $\varphi^*(\alpha_i)$ обращаются в 0, то множество $b_1,\ \ldots,\ b_n$, для которого $g_j=s_j(b_1,\ \ldots,\ b_n) \bmod I_{\mathfrak{U}}$ может и не удовлетворить условию

$$\prod_{i<j}(b_i-b_j)\not\equiv 0 \bmod I_{\mathfrak{U}},$$

а стало быть, дальнейшие шаги в построении морфизма $\psi^{(s)}$ станет невозможно осуществить.

Например, при $n=2$ и $\mathcal{U}=\mathcal{C}^{0|2}$ с координатами ξ_1 и ξ_2, пусть

$$\varphi^*(\alpha_i)=0, \quad \varphi^*(a_1)=1, \quad \varphi^*(a_2)=-1.$$

Тогда любая пара четных функций g_1, g_2 удовлетворяет условию (Д7.26), но при

$$g_1=-2, \quad g_2=1+\xi_1\xi_2,$$

не существует функций b_1 и b_2 на $\mathcal{U}$, таких что $b_1+b_2=2$ и $b_1b_2=1+\xi_1\xi_2$.

Однако чтобы вычислить значение инвариантных функций в рассмотренном примере, вместо s_1 и s_2 можно использовать функции g_1 и g_2. Эти последние все равно обратятся в нуль.

§ 5. Описание инвариантных функций на $\mathcal{Q}(n)$ и $\mathcal{O}\mathrm{dd}(n)$

5.1. Инвариантные функции на $\mathcal{Q}(n)$ и $\mathcal{O}\mathrm{dd}(n)$ допускают единообразное описание и поэтому введем следующее обозначение: тройка

$$(\mathcal{M}(n),\ \widetilde{\mathcal{M}}(n),\ \mathcal{G}) \tag{Д7.31}$$

означает либо $(\mathcal{Q}(n),\ \widetilde{\mathcal{Q}}(n),\ \mathcal{G}\mathrm{Q}(n))$ либо $(\mathcal{O}\mathrm{dd}(n),\ \widetilde{\mathcal{O}\mathrm{dd}}(n),\ \mathcal{G}\mathcal{L}(n|n))$. На $\mathcal{M}(n)$ существуют множества $\mathcal{G}$-инвариантных многочленов τ_k, где $k\in\mathbb{N}$, определенных для любого $\mathcal{U}$-семейства матриц A формулами

$$\tau_k(A)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{qtr}A^k}{k} & \text{при } A\in\mathcal{Q}(n),\\ \dfrac{\operatorname{str}A^{2k-1}}{2k-1} & \text{при } A\in\mathcal{O}\mathrm{dd}(n). \end{cases} \tag{Д7.32}$$

Зафиксируем вложение $j\colon \widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}\to\widetilde{\mathcal{M}}(n)$, отождествив $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$ с подсупермногообразием (неоднородных) диагональных матриц из $\widetilde{\mathcal{Q}}(n)$ или блочных матриц вида

$$\begin{pmatrix}\alpha & A\\ 1_n & 0\end{pmatrix}\in\widetilde{\mathcal{O}\mathrm{dd}}(n), \quad \text{где } A=\operatorname{diag}(a_1,\ldots,a_n), \quad \alpha=\operatorname{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n). \tag{Д7.33}$$

Из определения следует, что

$$j^*(\tau_i)=\tau_i,$$

где в левой части стоит $\tau_i\in F(\widetilde{\mathcal{M}}(n))$, а в правой части стоит $\tau_i\in F(\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n})$.

Вложение j согласовано с $S_n\ltimes\mathcal{C}^{0|n}$-действием на $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$ и $\mathcal{G}$-действием на $\mathcal{M}(n)$ в следующем смысле.

Лемма. *Два семейства морфизмов* $\varphi_i\colon\mathcal{U}\to\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$, *где* $i=1,2$, *переходят друг в друга под действием супергруппы* $S_n\ltimes\mathcal{C}^{0|n}$ *тогда и только тогда, когда семейства* $j\circ\varphi_1$ *и* $j\circ\varphi_2$ *переходят друг в друга под действием супергруппы* $\mathcal{G}$.

Доказательство. Из аргументов § 2 следует, что набор собственных значений семейства матриц из $\widetilde{\mathcal{M}}(n)$ определен однозначно с точностью до $S_n\ltimes\mathcal{C}^{0|n}$-действия, и остается лишь проверить, что из эквивалентности морфизмов φ_1 и φ_2 следует эквивалентность морфизмов $j\circ\varphi_1$ и $j\circ\varphi_2$.

Перестановки реализованы обычным образом и достаточно рассмотреть действия супергруппы $\mathcal{C}^{0|n}$ на блоках

$$(1+\varepsilon)(a+\alpha)(1+\varepsilon)^{-1}=a+\alpha+2\varepsilon\alpha \qquad \text{для } \mathcal{Q}(n),$$

$$\begin{pmatrix}a+\varepsilon\alpha & \varepsilon a\\ \varepsilon & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a+\varepsilon\alpha & \varepsilon a\\ \varepsilon & a\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha & a+2\varepsilon\alpha\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{для } \mathcal{O}\mathrm{dd}(n). \qquad \square$$

Замечание. Было бы более естественно вложить $S_n\ltimes\mathcal{C}^{0|n}$ в $\mathcal{G}$ с тем чтобы удостовериться, что $S_n\ltimes\mathcal{C}^{0|n}$-действие коммутирует с вложением j. Ясно, однако, что такое вложение существует для $\mathcal{G}=\mathcal{G}\mathrm{Q}(n)$, но не существует для $\mathcal{G}=\mathcal{G}\mathcal{L}(n|n)$.

Теорема. *Для любой точки* $m\in\widetilde{\mathcal{M}}(n)_{rd}$ *существуют морфизмы супермногообразий*

$$g_m\colon\mathcal{U}_m\longrightarrow\mathcal{G} \quad \text{и} \quad \pi_m\colon\mathcal{U}_m\longrightarrow\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n},$$

определенные в окрестности $\mathcal{U}_m$ *точки* m *и такие что*

$$j\circ\pi_m=\operatorname{Ad}_{g_m}\colon\mathcal{U}_m\longrightarrow\widetilde{\mathcal{M}}(n).$$

Множество функций $\pi_m^*(\alpha_1),\ldots,\pi_m^*(\alpha_n)$ *можно дополнить до системы координат на* $\mathcal{U}_m$, *и идеал, порожденный элементами* $\pi^*(\alpha_1),\ldots,\pi^*(\alpha_n)$, *совпадает с идеалом, порожденным ограничениями* $\tau_1|_{\mathcal{U}_m},\ldots,\tau_n|_{\mathcal{U}_m}$.

Доказательство. Для $\mathcal{M}=\mathcal{O}\mathrm{dd}(n)$ доказательства сводятся к тому, что зафиксировав базис $e_1,\ldots,e_n,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ в свободном модуле L ранга $n|n$ над $F(\mathcal{U})$, мы можем рассмотреть окрестность $\mathcal{U}_m$ точки m как семейство линейных операторов на L, которое мы обозначим буквой A.

Мы покажем ниже, что в окрестности точки m определены проекции

$$P_i\colon L\longrightarrow L, \quad \text{где } i=1,\ldots,n,$$

на A-инвариантные подмодули. Выберем в L четный вектор y и нечетный вектор η, такие что набор $P_1y,\ldots,P_ny,P_1\eta,\ldots,P_n\eta$ является базисом в L. Если $m\in\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}_{rd}$, то мы можем положить

$$y=e_1+\ldots+e_n \quad \text{и} \quad \eta=\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n,$$

а в общем случае положим

$$y=g^{-1}(e_1+\ldots+e_n), \quad \eta=g^{-1}(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n),$$

где $g\in\mathcal{G}_{rd}$ — такой элемент, что $gmg^{-1}\in\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}_{rd}$.

Пары $(P_i y,\ P_i\eta)$, где $i = 1, \ldots, n$, составляют базис A-инвариантного подмодуля, и поэтому при любом i имеется морфизм $\mathcal{U}_m \to \mathcal{C}^{1|1}$, который приводит к морфизму $\pi_m\colon \mathcal{U}_m \to \widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$, а следовательно, и к нужному нам морфизму $g_m\colon \mathcal{U}_m \to \mathcal{G}$ — матрица перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ к базису $P_1 y, \ldots, P_n y,\ P_1\eta, \ldots, P_n\eta$.

При $\mathcal{M} = \mathcal{Q}(n)$ доказательство отличается только тем, что L — свободный правый модуль ранга n, и мы выбираем один вектор y, такой, что $P_1 y, \ldots, P_n y$ является базисом в L.

Осталось лишь доказать существование проекций P_i. Пусть μ — собственное значение комплексной матрицы $m \in \widetilde{\mathcal{M}}(n)_{rd}$, а $V \subset \mathbb{C}$ — открытый диск, чья внутренность содержит μ и не содержит отличных от μ собственных значений элемента m. Тогда любая матрица m' из окрестности $\mathcal{U}_{rd} \ni m$ имеет лишь одно собственное значение μ' в V (при необходимости мы можем и уменьшить область $\mathcal{U}$).

Аналогично тому, как это сделано в [РиС°], положим

$$P(A) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial V} (\lambda E_n - A)^{-1} d\lambda & \text{для } \mathcal{M}(n) = \mathcal{Q}(n), \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial V} (\lambda E_{n|n} - A^2)^{-1} d\lambda & \text{для } \mathcal{M}(n) = \mathcal{O}\mathrm{dd}(n), \end{cases} \qquad (\text{Д}7.34)$$

где $E_n \in \mathrm{GL}_C(n)$ и $E_{n|n} \in \mathrm{GL}_C(n|n)$ — единичные операторы. Ясно, что P является четным оператором коммутирующим с A. Установим, что

$$P \text{ — проекция на} \begin{cases} \text{подмодуль ранга } 1, & \text{если } \mathcal{M}(n) = \mathcal{Q}(n), \\ \text{подмодуль ранга } 1|1, & \text{если } \mathcal{M}(n) = \mathcal{O}\mathrm{dd}(n). \end{cases} \qquad (\text{Д}7.35)$$

На $\mathcal{M}(n)$ существует стандартная (сперва все четные, потом все нечетные) глобальная система координат, которая определяет разложение $\mathcal{U} \simeq \mathcal{U}_{rd} \times \mathcal{C}^{0|k}$, где k — число нечетных координат. Поэтому можно предположить, что матрицы операторов P и A являются $\mathcal{U}_{rd} \times \mathcal{C}^{0|k}$-семействами матриц.

Для любой точки $m' \in \mathcal{U}_{rd}$ соответствующие $\mathcal{C}^{0|k}$-семейства матриц $A(m')$ и $P(A(m'))$ являются матрицами с элементами из конечномерной алгебры Грассмана $\Lambda = F(\mathcal{C}^{0|k})$, и поэтому существует четная обратимая матрица g с элементами из Λ, такая что матрица $g \cdot A(m') \cdot g^{-1}$ имеет стандартный формат; следовательно,

$$g \cdot P(A(m')) \cdot g^{-1} = P(g \cdot A \cdot g^{-1}(m'))$$

и совпадает с проекцией на подмодуль, отвечающий собственному значению μ'.

Действительно, матрица $P(A)$ «составлена» из проекций $P(m')$, отвечающих собственному значению μ' и существующих при каждой $m' \in \mathcal{U}_{rd}$.

Следовательно, явная формула для матрицы $P(A)$ устанавливает голоморфную зависимость от $P(m')$.

Поскольку $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — инвариантные функции, мы видим, что

$$\tau_k|_{U_m} = \pi_m^*(\tau_k) = \sum_i \pi_m^*(a_i^{k-1}) \cdot \pi_m^*(\alpha_i),$$

и следовательно, переход от $(\tau_1|_{U_m}, \ldots, \tau_n|_{U_m})$ к $(\pi_m^*(\alpha_1), \ldots, \pi_m^*(\alpha_n))$ осуществляется с помощью обратимого линейного преобразования. С помощью $\mathcal{G}$-действия любую точку многообразия $\mathcal{M}(n)_{rd}$ можно перевести в точку многообразия $j(\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n})_{rd}$ и ясно, что в окрестности многообразия $j(\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}_{rd})$ функции $\tau_1, \ldots, \tau_n$ можно дополнить до локальной системы координат. □

В дальнейшем пары морфизмов $\pi\colon \mathcal{U} \to \widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$ и $g\colon \mathcal{U} \to \mathcal{G}$, обладающие свойствами, установленными в теореме, будут называться *проекциями*.

5.2. Мы собираемся установить изоморфизм между $\mathcal{G}$-инвариантными функциями на $\widetilde{\mathcal{M}}(n)$ и $S_n \ltimes \mathcal{C}^{0|n}$-инвариантными функциями на $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$, а следовательно, сбалансированными функциями на $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$. Для этого необходимо поднять функции s_i на $\widetilde{\mathcal{M}}(n)$.

Теорема. *Существуют четные рациональные функции* $s_1, \ldots, s_n$ *на* $\mathcal{M}(n)$ *без особых точек на* $\widetilde{\mathcal{M}}(n)$ *и удовлетворяющие системе уравнений*

$$\tau_{k+n+1} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \tau_{k+i} s_{n-i+1} \quad \textit{для } k = 0, \ldots, n-1. \qquad (\text{Д}7.36)$$

При $n > 1$ *у системы* (Д7.36) *нет полиномиальных решений.*

Доказательство. Пусть x_i и ξ_j, где $i, j = 1, \ldots, n$, — стандартные координаты на $\mathcal{M}(n)$. Представим функции $\tau_1, \ldots, \tau_{2n}$, а также функции $s_1, \ldots, s_n$, которые надо описать, в виде

$$\tau_i = \sum_\alpha c_i^\alpha(x)\xi^\alpha \quad \text{и} \quad s_i = \sum_\beta d_i^\beta(x)\xi^\beta,$$

где α и β пробегают наборы длины k, состоящие из 0 и 1; c_i^α — известные многочлены, а d_i^β — неизвестные функции. Приравнивая коэффициенты при ξ^α в левой и правой частях равенств (Д7.36), мы получаем эквивалентную системе (Д7.36) систему линейных неоднородных уравнений на функции d_i^β, где коэффициенты и константные члены являются многочленами на $\mathcal{M}_{rd}$. Эту систему назовем *основной*, но не будем ее выписывать.

Чтобы избежать недоразумений, обозначим временно функции τ_i и s_i на $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$ символами τ_i' и s_i'. Пусть $m \in \mathcal{M}(n)_{rd}$; пусть $\pi_m\colon \mathcal{U}_m \to \widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$

и $g_m\colon \mathcal{U}_m \to \mathcal{G}$ — морфизмы, существующие по теореме 5.1. Тогда

$$\pi^*(\tau_i') = \pi^* \circ j^*(\tau_i) = \tau_i,$$

поскольку $j \circ \pi_m = \mathrm{Ad}_{g_m}$. Функции $\pi^*(s_1'), \ldots, \pi^*(s_n')$ образуют решение основной системы на $\mathcal{U}$, поскольку система (Д7.36) на $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$ удовлетворена тождественно.

Таким образом, основная система является совместной в окрестности в любой точки многообразия $\mathcal{M}(n)_{rd}$. Так как ее коэффициенты — многочлены, то для любой точки $m \in \mathcal{M}(n)_{rd}$ существуют решения, которые можно продолжить в открытую по Зарискому окрестность этой точки. Причем это решение является набором рациональных функций на $\mathcal{M}(n)_{rd}$, не имеющих особенностей в точке m.

Пучок $\mathcal{P}$ решений системы однородных уравнений удовлетворяющий основной системе когерентен [1] и $\widetilde{\mathcal{M}}(n)_{rd}$ является аффинным алгебраическим многообразием (выделенным в $\mathcal{M}(n)_{rd}$ условием $f(m) = 0$, где f — дискриминант характеристического многочлена точки m), и следовательно, по теореме Серра [СЖП°] имеем $H^1(\widetilde{\mathcal{M}}(n)_{rd}, \mathcal{P}) = 0$. Это значит, что основная система имеет глобальное решение — набор рациональных функций d_i^β, не имеющих особенностей на $\widetilde{\mathcal{M}}(n)_{rd}$. Полагая $s_i = \sum d_i^\beta \xi^\beta$, мы получаем требуемое решение системы (Д7.36). ☐

Задача. Опишите функции s_i явно.

Замечание. Множество функций s_i никоим образом не единственно, но в рассуждениях ниже мы рассматриваем одно фиксированное такое множество.

Если $h_1, \ldots, h_n$ — решение системы (Д7.36) и $n > 1$, то функция h_1 удовлетворяет уравнению

$$h_1\tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_n = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_{n-1}\tau_{n+1}. \qquad (\text{Д}7.37)$$

Рассмотрим случаи $\mathcal{Q}(n)$ и $\mathcal{O}\mathrm{dd}(n)$ по отдельности.

На $\mathcal{Q}(n)$ четные и нечетные координаты заполняют две квадратных матрицы B и β соответственно, а $\tau_k = \dfrac{\mathrm{qtr}(B+\beta)^k}{k}$ является однородным многочленом степени k относительно B и β, таким что β встречается лишь в нечетных степенях, а старший относительно B и одновременно младший относительно β член — это $\mathrm{tr}\,B^{k-1}\beta$. Следующий по старшинству относительно B член имеет степень $k-3$.

Функции $\tau_1, \ldots, \tau_n$ можно включить в локальную систему координат на $\mathcal{Q}(n)$, и следовательно, степень произведения $\tau_1 \ldots \tau_n$ относительно β равна n, а старший относительно B член в $\tau_1 \ldots \tau_n$ — это $\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \mathrm{tr}\,B^{i-1}\beta$.

---

[1] Определение см. в книге [МаАГ*]. — *Прим. Д. Л.*

После замены $g_1 = \Delta_1 + \mathrm{tr}\,B$ уравнение (Д7.37) превращается в

$$\Delta_1\tau_1 \ldots \tau_n = \tau_1 \ldots \tau_{n-1}(\tau_{n+1} - \mathrm{tr}\,B \cdot \tau_n).$$

Мы видим, что

$$\begin{aligned}\deg_B \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_{n-1}(\tau_{n+1} - \mathrm{tr}\,B \cdot \tau_n) \leqslant{}& \\ &\leqslant \deg_B \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_{n-1}(\tau_{n+1} - \mathrm{tr}\,B^n \cdot \beta) < \deg_B \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_n.\end{aligned}$$

Так как B-старший член в $\mathrm{tr}\,B^n \cdot \beta - \mathrm{tr}\,B \cdot \tau_n$ — это $\sum\limits_{1<i<n-1} k_i(B)\,\mathrm{tr}(B^{i-1}\beta)$, где все $k_i(B)$ являются многочленами, то слагаемое $k_i(B)\,\mathrm{tr}(B^{i-1}\beta)$ пропадает, будучи умноженным на старший член функции τ_i. Следовательно, у основной системы нет полиномиальных решений на $\mathcal{Q}(n)$.

Для $\widetilde{\mathcal{O}\mathrm{dd}}(n)$ координаты заполняют матрицу $\begin{pmatrix}\alpha & B\\ C & \delta\end{pmatrix}$, где α и δ состоят лишь из нечетных координат, а B и C — лишь из четных координат. Положим $V = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}$ и $U = \begin{pmatrix}0 & B\\ C & 0\end{pmatrix}$. Тогда $\mathrm{tr}\,U^{2k-2}V$ является младшим членом относительно V и одновременно старшим относительно U в выражении

$$\tau_k = \frac{1}{2k-1}\,\mathrm{str}(V+U)^{2k-1}. \qquad (\text{Д}7.38)$$

Замена $g_1 = \mathrm{tr}\,BC + \Delta$ превращает (Д7.37) в

$$\Delta\tau_1 \ldots \tau_n = \tau_1 \ldots \tau_{n-1}(\tau_{n+1} - \mathrm{tr}\,BC \cdot \tau_n). \qquad (\text{Д}7.39)$$

Абсолютно так же как это было сделано для $\mathcal{Q}(n)$, легко показать, что

$$\deg_{\mathcal{U}} \tau_1 \ldots \tau_{n-1}(\tau_{n+1} - \mathrm{tr}\,BC \cdot \tau_n) < \deg_{\mathcal{U}} \tau_1 \ldots \tau_n \quad \text{для } n > 1,$$

и у основной системы нет полиномиальных решений.

5.3. Ясно, что бесконечномерная супергруппа морфизмов $\mathcal{U} \to \mathcal{G}$ (токов) действует на множестве решений системы (Д7.36), определенных на $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}(n)$. Неоднозначность множества $s_1, \ldots, s_n$ полностью описана в следующей теореме.

Теорема. *Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — четные функции на открытом подсупермногообразии $\mathcal{U} \subset \widetilde{\mathcal{M}}(n)$, удовлетворяющие системе* (Д7.36). *Тогда*

1) *Для любой точки $m \in \mathcal{U}_{rd}$ существует морфизм $h_m\colon \mathcal{U} \to \mathcal{G}$, заданный в окрестности точки m, который переводит множество $s_1, \ldots, s_n$ в $f_1, \ldots, f_n$.*

2) *Функции $\mathrm{cpr}\,f_i$ на $\mathcal{U}_{rd}$ определены из условия*

$$\lambda^n + \sum_{0\leqslant i\leqslant n-1} \lambda^i \,\mathrm{cpr}\, f_{n-i}(m) = \det(\lambda E - A(m)), \qquad (\text{Д}7.40)$$

$$\text{где } A(m) = \begin{cases} m & \text{для } m \in \widetilde{\mathcal{Q}}(n)_{rd}, \\ BC & \text{для } m = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathcal{O}\mathrm{dd}}(n)_{rd}. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть (g_m, π_m) — пара проекций: $g_m \colon U \to G$ и $\pi_m \colon \mathcal{U} \to \widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$ (см. п. 5.1). Рассматривая проекцию π_m как $\mathcal{U}$-семейство точек супермногообразия $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$, применим теорему 4.4 к набору функций $f_1, \ldots, f_n$. Они удовлетворяют условию (Д7.26) и $\pi_m^*(\alpha_i) \neq 0$, так что $f_i \equiv \pi^*(s_i) \bmod I$, где I — идеал, порожденный нечетными координатами на $\mathcal{U}$, и существует семейство морфизмов $\pi'_m \colon \mathcal{U}_m \to \widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$ эквивалентное проекции π_m, такое что $f_i = (\pi'_m)^*(s_i)$.

Так как функции $\pi_m^*(\alpha_i)$ можно включить в локальную систему координат, а эквивалентность морфизмов π_m и π'_m означает, что

$$\pi_m^*(\alpha_i) = \pi'^*(\alpha_i) \quad \text{и} \quad \pi_m^*(\alpha_i)(\pi_m^*(a_i) - {\pi'}_m^*(a_i)) = 0,$$

то существуют нечетные функции $k_1, \ldots, k_n$, такие что

$${\pi'}_m^*(a_i) = \pi_m^*(a_i) - \pi_m^*(\alpha_i)k_i.$$

Другими словами, существует $\mathcal{U}$-семейство точек супергруппы $S_n \ltimes \mathcal{C}^{0|n}$, которое переводит π'_m в π_m. Отождествив $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$ с $j(\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n})$, поднимем это семейство до $\mathcal{U}$-семейства точек супергруппы $\mathcal{G}$, которое переводит $j \circ \pi'_m$ в $j \circ \pi_m$ и, таким образом, переводит множество $\{\pi_m^*(s_i)\}$ во множество $\{f_i\}$. Итак, множества $\{f_i\}$ и $\{s_i\}$ можно локально получить из множества $\{\pi_m^*(s_i)\}$, а следовательно, друг из друга.

Выше мы доказали, что $\operatorname{cpr} f_i = \operatorname{cpr} s_i$, и следовательно, функции $\operatorname{cpr} s_i$ являются $\mathcal{G}_{rd}$-инвариантными. Формулы, которые мы доказываем для $\operatorname{cpr} s_i$, являются также $\mathcal{G}_{rd}$-инвариантными; они удовлетворены на $j(\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n})_{rd}$, и следовательно, они верны на $\widetilde{\mathcal{M}}(n)$. □

5.4. Теорема. *Алгебра инвариантных функций на $\widetilde{\mathcal{M}}(n)$ изоморфна алгебре $S_n \ltimes \mathcal{C}^{0|n}$-инвариантных функций на $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$, а следовательно, алгебре сбалансированных функций. Изоморфизм осуществляется с помощью гомоморфизма $j^* \colon F(\widetilde{\mathcal{M}}(n)) \to F(\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n})$, который отождествляет многочлены на $\widetilde{\mathcal{M}}(n)$ с многочленами на $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$, а рациональные функции на $\widetilde{\mathcal{M}}(n)$ — с рациональными функциями на $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$.*

Доказательство. Из свойств гомоморфизма j^* немедленно следует, что если f — инвариантная функция на $\widetilde{\mathcal{M}}(n)$, то $j^*(f)$ — инвариантная функция на $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$, а раз f локально совпадает с $\pi_m^* \circ j^*(f)$, то равенство $j^*(f) = 0$ влечет $f = 0$.

Пусть теперь f' — инвариантная функция на $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$, а $\check{f}$ — соответствующая ей сбалансированная функция на $\check{\mathcal{C}}^{n|n}$. В окрестности любой точки $m \in \mathcal{M}(n)_{rd}$ мы можем применить теорему 4.4 к $\mathcal{U}$-семейству $\pi_m \colon \mathcal{U} \to \widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$ и заключить, что функции $\tau_1, \ldots, \tau_n$ являются $\mathcal{G}$-инвариантными, а $\mathcal{G}$-действие переводит решение $s_1, \ldots, s_n$ уравнения (Д7.36) в другое решение, а следовательно, функция $\check{f}(s_1, \ldots, s_n, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ не изменяется, т. е. является инвариантной функцией.

Если f' — инвариантный многочлен, то по теореме 4.3 заключаем, что $f' = P(\tau)$ — инвариантный многочлен от $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ на $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$; следовательно, $P(\tau)$ — инвариантный многочлен на $\widetilde{\mathcal{M}}(n)$. Если f' — рациональная функция, то f тоже рациональная функция, поскольку $\check{f}$ и $s_1, \ldots, s_n$ суть рациональные функции. □

Следствие. *Любой инвариантный многочлен P на $\mathcal{M}(n)$ можно единственным образом представить в виде*

$$P = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \; \sum_{i_1 < \ldots < i_k} c^{i_1 \ldots i_k} \tau_{i_1} \ldots \tau_{i_k},$$

где лишь конечное число коэффициентов $c^{i_1 \ldots i_k} \in \mathbb{C}$ отлично от нуля. Все соотношения между функциями τ_i, где $i \in \mathbb{N}$, являются следствиями суперкоммутативности и соотношений вида $\tau_{i_1} \ldots \tau_{i_{n+1}} = 0$.

5.5. Случай супермногообразия $\widetilde{\mathcal{M}}(n)$. В точности таким же образом, как и для $\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$, чтобы вычислить значения любой функции, достаточно знать значения функций $\tau_1, \ldots, \tau_{2n}$.

Теорема. *Пусть $\varphi \colon \mathcal{U} \to \widetilde{\mathcal{M}}(n)$ — семейство точек супермногообразия $\widetilde{\mathcal{M}}(n)$, а $h_1, \ldots, h_n$ — четные функции на $\mathcal{U}$, удовлетворяющие системе уравнений*

$$\varphi^*(\tau_{n+1+k}) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \varphi^*(\tau_{n+k+1-i})h_i,$$
$$\text{где } k = 0, \ldots, n-1 \text{ и } h_i \equiv \varphi^*(s_i) \bmod I_{\mathcal{U}}. \tag{Д7.41}$$

Тогда для любой инвариантной функции f на $\widetilde{\mathcal{M}}(n)$ имеем

$$\varphi^*(f) = \check{f}(h_1, \ldots, h_n, \varphi^*(\tau_1), \ldots, \varphi^*(\tau_n)),$$

где $\check{f}$ — сбалансированная функция, соответствующая функции f.

Доказательство. К семейству $\pi_\varphi \circ \varphi \colon V \to \mathbb{C}^{n|n}$, определенному в окрестности точки $u \in \mathcal{U}_{rd}$, применим теорему 4.4. □

Следствие. *Пусть первые $2n$ инвариантных многочленов на семействах морфизмов $\varphi_i \colon \mathcal{U} \to \widetilde{\mathcal{M}}(n)$, где $i = 1, 2$, совпадают, и пусть $\varphi_1^*(s_i) \equiv \varphi_2^*(s_i) \bmod I_{\mathcal{U}}$. Тогда оставшиеся инвариантные функции тоже совпадают.*

Замечания. 1) Напомним, что $\mathrm{cpr}(s_i)$ — инвариантные многочлены на $\mathcal{M}(n)_{rd}$, это позволяет решить систему (Д7.41).

2) Может показаться странным, что можно определить значения любой инвариантной функции f по $\tau_1, \ldots, \tau_{2n}$, в то время как функцию f нельзя, как правило, выразить в виде функции от $2n$ нечетных переменных $\tau_1, \ldots, \tau_{2n}$. Дело в том, что переменные $\tau_1, \ldots, \tau_{2n}$ не независимы, произведения любых $n+1$ из них равны нулю.

5.6. Набор функций $s_1, \ldots, s_n$ не только поставляет набор инвариантов со значениями в $\mathbb{C}$, но является также набором $\mathcal{G}$-инвариантов «второй очереди» в следующем точном смысле.

Пусть $\mathcal{L}(n)$ — замкнутое подсупермногообразие в $\widetilde{\mathcal{M}}(n)$, выделенное уравнениями

$$\tau_1 = 0, \ldots, \tau_n = 0. \tag{Д7.42}$$

И $\mathcal{L}(n)$, и τ_i являются $\mathcal{G}$-инвариантами, а $\mathcal{L}(n)_{rd} = \widetilde{\mathcal{M}}(n)_{rd}$.

Теорема. 1) *Если f — инвариантная функция на $\widetilde{\mathcal{M}}(n)$, то $f|_{\mathcal{L}(n)}$ — константа.*

2) *Функции $l_1 = s_1|_{L(n)}, \ldots, l_n = s_n|_{\mathcal{L}(n)}$ не зависят от выбора набора $(s_1, \ldots, s_n)$ — решения системы* (Д7.36) *и являются образующими супералгебры инвариантных функций на $\mathcal{L}(n)$.*

Доказательство. 1) Из леммы 4.3 следует, что

$$\check{f} \equiv \mathrm{const} \mod \tau_1, \ldots, \tau_n.$$

2) Пусть $\pi_i\colon \mathcal{U} \to \widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}$, где $i = 1, 2,$ — два морфизма. Тогда на $\mathcal{L}(n)$ имеем

$$\pi_1^*(\alpha_i) = \pi_2^*(\alpha_i) = 0 \quad \text{и} \quad \pi_1^*(a_i) = \pi_2^*(a_{\delta(i)}), \qquad \text{где } \delta \in S_n,$$

и следовательно, всякое решение $(s'_1, \ldots, s'_n)$ системы (Д7.36) приводит к одному и тому же набору функций $l_1, \ldots, l_n$, составляющих базис симметрических функций от $\pi^*(a_1), \ldots, \pi^*(a_n)$, заданных единственным образом с точностью до S_n-действия. □

§ 6. Примеры

6.1. На образе вложения $j(\widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}) \hookrightarrow \mathcal{Q}(n)$ имеем $\mathrm{qet}\, A = \sum \frac{\alpha_i}{a_i}$. В частности, имеем

$$\mathrm{qet}\, A = \frac{\tau_1 a_2 + \tau_2 a_1}{a_1 a_2} \quad \text{для } n = 2. \tag{Д7.43}$$

Если семейство матриц $\psi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{Q}(n)$ таково, что функции $\tau_l = \frac{\mathrm{qtr}\, A^l}{l}$ определены при l, близком к 0, то $\mathrm{qet}\ A = \lim\limits_{l \to 0} \tau_l$.

На $\widetilde{\mathcal{O}\mathrm{dd}}(n)$ выражение $\sum \frac{\alpha_i}{a_i}$ тоже определяет инвариантную функцию, а именно, $\tau_0 = \mathrm{str}\, A^{-1}$, которая, однако, в отличие от qet, не обладает, вроде бы, какими-либо специальными свойствами.

Обе функции $\mathrm{qet}(\lambda - A)$ на $\mathcal{Q}(n)$ и $-\mathrm{str}(\lambda - A)^{-1}$ на $\mathcal{O}\mathrm{dd}(n)$ являются, однако, производящими функциями всех инвариантов матрицы A:

$$\begin{gathered}
\mathrm{qet}(\lambda - A) = \sum_i \frac{d_i}{a_i - \lambda} = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau_j(A)}{\lambda^j};\\
\mathrm{str}(\lambda - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{str}\Bigl(1 - \frac{1}{\lambda}A\Bigr)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathrm{str}\, A^j}{\lambda^{j+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathrm{str}\, A^{2j+1}}{\lambda^{2j+2}}.
\end{gathered} \tag{Д7.44}$$

6.2. На $\mathcal{Q}(2)$ с координатами, которые заполняют две квадратных матрицы (четные заполняют матрицу $B = (b_{ij})$, а нечетные заполняют матрицу $\beta = (\beta_{ij})$), одно из рациональных решений системы (Д7.36) дается выражениями

$$\begin{aligned}
s_1(B, \beta) &= b_{11} + b_{22} + 2\frac{(\beta_{22} - \beta_{11})(\beta_{12}b_{21} - \beta_{21}b_{12}) + (b_{11} - b_{22})\beta_{12}\beta_{21}}{(b_{11} - b_{22})^2 + 4b_{12}b_{21}},\\
s_2(B, \beta) &= \frac{1}{2}s_1(B + \beta^2,\, B\beta + \beta B).
\end{aligned} \tag{Д7.45}$$

6.3. Результаты § 5 дают нам полную систему инвариантов для векторного суперрасслоения ранга $n|n$, в каждом слое которого зафиксирован нечетный обратимый оператор A, а именно, набор многочленов

$$\mathrm{str}\, A, \ \ldots, \ \frac{1}{4n-1}\,\mathrm{str}\, A^{4n-1}.$$

Два частных случая представляют особый интерес: а) случай, связанный с почти комплексной структурой [Вай*]; б) случай, связанный с парой (почти симплектическая структура, почти периплектическая структура), см. [Kh°, ВПСТ°, KhN1°, KhN2°, HX°].

а) В этом случае имеем $A^2 = -1_{n|n}$, т. е. матрица A «далека» от общего положения. (Как показано в [BGLS*], поле таких операторов A можно привести к виду $J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$ в инфинитезимальной окрестности точки, только если соответствующий тензор Нийенхёйса равен 0 — *прим. Д. Л.*)

б) Если на $2n|2n$-мерном супермногообразии заданы и четная и нечетная невырожденные дифференциальные 2-формы $\omega_{\bar{0}}$ и $\omega_{\bar{1}}$, то оператор $A = \omega_{\bar{0}}^{-1}\omega_{\bar{1}}$ является обратимым нечетным послойно-линейным оператором на касательном расслоении. Если пара $(\omega_{\bar{0}}, \omega_{\bar{1}})$ находится в общем положении, то собственные значения матрицы $\mathrm{cpr}\, A$ различны (при $n = 1$ это автоматически так), и мы можем воспользоваться результатами § 5. Из антисимметрии билинейных форм $\omega_{\bar{0}}$ и $\omega_{\bar{1}}$ следует, что $\tau_{2k-1}(A) = 0$ при всех k, а значит, все инварианты пары $(\omega_{\bar{0}}, \omega_{\bar{1}})$, которые можно получить из оператора $\omega_{\bar{0}}^{-1}\omega_{\bar{1}}$, суть $\tau_2, \ldots, \tau_{4n-2}$.

§ 7. Заключение

В этой работе мы получили полный набор инвариантных функций на супермногообразиях $\mathcal{Q}(n)$ и $\mathcal{O}\mathrm{dd}(n)$ и привели конструктивный рецепт для вычисления значений любой инвариантной функции от $\tau_1, \ldots, \tau_{2n}$. Помимо этой конкретной информации некоторые более абстрактные соображения тоже, вроде бы, представляют интерес.

Естественно проинтерпретировать результаты § 5 следующим образом. Фактор-супермногообразие $\widetilde{\mathcal{M}}/\mathcal{G}$ не существует в категории супермногообразий, но существует в более широкой категории *виртуальных супермногообразий* (их определение см. в [СоС1°]), где

$$\widetilde{\mathcal{M}}/\mathcal{G} = \widetilde{\mathcal{C}}^{n|n}/(S_n \ltimes \mathcal{C}^{0|n}),$$

а $\mathcal{G}$-инвариантные функции на $\widetilde{\mathcal{M}}$ до́лжно интерпретировать как функции на $\widetilde{\mathcal{M}}/\mathcal{G}$. В таких терминах загадочная проблема вычисления инвариантных функций от $\tau_1, \ldots, \tau_{2n}$ с помощью промежуточных неоднозначно определенных функций $s_1, \ldots, s_n$ и сбалансированных функций на $\check{\mathcal{C}}^{n|n}$ означает, по-видимому, что все функции на $\widetilde{\mathcal{M}}/\mathcal{G}$ можно выразить в виде функций на виртуальном супермногообразии, выделенном в супермногообразии $\mathcal{C}^{n|n}$ системой уравнений

$$\tau_{i_1} \ldots \tau_{i_{n+1}} = 0 \quad \text{для любых} \quad i_1, \ldots, i_{n+1}.$$

В настоящий момент нет разработанной теории виртуальных супермногообразий. Хотя в книге [СоС1°] приведены примеры виртуальных супермногообразий, которые супермногообразиями не являются, эти виртуальные супермногообразия были пока что, в основном, введены как удобный способ для работы с обычными супермногообразиями. Результаты этой главы можно рассматривать как экспериментальные данные — вклад в теорию виртуальных супермногообразий.

Примечание редактора. Отметим, что описание $GL_\Lambda(p|q)$-инвариантных функций на $Mat_\Lambda(p|q)$ получено лишь при $p = q$. Получить такое описание при $p \neq q$ — открытая **задача**.

Литература к Дополнениям

[БуКА°] *Бурбаки Н.* Коммутативная алгебра / Пер. с франц. М: Мир, 1971.
[Бу1°] *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Гл. IV–VI. М.: Мир, 1972.
[Бу2°] *Бурбаки Н.* Группы Ли и алгебры Ли. Гл. I–III. Алгебра Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли / Пер. с франц. М.: Мир, 1976.
[Бу3°] *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Гл. VII–VIII. Подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли / Пер. с франц. М.: Мир, 1978.
[Вейль°] *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления. М.: Эдиториал-УРСС, 2004.
[Верб°] *Вербицкий М. С.* О действии алгебры Ли SO(5) на когомологиях гиперкэлерова многообразия // Функц. анализ и его прилож. 1990. V. 24, № 3. P. 70–71.
[ВиОн°] *Винберг Э. Б.*, *Онищик А. Л.* Семинар по алгебраическим группам и группам Ли. М.: Наука, 1988.
[ВПСТ°] *Волков Д. В.*, *Пашнев А. И.*, *Сорока В. А.*, *Ткач В. И.* Гамильтонова механика динамических систем с четной и нечетной скобками Пуассона // Теор. и матем. физика. 1989. Т. 79, № 1. С. 117–126.
[Ган°] *Гантмахер Ф.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. С. 576.
[ГИФ°] Геометрические идеи в физике / Сб. переводов под ред. Ю. И. Манина. М.: Мир, 1983.
[ГШВ°] *Грин М.*, *Шварц Дж.*, *Виттен Э.* Теория суперструн. Т. 1, 2. М.: Мир, 1990.
[ИНТ°] Итоги науки и техники / Под ред. Ю. И Манина. М.: ВИНИТИ, 1988. (Современные проблемы математики. Новейшие достижения; Т. 32.) С. 3–70.
[Кац1°] *Кац В. Г.* Простые неприводимые градуированные алгебры Ли конечного роста // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32, № 6. С. 1323–1367.
[Кац2°] *Кац В.* Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993.
[Лобз°] *Лейтес Д. А.* Супералгебры Ли // Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1984. (Современные проблемы математики. Новейшие достижения; Т. 25.) С. 3–49.
[ЛСС°] *Лейтес Д. А.*, *Савельев М. В.*, *Серганова В. В.* Вложения супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(N|2)$ и вполне интегрируемые системы // Теоретико-групповые методы в физике / Под ред. В. Додонова, В. Манько. М.: Наука, 1986. Т. 1. С. 377–394.
[ЛСФ°] *Лейтес Д. А.*, *Серганова В. В.*, *Фейгин Б. Л.* Супералгебры Каца—Муди // Теоретико-групповые методы в физике / Под ред. М. А. Маркова и др. М.: Наука, 1983. Т. 1. С. 285–288.
[ЛЩ°] *Лейтес Д. А.*, *Щепочкина И. М.* Как квантовать антискобку // Теор. и матем. физика. 2001. V. 126, № 3. P. 339–369; `arXiv:math-ph/0510048`
[Мак°] *Макдональд И. Г.* Симметрические функции и многочлены Холла. М.: Мир, 1984.
[НХ°] *Нерсесян А. П.*, *Худавердян О. М.* Суперследы с двумя каноническими 2-формами разных четностей, и странная супералгебра $\widetilde{UQ}(N)$ // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ. 1989. Т. 24, № 6. С. 288–294.
[ОкОл°] *Окуньков А.*, *Ольшанский Г.* Сдвинутые функции Шура // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9, № 2. С. 73–146; Shifted Schur functions. II. The binomial formula for characters of classical groups and its applications // Kirillov's seminar on representation theory. Providence, RI: AMS, 1998. (Amer. Math. Soc. Transl.; Ser. 2. V. 181). P. 245–271.
[РиС°] *Рисс Ф.*, *Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
[Руд°] *Рудаков А. Н.* Группы автоморфизмов бесконечномерных простых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33, № 4. С. 748–764.
[СоС1°] Семинар по суперсимметриям. Т. 1. Алгебра и анализ: основные факты / Под ред. Д. А. Лейтеса. М.: МЦНМО, 2011.

[Сг1°] *Серганова В. В.* Классификация простых вещественных супералгебр Ли и симметрических суперпространств // Функц. анализ и его прил. 1983. Т. 17, вып. 3. С. 46–54.

[Сг2°] *Серганова В. В.* Внешние автоморфизмы простых супералгебр Ли // Известия АН СССР. 1984. № 1. С. 585–598.

[Сг3°] *Серганова В. В.* Внешние автоморфизмы и вещественные формы супералгебр Каца—Муди // Теоретико-групповые методы в физике / Под ред. М. А. Маркова и др. М.: Наука, 1984. Т. 1. С. 279–284.

[Сг4°] *Серганова В. В.* Автоморфизмы супералгебр Ли струнных теорий // Функц. анализ и его прил. 1985. Т. 19, № 3. С. 75–76.

[Сг5°] *Серганова В. В.* Классификация систем простых корней // Теоретико-групповые методы в физике / Под ред. В. Додонова, В. Манько. М.: Наука, 1986. Т. 1. С. 391–394.

[Серг°] *Сергеев А. Н.* Тензорная алгебра тождественного представления как модуль над супералгебрами Ли $gl(n, m)$ и $Q(n)$ // Матем. сб. 1984. Т. 123 (165). С. 422–430.

[СЖП°] *Серр Ж.-П.* Когерентные алгебраические пучки // Собрание сочинений. Т. 2. М.: МЦНМО, 2004.

[Фукс°] *Фукс Д. Б.* Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. М.: Наука, 1984.

[Хелг°] *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Факториал Пресс, 2005.

[Ш°] *Шандер В. Н.* Орбиты и инварианты супергруппы GQ_n // Функц. анализ и его прил. 1992. Т. 26, № 1. С. 69–71; `arXiv:math.RT/9810112`

[Щ5ис°] *Щепочкина И. М.* Пять простых исключительных супералгебры Ли векторных полей // Функц. анализ и его прил. 1999. Т. 33, вып. 3. С. 59–72.

[Щ°] *Щепочкина И. М.* Как реализовать алгебру Ли векторными полями // Теор. и матем. физика. 2006. Т. 147, вып. 3. С. 450–469.

[ALSh°] *Alekseevsky D., Leites D., Shchepochkina I.* Examples of simple Lie superalgebras of vector fields // C. R. Acad. Bulg. Sci. 1980. V. 34, № 9. P. 1187–1190.

[BnTn°] *Batalin I., Tyutin I.* Generalized Field–Antifield formalism // Contemporary Mathematical Physics (F. A. Berezin memorial volume) / Dobrushin R. et al. (eds.). 1996. V. 175. (Translations of AMS; Series 2.) P. 23–43.

[Berg°] *Bergvelt M. J.* A note on super Fock space // J. Math. Phys. 1989. V. 30, № 4. P. 812–815.

[Bern1°] *Bernstein J.* Finite dimensional representations of semisimple Lie algebras // Representation theory. V. 1. (Representations of finite and compact groups) / D. Leites (ed.) A. Salam School of Mathematical Sciences, Lahore, 2009.

[Bern2°] *Bernstein J.* The Lie superalgebra $\mathfrak{osp}(1|2)$, connections over symplectic manifolds and representations of Poisson algebras // Representation theory. V. 2. Representations of finite and compact groups / D. Leites (ed.) A. Salam School of Mathematical Sciences, Lahore, 2012.

[BL1°] *Bernstein J., Leites D.* A formula for the characters of the irreducible finite-dimensional representations of Lie superalgebras of series $\mathfrak{gl}$ and $\mathfrak{sl}$ // C. R. Acad. Bulgare Sci. 1980. V. 33, № 8. P. 1049–1051.

[BL2°] *Bernstein J., Leites D.* Irreducible representations of type Q, the odd trace and odd determinant // C. R. acad. Bulg. Sci. 1982. V. 35, № 3. P. 285–286.

[BGL°] *Bouarroudj S., Grozman P., Leites D.* Classification of simple finite dimensional modular Lie superalgebras with Cartan matrix // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA). 2009. V. 5, № 060. PP. 63; `arXiv:math.RT/0710.5149`

[BGLL°] *Bouarroudj S., Grozman P., Lebedev A., Leites D.* Divided power (co)homology. Presentations of simple finite dimensional modular Lie superalgebras with Cartan matrix // Homology, Homotopy and Applications. 2010. V. 12, № 1. P. 237–278.

[CChK°] *Cantarini N., Cheng Sh.-J., Kac V.* Errata to: Structure of some $\mathbb{Z}$-graded Lie superalgebras of vector fields // Transform. Groups. 1999. V. 4, №. 2–3. P. 219–272 by Cheng and Kac. Transform. Groups. 2004. V. 9, № 4. P. 399–400.

[CiKa°] *Cantarini N., Kac V.* Automorphisms and forms of simple infinite-dimensional linearly compact Lie superalgebras // Internat. J. of Geom. Methods in Phys. 2006. V. 3, №. 5, 6. P. 1–23; `arXiv:math.QA/0601292`

[Che°] *Cheng Sh.-J.* Differentiable simple Lie superalgebras and representations of semisimple Lie superalgebras // J. Algebra. 1995. V. 173, № 1. P. 1–43.

[CW°] *Cheng S., Wang W.* Howe duality for Lie superalgebras // Compositio Math. 2001. V. 128, № 1. P. 55–94; `arXiv:math.RT/0008093`

Cheng S., Wang W. Remarks on the Schur—Howe—Sergeev duality // Lett. Math. Phys. 2000. V. 52, № 2. P. 143–153; `arXiv:math.RT/0008109`

[Dzh°] *Dzhumadildaev A.* Virasoro type Lie algebras and deformations // Z. Phys. 1996. V. C72, № 3. P. 509–517.

[Et°] *Etingof P.* Lecture notes on Cherednik algebras; `arXiv:1001.0432`; Symplectic reflection algebras and affine Lie algebras; `arXiv:1011.4584`

[FF°] *Feigin B., Fuchs D.* Representations of Virasoro algebra // Representation of Lie groups and related topics / A. M. Vershik and D. P. Zhelobenko (eds.) N.Y.: Gordon and Breach Science Publishers, 1990. (Advanced Studies in Contemporary Mathematics; V. 7.). P. 465–554; *Feigin B., Frenkel E.* Erratum: Semi-infinite Weil complex and the Virasoro algebra // Comm. Math. Phys. 1991. V. 137, № 3. P. 617–639; Comm. Math. Phys. 1992. V. 147, № 3. P. 647–648.

[FST°] *Feigin B. L., Semikhatov A. M., Tipunin I. Yu.* Equivalence between chain categories of representations of affine $\mathfrak{sl}(2)$ and $N = 2$ superconformal algebras // J. Math. Phys. 1998. V. 39, № 7. P. 3865–3905.

[FuLe°] *Fuchs D. B., Leites D. A.* Cohomology of Lie superalgebras // C. R. Acad. Bulgare Sci. 1984. V. 37, № 12. P. 1595–1596.

[FH°] *Fulton W., Harris J.* Representation theory. A first course. N.Y.: Springer-Verlag, 1991. (Graduate Texts in Mathematics; V. 129. Readings in Mathematics.)

[G1°] *Gorelik M.* On the ghost centre of Lie superalgebras // Ann. Inst. Fourier. 2000. V. 50. P. 1745–1764; `arXiv:math.RT/9910114`

[G2°] *Gorelik M.* The center of a simple P-type Lie superalgebra // J. Algebra. 2001. V. 246, № 1. P. 414–428.

[G3°] *Gorelik M.* Annihilation theorem and separation theorem for basic classical Lie superalgebras // J. Amer. Math. Soc. 2002. V. 15. P. 113–165; `arXiv:math.RA/0008143`

[GPS°] *Gomis J., Paris J., Samuel S.* Antibracket, antifields and gauge-theory quantization // Phys. Rept. 1995. V. 259. P. 1–191.

[Gr°] *Grozman P.* `http://www.equaonline.com/math/SuperLie`

[GL°] *Grozman P., Leites D.* Lie superalgebras of supermatrices of complex size. Their generalizations and related integrable systems // Proc. Internatnl. Symp. Complex Analysis and related topics (Mexico, 1996) / E. Ramírez de Arellano at al. (eds.). Birkhäuser, 1999. P. 73–105; `arXiv:math.RT/0202177`

[GL1°] *Grozman P., Leites D.* Defining relations for classical Lie superalgebras with Cartan matrix // Czech. J. Phys. 2001. V. 51, №. 1. P. 1–22; `arXiv:hep-th/9702073`

[GL2°] *Grozman P., Leites D.* Skein relations for link invariants and Lie superalgebras // J. Nonlinear Math. Phys. 2005. V. 12, № 1. P. 372–379.

[GLS1°] *Grozman P., Leites D., Shchepochkina I.* Lie superalgebras of string theories // Acta Mathematica Vietnamica. 2001. V. 26.№ 1. P. 27–63; `arXiv:hep-th/9702120`

[Gru°] *Gruson C.* Sur l'idéal du cone autocommutant des super algébres de Lie basiques classiques et étranges // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 2000. V. 50, № 3. P. 807–831.

[GQS°] *Guillemin V., Quillen D., Sternberg Sh.* The classification of the irreducible complex algebras of infinite type // J. Analyse Math. 1967. V. 18. P. 107–112.

[Hai°] *Hayashi T.* Q-analogue of Clifford and Weyl algebras—Spinor and oscillator representations of quantum envelopping algebras // Comm. Math. Phys. 1990. V. 127. P. 129–144.

[HY°] *Heckenberger I.*, *Yamane H.* A generalization of Coxeter groups, root systems, and Matsumoto's theorem // Mathematische Zeitschrift. 2008. V. 259, № 2. P. 255–276; `arXiv:math.QA/0610.823`

[How°] *Howe R.* Remarks on classical invariant theory // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 313, № 2. P. 539–570; Erratum to: Remarks on classical invariant theory // Trans. Amer. Math. Soc. 1980. V. 318, № 2. P. 823.

[HS°] *Hoyt C.*, *Serganova V.* Classification of finite growth general Kac-Moody superalgebras and integrability // Comm. in Algebra. 2007. V. 35. P. 851–874.

[ILMS°] *Iyer U.*, *Leites D.*, *Messaoudene M.*, *Shchepochkina I.* Examples of simple vectorial Lie superalgebras in characteristic 2 and Volichenko algebras // J. Nonlinear Math. Phys. 2010. V. 17. (Special issue in memory of F. Berezin.) P. 311–374.

[Kac1°] *Kac V. G.* Laplace operators of infinite-dimensional Lie algebras and theta functions // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1984. V. 81, № 2. P. 645–647. (Обоснование см. в *Gorelik M.* The Kac construction of the centre of $U(g)$ for Lie superalgebras // JNMP. 2004. V. 11, № 3. P. 325–349.)

[Kac2°] *Kac V.* Classification of infinite-dimensional simple linearly compact Lie superalgebras // Advances in Math. 1998. V. 139. P. 1–55; Classification of supersymmetries. Beijing: ICM, 2002; `arXiv:math-ph/0302016`

[KPet°] *Kac V.*, *Peterson D.* Spin and wedge representations of infinite-dimensional Lie algebras and groups // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1981. V. 78, № 6, part 1. P. 3308–3312.

[KW°] *Kac V. G.*, *Wang S. P.* On automorphisms of Kac—Moody algebras and groups // Advances in Math. 1992. V. 92, №. 2. P. 129–195.

[Kapp°] *Kaplansky I.* Graded Lie algebras. Preprints. Chicago: Univ. Chicago, 1975; `http://zakuski.math.utsa.edu/~kap/superalgebra.html`

[Kh°] *Khudaverdian O. M.*, Geometry of superspace with even and odd brackets // J. Math. Phys. 1991. V. 32, № 7. P. 1934–1937.

[KhN2°] *Khudaverdyan O.*, *Nersessyan A.* Canonical Poisson brackets of different gradings and strange superalgebras // J. Math. Phys. 1991. T. 32, № 7, C. 1938–1941.

[KhN1°] *Khudaverdyan O.*, *Nersessyan A.* Even and odd symplectic and Kählerian structures on projective superspaces // J. Math. Phys. 1993. V. 34, № 12. P. 5533–5548.

[KMTR°] *Knus M.-A.*, *Merkurjev A.*, *Rost M.*, *Tignol J.-P.* The book of involutions. Providence, RI: American Mathematical Society, 1998. (Colloquium Publications; V. 44.)

[Kst°] *Konstein S.* An example of simple Lie superalgebra with several invariant bilinear forms; `arXiv:math-ph/0112063`

[KV°] *Konstein S. E.*, *Vasiliev M. A.* Supertraces on the algebras of observables of the rational Calogero model with harmonic potential // J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 2872–2891; `arXiv:hep-th/9512038`

[Leb°] *Lebedev A.* Analogs of the orthogonal, Hamiltonian, Poisson, and contact Lie superalgebras in characteristic 2. The classification of almost affine (hyperbolic) Lie superalgebras // J. Nonlinear Math. Phys. 2010. V. 17. (Special issue in memory of F. Berezin.) P. 217–251; см также: `arXiv:math.AC/0601536`

[L°] *Leites D.* A formula for the characters of the irreducible finite-dimensional representations of Lie superalgebras of series C // C. R. Acad. Bulgare Sci. 1980. V. 33, № 8. P. 1053–1055.

[LSg°] *Leites D. A.*, *Sergeev A.* Casimir operators for Lie superalgebras // Supersymmetries and Quantum Symmetries (SQS'99, 27–31 July, 1999) / E. Ivanov et al. (eds.) Dubna: JINR, 2000. P. 409–411; `arXiv:math/0202180`

[LSh°] *Leites D. A.*, *Shchepochkina I.* The classification of the simple Lie superalgebras of vector fields; `http://www.mpim-bonn.mpg.de/preblob/2178`

[Math°] *Mathieu O.* Class of simple graded Lie algebras of finite growth // Inv. Math. 1992. V. 108. P. 455–519.

[Mol°] *Molev A.* Factorial supersymmetric Schur functions and super Capelli identities. Kirillov's seminar on representation theory. Providence, RIЖ Amer. Math. Soc., 1998. (Amer. Math. Soc. Transl.; Ser. 2; V. 181.) P. 109–137.

[MoNa°] *Molev A.*, *Nazarov M.* Capelli identities for classical Lie algebras // Math. Ann. 1999. V. 313, № 2. P. 315–357.

[Ni°] *Nishiyama K.* Oscillator representations of orthosymplectic algebras // J. Alg. 1990. V. 129. P. 231–262.

[Pen1°] *Penkov I.* Generic representations of classical Lie superalgebras and their localization // Monatsh. Math. 1994. V. 118, № 3–4. P. 267–313.

[Pen2°] *Penkov I.* Characters of strongly generic irreducible Lie superalgebra representations // Internat. J. Math. 1998. V. 9, № 3. P. 331–366.

[PS1°] *Penkov I.*, *Serganova V.* Cohomology of G/P for classical complex Lie supergroups G and characters of some atypical G-modules // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1989. V. 39, №. 4. P. 845–873.

[PS2°] *Penkov I.*, *Serganova V.* Representations of classical Lie superalgebras of type I // Indag. Math. (N. S.) 1992. V. 3, № 4. P. 419–466.

[PS3°] *Penkov I.*, *Serganova V.* Generic irreducible representations of finite dimensional Lie superalgebras // Internat. J. Math. 1994. V. 5. P. 389–419.

[Pol°] *Poletaeva E.* Analogs of the Riemannian tensor on supermanifolds; `arXiv:math.RT/0510165`

[Prz°] *Pragacz P.* Algebro-geometric applications of Schur S-and Q-polynomials // Lect. Notes Math. 1991. V. 1478. P. 130–191.

[Srg1°] *Sergeev A.* The centre of enveloping algebra for Lie superalgebra $Q(n, C)$ // Lett. Math. Phys. 1983. V. 7, № 3. P. 177–179.

[Srg2°] *Sergeev A.* Orthogonal polynomials and Lie superalgebras; `arXiv:math.RT/9810110`

[Srg3°] *Sergeev A.* The invariant polynomials on simple Lie superalgebras // Represent. Theory. 1999. V. 3. P. 250–280.

[Srg4°] *Sergeev A.* An analog of the classical invariant theory for Lie superalgebras // Michigan Math. J. 2001. V. 49, № 1. P. 113–168; `arXiv:math.RT/9810113`, `math.RT/9904079`

[SV°] *Sergeev A. N.*, *Veselov A. P.* Grothendieck rings of basic classical Lie superalgebras // Ann. Math. 2011. V. 173, Issue 2. P. 663–703; `arXiv:0704.2250`

[Sch°] *Scheunert M.* Invariant supersymmetric multilinear forms and the Casimir elements of P-type Lie superalgebras // J. Math. Phys. 1987. V. 28, № 5. P. 1180–1191.

[ShM°] *Shchepochkina I.* Maximal subalgebras of classical Lie superalgebras // The orbit method in geometry and physics. A. A. Kirillov Festschrift / C. Duval, L. Guieu and V. Ovsienko (eds.) Birkhäuser, 2003. (Progress in Mathematics.) P. 445–472; `arXiv:hep-th/9702122`

[Sho°] *Shomron N.* Blocks of Lie superalgebras of type $W(n)$; `arXiv:math.RT/0009103`

[SySp°] Symmetric space; `http://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_space`

[vdL°] *van de Leur J.* A classification of contragredient Lie superalgebras of finite growth // Comm. Algebra. 1989. V. 17, №. 8. P. 1815–1841.

[Ver°] *Verbitsky M.* Hyperkähler manifolds with torsion, supersymmetry and Hodge theory // Asian J. of Math. 2002. V. 6, № 4. P. 679–712; `arXiv:math.AG/0112215`

[W°] *Weil A.* Théorie des points proches sur les variétés différentiables. Géométrie différentielle // Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique (Strasbourg, 1953). Paris: Centre National de la Recherche Scientifique, 1953. P. 111–117.

Литература, добавленная редактором

[АЭ*] *Артин Э.* Геометрическая алгебра. М., Наука, 1969.

[Бер*] *Березин Ф. А.* Алгебра и анализ с антикоммутирующими переменными / Под ред. А. А. Кириллова. М.: Изд-во МГУ, 1983.

[БШ*] *Березин Ф. А.*, *Шубин М. А.* Уравнение Шрёдингера. М.: МГУ, 1983; расширенный перевод: *Berezin F. A.*, *Shubin M. A.* The Schrödinger equation. Dordrecht: Kluwer, 1991.

[БЛ*] *Бернштейн И. Н.*, *Лейтес Д. А.* Неприводимые представления конечномерных супералгебр Ли векторных полей типа $\mathbb{W}$ // Вопросы теории групп и гомологической алгебры / Под ред. А. Онищика. Ярославль: ЯрГу, 1979. С. 187–193; Инвариантные дифференциальные операторы и неприводимые представления супералгебр Ли векторных полей // Serdica Bulg. Math. Publ. 1981. V. 7. P. 320–334.

[БЛВ*] *Буаррудж С.*, *Лебедев А.*, *Вагеманн Ф.* Деформации алгебры Ли $\mathfrak{o}(5)$ в характеристиках 3 и 2 // Матем. заметки. 2011. V. 89, № 6. C. 808–824.

[Вай*] *Вайнтроб А. Ю.* Деформации комплексных суперпространств и когерентных пучков на них // Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1988. (Современные проблемы математики. Новейшие достижения; Т. 32.) С. 125–211.

[ВдВ*] *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1979.

[Вов*] *Воронов А.* Отображения супермногообразий // Теор. и матем. физика. 1984. Т. 60, № 1. Р. 43–48.

[ВЗ*] *Воронов Ф. Ф.*, *Зорич А. В.* Когомологии супермногообразий и интегральная геометрия // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298, № 3. С. 528–533.

[Восп*] Воспоминания о Феликсе Александровиче Березине — основоположнике суперматематики / Сост. Е. Г. Карпель и Р. А. Минлос, под ред. Д. А. Лейтеса и И. В. Тютина. М.: МЦНМО, 2009.

[Ге*] *Гельфанд С.* Алгебраические пучки на $\mathbb{P}^n$ и проблемы линейной алгебры // В кн.: *Оконек К.*, *Шнейдер М.*, *Шпиндлер Х.* Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах. М.: Мир, 1984.

[ГрЛе*] *Грозман П. Я.*, *Лейтес Д. А.* Неголономные тензоры Римана и Вейля для флаговых многообразий // Теор. и матем. физика. 2007. Т. 153, № 2. С. 186–219.

[ГН*] *Гриценко В. А.*, *Никулин В. В.* О классификации лоренцевых алгебр Каца—Муди // Успехи матем. наук. 2002. Т. 57, № 5. С. 79–138.

[Джу*] *Джумадильдаев А. С.* Нечетные центральные расширения супералгебр Ли // Функц. анализ. 1995. Т. 29, № 3. С. 69–71.

[ЛЛ*] *Лебедев А. В.*, *Лейтес Д. А.* Детерминант Шаповалова для супералгебр петель // Теор. и матем. физика. 2008. V. 156, № 3. P. 378–397.

[Л*] *Лейтес Д. А.* Спектры градуированно-коммутативных колец // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29, № 3. С. Р. 209–210.

[Лф*] *Лейтес Д. А.* Когомологии супералгебр Ли // Функц. анал. и его прил. 1975. Т. 9, № 4. С. 75–76.

[Лусп*] *Лейтес Д. А.* Введение в теорию супермногообразий // Успехи матем. наук. 1980. Т. 35, № 1. С. 3–53.

[ЛПет*] *Лейтес Д. А.* Теория супермногообразий. Петрозаводск: Карельский филиал АН СССР, 1983.

[МаКП*] *Манин Ю. И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984.

[МаАГ*] *Манин Ю. И.* Введение в аффинные схемы и квантовые группы / Под ред. Д. А. Лейтеса и С. М. Львовского. М.: МЦНМО, 2012.

[СоС2*] Семинар по суперсимметриям. Т. 2. Алгебра и анализ: дополнительные главы / Под ред. Д. А. Лейтеса. М.: МЦНМО, готовится к печати.

[Срг*] *Сергеев А.* Тензорная алгебра тождественного представления как модуль над супералгебрами Ли $gl(p, q)$ и $q(n)$ // Мат. сб. 1984. Т. 123, № 3. С. 422–430.

[Спр*] *Сергеев В.* Пределы рациональности. М.: Фазис, 1999.

[BV*] *Batalin I. A.*, *Vilkovisky G. A.* Gauge algebra and quantization // Phys. Lett. 1981. V. B102, № 1. P. 27–31; Quantization of gauge theories with linearly dependent generators // Phys. Rev. 1983. V. D28, № 10. P. 2567–2582.

[Bat*] *Batchelor M.* The structure of supermanifolds // Trans. of the American Math. Soc. 1979. V. 253. P. 329–338.

[BelK*] *Belov-Kanel A.*, *Kontsevich M.* Automorphisms of the Weyl algebra // Lett. Math. Phys. 2005. V. 74, № 2. P. 181–199; `arXiv:math/0512169`

[Ber*] *Berezin F.* Introduction to superanalysis / A. A. Kirillov (ed.). Translation edited by D. Leites. Dordrecht-Boston, MA: D. Reidel, 1987.

[BGLS*] *Bouarroudj S.*, *Grozman P.*, *Leites D.*, *Shchepochkina I.* Minkowski superspaces and superstrings as almost real-complex supermanifolds; `arXiv:1010.4480`

[BG*] *Boyer Ch.*, *Gitler S.* The theory of G^∞-supermanifolds // Trans. of the Amer. Math. Soc. 1984. V. 285, № 1. P. 241–267.

[Br1*] *Brundan J.* Kazhdan—Lusztig polynomials and character formulae for the Lie superalgebra $gl(m|n)$ // J. Amer. Math. Soc. 2003. V. 16 P. 185–231; `arXiv:math/0203011`

[Br2*] *Brundan J.* Kazhdan—Lusztig polynomials and character formulae for the Lie superalgebra $q(n)$ // Advances in Math. 2004. V. 182. P. 28–77; `arXiv:math/0207024`

[CaOs*] *Candelas Ph.*, *de la Ossa X.* The zeta-function of a p-adic manifold, Dwork theory for physicists // Commun. Number Theory Phys. 2007. V. 1, № 3. P. 479–512.

[CiKa*] *Cantarini N.*, *Kac V.* Infinite-dimensional primitive linearly compact Lie superalgebras // Advances in Math. 2006. V. 207. P. 328–419. `arXiv:math.QA/0511424`
Cantarini N., *Kac V.* Classication of linearly compact simple rigid superalgebras. `arXiv:0909.3100`

[CCLL*] *Chapovalov D.*, *Chapovalov M.*, *Lebedev A.*, *Leites D.* The classification of almost affine (hyperbolic) Lie superalgebras // J. Nonlinear Math. Phys. 2010. V. 17. (Special issue in memory of F. Berezin.) P. 103–161; `arXiv:0906.1860`

[CgK*] *Cheng S.-J.*, *Kac V.* Generalized Spencer cohomology and filtered deformations of $\mathbb{Z}$-graded Lie superalgebras // Adv. Theor. Math. Phys. 1998. V. 2. P. 1139–1180; Addendum: Generalized Spencer cohomology and filtered deformations of $\mathbb{Z}$-graded Lie superalgebras // Adv. Theor. Math. Phys. 2004. V. 8. P. 697–709.

[CoEn*] Concise Encyclopedia of Supersymmetry and Noncommutative Structures in Mathematics and Physics / S. Duplij, W. Siegel, J. Bagger (eds.). Dordreht: Kluwer, 2003.

[DeW*] *DeWitt B.* Supermanifolds / 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

[DiP*] *Dimitrov I.*, *Penkov I.* Locally semisimple and maximal subalgebras of the finitary Lie algebras $\mathfrak{gl}(\infty)$, $\mathfrak{sl}(\infty)$, $\mathfrak{so}(\infty)$, and $\mathfrak{sp}(\infty)$ // Journal of Algebra. 2009. V. 322. P. 2069–2081.

[DM1*] *Dobrushin R.* et al. (eds.) Contemporary Mathematical Physics (F. A. Berezin memorial volume). 1996. V. 175. (Translations of AMS; Series 2.)

[DM2*] *Dobrushin R.* et al. (eds.) Topics in Statistical and Theoretical Physics (F. A. Berezin memorial volume). 1996. V. 177. (Translations of AMS; Series 2.)

[Ef*] *Efetov K.* Supersymmetry in disorder and chaos. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[Egr*] *Egorov G.* How to superize $\mathfrak{gl}(\infty)$ // Topological and geometrical methods in field theory / J. Mickelsson et al. (eds.) World Scientific, 1992. P. 135–146; см. изложение в [CoC2*].

[FelB*] Felix Berezin: Life and Death of the Mastermind of Supermathematics / M. Shifman (Ed.). Singapore: World Scientific, 2007.

[GIOS*] *Galperin A.*, *Ivanov E.*, *Ogievetsky V.*, *Sokatchev E.* Harmonic superspace. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[Gre*] *Green P.* On holomorphic graded manifolds // Proc. AMS. 1982. V. 85. P. 587–590.

[Gr*] *Grozman P.* Invariant bilinear differential operators; `arXiv:math/0509562`

[GLS2*] *Grozman P.*, *Leites D.*, *Shchepochkina I.* Invariant differential operators on supermanifolds and The Standard Model / M. Olshanetsky, A. Vainstein (eds.) // Multiple facets of quantization and supersymmetry. (Michael Marinov Memorial Volume.) River Edge, NJ: World Sci. Publishing, 2002. P. 508–555; `arXiv:math.RT/0202193`

[JNMP*] J. Nonlinear Math. Phys. 2010. V. 17. (Special volume in memory of F. Berezin.)

[Kl*] *Kleshchev A.* Linear and projective representations of symmetric groups. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

[KST*] *Konstein S.*, *Smirnov A.*, *Tyutin I.* Cohomologies of the Poisson superalgebra; `arXiv:hep-th/0312109`; General form of deformation of Poisson superbracket; `arXiv:hep-th/0401023`

[Lan*] *Landweber G.* Representation rings of Lie superalgebras // *K*-Theory. 2005. V. 36, № 1–2. P. 115–168.

[Lin*] *Leites D.* Indecomposable representations of Lie superalgebras // Memorial volume dedicated to Misha Saveliev and Igor Luzenko / A. N. Sissakian et al. (ed.). Dubna: JINR, 2000. P. 126–131; `arXiv:math.RT/0202184`

[L*] *Leites D.* The Riemann tensor for nonholonomic manifolds // Homology, Homotopy and Applications. 2002. V. 4, № 2. P. 397–407; `arXiv:math.RT/0202213`

[LJ*] Seminar J. Jost—D. Leites on superconformal supersurfaces / D. Leites (ed.) (Seminar on Supersymmetries; V. 4.) In preparation.

[LPS*] *Leites D.*, *Poletaeva E.*, *Serganova V.* On Einstein equations on manifolds and supermanifolds // J. Nonlinear Math. Physics. 2002. V. 9, № 4. P. 394–425; `arXiv:math.DG/0306209`

[LSh*] *Leites D.*, *Shchepochkina I.* The classification of the simple vectorial Lie superalgebras; `arXiv:1308`

[LMP*] Lett. Math. Phys. 2005. V. 74, № 1–3. (Special volume in memory of F. Berezin.)

[On1*] *Onishchik A.* A construction of non-split supermanifolds // Ann. Global Analysis and Geom. 1998. V. 16. P. 309–333.

[On2*] *Onishchik A.* On the classification of complex analytic supermanifolds // Lobachevskii J. Math. 1999. V. 4. P. 47–70.

[On3*] *Onishchik A.* Homogeneous supermanifolds over Grassmannians // J. of Algebra. 2007. V. 313. P. 320–342.

[QFS*] Quantum fields and strings: a course for mathematicians. V. 1, 2 / P. Deligne et al. (eds.) Princeton, NJ: Institute for Advanced Study (IAS), 1999. V. 1, 2.

[SoS*] Seminar on Supermanifolds / D. Leites (ed.). Reports of Stockholm University, 1986–1990. V. 1–35; Preprinted at MPIM-Bonn, 2002. V. 36–37.

[Se1*] *Serganova V.* On generalizations of root systems // Commun. in Algebra. 1996. V. 24 (13). P. 4281–4299.

[Se2*] *Serganova V.* On representations of the Lie superalgebra *p*(*n*) // Journal of Algebra. 2002. V. 258, Issue 2. P. 615–630.

[Se3*] *Serganova V.* On representations of Cartan type Lie superalgebras // Lie groups and invariant theory. A. L. Onishchik Festschrift / É. Vinberg (ed.). Providence, RI: AMS, 2005. (AMS Translations; Series 2.) P. 223–239.

[Srg*] *Sergeev A.* Irreducible representations of solvable Lie superalgebras // Represent. Theory. 1999. V. 3. P. 435–443.

[Serg*] *Sergeev V.* The thermodynamic approach to markets / Translated from the Russian and edited by D. Leites with appendix by A. Vershik; `arXiv:0803.3432v1`

Предметный указатель

Березин Феликс Александрович

ВВЕДЕНИЕ В СУПЕРАНАЛИЗ

Под ред. Д. А. Лейтеса

Подписано в печать 16.08.2013 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 27. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–74–83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография “Наука”»
121099, Москва, Шубинский пер., 6