Семинар по суперсимметриям

Том 1

Алгебра и анализ: основные факты

под редакцией Д. Лейтеса

Москва
Издательство МЦНМО
2011

УДК 514.74 +517.2/.3
ББК 22.151.5 + 22.161.1
Л42

Издание осуществлено при поддержке РФФИ
(издательский проект № 07-01-07108)

И. Н. Бернштейн, Д. А. Лейтес, В. Н. Шандер

Л42 Семинар по суперсимметриям. Т. 1. Алгебра и анализ: основные факты. Под ред. Д. А. Лейтеса и с дополнениями В. В. Молоткова — М.: МЦНМО, 2011. — 410 с.

ISBN 978-5-94057-849-9
ISBN 978-5-94057-850-5 (т. 1)

Теория суперсимметрий — относительно новое направление в математике. Идеи суперсимметрии, появившиеся, чтобы разрешить долго казавшиеся неразрешимыми некоторые проблемы теоретической физики, быстро выросли в теорию супермногообразий — богатый сплав дифференциальной и алгебраической геометрий с собственными глубокими и пока малоисследованными проблемами. В этой книге изложены основы линейной алгебры в суперпространствах и элементы дифференциальной и алгебраической геометрий на супермногообразиях. В следующих томах рассмотрены избранные более сложные вопросы.

Книга насыщена открытыми проблемами разного уровня сложности и будет полезна как студентам, так и преподавателям и научным работникам — как математикам, так и физикам.

ББК 22.151.5 + 22.161.1

Бернштейн Иосиф Наумович
Лейтес Дмитрий Александрович
Молотков Владимир Васильевич
Шандер Владимир Наумович

СЕМИНАР ПО СУПЕРСИММЕТРИЯМ

Т. 1. Алгебра и анализ: основные факты

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83

Подписано в печать 25.08.2011 г. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 25,5. Тираж 400 экз. Заказ

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.

ISBN 978-5-94057-850-5
9 785940 578505 >

---

1. Клянусь рассветом!
2. И десятью ночами!
3. И чётным, и нечётным!
4. И десятью ночами, когда уходит она*!

---

* Существуют разнообразные мнения относительно того, что подразумевается под «рассветом», «десятью ночами» и «чётом и нечётом»… Весь фрагмент является предупреждением жителям Мекки: если не одумаются они, конец их будет таким же, что и у тех, которые отвергали истину в прежние времена…

Сура Ал-Фаджр: Рассвет. LXXXIX.
Священный Коран.
Подготовил Маулана Мухаммад Али
(автор перевода с арабского языка на английский,
вступительной статьи и комментариев),
перевод на русский язык подготовил д-р А. Садецкий.
`http://www.muslim.org/rus-qur/quran.htm`

Клянусь четой и нечетой...

А. С. Пушкин. Подражания Корану

Картинка, которую мы видели, кажется, в журнале «New Yorker». Изображен типичный математик: лысенький, с брюшком, на заднем плане — статуя Свободы.

Он повторен три раза со следующими филактерами («словесными пузырями», которые «выдуваются» из уст персонажа):

1) «Я уже пишу по-английски»;
2) «Я уже думаю по-английски»;
3) «Но я все еще conceptualize по-русски».

Оглавление

Предварение

Глава 0

Вводные замечания

§ 0.1. Предисловие редактора

Как мы понимаем слово «суперсимметрия». Так уж получилось, что самый важный термин в этой книге — **суперсимметрию** — понимают в последнее время в двух смыслах.

1) В этой книге, во всех прочих работах участников этого семинара, в работах К. Ефетова (см. [Ef]) и его последователей (см., например, [Zb]), а также в первой половине первого тома сборника [QFS] **суперсимметрия** понимается в самом широком смысле — как симметрия, переносимая какой угодно супергруппой или суперкольцом Ли (в частности, супералгеброй Ли).

2) Для тех же, кто изучает супергравитацию, суперизует классические уравнения математической физики (Кортевега—де Фриза, Кадомцева—Петвиашвили и т. д.), **суперсимметрии** — это нечто гораздо более специальное. Для этих исследователей **суперсимметрии** всегда сохраняют некоторое неинтегрируемое распределение на супермногообразии, а в присутствии динамики — неинтегрируемую связь между обобщенными импульсами. Ни само распределение, ни условия, его задающие, никто, как правило, явно не описывает, и догадаться о них можно лишь благодаря тому, что скобки нечетных сечений распределения равны не 0, а каким-то четным векторным полям.

Истоки. Первым математиком, который понял, что он открывает новую область — «суперматематику», был, вероятно, Грассман (Grassmann). В его время не было даже слов, потребных для описания такой науки, и, будучи непонятым (до сих пор: кто станет разбирать теперь его работы, да еще по-немецки?!), он переключился на изучение санскрита. Первым же, кто смог донести свои идеи до современников, был, несомненно, Феликс Александрович Березин.

Работая с вопросами вторичного квантования, Березин предположил, что можно провести параллельное и единообразное описание бозонных и фермионных полей, и в середине 1960-х пришел к гипотезе (см. [B1]) о том, что

«существует нетривиальный аналог анализа, в котором роль функций играют элементы алгебры Грассмана». (0.1)

Березин говорил мне, что он думает, что в этом будущем анализе (точнее, дифференциальной геометрии) «не будет точек». Березинские слова не имели точного смысла и нуждались в интерпретации и уточнении. Ниже представлены результаты нашего Семинара, частично проясняющие загадочные пророчества Березина. Пока его программа, как я вижу, реализована далеко не полностью. Это, конечно, жаль, но честное обсуждение трудностей быстро выводит читателя на передовую. Остается только не робеть и работать.

Некоторые из идей Березина начинают овладевать массами: например, о «многообразиях без точек»[1] пишет П. Картье в статье о себе, А. Гротендике, А. Конне и М. Концевиче [Car]. Однако непонятного осталось не меньше, чем понятого; даже в этом томе, посвященном по большей части изложению самых что ни на есть основ, будут щедро разбросаны открытые проблемы разного уровня сложности — от легкой курсовой и далее.

Мое первое публичное выступление (осенью 1972 г. на семинарах А. А. Кириллова и Э. Б. Винберга—А. Л. Онищика) с определением того, что теперь называют *суперсхемами* и *алгебраическими супермногообразиями*, было дано в терминах окольцованных пространств и внимания не привлекло. За полгода до этого даже сам Березин послушал меня у себя дома и сказал: «Значит, по-Вашему, спектр алгебры Грассмана от любого числа переменных — это одна точка?! Нет. Это я не покупаю».

По счастью, А. Онищик, мой официальный научный руководитель, настоял на публикации этого («хоть и неинтересного Березину, но разумного») определения в статье [Л0]; чуть позже (когда после доклада Весса и Зумино психологический барьер задачи стал пониже) оно было переписано на аналитическом, вернее, C^∞-языке; см. [BL0].

Кроме алгебраических геометров, которых слова «пучок» и «спектр алгебры» не пугали, математики про новую теорию не слушали. А алгебраические геометры, так сказать, «слишком много знали»: спектры-то у суперкоммутативной супералгебры и у ее фактора по нильпотентному идеалу совпадают, значит — почему-то делали они вывод, — ничего интересного тут нет, и дальше Березина, когда он формулировал гипотезу (0.1), не слушали. То, что пучки над этими спектрами совсем разные, а автоморфизмов у супермногообразия, отвечающего векторному расслоению, гораздо больше, чем у этого расслоения, долго игнорировалось: пучки, насыщенные нильпотентами, встречались и в досуперную эпоху, а вот то, что геометрия супермногообразий становится богаче и интересней, чем (тоже не скучная) обычная геометрия, не было видно почему-то даже экспертам.

Мне сильно повезло в том, что, когда я учился в школе, один философ (сотрудник института философии АН СССР), с которым мы вместе плавали в кафедральном бассейне «Москва», настойчиво советовал мне читать Гротендика, но, поскольку книг Гротендика по алгебраической геометрии в Союзе было лишь несколько штук (а и лежи они, толстенные, на всех лотках, даже и не по-французски, их еще пойди пойми), вот взамен — тоненькие (и исключительно внятные) лекции Ю. И. Манина по алгебраической геометрии (первые две главы в [МаАГ]). А в этих лекциях, которые я через пару лет стал читать, написано для непонятливых:

«Спектры колец с нильпотентами имеют внутренние степени свободы, как элементарные частицы». (0.2)

Осталось только, говоря современным языком, расставить в манинских лекциях приставку «супер» — и утвердительный ответ на гипотезу Березина (0.1) готов. Это и сделано в работе [Л0], а в этом томе разобраны некоторые подробности, которых открывается все больше в таком, казалось бы несложном, занятии.

Хотя этот том написан в том числе и для тех математиков, которым физика неинтересна, и для тех физиков, которые хотят разобрать известные математикам структуры суперсимметрий, а мотивировки они как-нибудь и сами знают, в предисловии я все-таки поговорю о приложениях суперсимметрий в физике: без этих приложений нас с Березиным никто бы не слушал. Собственно, до сих пор поразительно мало из разработанного лет 30 назад аппарата и изложенного как в этой книге, так и в доступных с 1987 года препринтах [SoS], физики используют. На некоторых странных упущениях я остановлюсь особо.

Все физические теории инвариантны относительно какой-нибудь группы преобразований. После Лоренца, Пуанкаре, Эйнштейна и Гильберта стало понятно, что группа преобразований, сохраняющая уравнения Эйнштейна, — группа Пуанкаре — самая фундаментальная группа преобразований в физике. Постепенно идеи Германа Вейля[1], систематически начавшего описывать элементарные частицы в терминах калибровочных полей, т. е. сечений векторных расслоений со связностями, проникли (благодаря Янгу и Миллсу) в сознание физиков. Так как расслоения, связанные с элементарными частицами, не «посторонние» пространству Минковского $M^{3,1}$, а являются тензорными или спинорными относительно действия

---

[1] По-английски мы их называем «point-less».

[1] Вообще-то его звали Херман Вайль (Hermann Weyl), а вот Андре Вейль (André Weil) по-русски озвучен правильно.

группы Пуанкаре в касательном расслоении к $M^{3,1}$, все частицы делятся на два типа: с тензорами связаны бозоны, а со спинорами — фермионы [1].

Чтобы уменьшить число действительно элементарных частиц в зоопарке, накопившем к 1960-м годам несколько сот представителей (что стало выглядеть более чем странно), хотелось бы расширить группу Пуанкаре, объединив ее с группой «внутренних симметрий», перетасовывающей такие параметры, как цвета (запахи и т. п.) кварков.

Оказалось, что это невозможно по физическим соображениям: если допустить существование такой большей объемлющей группы, то вылезут некие страшные физические противоречия. А вот если засунуть и группу Пуанкаре, и группу внутренних симметрий в **супер**группу, то никаких противоречий не возникнет, пока супергруппа «не слишком велика». В другом томе я надеюсь воспроизвести эти аргументы на математическом языке и четко описать новые ограничения (теоремы Колемана—Мандулы и Хаага—Лопушанского—Сониуса). Первая попытка дать такое описание словами, понятными математикам, содержится в двухтомнике [QFS].

Итак, с помощью суперсимметрий удалось объединить прежде необъединимое по определению: бозоны и фермионы.

Кроме того, мы бесплатно получили несколько удивительных следствий.

1) Сокращение расходимостей. Оказалось, что мерзкие расходящиеся интегралы, из которых складывалась матрица рассеяния и которые надо было как-то устранять руками в досуперной науке, благополучно убивают друг друга (по крайней мере, если супергруппа достаточно большая): те, которые приходят от бозонов, равны тем, что приходят от фермионов, но имеют другой знак.

2) Идея, восходящая к Анаксагору (500–428 гг. до Р. Х.), о том, что «атом» — это не точка, а протяженное нечто, воплотилась в суперструнах, которые довели объединение всех взаимодействий до желаемого идеала. Не удается лишь построить квантовую теорию супергравитации. А кстати оказалось, что и сама супергравитация непонятно что такое. Обсуждению этих проблем и нашему подходу к их решению будет посвящен отдельный том. Здесь я скажу лишь, что, по моему мнению, выписать «левую часть» уравнений Эйнштейна на супермногообразиях Минковского никак не получалось не потому, что они являются **супер**многообразиями, а из-за эпитета «Минковского», который означает, что они снабжены дополнительной структурой — неинтегрируемым распределением.

---

[1] После этих слов ясно, что откладывать определение спинорных представлений до следующих томов никак невозможно. Но вот объем не позволяет. Я включил это определение (и несколько примеров) в Дополнения ко второму изданию посмертной книги Ф. А. Березина [Бер]

Многообразия с неинтегрируемыми распределениями называются *неголономными*. Они хорошо знакомы механикам, и соответствующим динамическим системам посвящены десятки тысяч статей (часто переоткрывающих результаты друг друга). Слово «неголономный» ввел Г. Герц (см. [Hz]) для обозначения систем с неинтегрируемыми (прежде всего — линейными) связями (ограничениями) на скорости. Простейший пример — шар, катящийся по шершавой плоскости (скорость шара в точке, касающейся плоскости, равна нулю, и это и есть связь), — прозрачно описан Пуанкаре; см. [Poi].

Примеров неголономных систем невообразимо много, не только твердые тела, катающиеся по каким-либо еще (необязательно шершавым) телам, см. [AS, BoMa, E, Mont, Koz]. Свойство кошки, падающей спиной вниз, приземляться на лапы, правила преодоления трудностей, возникающих при парковке автомобиля, — тоже примеры того, как неголономные системы применяются в народном хозяйстве. Пример неголономной связи с нелинейными ограничениями доставляет любой автомобиль с системой контроля скорости (cruise control). Включив систему на разрешенные 55 миль/час, вы реализуете нелинейную связь. Что значит, что она неинтегрируема? На первый взгляд, это труднее описать, чем солдату революции представить себе квадратный трехчлен, но ответ известен и вместе с критериями неинтегрируемости будет изложен в соответствующем томе, а пока см. [GL1, L].

Пора, однако, признаться, что фанфары, вызванные докладом Весса и Зумино (см. [WZ]), которые в 1974 г. ввели термин «суперсимметрии» и первыми осознанно показали некоторые из замечательных ее свойств, вскоре поутихли. Действительно, оказалось, что есть несколько типов суперпространств Минковского, нумеруемых числом $N = 0, 1, \ldots$ $\ldots, 8$ [1]. Собственно, $N = 0$ отвечает обычному пространству, а суперизация начинается с $N = 1$ и наиболее интересна при $N = 8$. Однако выписать аналог тензора Римана и те его компоненты, которые должны стоять в «левой части» уравнений супергравитации, почему-то долго не удавалось. Точнее, за два года после доклада Весса—Зумино удалось разобраться с $N = 1$, а через 10 лет — с $N = 2$ и, говорят, $N = 3$, см. [GIOS]. В своих лекциях Весс (см. [WB]) честно пишет (как одному из настоящих экспертов, ему не нужно делать вид, что он понимает больше, чем на самом деле): «Мы не знаем, как выписать аналог тензора Римана при $N > 1$» [2].

Казалось бы, в чем же дело?! Возьмите любой современный учебник по дифференциальной геометрии, замените в определении тензора Римана алгебру Ли группы G, задающей G-структуру, на супералгебру Ли супергруппы $\mathcal{G}$, задающей $\mathcal{G}$-структуру, расставив кое-где знаки, зависящие от четностей, и получится ответ. Оказывается, этот ответ не совпадает с тем, что физикам хочется видеть, например, при $N = 1$, когда они (думают,

---

[1] Некоторые физики не согласны с ограничением $N \leqslant 8$, см. [BHKV].

[2] Мне непонятны результаты физиков даже в случае $N = 1$; обсуждению моих «непоняток» будет посвящен отдельный том.

что) понимают ответ и могут проверять. Дело, как уже сказано, в том, что супермногообразие Минковского неголономное, а для неголономных многообразий (и супермногообразий) аналога общего рецепта того, как вычислять тензор кривизны, не было. Его не было так долго, что ведущие специалисты даже предположили, что такого общего способа, может, и вовсе нет, см. лекции А. Вершика в работах [Ver] и [Serg1].

Получить же общее описание тензора кривизны в неголономном случае очень хотелось бы: и для того, чтобы написать уравнения супергравитации при $N=8$, и чтобы изучать устойчивость неголономных систем, ибо знак кривизны отвечает за устойчивость (и еще много за что). Нужное определение, оказывается, существует; см. [L, GL1].

Перечислим главное, к чему привело сознательное изучение суперсимметрий и супермногообразий, на которых эти суперсимметрии действуют.

Во-первых, мы изменили модель мира. Преобразования Лоренца, связавшие пространство и время в теории относительности, дополнены преобразованиями, перемешивающими пространственно-временные четные координаты с нечетными, отвечающими, как показали Ф. А. Березин и М. С. Маринов (см. [Бер]), внутренним степеням свободы типа спина. Итак, принято фундаментальнейшее предположение:

МЫ ЖИВЕМ НА СУПЕРМНОГООБРАЗИИ.

В следующих томах мы постараемся описать это, вернее, **эти** супермногообразия (зависящие от N супермногообразия Минковского и их варианты).

Во-вторых, в суперсвете стали яснее некоторые старые конструкции, а про другие, вроде бы и так понятные, стало ясно, что они очень мало продуманы (например, (ко)гомологическая алгебра на супермногообразиях естественно содержит полубесконечные (ко)гомологии и другие диковинные (с точки зрения многообразий) структуры).

В-третьих, осознанное систематическое использование нильпотентов, хоть бы и нестрогое, заставило внедрить в повседневную рабочую практику математиков и физиков язык представимых функторов, параметрических семейств, инфинитезимальных окрестностей и другие, ранее экзотические, понятия алгебраической геометрии, причем теперь — с нечетными параметрами. Этот том посвящен по большей части изложению основ этих понятий.

Наконец, **суперсимметризация приводит к некоммутативной, точнее — несуперкоммутативной, геометрии**. Под «геометризацией алгебры» мы понимаем следующее. Каждую (скажем, конечно порожденную) коммутативную алгебру C можно представить как алгебру глобальных функций на ее спектре $\operatorname{Spec} C$ — множестве простых идеалов алгебры C. До сих пор не вполне ясно, как это[1] сделать для произвольной алгебры C: существует несколько очень разных типов некоммутативности, и единого рецепта, по-видимому, не существует (см., впрочем, книги А. Розенберга [Ro1] и [Ro2], где рассмотрены разные спектры, совокупность которых вроде бы годится во всех случаях). В отличие от А. Розенберга, Алэн Конн (см. [Co]) рассматривает не алгебраическую, а дифференциальную геометрию, но лишь на некотором классе алгебр.

Теория супермногообразий, в отличие от указанных примеров, гораздо ближе к обычной теории многообразий и, собственно, не просто добавляет приставку «супер», как это сделано в тьме статей и нескольких книгах, а часто указывает несколько вариантов привычных понятий, деформирует понятия, казавшиеся жесткими, причем с нечетными параметрами и т. д, см. например, [BGV, Gen].

Насколько сильно можно (стóит) портить некоммутативность алгебры функций? Теория супермногообразий, если по-честному, все-таки коммутативная наука. Ну, суперкоммутативная. Тем удивительнее то, что она вынуждает нас, как это ни трудно, заняться некоммутативной теорией, некоторые зародыши которой то и дело возникали и до 1974 года в «обычной» математике.

Таких зародышей несколько. Простейший пример: $\mathbb{C}^s$ — алгебра комплексных чисел, рассматриваемая как супералгебра над $\mathbb{R}$ с нечетной мнимой единицей. Описанный в главе 1 функтор Q, отвечающий $\mathbb{C}^s$, приводит к удивительному обобщению общей линейной группы и ее алгебры Ли и соответствующим «странным» (queer) детерминанту и следу.

Автоморфизмов алгебры Грассмана больше, чем автоморфизмов **супер**алгебры Грассмана (той же алгебры, но рассматриваемой с суперструктурой), а значит, супергруппа — не самый большой аналог группы преобразований суперпространства, что противоречит самой идее, приведшей к открытию суперсимметрий: описать как можно бóльшую «группу», перемешивающую бозе- и ферми-частицы. Вопрос в том, как описать категорию, содержащую эти более широкие преобразования, давно является **открытым**, несмотря на свою важность.

Разные форматы матричной супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(p|q)$ связаны между собой «нечетными отражениями» — неоднородными обратимыми автоморфизмами, запрещенными внутри категории супералгебр.

Физиков, отвергавших при рождении суперсхем неоднородные преобразования, можно понять: если θ нечетно, то, разлагая e^{θ} в ряд, мы складываем объекты разной природы. Однако, как в первом классе мы преодолеваем запрещение складывать яблоки с грушами, включив и те

---

[1] «Это» — реализовать данную алгебру C как алгебру функций на чем-то.

и другие в класс фруктов, так и тут, забыв про сегодняшнюю интерпретацию, мы вправе задаться лишь вопросом о том: возможно ли, хотя бы **чисто формально** (да простит меня В. И. Арнольд[1]), рассмотреть неоднородные гомоморфизмы, неоднородные подалгебры в супералгебрах, факторы по неоднородным идеалам и т. п.? Оказывается, возможно, а введенные нами простые *алгебры Воличенко*[2], во-первых, образуют (за парой однопараметрических исключений и если ограничиться конечномерными алгебрами) дискретные семейства, которых всего примерно в два раза больше, чем простых супералгебр Ли, а во-вторых, являясь $\mathbb{Z}/2$-фильтрованными алгебрами, они представляют собой одно из естественнейших обобщений $\mathbb{Z}/2$-градуированных алгебр Ли и супералгебр Ли.

В первом варианте этой книги [Лейт] я не настаивал на продолжении начатого в работе [Л0] исследования неоднородных объектов: слишком все были настроены против. С тех пор открытие высокотемпературной сверхпроводимости, переносчиком которой якобы служат частицы более общие, чем бозоны и фермионы, сделало идею неоднородных объектов более приемлемой (см. [BJ1]), да и страсти по прошествии времени поутихли, и я надеюсь, что читатель подхватит эстафету, см. [RS, LSe].

Другой пример более широких, чем суперсимметрии, автоморфизмов суперкоммутативных супералгебр и даже коммутативных алгебр описал Ю. И. Манин (в третьей главе книги [МаАГ]) в классе квадратичных алгебр. Его подход тоже пока, к сожалению, никто не разрабатывал.

* * *

Готовя к печати труды «Семинара по Суперсимметриям», я старался, чтобы их содержание не пересекалось с содержанием посмертной книги Ф. А. Березина [Бер], в которой даны первые определения комплексно-аналитических супермногообразий. Подробности же о комплексно-аналитических супермногообразиях см. в приведенной в книге [Бер] библиографии, а о «физических» супермногообразиях (в отличие от тех, которые только и рассматривают математики) — не вещественных и не комплексных, см. в статье [BGLS].

Я надеюсь, что за этим томом (разбитым на две части: основные факты и дополнительные главы) вскоре последуют (черновые варианты уже готовы) следующие тома.

- Супералгебры Ли.
- Супералгебры Ли над полями положительной характеристики.

---

[1] Это было написано, когда Владимир Игоревич — яростный как-бы противник формалистов (например, Бурбаки) — был жив: ему нравилось, когда с ним шутили.

[2] Алгебра Воличенко — неоднородная подалгебра в супералгебре Ли.

- Пакет программ `SuperLie` и задачи, решенные (или еще нет) с его помощью.
- Семинар Ю. Йоста и Д. Лейтеса «Суперконформные суперповерхности».

§ 0.2. Кем сделаны труды «Семинара по суперсимметриям»[1]

> Книга очень техническая, но очень хорошо написана. Большинство деталей приведено. С другой стороны, у книги есть странная особенность: бо́льшая ее часть (точно более трети), похоже, прямо скопирована со статей, написанных Пирашвили и его соавторами (эти статьи приведены в библиографии). Копирование столь точное, что в книге представлены даже опечатки из этих статей...
>
> MR1489738 (98j:18018) Inassaridze, Hvedri.
> *Неабелева гомологическая алгебра и ее приложения.* [*Non-abelian homological algebra and its applications*]. Mathematics and its Applications, 421. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997. iv+265 pp. ISBN: 0-7923-4718-8
> Реферат для Math. Reviews подготовил
> С. Бетли [Stanislaw Betley]

В 1970–80-е годы некоторые участники семинара подготовили свою контрибуцию в труды семинара, и эти вклады, которые я перевел на английский язык, были препринтированы Стокгольмским университетом; см. [SoS]. (Через 20 лет, когда оригиналы, даже те редкие, что были аккуратно написаны, были давно утрачены, пришлось переводить обратно на русский. И сколько же мелких недочетов при этом обнаружилось...) К сожалению, сперва (в 1980-х) никто из моих соавторов или просто участников семинара, кроме И. Щепочкиной и В. Молоткова, ни разу не смог найти время и желание и перечитать, и отредактировать свои тексты, а потом я им это и не предлагал, поэтому всю ответственность за внесенные улучшения и ухудшения по сравнению с оригиналами несу я.

Самое, на мой взгляд, интересное в трудах Семинара — главы про интегрирование и неполиномиальные функции на суперматрицах (а также главу про дифференциальные уравнения) — написал В. Шандер, и повествование ведется от первого лица им. Классификационные задачи решены совместно с В. Сергановой и И. Щепочкиной. Первый вариант части 1, написанный вместе с И. Бернштейном, составил начало книги [Лейт], а последняя глава из [Лейт] разрослась в несколько томов.

Особняком стоит глава 2, с определений которой (см. [Л0]) все началось. Сперва с разрешения Ю. И. Манина я просто перевел на английский язык его лекции по алгебраической геометрии, вставив в текст необходимые супер-изменения. Недавно Ю. И. Манин согласился перепечатать эти замечательные лекции (первые две главы в книге [МаАГ]), и необходимость приводить их дословно на русском языке отпала. Поэтому я оставил лишь необходимый минимум и отметил особенности суперизации.

---

[1] «Seminar on Supersymmetries» (SoS).

§ 0.3. Благодарности

Я искренне благодарен И. А. Акчурину, философу, который советовал мне, когда я был школьником, изучать работы А. Гротендика и Ю. И. Манина и таким образом психологически подготовил меня к задаче Березина; Ф. А. Березину, который в 1971 г. дал мне задачу «пойди туда — не знаю куда, принеси то — не знаю что», т. е. «построить анализ на алгебре Грассмана»; И. Бернштейну, Ю. И. Манину и А. Л. Онищику — моим учителям.

Я благодарен моим друзьям и коллегам — участникам этого семинара, а также тем, кто хоть не участвовал, но так или иначе мне помогал: Э. Б. Винбергу, С. Г. Гиндикину, Л. Макар-Лиманову, А. Рудакову, М. Семенову–Тян-Шанскому, Б. Фейгину, М. Шубину и М. Шубиной.

За помощь в трудные времена я благодарен П. Делиню, И. Тодорову, М. Хазевинкелю, Я.-Э. Руусу, В. И. Огиевецкому, Г. А. Борисову и А. Д. Гвишиани.

Я с благодарностью вспоминаю стимулирующую атмосферу, которая помогла начать этот проект, в ОИЯИ, Дубна; МИАНе, Москва, и ОММАНИП Карельского филиала АН СССР, Петрозаводск, между 1975 и 1984 гг.

Когда атмосфера изменились, меня поддержали гранты И. Бендикссона (Стокгольмский университет) и Шведский научный фонд; Институт высших научных исследований (Франция), Институт Макса Планка (Германия); Институт высших исследований (Принстон) и Национальный научный фонд США. Большие куски этой книги были набраны (in English), когда я гостил в Институте Макса Планка в Бонне.

Без разнообразной TEX-нической и компьютерной помощи П. Грозмана и В. Молоткова в течение последнего десятилетия результаты семинара так до сих пор и были бы разрозненным набором исчерканных замечаниями листиков. За окончательную тонкую TEX-ническую доводку я благодарен искусству О. Широковой, а главного редактора издательства МЦНМО Ю. Торхова я благодарю за огромную помощь в подготовке трудов Семинара по суперсимметриям к печати.

Я благодарю П. Делиня за замечания к последнему варианту книги.

Наконец, я благодарен РФФИ за финансовую поддержку, а В. П. Павлову и И. М. Щепочкиной за помощь в осуществлении проекта.

За сообщения о замеченных опечатках или неточностях (оставшихся несмотря на огромную помощь Ю. Неретина и А. Л. Онищика в редактировании) и ответах на открытые вопросы я буду очень благодарен. Пишите по адресу: `dleites@yahoo.se`.

Большое спасибо компании Trollrike/Forsmobo AB, Sweden, правообладателю на замечательные рисунки троллей художника Рольфа Линдберга (Rolf Lindberg), многие из которых я трактую как изображения участников Семинара по Суперсимметриям или сотрудников «конкурирующих фирм», за разрешение использовать их (в разрешении сказано, что компания приветствует такое использование и популяризацию шведских искусств и наук).

Огромное спасибо Александру Джусу (`http://dzhusalex.fishup.ru/`) за фотографию бассейна «Москва».

Д. Лейтес,

Карельский филиал АН СССР — МИАН СССР, 1975–1984;

Стокгольмский университет (с командировками в Институт высших научных исследований (Франция), Институт Макса Планка (Германия), Институт высших исследований (Принстон)), 1986–2006;

Институт Макса Планка в Бонне (1987, 2002–2003) и Лейпциге (2004–2006).

Участники Семинара по Суперсимметриям

Бассейн «Москва» зимой 1991г. (фото Александра и Веры Джусов)

§ 0.4. Обозначения

Как редактор, я старался не следовать любимому Ф. А. Березиным афоризму К. Пруткова «Почему судьбу сравнивают с индейкою, а не какой-либо другой, более на судьбу похожею птицею?», который он любил повторять, имея в виду, что обозначения не играют никакой роли. Судьба исторического наследия Эйлера, Лейбница, да и самого Березина этому мнению противоречит: из всего открытого человеком цепче всего запоминаются не доказательства, а обозначения, в крайнем случае — короткие теоремы.

Хотя я и старался уважить заветы Халмоша (см. [Ha]), некоторые обозначения [1], очевидно, хорошо бы переделать, но я не знаю как.

Следуя Бурбаки, будем обозначать супергруппы и группы Ли латинскими буквами, хотя и разных шрифтов, а их супералгебры Ли и алгебры Ли — готическими.

УТВЕРЖДЕНИЕ — факт более или менее очевидный, или с легким доказательством (и в таком случае слово УТВЕРЖДЕНИЕ можно бы и заменить на слово УПРАЖНЕНИЕ), или такой, которой лень или неуместно здесь доказывать (и тогда дана ссылка).

ПРОБЛЕМА — это задача, которой хотелось бы заинтересовать читателя, а ВОПРОС — это задача, про которую мне не ясно, сто́ит ли ее советовать (решать, возможно, сложно, а ценность ответа, пока он не получен, неясна), но в статусе которой (заниматься ей или нет) хотелось бы разобраться. Словом ЗАДАЧА обозначается нечто среднее между УПРАЖНЕНИЕМ, ПРОБЛЕМОЙ и ВОПРОСОМ.

Утверждение, которое предлагается доказать в УПРАЖНЕНИИ, ЗАДАЧЕ и т. п., обычно сформулировано без вводных слов «докажите, что».

Как обычно, ТЕОРЕМА — это утверждение, важность которого, возможно, выходит за пределы этой книги, а ЛЕММА — это вспомогательное утверждение.

По примеру Делиня мы старались, чтобы каждый пункт содержал не больше одной идеи. Этого не всегда удается достичь и некоторые пункты содержат теорему, лемму, предложение и, может, еще что-нибудь, доказательства которых, возможно, разбиты на подпункты. Зато ссылки заметно упрощаются; например, запись «теорема 1.2.3, п. a)» отсылает к п. a) единственной теоремы из п. 1.2.3.

Некоторые обозначения мотивированы в тексте. Например, **мы настаиваем на том, чтобы никогда не обозначать элемент объема на $4|N$-мерном суперпространстве символом $d^4xd^N\theta$**, напоминающим дифференциальные формы, а писать $\mathrm{vol}(x, \theta)$ или, вслед за Делинем, $[d^4x\partial^N\theta]$, где квадратные скобки обозначают, что берется класс элемента

---

[1] Например, обозначения исключительных простых супералгебр Ли и индексацию неэквивалентных систем простых корней простых супералгебр Ли.

$d^4x\partial^N\theta$ в некотором факторпространстве, которое мы опишем в Дополнении.

Как обычно, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ означают множества натуральных, целых неотрицательных, целых, вещественных и комплексных чисел, а $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$ — множества кватернионов и октав (чисел Кэли) соответственно.

Элементы кольца $\mathbb{Z}/m$ вычетов по модулю m помечаются чертой сверху: $\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{m-1}$, чтобы отличить их от целых чисел; при этом $(-1)^{\bar{i}} = (-1)^i$, т. е. определение корректно.

Поле p-адических чисел обозначается $\mathbb{Q}_p$, а кольцо целых p-адических чисел — $\mathbb{Z}_p$. Мы пишем $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p$, где p — простое число, и, более общо, обозначаем символом $\mathbb{F}_q$ поле из q элементов.

Как правило, четные объекты обозначаются латинскими буквами, а нечетные — греческими, но это не закон, и в качестве контрпримера в глаза бросается внешний дифференциал, традиционно обозначаемый буквой d.

В старой литературе супералгебры Ли противоречиво обозначаются как градуированные алгебры Ли, хотя супералгебры Ли алгебрами Ли, даже градуированными, не являются. А в суперреволюционной литературе супермногообразия обозначаются бессмысленным термином «градуированные многообразия» (а вот понятию «градуированного супермногообразия» как раз можно придать смысл, см. написанную В. Молотковым главу о бесконечномерных и «цветных» супермногообразиях).

$A := B$ означает, что символом A мы будем обозначать величину B.

Звездочкой мы обозначаем дуализацию на модулях: M^*, или ${}^*M$ (соответственно правую или левую), или (на операторах): F^*.

$A^\times$ — группа обратимых элементов алгебры A.

$\Omega^\bullet$ обозначает градуированное пространство $\Omega^\bullet = \oplus\Omega^i$ и т. п., т. е. жирная точка сверху обозначает, как нынче модно, прямую сумму, а в индексе снизу мы используем старорежимную звездочку, как, например, в картановском продолжении $\mathfrak{g}_* = \oplus\mathfrak{g}_i$.

Следующие суперные тезки несуперных понятий мы обозначаем так:

$$\mathbb{S}^\bullet(V) = S^\bullet(V_{\bar{0}}) \otimes E^\bullet(V_{\bar{1}}),$$
$$\mathbb{E}^\bullet(V) = E^\bullet(V_{\bar{0}}) \otimes S^\bullet(V_{\bar{1}}),$$

где S^i и E^i — операторы несуперных симметрических и внешней степеней. Однако для чисто нечетного V мы часто пишем $\Lambda(V)$ вместо правильного обозначения $\mathbb{S}^\bullet(V)$ или $\mathbb{E}^\bullet(V)$.

$[x, y]_- := xy - yx$ — коммутатор,
$[x, y]_+ := xy + yx$ — антикоммутатор,
$[x, y] := xy - (-1)^{p(x)p(y)}yx$ — суперкоммутатор,
$[x, y]_{s+} := xy + (-1)^{p(x)p(y)}yx$ — суперантикоммутатор.

$\operatorname{diag}(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$; аналогично $\operatorname{diag}_n(a_1, \ldots, a_n)$ для n блоков.

$\operatorname{antidiag}(a, b) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$; аналогично $\operatorname{antidiag}_n(a_1, \ldots, a_n)$ для n блоков.

$I_n^r = \operatorname{diag}(1_r, -1_{n-r})$.

$S_n^r = \operatorname{antidiag}_n(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r\text{ раз}}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n-r\text{ раз}})$.

$i \inplus d$ или $d \niplus i$ — полупрямая сумма алгебр, где i — идеал;
$N \ltimes D$ или $D \rtimes N$ — полупрямое произведение групп, где N — нормальный делитель.

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{или просто } J\text{, когда } n \text{ неважно,}$$

$$\Pi_m = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix} & \text{при } m = 2n, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 1_n & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{при } m = 2n+1 \end{cases} \qquad \text{или просто } \Pi\text{, когда } m \text{ неважно.}$$

Мультииндекс — это упорядоченный набор $n = (n_1, \ldots, n_k)$, где $n_i \in \mathbb{Z}_+$. Мы полагаем

$$|n| = n_1 + \ldots + n_k, \quad p(n) \equiv |n| \mod 2.$$

Для набора переменных $x = (x_1, \ldots, x_k)$ положим

$$x^n = x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}, \quad \frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n} = \frac{\partial^{|n|}}{\partial x_1^{n_1} \ldots \partial x_k^{n_k}},$$

в частности, при $|n| = 0$ мы полагаем

$$\frac{\partial^0 f}{\partial x_j} = f \text{ и } x_j^0 = 1 \text{ при всех } j.$$

$\#(M)$ — сокращение для $\operatorname{card}(M)$ — мощность множества M.

$\operatorname{Span}(X)$ — пространство над основным полем, натянутое на элементы множества X.

* * *

Рекомендуемая альтернативная литература: прежде всего — книга К. Ефетова [Ef] (одно название чего сто́ит) и первый том из [QFS].

Хотя мы старались вычерпать всё, на наш взгляд, интересное и правильное на данную тему, рекомендуемые ниже книги содержат, кроме собственно алгебры и анализа (в широком смысле), разные приложения: [Q], [B1, Бер, BS, Shu], [Kaku, KakuS], [Dav, Gin], [МаКП, МаТ], [GIOS], [DBS], [GPS], [GSW], [Shk].

§ 0.5. Представимые функторы — язык суперсимметрий

> Глава 1. **Категории и функторы.**
> Упражнения. Возьмите любую книгу по гомологической алгебре и докажите ее теоремы самостоятельно*.
>
> ---
>
> * Мы рекомендуем читателю пропустить эти упражнения при первом чтении. — *Прим. ред.*
>
> ---
>
> *С. Ленг.* Алгебра.
> Перевод с первого английского
> издания под ред. А. И. Кострикина.
> (В третьем издании нет не только
> этих упражнений, но и самой главы.)

Мы советуем пропустить этот параграф при первом чтении и возвращаться к нему с помощью предметного указателя, по мере необходимости. Зато эксперты сразу увидят, как именно надо изучать такие объекты, как орбиты под действием супергрупп, которые, хоть они и не являются супермногообразиями (даже с особенностями), очень хотелось бы иметь в хозяйстве (согласно одной теореме А. А. Кириллова любая механическая система реализуется на орбитах).

Эта книга написана так, чтобы ее можно было понимать, если известны стандартные университетские математические курсы первых двух лет, почти не отрываясь за справками, а основной текст — совсем не отрываясь. Однако, имея в виду также читателя-физика, чей математический багаж довольно эклектичен и часто нелогичен с точки зрения математика (физик обычно не знает определения колец, но хорошо знаком с более сложным частным случаем — алгебрами и т. п.), мы отсылаем к книге Ф. А. Березина [Бер] за первыми определениями.

Название книги Мак Лейна [McL] («Теория категорий для работающих математиков») рискованно тем, что апелляция к комплексу неполноценности читателя может как побудить к покупке, так и наоборот, «давить авторитетом», как сказал бы О. Бендер, на тех многих как математиков, так и физиков, хотя и «работающих», но обходящихся без теории категорий. Так вот, заниматься суперсимметриями, не зная, что такое представимый функтор, можно, но зная — гораздо легче. Соответствующие определения — чуть ниже, а следствия — практически вся литература по суперсимметриям.

0.5.1. Некоторые понятия теории категорий [МаАГ]. Язык категорий, пишет Ю. И. Манин, воплощает «социологический» подход к математическим объектам: группа или пространство рассматривается не как множество с внутренне присущей ему структурой, но как член сообщества себе подобных.

Прекрасными учебниками по теории категорий являются книги Мак Лейна [McL] и С. И. Гельфанда и Ю. И. Манина [ГМ]; мы рекомендуем их для дальнейшего чтения.

0.5.2. Категория C — это набор следующих данных:

а) набор $\operatorname{Ob}\mathsf{C}$, элементы которого называются *объектами*,

б) для каждой упорядоченной пары $X,\ Y\in\operatorname{Ob}\mathsf{C}$ задан (возможно, пустой) набор $\operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(X,\ Y)$, элементы которого называются *морфизмами* или *стрелками* из X в Y;

в) для каждой упорядоченной тройки объектов $X,\ Y,\ Z\in\operatorname{Ob}\mathsf{C}$ задано отображение — *композиция морфизмов*:

$$\operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(X,\ Y)\times\operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(Y,\ Z)\longrightarrow\operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(X,\ Z).$$

Эти данные должны удовлетворять двум аксиомам:

ассоциативность: $(\chi\psi)\varphi=\chi(\psi\varphi)$ для любых морфизмов

$$\varphi\colon X\to Y,\quad \psi\colon Y\to Z\quad\text{и}\quad\chi\colon Z\to V;$$

тождественные морфизмы: для каждого $X\in\operatorname{Ob}\mathsf{C}$ существует морфизм $\mathrm{id}_X\colon X\to X$, такой что

$$\mathrm{id}_X\circ\varphi=\varphi\quad\text{и}\quad\psi\circ\mathrm{id}_X=\psi,$$

всякий раз, когда эти композиции определены.

Обозначения. Если ясно, о какой категории C идет речь, часто вместо $X\in\operatorname{Ob}\mathsf{C}$ пишут $X\in\mathsf{C}$, а вместо $\operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(X,\ Y)$ пишут $\operatorname{Hom}(X,\ Y)$. Полагают также

$$\operatorname{Mor}\mathsf{C}=\coprod_{X,Y\in\operatorname{Ob}\mathsf{C}}\operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(X,\ Y).$$

Если $\operatorname{Ob}\mathsf{C}\subset\operatorname{Ob}\mathsf{D}$ и $\operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(X,\ Y)=\operatorname{Hom}_{\mathsf{D}}(X,\ Y)$ для всех $X,\ Y\in\operatorname{Ob}\mathsf{C}$ и, сверх того, композиции морфизмов в C и в D совпадают, категория C называется *полной подкатегорией* категории D.

Комментарий. Если набор $\operatorname{Ob}\mathsf{C}$ или наборы $\operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(X,\ Y)$ являются «классами», то категория C называется большой, а если множествами — то малой. Классы нужны, чтобы мочь рассматривать монстры, похожие на «множества всех множеств», но классы часто слишком велики; например, категорию функторов нельзя построить, если объекты образуют классы. Выход существует: ввести «универсум» — большое множество множеств, стабильное относительно всех операций, какие нам требуются, после чего рассматривать лишь категории из этого универсума. Подробности (несущественные для нас) см. в [McL] и главе В. Молоткова о цветных и бесконечномерных супермногообразиях в томе 2.

0.5.3. Примеры. Для удобства примеры разбиты на три группы.

1) Объекты этой группы примеров — множества с какой-нибудь структурой, а морфизмы — отображения множеств, сохраняющие эту структуру (дотошного читателя мы отсылаем за определением структуры к энциклопедии [МЕ]; из контекста интуитивно понятно, о чем идет речь):

Sets (или Ens во французских текстах) — категория множеств и их отображений;
Top — категория топологических пространств и их непрерывных отображений;
Gr — категория групп и их гомоморфизмов;
Gr_{f} — подкатегория в Gr, объекты которой конечные группы;
Ab — подкатегория в Gr, объекты которой абелевы группы;
Rings — категория колец и их гомоморфизмов;
Algs или $\mathsf{Algs}_{\mathbb{K}}$ — категория алгебр над полем $\mathbb{K}$ и их гомоморфизмов;
SAlgs — подкатегория супералгебр в Algs; морфизмы — лишь четные гомоморфизмы;
A- Algs — категория A-алгебр и их гомоморфизмов;
A- Mods — категория (правых) A-модулей и их гомоморфизмов.
Aff Sch — аффинные схемы и их морфизмы (см. гл. 2).

2) Объекты этой серии примеров по прежнему наделены структурой, но морфизмы ее игнорируют (у этих категорий нет стандартных имен):

— основная категория гомотопической топологии: ее объекты — топологические пространства, а морфизмы — не сами непрерывные отображения, а лишь их гомотопические классы;

— аддитивные соотношения: объекты — абелевы группы; морфизмом $\varphi\colon X \to Y$ называется любая подгруппа в $X \times Y$, а композиция морфизмов $\varphi\colon X \to Y$ и $\psi\colon Y \to Z$ задается соотношением

$$\psi\varphi := \{(x, z) \in X \times Z \mid \text{ существует } y \in Y, \text{ такой что } (x, y) \in \varphi, (y, z) \in \psi\}.$$

Категория Metab Algs (Metab Rings), объекты которой суперкоммутативные супералгебры (суперкольца) и их (*возможно, неоднородные*) подалгебры (подкольца), а морфизмы — любые, не обязательно однородные относительно четности, гомоморфизмы алгебр (колец); теорема Воличенко показывает, что эти алгебры (кольца) метабелевы, отсюда и название.

3) Эту группу примеров образуют некоторые классические структуры, которые (как оказалось) удивительно полезно рассматривать как категории. Мы отметим лишь один пример.

Пусть X — топологическое пространство. Обозначим символом Top_X категорию, объекты которой открытые множества в X, а морфизмы — вложения открытых множеств. Эта тривиальная конструкция привела к очень важному понятию *топологии Гротендика*, или *топоса*, см. [J], а также имеющие отношение к нашей книге обобщения А. Розенберга [Ro1], [Ro2] и В. Молоткова («о глютосах»), см. том 2.

0.5.4. Как строить категории.

Известно несколько полезных способов строить новые категории из имеющихся; мы отметим следующие три из них.

Двойственная категория. По данной категории C построим двойственную категорию, C°, объекты которой X° суть «копии» объектов X из C, а множества $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}^\circ}(X^\circ, Y^\circ)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с множествами $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Y, X)$, причем если $\varphi^\circ\colon X^\circ \to Y^\circ$ соответствует морфизму $\varphi\colon Y \to X$, то

$$(\varphi\psi)^\circ = \psi^\circ\varphi^\circ \quad \text{и} \quad \mathrm{id}_{X^\circ} = (\mathrm{id}_X)^\circ.$$

Неформально говоря, C° получается из C обращением стрелок.

Эта конструкция интересна в двух крайних случаях: когда категория C° «сильно похожа» на C (например, эквивалентна C или просто совпадает с C) и когда C° «очень непохожа» на C.

Примером первой ситуации является $\mathsf{C} = \mathsf{Ab}_f$, категория конечных абелевых групп. Этот случай ($\mathsf{C} = \mathsf{C}^\circ$) — сцена для различных законов двойственности.

Примерам второй ситуации посвящена гл. 2: $\mathsf{C} = \mathsf{Rings}$, а $\mathsf{C}^\circ = \mathsf{Aff\ Sch}$ — категория аффинных схем, «геометрические свойства» которой позволяют склеивать «локальные объекты» $X^\circ \in \mathsf{Aff\ Sch}$ в глобальные — схемы. Этой операции — склейке — нет аналога в Rings.

Категория объектов над фиксированной базой. По заданной категории C и ее объекту S построим категорию C_S, положив

$$\mathrm{Ob}\,\mathsf{C}_S = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, S) \mid X \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}\},$$

а морфизм из $\varphi\colon X \to S$ в $\psi\colon Y \to S$ определяется из условия

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_S}(\varphi, \psi) := \{\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y) \mid \varphi = \psi\chi\}.$$

Примеры. 1) Категория $\mathsf{Rings} = R\text{-}\mathsf{Alg}$ — категория R-алгебр над фиксированным кольцом R.

2) Категория Vebun_B — категория векторных расслоений над фиксированным многообразием B.

Категория $(\mathsf{C}_S)^\circ$ имеет дело с морфизмами $S \to X$. В частности, такого вида объектами являются группы и алгебры токов с базой S.

Произведением категорий C_i, где $i \in I$, называется категория $\prod\limits_{i\in I} C_i$, в которой $\mathrm{Ob} \prod \mathsf{C}_i := \prod \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}_i$, а морфизмы определяются покоординатно: $\mathrm{Hom}_{\prod\limits_{i\in I}\mathsf{C}_i}\Big(\prod\limits_{k\in I} X_k, \prod\limits_{l\in I} Y_l\Big) := \prod\limits_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_i}(X_i, Y_i)$.

0.5.5. Функторы.

Ковариантным функтором или просто *функтором* из категории C в категорию D называется набор отображений $(F, F_{X,Y})$, обычно кратко обозначаемый $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, где отображение $F\colon \mathrm{Ob}\,\mathsf{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathsf{D}$ и отображения

$$F_{X,Y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(X), F(Y)) \quad \text{для любых} \quad X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$$

таковы, что

$$F_{X,Z}(\psi\varphi) = F_{Y,Z}(\psi)F_{X,Y}(\varphi)$$

для любых $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}\,\mathsf{C}$, для которых $\psi\varphi$ определен.

Функтор $F\colon \mathsf{C}_1 \times \mathsf{C}_2 \to \mathsf{D}$ называется бифунктором и т. д.

Функтор из C° в D называется *контравариантным функтором* из C в D.

Композиция $GF\colon \mathsf{C} \to \mathsf{E}$ функторов $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ и $G\colon \mathsf{D} \to \mathsf{E}$ строится из композиций, входящих в определение отображений $G \circ F$ и $G_{F(X),F(Y)} \circ F_{X,Y}$.

Наиболее важными примерами функторов являются «естественные конструкции»: группы гомологий, когомологий и гомотопий являются функторами $\mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ (дополнительная структура колец или суперколец на когомологиях и гомотопиях позиционирует их, как теперь выражаются, как функторы $\mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Rings}$ или $\mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Salgs}$); характеры и, более общо, представления групп дают функторы $\mathsf{Gr} \longrightarrow \mathsf{Rings}$.

Предпучок[1] *множеств* (или групп, колец, алгебр, супералгебр, R-модулей и т. п.) на топологическом пространстве X — это контравариантный функтор из категории Top_X (открытых множеств пространства X) в категорию Sets (соответственно Gr, Rings, Algs, Salgs, $\mathsf{R\text{-}Mods}$ и т. д.).

Функторы из C в D являются объектами категории $\mathsf{Funct}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$. *Морфизм $f\colon F \to G$ функторов F, $G\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$* состоит из набора морфизмов

$$\{f\colon F(X) \longrightarrow G(X) \mid X \in \operatorname{Ob}\mathsf{C}\},$$

такого что для любого $\varphi \in \operatorname{Hom}_C(X, Y)$ выполняется равенство

$$G(\varphi) \circ f(X) = f(Y) \circ F(\varphi).$$

Функторный морфизм называется *функторным изоморфизмом*, если $f(X) \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}}$ — изоморфизм при всех X. Функтор $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ называется *эквивалентностью категорий*, если существует функтор $G\colon \mathsf{D} \to \mathsf{C}$, такой, что $GF \simeq \mathrm{id}_{\mathsf{C}}$, $FG \simeq \mathrm{id}_{\mathsf{D}}$, где $\simeq$ означает *изоморфизм функторов*; категории C и D в таком случае называются *эквивалентными*.

Примеры эквивалентных категорий:

1) $(\mathsf{Ab}_f)^\circ \cong \mathsf{Ab}_f$; эквивалентность задается переходом к группе характеров $G \longleftrightarrow \widehat{G}$;

2) соответствие $R \longleftrightarrow \operatorname{Spec} R$ задает эквивалентность $\mathsf{Rings}^\circ \cong \mathsf{Aff\ Sch}$.

0.5.6. Представимые функторы. Пусть $\widehat{\mathsf{C}} = \mathsf{Funct}(\mathsf{C}^\circ, \mathsf{Sets})$. Очевидно, что C можно вложить в $\widehat{\mathsf{C}}$, сопоставив каждому объекту $X \in \operatorname{Ob}\mathsf{C}$ функтор $P_X \in \operatorname{Ob}\widehat{\mathsf{C}}$, такой что

$$P_X(Y^\circ) = \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(Y, X) \quad \text{для любого } Y^\circ \in \operatorname{Ob}\mathsf{C}^\circ,$$

а каждому морфизму $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(Y_1, Y_2)$ соответствующее отображение множеств $P_X(Y_2^\circ) \longrightarrow P_x(Y_1^\circ)$, переводящее $\psi\colon Y_2 \to X$ в композицию $\psi\varphi\colon Y_1 \to Y_2 \to X$.

---

[1] Это определение годится, возможно, в американском суде, но использовать его нелегко. А определение, которое можно понять, см. в гл. 2.

Морфизм $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(P_{X_1}, P_{X_2})$ каждому $Y^\circ \in \operatorname{Ob}\mathsf{C}^\circ$ сопоставляет морфизм

$$P_\alpha(Y^\circ)\colon P_{X_1}(Y^\circ) \longrightarrow P_{X_2}(Y^\circ),$$

переводящий $\psi \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(Y, X_1)$ в композицию $\alpha\psi\colon Y \to X_1 \to X_2$.

Очевидно, что $P_{\alpha\beta} = P_\alpha \circ P_\beta$.

Теорема. *Отображение $\alpha \mapsto P_\alpha$ задает изоморфизм множеств $\operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y) \cong \operatorname{Hom}_{\widehat{\mathsf{C}}}(P_X, P_Y)$ и это отображение функториально как по X, так и по Y, т. е. является функтором от одного аргумента при фиксированном другом.*

Функтор $F\colon \mathsf{C}^\circ \to \mathsf{Sets}$ называется *представимым*, если он изоморфен функтору P_X для какого-то объекта $X \in \operatorname{Ob}\mathsf{C}$. Такой объект X называется *объектом, представляющим функтор F*.

Функтор $P\colon \mathsf{C} \to \widehat{\mathsf{C}}$ является, таким образом, эквивалентностью категории C с полной подкатегорией, состоящей из представимых функторов.

Следствие. *Если функтор из $\widehat{\mathsf{C}}$ представим, то объект, его представляющий, определен однозначно с точностью до изоморфизма.*

Комментарий. Символом $*$ обозначим одноточечное множество. Каждый элемент «достаточно просто» устроенных объектов, составляющих некоторые категории C, можно изображать теоретико-множественными моделями, другими словами, моделями, состоящими из точек. А точки множеств M можно отождествить с образами одной-единственной, фиксированной точки, т. е. $M \simeq \operatorname{Hom}(*, M)$ для любого множества $M \in \mathsf{C}$.

Если объектами категории C являются множества M, а также группы, кольца и другие *множества* (пусть даже с какой-то структурой), то их можно изображать *одной* теоретико-множественной моделью — множеством $M \simeq \operatorname{Hom}(*, M)$.

Часто удобнее пользоваться двойственным определением *копредставимого функтора*. Если некий функтор представим чем-то, то алгебра функций на этом чем-то и является копредставляющим объектом.

Пример. Дайте определение копредставимого функтора.

0.5.6а. Объекты со структурой. Часто встречаются категории, объекты которых мы представляем в виде множеств с какой-то внешней надстройкой, в то время как всегда хочется описывать объекты любой категории, как и выше, — в терминах множеств и только.

Пример. По определению *супергруппа* Ли — это группа в категории супермногообразий. Как задать структуру группы на объекте произвольной категории (в данном случае — категории супермногообразий)?

По определению объект $X \in \operatorname{Ob}\mathsf{C}$ является группой (соответственно кольцом) в категории C, если каждое множество $P_X(Y)$ является группой (соответственно кольцом) для любого объекта $Y \in \mathsf{C}$ и каждый морфизм

$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Y_1, Y_2)$ индуцирует гомоморфизм групп (колец)

$$P_\varphi\colon P_X(Y_1) \longrightarrow P_X(Y_2).$$

Множества $P_X(Y)$ называются *Y-точками объекта* X и иногда обозначаются $X(Y)$ или $\underline{X}(Y)$.

Вышеприведенное определение группы в категории выглядит устрашающе: чтобы задать одну супергруппу G, надо задать группы $G(Y)$ для всех супермногообразий Y, да еще и согласованные друг с другом гомоморфизмы P_φ для каждого морфизма $\varphi\colon Y_1 \to Y_2$. Неожиданно оказывается, что в терминах копредставляющих объектов это совсем просто.

0.5.6б. Объекты, которых нет, но которые хотелось бы иметь. Часто встречаются следующие две ситуации.

1) Среди функторов $\mathsf{C}^\circ \to \mathsf{Sets}$, т. е. среди объектов из $\widehat{\mathsf{C}}$, некоторые функторы возникают естественно, но отнюдь не в виде функторов P_X, хотя в конце концов оказывается, что представляющий объект существует. Поиски таких объектов для функторов, представляющих интерес, — довольно важное занятие, ибо, хотя теоретико-множественные модели удобны для решения одних вопросов, непосредственное описание в терминах исходной категории C часто удобно в решении других вопросов.

2) Объекта, представляющего некоторый естественный функтор, не существует. Расширим тогда категорию $\mathsf{C} \subset \widehat{\mathsf{C}}$, добавив к ней функторы, которые нам требуются.

Например, если C — категория супермногообразий, то орбита супергрупп или факторы по действию супергруппы часто (хочется сказать: как правило) не являются супермногообразиями, а вот функторы, соответствующие этим несуществующим в C объектам, определены прекрасно.

К сожалению, часто бывает непонятно, как распространить на новые объекты большинство из конструкций, применимых к объектам из C.

Вот еще пример объекта, часто задаваемого лишь в виде функтора. Все морфизмы из одного множества в другое составляют множество; множество морфизмов из одной абелевой группы в другую составляют абелеву группу. Множество морфизмов (линейных отображений) одного векторного пространства в другое составляют векторное пространство. Такого рода примеров много, и объект из C, представляющий функтор морфизмов из X в Y для любых $X, Y \in \mathsf{C}$, обозначается символом $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ и называется *внутренний* Hom.

В категориях с конечными произведениями «$\cdot$» этот $\underline{\mathrm{Hom}}$ обычно определяют из формулы

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, \underline{\mathrm{Hom}}(Y, Z)) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X \cdot Y, Z).$$

Например, если X, Y и Z — суперпространства, то «$\cdot$» — это тензорное произведение, а $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y) = X^* \otimes Y$, в то время как $\mathrm{Hom}(X, Y) = (X^* \otimes Y)_{\bar{0}}$.

> Украсть не трудно. На место положить —
> вот в чем штука.
>
> *М. Булгаков.* Записки покойника

Литература

[Бер1] *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. 2-е изд., доп. / Под ред. М. К. Поливанова. М.: Наука, 1986.

[Бер] *Березин Ф. А.* Введение в суперанализ. 2-е изд., испр. и доп. / Под ред. Д. А. Лейтеса. М.: МЦНМО, готовится к печати[1].

[БерЛ] *Березин Ф. А., Лейтес Д. А.* Супермногообразия // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224. С. 505–508.

[БШ] *Березин Ф. А., Шубин М. А.* Уравнение Шрёдингера. М.: МГУ, 1983.
Расширенный перевод: *Berezin F. A.*; *Shubin M. A.* The Schrödinger equation / Translated from the 1983 Russian edition by Yu. Rajabov, D. A. Leites and N. A. Sakharova and revised by Shubin. With contributions by G. L. Litvinov and Leites // Mathematics and its Applications (Soviet Series), V. 66. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1991.

[Верш] *Вершик А. М.* Классическая и неклассическая механика со связями // Геометрия и топология в глобальных нелинейных задачах / Под ред. Ю. Г. Борисовича, Ю. Е. Гликлиха. Воронеж: ВГУ, 1984. (Новое в глобал. анализе.);
Nonholonomic manifolds and nilpotent analysis // J. Geom. Phys. 1988. V. 5, № 3. P. 407–452

[ВеБа] *Весс Ю., Баггер Дж.* Суперсимметрия и супергравитация. М.: Мир, 1986.

[Восп] Воспоминания о Феликсе Александровиче Березине — основоположнике суперматематики / Составители Е. Г. Карпель и Р. А. Минлос, под ред. Д. А. Лейтеса и И. В. Тютина. М.: МЦНМО, 2009.

[Дев] *Девис П.* Суперсила. Поиски единой теории природы / Пер. с англ. яз. под ред. Б. М. Лейкина. М.: Мир, 1989.

[ГМ] *Гельфанд С. И., Манин Ю. И.* Методы гомологической алгебры. Введение в когомологии и производные категории. Т. 1. М.: Наука, 1988.

[Ген] *Генденштейн Л. Э., Криве И. В.* Суперсимметрия в квантовой механике // Успехи. Физ. наук. 1985. Т. 146, вып. 4. С. 553–590.

[Гц] *Герц Г.* Принципы механики, изложенные в новой связи, М.: АН СССР, 1959.

[Гин] *Гиндикин С. Г.* Рассказы о физиках и математиках. 4-е изд., исправленное. М.: МЦНМО, 2006.

[ГШВ] *Грин М., Шварц Дж., Виттен Э.* Теория суперструн. М.: Мир, 1990[2].

[Дж] *Джонстон П. Т.* Теория топосов. М.: Наука, 1986.

[Каку] *Каку М.* Введение в теорию суперструн. М.: Мир, 1999;

[Коз] *Козлов В. В.* Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.

[Л0] *Лейтес Д. А.* Спектры градуированно-коммутативных колец // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29, № 3. С. 209–210.

[Лейт] *Лейтес Д. А.* Теория супермногообразий. Петрозаводск: Карельский филиал АН СССР, 1983.

---

[1] В этой посмертной книге есть несколько глубоких идей, до сих пор не понятых и не оцененных, но первое издание не для первого чтения. О Ф. А. Березине и дальнейшем развитии некоторых из его идей см. [Восп].

[2] Как и все прочие работы Виттена (не только по суперсимметрии), эта книга входит в обязательный минимум.

[МакЛ] *Маклейн С.* Категории для работающего математика. М.: Физматлит, 2004.

[МаКП] *Манин Ю. И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984.

[МаАГ] *Манин Ю. И.* Введение в теорию аффинных схем и квантовых групп / Под ред. Д. А. Лейтеса, С. М. Львовского. М.: МЦНМО, готовится к печати.

[МЭ] Математическая энциклопедия. Том 5. Слу–Я / Под ред. И. М. Виноградова. М.: Советская энциклопедия, 1985.

[НеГо] Неголономные динамические системы. Интегрируемость. Хаос. Странные аттракторы / Ред. А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

[Пуан] *Пуанкаре А.* Идеи Герца в механике // Пуанкаре А. Последние работы. М.–Ижевск: РХД, 2001.

[Ха] *Халмош П. Р.* Как писать математические тексты / Пер. с англ. // Успехи матем. наук. 1971. Т. XXVI, вып. 5 (161).

[AgSa] *Agrachev A.*, *Sachkov Yu.* Control theory from the geometric viewpoint // Control Theory and Optimization, II. (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, V. 87.) Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[Baez] *Baez J.* Anyons and Braids. `http://math.ucr.edu/home/baez/braids/node2.html`

[BGV] *Berlin N.*, *Getzler E.*, *Vergne M.* Heat kernels and Dirac operators // Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 298. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

[BGLS] *Bouarroudj S.*, *Grozman P.*, *Leites D. Shchepochkina I.*, Minkowski superspaces and superstrings as almost real-complex supermanifolds; `arXiv: 1010.4480`

[BHKV] *Brink L.*, *Hansson T. H.*, *Konstein S.*, *Vasiliev M. A.* The Calogero model-anyonic representation, fermionic extension and supersymmetry // Nuclear Phys. 1993. V. B401, № 3. P. 591–612.

[Car] *Cartier P.* A mad day's work: from Grothendieck to Connes and Kontsevich. The evolution of concepts of space and symmetry / Translated from the French by Roger Cooke // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) 2001. V. 38, № 4. P. 389–408. (Inst. Hautes Études Sci., 1998.)

[CoEn] Concise Encyclopedia of Supersymmetry and Noncommutative Structures in Mathematics and Physics / Duplij S., Bagger J., Siegel W. (eds.) Dordreht: Kluwer, 2003.

[Conn] *Connes A.* Noncommutative geometry. San Diego, CA: Academic Press, Inc., 1994.

[Dyn] Dynamics and control of mechanical systems: The falling cat and related problems / Enos M. (ed.) // Fields institute communications, № 1. AMS, 1993.

[Ef] *Efetov K.* Supersymmetry in disorder and chaos. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[GIOS] *Galperin A. S.*, *Ivanov E. A.*, *Ogievetsky V. I.*, *Sokatchev E. S.* Harmonic superspace // Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[GPS] *Gomis J.*, *Paris J.*, *Samuel S.*, Antibracket, Antifields and Gauge-Theory Quantization // Phys. Rept. 1995. V. 259. P. 1–191.

[GL1] *Grozman P.*, *Leites D.* From supergravity to ballbearings // Procedings of the Internatnl seminar in the memory of V. Ogievetsky / Wess J., Ivanov E. (eds.) (Dubna, 1997). Springer Lect. Notes in Physics, 1999. V. 524. P. 58–67;
Грозман П., *Лейтес Д.* Неголономные аналоги тензоров Римана и Вейля для многообразий флагов // Теор. и матем. физика. 2007. V. 153, № 2. С. 186–219; `arXiv:math.DG/0509399`

[Kaku] *Kaku M.* Hyperspace: A Scientific Odyssey Through Parallel Universes, Time Warps and the Tenth Dimension. Anchor, 1995.
Kaku M. Introduction to superstrings and M-theory. Second edition // Graduate Texts in Contemporary Physics. New York: Springer-Verlag, 1999;
Kaku M. Strings, conformal fields, and M-theory. Second edition // Graduate Texts in Contemporary Physics. New York: Springer-Verlag, 2000.

[LRie] *Leites D.* The Riemann tensor for nonholonomic manifolds // Homology Homotopy Appl. 2002. V. 4, № 2, part 2. P. 397–407; `arXiv:math.RT/0202213`

[LSe] *Leites D. Serganova V.* Symmetries wider than supersymmetries // Noncommutative structures in mathematics and physics / S. Duplij and J. Wess (eds.). (Proc. NATO Advanced Research Workshop, Kiev, 2000.) Kluwer, 2001. P. 13–30.

[MaT] *Manin Yu.* Topics in noncommutative geometry. Princeton Univ. Press, 1991.

[Mont] *Montgomery R.* Isoholonomic problem and some applications // Comm. Math. Phys. 1990. V. 128, № 3. P. 565–592;
Montgomery R. A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications // Mathematical Surveys and Monographs, 91. Providence, RI: American Mathematical Society, 2002.

[QFS] Quantum fields and strings: a course for mathematicians. V. 1, 2 / Deligne P. et al (eds.) Princeton, NJ: Institute for Advanced Study (IAS), 1999. V. 1, 2.

[Q] *Quillen D.* Superconnections and the Chern character // Topology. 1985. V. 24, № 1. P. 89–95.
Quillen D. Superconnection character forms and the Cayley transform // Topology. 1988. V. 27, № 2. P. 211–238.
Mathai V., *Quillen D.* Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms // Topology. 1986. V. 25, № 1. P. 85–110.

[Ro1] *Rosenberg A.* Noncommutative algebraic geometry. [SoS, 26/1988-8] A version: *Noncommutative algebraic geometry and representations of quantized algebras*. Mathematics and its Applications, 330. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1995. xii+315 pp.; позднейшие добавки: препринты MPIM-Bonn [1999-83, 84, 2003-110, 111, 112] (www.mpim-bonn.mpg.de)

[Ro2] *Rosenberg A.* Almost quotient categories, sheaves and localization // SoS, 25/1987-7.

[RS] *Rubakov V. A.*, *Spiridonov V. P.* Parasupersymmetric quantum mechanics // Modern Phys. Lett. 1988. V. A 3, № 14. P. 1337–1347.

[Shk] *Scherk J.* Antigravity: a crazy idea? // Phys. Lett. 1979. V. B 88, № 3–4. P. 265-267.

[SoS] Seminar on supermanifolds 1977–1990./ *Leites D.* (ed.) // Reports of Dept. of Math. of Stockholm Univ. № 1–35, 1986–90; № 36–37. MPIM-Bonn, 2002.

[Serg1] *Sergeev V.* The Thermodynamic Approach to Markets / edited by *Leites D.* with appendix by Vershik A.; `arXiv:0803.3432v1`

[Shu] *Shubin M. A.* Semiclassical asymptotics on covering manifolds and Morse inequalities // Geom. Funct. Anal. 1996. V. 6, № 2. P. 370–409.

[WZ] *Wess J.*, *Zumino B.* Supergauge Transformations in Four Dimensions // Nuclear Phys. 1974. V. B70. P. 39–50;

[Zb] `http://www.thp.uni-koeln.de/zirn/publikationen.htm`

Алгебра и анализ на супермногообразиях

Глава 1

Линейная алгебра в суперпространствах

Цель этой главы — перенести на суперпространства основные понятия линейной алгебры; в Дополнении и томе 2 рассмотрены некоторые важные теоремы общей алгебры.

Нам хотелось бы достичь той же прозрачности и легкости изложения, что и в книгах Гельфанда [Гел] и Херстейна [Her], охватив при этом также основные понятия и теоремы из книг [Prs], [Ленг], [vdW]. Увы, суперизация некоторых понятий и теорем требует значительной подготовки и будет дана после глав по анализу и элементов теории представлений. А некоторые важные теоремы (например, о приведении матрицы к жордановой форме) вообще в принципе невозможно сформулировать для суперматриц в виде, похожем на классическую формулировку, за исключением тривиальных случаев, см. [Бер].

Ниже все происходит над основным полем $\mathbb{K}$ характеристики 0 (советуем представлять вместо $\mathbb{K}$ либо $\mathbb{R}$, либо, если нужна алгебраическая замкнутость, $\mathbb{C}$). Кое-что об особенностях суперизации в характеристике $p>0$ рассмотрено в дополнениях; этих особенностей, особенно при $p=2$, набралось уже на два отдельных тома.

Особо обращаем внимание читателя на следующие (из обсуждаемых ниже) понятия и факты, которые мы расположили в порядке возрастания сложности. Важность некоторых из них десятилетиями не была распознана.

- Односторонние модули над суперкоммутативными (и антисуперкоммутативными) супералгебрами наделены естественной структурой двустороннего модуля, однако переход от односторонних к двусторонним модулям можно совершать **двумя** способами.

- Функтор смены четности Π, который можно применять слева или справа (и результаты могут оказаться разными).

- Функтор нечетной комплексификации Q («оQчивание»), ведущей к некоммутативной геометрии, тоже можно, как и Π, применять с двух сторон.

- Ранг свободного модуля (размерность суперпространства) есть элемент кольца $\mathbb{Z}[\varepsilon]/(\varepsilon^2-1)$, т. е. «число» вида $p+\varepsilon q$, где $\varepsilon^2=1$.

- В линейной супералгебре есть два аналога общей линейной алгебры Ли. Точнее, три. На каждом из них есть аналог следа. Один — на «прямолинейном» аналоге алгебры $\mathfrak{gl}$ — называется для выразительности **супер**следом и обозначается str, а на «странном» аналоге, т. е. на $\mathfrak{q}(n)$, есть «странный след» qtr. При этом суперслед как оператор четен, а странный след — нечетен. У обоих этих суперследов есть, как мы увидим в [Бер], единообразно описываемый «классический предел» — интеграл Березина; этим суперследам отвечают два аналога определителя: березиниан Ber и qet, а также их «классические пределы» [1].

- На суперпространствах билинейных форм есть две инволюции: Π и U, а на соответствующих формам матрицах — два аналога «транспонирования»; оба эти аналога не совпадают с супертранспонированием, которое отвечает переходу к матрице сопряженного оператора.

- Билинейные формы, как и любые суперобъекты линейной алгебры, могут быть как четными, так и нечетными. Соответственно, в линейной супералгебре есть два типа невырожденных канонических билинейных форм и сохраняющих их супергрупп: четный тип сохраняется ортосимплектической супергруппой, а нечетный тип — периплектической супергруппой.

- Функтор объема Vol.

- Два аналога вещественных структур — вещественные и кватернионные структуры на комплексных супералгебрах (смысл кватернионных структур пока не ясен).

- В суперслучае есть три типа эрмитовых форм: общий, странный и нечетный (периплектический), причем эрмитова форма никогда не может быть знакоопределена на всем суперпропространстве, а только на однородных подпространствах; если она положительно определена на его четной («бозонной») части, то на нечетной («фермионной») части она определена отрицательно и наоборот.

- Совершенно невинный на первый взгляд «внешний» автоморфизм матричных супералгебр, индуцированный нечетной (или неоднородной относительно четности) заменой базиса (например, перестановкой элементов базиса), разительным образом преобразует обычные понятия дифференциальной геометрии, такие как грассманиан, многообразие флагов и все связанное с ними.

- Область определения суперследа, а с ним и березиниана, шире, чем это обычно принято считать. Смысл соответствующих этому расширению

---

[1] Вообще-то группу GL можно определить над любыми некоммутативными телами K, и на этой группе GL есть *определитель Дьедонне*, но березиниан не имеет к определителю Дьедонне никакого отношения, см. [Лдет]; появление березиниана неожиданно, он представляет собой первую новую сущность в данной науке.

понятий (метабелевы алгебры и алгебры Воличенко) пока продуман плохо, несмотря на их потенциальную важность.

- В двух обстоятельствах суперизация вынуждает переходить от многочленов к более общим функциям:

1) при описании матричных инвариантов (березиниан — рациональная функция, поэтому алгеброй, порожденной конечным числом следов степеней матрицы, не обойтись);

2) внешние формы могут быть не только многочленами: появляются псевдоформы, ведущие к псевдогомологической алгебре (симметрическую алгебру эти соображения затрагивают точно так же).

Несомненно, читатель (возможно, с недоумением) отметит, сколь много мы возимся с разными матричными форматами. (По-видимому, психологически проще сначала понять на примере стандартного формата, а потом переходить к нестандартным.) Однако похоже, что и теперь, через 30 лет после начала этой возни, мы им еще уделили недостаточно внимания и продолжим их изучение всерьез в книге, посвященной супералгебрам Ли.

Как заметил один из рецензентов, «при чтении этой главы в глазах двоится». Это не тот эффект, которого мы ждем: у каждой версии «классического» понятия есть МИНИМУМ два супераналога. И если у читателя в глазах *хотя бы* не двоится, то это наша недоработка.

§ 1.1. Линейные, или векторные, суперпространства[1]

Все пространства в этом параграфе рассматриваются над полем $\mathbb{K}$ (любой характеристики, если не оговорено противное), а слово «модуль» применяется к модулям не над полем, а над супералгеброй.

1.1.1. *Суперпространство* — это векторное пространство M, разложенное в прямую сумму четного и нечетного подпространств: $M = M_{\bar 0}\oplus M_{\bar 1}$. Ненулевые элементы этих подпространств называются *однородными* (*четными* и *нечетными* соответственно). Если $m\in M_i$, где $i\in\mathbb{Z}/2$, то мы пишем $p(m)=i$ и называем $p(m)$ *четностью* вектора m. Таким образом, p — частично определенная функция; она определена только на ненулевых однородных элементах.

Если характеристика поля $\mathbb{K}$ отлична от 2, то четность в суперпространстве M определяет *оператор четности* Pty:

$$\mathrm{Pty}(x) = (-1)^{p(x)}x \quad \text{для любого } x\in M.$$

Собственные подпространства оператора Pty суть подпространства $M_{\bar 0}$ и $M_{\bar 1}$.

Подсуперпространство — это градуированное подпространство, т. е. такое подпространство $N\subset M$, что $N = N\cap M_{\bar 0}\oplus N\cap M_{\bar 1}$. На рис. 1.1 изображено неградуированное подпространство.

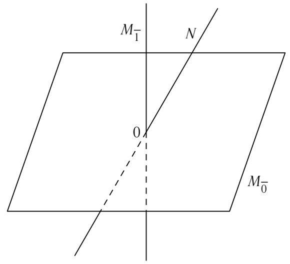

Рис. 1.1

Пусть N и M — суперпространства. На пространствах $M\oplus N$, $M\otimes N$ и $\mathrm{Hom}(M, N)$ структура суперпространства вводится естественным образом по формулам (где $i, j, k\in\mathbb{Z}/2$):

$$\begin{aligned}(M\oplus N)_i &= M_i\oplus N_i,\\ (M\otimes N)_i &= \bigoplus_{j+k=i} M_j\otimes N_k,\\ \mathrm{Hom}_i(M, N) &= \{F\in\mathrm{Hom}(M, N)\mid FM_j\subset N_{j+i}\}.\end{aligned}$$

В частности, для суперпространства $M^* = \mathrm{Hom}(M,\mathbb{K})$ получаем $(M^*)_i = (M_i)^*$. Поскольку $\mathrm{Hom}(M, N)\simeq M^*\otimes N$, структуры суперпространств на этих пространствах совпадают.

Элементы суперпространства $\mathrm{Hom}(M, N)$ называются гомоморфизмами; они составляют «внутренний функтор $\underline{\mathrm{Hom}}$». Только четные элементы суперпространства $\mathrm{Hom}(M, N)$ являются по определению *морфизмами* суперпространств. С этим ограничением на морфизмы мы еще намучаемся.

Морфизмы из $\mathrm{Hom}(M, M)$ называются *эндоморфизмами*, а обратимые морфизмы из $\mathrm{Hom}(M, M)$ — *изоморфизмами*; они составляют группу $\mathrm{GL}(M)$.

1.1.2. Смена вывесок. Обозначим через Π функтор, сопоставляющий каждому суперпространству его копию как пространства — суперпространство $\Pi(M)$, в котором четными объявлены прежние нечетные элементы, а нечетными — прежние четные:

$$(\Pi(M))_{\bar 0} = M_{\bar 1},\quad (\Pi(M))_{\bar 1} = M_{\bar 0}.$$

---

[1] Хотя по-французски (учит нас В. И. Арнольд) термины «линейное пространство» и «векторное пространство» — разные понятия (первый термин относится к 1-мерному пространству, а второй — к пространству любой размерности), по-русски они (пока) синонимы, да и науку, их изучающую, чаще называют линейной алгеброй, а не векторной.

Индуцированное функтором Π каноническое нечетное отображение обозначим через π, см. рис. 1.2:

$$\pi\colon M \longrightarrow \Pi(M), \qquad m \mapsto \pi(m).$$

Суперпространства M и $\Pi(\Pi(M))$ отождествляются естественным образом.

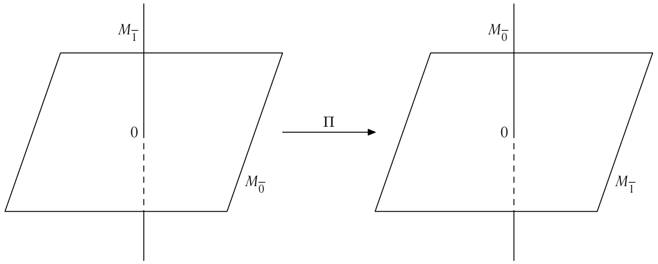

Рис. 1.2

Упражнение. Является ли отображение π изоморфизмом суперпространств?

Отметим, что функтор Π можно понимать как тензорное умножение на $\Pi(\mathbb{Z})$ над $\mathbb{Z}$ слева или справа:

$$\Pi(M) = \Pi(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M \quad \text{и} \quad (M)\Pi = M \otimes_{\mathbb{Z}} \Pi(\mathbb{Z}).$$

До сих пор мы говорили о линейных суперпространствах над полем, где разницы между $\Pi(M)$ и канонически изоморфным ему пространством $(M)\Pi$ нет. Однако сто́ит нам перейти к модулям над супералгебрами, как мы увидим, что эта разница огромна.

1.1.3. *Супералгебра* — это $\mathbb{Z}/2$-градуированная алгебра, т. е. суперпространство A с умножением — морфизмом $mult\colon A \otimes A \to A$. Произведение двух элементов a и b мы обычно кратко обозначаем ab.

Упражнения. 1) Если супералгебра A содержит единицу 1, то $1 \in A_{\bar 0}$.

2) Если $a, b \in A$ — однородные элементы, то $p(ab) = p(a) + p(b)$.

3) Определите *суперкольцо*, т. е. модуль над $\mathbb{Z}$ с умножением.

Гомоморфизм супералгебр — это гомоморфизм $\mathbb{Z}/2$-градуированных алгебр, т. е. морфизм (четный гомоморфизм) суперпространств, переводящий произведение в произведение.

Соглашение. Если не оговорено противное, всюду в дальнейшем под *супералгеброй* понимается ассоциативная (а, скажем, не лиева или йорданова и т. д.) супералгебра с 1, а под гомоморфизмами супералгебр — морфизмы, переводящие единицу в единицу. (Таким образом мы исключаем нулевой гомоморфизм из числа гомоморфизмов супералгебр.)

Как мы увидим ниже, наиболее интригующие моменты линейной супералгебры связаны с ситуациями, в которых участвуют гомоморфизмы, не являющиеся морфизмами, т. е. нечетные или неоднородные.

А теперь сформулируем то, чем обычно описывают суперсимметрию «в двух словах» — Правило Знаков[1]:

Если что-то четности p движется мимо чего-то четности q, то появляется множитель $(-1)^{pq}$.

Мы также предполагаем, что

Формулы, определенные (казалось бы) только на однородных элементах, нужно понимать автоматически продолженными на неоднородные элементы по линейности.

Пример: коммутатор двух элементов a и b произвольной алгебры — это выражение $[a, b] = ab - ba$. По правилу знаков *суперкоммутатор* — это выражение

$$[a, b] = ab - (-1)^{p(a)p(b)}ba, \qquad \text{где } p(a),\ p(b) \text{ — четности элементов } a \text{ и } b.$$

Таким образом, если $a = a_0 + a_1$ и $b = b_0 + b_1$ — неоднородные элементы, где a_0, b_0 — четные, а a_1, b_1 — нечетные, то суперкоммутатор имеет вид

$$[a, b] = (a_0b_0 - b_0a_0) + (a_0b_1 - b_1a_0) + (a_1b_0 - b_0a_1) + (a_1b_1 + b_1a_1).$$

Мы говорим, что элементы $a, b \in A$ *суперкоммутируют*, если $[a, b] = 0$. Если любые два элемента ассоциативной супералгебры A суперкоммутируют, то супералгебра называется *суперкоммутативной*.

В обычной математике понятия антисимметричности и кососимметричности совпадают. В линейной супералгебре типов симметрии четыре. Вот точные определения[2]:

$$ba = (-1)^{p(b)p(a)}ab \qquad \text{(суперсимметричность),} \qquad (\text{с})$$

$$ba = -(-1)^{p(b)p(a)}ab \qquad \text{(суперантисимметричность),} \qquad (\text{ас})$$

$$ba = (-1)^{(p(b)+1)(p(a)+1)}ab \qquad \text{(суперкососимметричность),} \qquad (\text{кс})$$

$$ba = -(-1)^{(p(b)+1)(p(a)+1)}ab \qquad \text{(суперантикососимметричность),} \qquad (\text{ак})$$

---

[1] К сожалению, Правило Знаков слишком часто формулируют неправильно: «если переставляются два элемента, должен появиться знак $(-1)^{pq}$». В Правиле Знаков переставляемые элементы *должны быть соседями*.

[2] Определения согласованы с теми, что приняты в пакете программ `SuperLie` (см. [Gr]): приставка «анти» отмечает перемену знака, т. е. появление минуса, а приставка «косо» отмечает случай, который можно выпрямить, поменяв четности. Мы говорим о суперантисимметричных операторах и билинейных формах именно в этом смысле.

«Симметричность» алгебр часто называется словом «коммутативность», поэтому суперальгебры с вышеперечисленными симметриями называются соответственно *суперкоммутативной*, *суперантикоммутативной*, *суперкосокоммутативной*, *суперантикосокоммутативной*.

Приставка «супер», если ее употреблять очень тщательно, может иногда раздражать. Поэтому ее иногда опускают. Однако если коммутатор и суперкоммутатор встречаются одновременно, это перестает быть только вопросом вкуса. В этой книге мы постараемся приставки не забывать, но от некоторых терминов она почему-то норовит отлипнуть. Вот примеры.

Централизатором (хотя надо бы *суперцентрализатором*) $C_A(S)$ подсуперпространства S в суперальгебре A называется множество

$$C_A(S) = \{c \in A \mid [c,\, s] = 0 \text{ для всех } s \in S\}.$$

Нормализатором (хотя надо бы *супернормализатором*) подсуперпространства S в суперальгебре A называется множество

$$N_A(S) = \{n \in A \mid n\,S = S\,n\}.$$

Суперцентр суперальгебры A — это множество

$$SZ(A) = \{c \in A \mid [c,\, A] = 0\},$$

где $[c,\, A] = 0$ означает, что $[c,\, a] = 0$ для любого элемента $a \in A$.

Как показали А. Сергеев и М. Горелик, при изучении суперальгебр Ли исключительно важную роль играют *антицентр* и *ду́хов* (ghost) *центр* — понятия, у которых в обычной (не супер) алгебре нет аналогов. В определениях антицентра и ду́хова центра используются одновременно и суперкоммутатор, и суперантикоммутатор.

Определим *антицентр* $AC(A)$ суперальгебры A, положив

$$AC(A) = \{a \in A \mid [a,\, x] = 0 \text{ при всех } x \in A_{\bar 0} \text{ и } [a,\, x]_{s+} = 0 \text{ при всех } x \in A_{\bar 1}\}.$$

Определим *ду́хов центр* $GC(A)$, положив

$$GC(A) = C(A) + AC(A).$$

Вопрос. В теории представлений и при изучении интегрируемых систем важно знать и центр алгебры, и ее коммутативные подалгебры. Важность антицентра и ду́хова центра уже была продемонстрирована в теории представлений суперальгебр Ли, где они успешно заменили суперцентр (естественное, казалось бы, обобщение центра на суперслучай). Возможно ли применить понятия антицентра и ду́хова центра к изучению интегрируемых систем на супермногообразиях — суперверсий уравнений математической физики?

Упражнение. Очевидно, что $Z(A)$, $C_A(S)$, $N_A(S)$ — суперальгебры. Докажите, что суперальгебра $Z(A)$ суперкоммутативна. Каким типом симметрии ((с)–(ак)) обладают суперальгебры $AC(A)$ и $GC(A)$?

Вопрос. Что за объекты получатся взамен $C_A(S)$ и $N_A(S)$, если подпространство S неоднородно, т. е. не является под*супер*пространством?

1.1.4. Важный пример суперкоммутативной суперальгебры. У этой алгебры несколько имён: *внешняя*, или *антикоммутативная* (а по-нашему — суперкоммутативная), или *грассманова* алгебра (с n образующими, причем $n = \infty$ встречается нередко). Из популярных обозначений мы, как правило, используем в разных контекстах следующие: $\Lambda(n)$, или $\mathbb{K}[\xi]$, где $\xi = (\xi_1,\, \ldots,\, \xi_n)$, или $E(V)$, где $V = \operatorname{Span}(\xi_1,\, \ldots,\, \xi_n)$.

Эта алгебра определена как фактор свободной ассоциативной алгебры с единицей и образующими $\xi_1,\, \ldots,\, \xi_n$ по соотношениям

$$\xi_i\xi_j + \xi_j\xi_i = 0 \quad \text{для всех } 1 \leqslant i,\, j \leqslant n$$

(в частности, $\xi_i^2 = 0$ при всех i). Положив $p(\xi_i) = \bar 1$ при всех i, мы превращаем $\Lambda(n)$ в суперальгебру. Ясно, что $\Lambda(n)$ — свободная суперкоммутативная суперальгебра.

Отметим сразу, что от того, чем мы считаем $\Lambda(n)$ — алгеброй или суперальгеброй, — сильно зависит запас ее допустимых автоморфизмов: существуют автоморфизмы алгебры $\Lambda(n)$ как абстрактной алгебры, не сохраняющие четность. Это очень важный момент, и мы рассмотрим его отдельно.

Мы записываем произвольный элемент $f \in \Lambda(\xi_1,\, \ldots,\, \xi_n)$ в виде суммы

$$f = \sum_\nu f_\nu \xi^\nu, \qquad \text{где } f_\nu \in \mathbb{K},$$

а мультииндекс ν пробегает всевозможные конечные последовательности $\nu = (\nu_1,\, \ldots,\, \nu_n)$ с $\nu_i = 0,\, 1$, и где $\xi^\nu = \xi_1^{\nu_1} \ldots \xi_n^{\nu_n}$. Ясно, что такое представление единственно.

Более подробно:

$$f = f_0 + \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\ \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_j\leqslant n} f^{i_1\ldots i_j}\,\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_j}, \qquad \text{где } f_0,\, f^{i_1\ldots i_j} \in \mathbb{K}.$$

Более общо, можно рассмотреть алгебру многочленов от четных и нечетных переменных $\mathbb{K}[x,\, \xi]$, где $x = (x_1,\, \ldots,\, x_n)$, $\xi = (\xi_1,\, \ldots,\, \xi_n)$, причем $p(x_i) = \bar 0$, $p(\xi_j) = \bar 1$ при всех i и j и выполняются соотношения

$$x_i\,x_j = x_j\,x_i, \qquad x_i\xi_j = \xi_j x_i, \qquad \xi_i\xi_j = -\xi_j\,\xi_i \quad \text{для любых } i,\, j,$$

или, короче, $y_iy_j = (-1)^{p(y_i)p(y_j)}y_jy_i$, где $y = (x,\, \xi)$. Эта алгебра $\mathbb{K}[x,\, \xi]$ — свободная суперкоммутативная суперальгебра с образующими x, ξ.

Мы будем также рассматривать супералгебры формальных степенных рядов $\mathbb{K}[[x,\,\xi]] = \mathbb{K}[[x]][\xi]$ и супералгебры ростков «голоморфных функций» $\mathbb{K}\{x,\,\xi\} = \mathbb{K}\{x\}[\xi]$.

Читатель уже, конечно, сообразил, что никаких функций от нечетных переменных, кроме полиномиальных, не бывает. Поэтому нужные в анализе алгебры гладких и аналитических функций (равно как и алгебры формальных степенных рядов и ростков голоморфных функций) после суперизации превращаются соответственно в супералгебры

$$C^\infty(\mathcal{U}^{m|n}) = C^\infty(U^m)\otimes\Lambda(n) \quad \text{и} \quad A(\mathcal{U}^{m|n}) = A(U^m)\otimes\Lambda(n),$$

где $\mathcal{U}^{m|n}$ — суперобласть (подробности — в гл. 3) с подстилающей ее областью U^m, а соответствующие алгебры функций суть алгебры функций данного типа на U^m со значениями в супералгебре Грассмана $\Lambda(n)$.

1.1.5. Важный пример несуперкоммутативной супералгебры. Зададим четность в $\mathbb{C}$, положив $p(i) = \bar{1}$. Коммутативная (над $\mathbb{R}$) алгебра $\mathbb{C}$ превращается относительно введенной четности в *не*суперкоммутативную супералгебру; чтобы отличить ее от обычной алгебры $\mathbb{C}$, мы обозначим ее символом $\mathbb{C}^s$ или $Q(\mathbb{R})$ (мотивировки см. в лемме Шура и описании супер-аналога группы Брауэра).

Этот пример естественно вводит суперсимметрии в темный лес некоммутативной геометрии, т. е. науки, в которой функции образуют некоммутативные алгебры.

Сходным образом можно построить несуперкоммутативную супералгебру многочленов $\mathbb{C}[x]$, где $x = (x_1,\,\ldots,\,x_n)$, задав четность как степень по модулю 2. (В отличие от $\mathbb{C}^s$, у этого примера пока нет применений.)

1.1.6. Супертензорное произведение супералгебр. Тензорное произведение двух суперпространств V и W мы ненавязчиво определили в п. 1.1.1 (и оно совпадает с тензорным произведением суперпространств V и W, рассматриваемых как пространства). А вот *супертензорное произведение* супералгебр A и B отличается от их тензорного произведения как алгебр способом, которым задано умножение:

$$(a\otimes b)(a_1\otimes b_1) = (-1)^{p(b)p(a_1)}aa_1\otimes bb_1$$

для любых $a,\ a_1\in A,\ b,\ b_1\in B$. (В обычном тензорном произведении никаких знаков нет, даже если сомножители градуированы.) Всюду ниже мы рассматриваем только супертензорное произведение супералгебр.

Упражнение. 1) Если A и B — ассоциативные супералгебры, то их супертензорное произведение $A\otimes B$ тоже ассоциативно.

2) Супертензорное произведение суперкоммутативных супералгебр — суперкоммутативная супералгебра.

3) Согласно упражнению 2 тензорное произведение $\Lambda(n)\otimes\Lambda(m)$ является суперкоммутативной супералгеброй. Опишите ее[1].

1.1.7. С каждой суперкоммутативной супералгеброй C мы свяжем *каноническую проекцию*

$$\mathrm{cpr}\colon C \longrightarrow C/(C_{\bar{1}}),$$

где $(C_{\bar{1}})$ обозначает идеал, порожденный подпространством $C_{\bar{1}}$.

Легко вывести следующую лемму, которую мы будем часто использовать в дальнейшем.

Лемма. *Пусть C — суперкоммутативная супералгебра. Элемент $c\in C$ обратим тогда и только тогда, когда его проекция $\mathrm{cpr}(c)$ обратима.*

Упражнение. Докажите лемму.

§ 1.2. Модули над суперкоммутативными супералгебрами

1.2.1. Пусть A — супералгебра (ассоциативная, с единицей 1).

Левым действием супералгебры A на суперпространстве M называется морфизм $\mathrm{act}_l\colon A\otimes M\to M,\ a\otimes m\mapsto am$, удовлетворяющий для любых $a,\ b\in A$ и $m\in M$ условиям

i) $a(bm) = (ab)m$;

ii) $1\cdot m = m$.

С каждым левым действием на M связан набор операторов

$$l_a\colon M\longrightarrow M, \quad \text{где } l_a(m) = am \ \text{ для любых } a\in A,\ \ m\in M.$$

Левый A-модуль — это суперпространство M с левым действием супералгебры A. *Правый A-модуль* определяется аналогично и соответствующий элементу a оператор обозначается r_a, так что $r_a(m) = ma$.

Левое действие супералгебры A на M задает отображение

$$\rho\colon A\longrightarrow \mathrm{End}(M), \quad \rho(a)(m) = l_a(m),$$

которое называется *представлением* супералгебры A в суперпространстве M левыми операторами. Аналогично правое действие определяет представление правыми операторами.

---

[1] *Указание=ответ*: $\Lambda(n)\otimes\Lambda(m)\simeq\Lambda(n+m)$.

1.2.2. Функторы Π и Q. Пусть M — это A-модуль (правый или левый). Определим структуру A-модуля на $\Pi(M)$ следующими формулами:

$$\begin{array}{ll} \pi(m)a = \pi(ma), & \text{если модуль } M \text{ правый,} \\ a\pi(m) = (-1)^{p(a)}\pi(am), & \text{если модуль } M \text{ левый.} \end{array}$$

Определим также A-модуль $(M)\Pi$, пространство которого изоморфно пространству $\Pi(M)$, элементы обозначаются $(m)\pi$, а A-действие определяется формулами

$$\begin{array}{ll} a((m)\pi) = (am)\pi, & \text{если модуль } M \text{ левый,} \\ (m)\pi a = (-1)^{p(a)}(ma)\pi, & \text{если модуль } M \text{ правый.} \end{array}$$

Иными словами,

$$\Pi(M) = \Pi(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M, \quad (M)\Pi = M \otimes_{\mathbb{Z}} \Pi(\mathbb{Z}).$$

Действия супералгебры A на нечетно комплексифицированных модулях $Q(M) = \mathbb{C}^s \otimes_{\mathbb{R}} M$ и $(M)Q = M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^s$ также различны.

Замечание. Если A — поле, то $\Pi(M) \simeq (M)\Pi$ и $Q(M) \simeq (M)Q$.

1.2.3. Модули над супер(анти-)коммутативными супералгебрами всегда можно считать двусторонними. По определению 1.2.1 каждый модуль над супералгеброй является односторонним (левым или правым). А вот над супер**коммутативной**[1] супералгеброй C любой модуль можно снабдить структурой двустороннего модуля. Эта возможность очень полезна для анализа.

Однако ввести структуру двустороннего C-модуля на одностороннем можно двумя способами, а не одним, как мог бы подумать слишком поспешный адепт Правила Знаков.

Действительно, казалось бы, Правило Знаков устанавливает переход от левого C-модуля M к правому и наоборот по формуле

$$mc = (-1)^{p(m)p(c)}cm \quad \text{для любых } m \in M,\ c \in C. \tag{1.1}$$

Однако в этой формуле мы неявно предполагаем, что, когда элемент c смотрит на элемент m слева и справа, он видит одну и ту же четность. Казалось бы, как же иначе: ведь четность — основная данность модуля M. Однако если M изначально — левый модуль, то мы можем и не заметить, что кто-то тихонько умножил его над $\mathbb{Z}$ справа на $\Pi(\mathbb{Z})$, до тех пор пока нам не потребуется умножение на C справа (тогда придется протаскивать то, на что умножаем, через Π). А тогда вместо формулы (1.1) нужно воспользоваться формулой

$$mc = (-1)^{(p(m)+\bar{1})p(c)}cm \quad \text{для любых } m \in M,\ c \in C. \tag{1.2}$$

---

[1] А также над любой супер**анти-коммутативной**.

Оба определения задают согласованные структуры левого и правого C-модуля на M, т. е.

$$(am)b = a(mb) \quad \text{для любых } a,\ b \in C,\ m \in M.$$

Полученные двусторонние модули назовем C_+- и C_--*модулями* соответственно.

Замечания. 1) Набор всех C-модулей естественным образом $\mathbb{Z}/2$-градуирован: легко проверить, что тензорное произведение двух C_+-модулей или двух C_--модулей является C_+-модулем, а произведение C_+-модуля на C_--модуль — C_--модулем.

До сих пор смысл и значение этой $\mathbb{Z}/2$-градуировки на категории C-модулей не ясен; есть естественные примеры как C_+-, так и C_--модулей. На первый взгляд кажется, что C_+-модулей больше, да и сама супералгебра C является C_+-модулем, так что неясно, почему бы ими не ограничиться. Однако очень важный модуль — модуль объема $\mathrm{Vol}_C(M)$ — является примером как раз C_--модуля.

2) Для *суперантикоммутативной* супералгебры A (возможно, без единицы) также существуют два естественных способа превратить левый A-модуль M в двусторонний:

$$ma = -(-1)^{p(a)p(m)}am \quad \text{для любых } a \in A,\ m \in M$$

или

$$ma = -(-1)^{p(a)(p(m)+\bar{1})}am \quad \text{для любых } a \in A,\ m \in M.$$

Соглашение. Для простоты (а также из-за того, что мы не понимаем общей картины) всюду ниже модуль над суперкоммутативной супералгеброй снабжен структурой двустороннего модуля как C_+-модуль, если не оговорено противное.

Упражнение. Перепишите все формулы этой главы для C_--модулей.

1.2.4. Гомоморфизм C-модулей. Пусть M и N — правые C-модули. *Гомоморфизмом* или *C-линейным оператором* $F\colon M \to N$ называется линейный оператор, согласованный со структурами правых C-модулей:

$$F(mc) = (F(m))c \quad \text{для любых } c \in C,\ m \in M.$$

Тогда согласно Правилу Знаков

$$F(cm) = (-1)^{p(c)p(F)}cF(m).$$

Обозначим через $\mathrm{Hom}_C(M, N)$ суперпространство C-линейных гомоморфизмов из M в N. Если $M = N$, то вместо $\mathrm{Hom}_C(M, N)$ пишем $\mathrm{End}_C(M)$; элементы этого суперпространства называются *эндоморфизмами*. Четные обратимые эндоморфизмы называются *автоморфизмами*; они образуют группу $\mathrm{GL}_C(M)$, обозначаемую также $\mathrm{GL}(M, C)$.

На суперпространстве $\mathrm{Hom}_C(M, N)$, где M и N — правые C-модули, естественно вводится структура левого C-модуля:

$$(cF)\,(m) = c(F(m)). \tag{1.3}$$

Из формул (1.3) и (1.1) получаем

$$(Fc) = (-1)^{p(c)p(F)}cF.$$

Эта структура, очевидно, зависит от того, как именно мы снабдили модуль N структурой левого C-модуля.

Если оператор (гомоморфизм) записывать справа от аргумента, то можно начать с левых C-модулей и ввести структуру правого C-модуля на $\mathrm{Hom}_C(M, N)$.

Сто́ит снабдить модуль M структурой левого C-модуля (с помощью (1.1) или (1.2), как $\mathrm{Hom}_C(M, N)$ тут же самостоятельно наделяется структурой двустороннего модуля.

Очевидно, что если $F\colon M \to N$ и $G\colon N \to L$ — линейные операторы, то их композиция $G \circ F$ тоже линейна и, кроме того, для любого $c \in C$ выполняются равенства

$$cG \circ F = c(G \circ F), \qquad Gc \circ F = G \circ cF, \qquad G \circ Fc = (G \circ F)c.$$

1.2.5. Пусть C — суперкоммутативная супералгебра. Супералгебра A называется *C-алгеброй*, если A есть C-модуль, причем

$$(ca_1)a_2 = c(a_1\, a_2), \qquad a_1(a_2c) = (a_1a_2)c \quad \text{для любых } a_1,\ a_2 \in A,\ c \in C$$

(в частности, $c \cdot 1 \in Z(A)$ для $1 \in A$ и любого $c \in C$).

Примеры. 1) Пусть M — это C-модуль. Ясно, что суперпространство $\mathrm{End}_C(M)$ образует ассоциативную C-алгебру с единицей.

2) Любая ассоциативная супералгебра A канонически снабжена структурой $Z(A)$-алгебры, а структура C-алгебры на A задается гомоморфизмом $C \to Z(A)$.

1.2.6. *Тензорное произведение C-модулей* M и N — это суперпространство $M \otimes {}_CN$, которое есть фактор суперпространства $M \otimes N$ по соотношениям (т. е. по подпространству, натянутому на левые части этих соотношений):

$$mc \otimes n - m \otimes cn = 0 \quad \text{для любых } m \in M,\ n \in N,\ c \in C.$$

Понятно, что здесь важны структура левого C-модуля на N и правого на M. То, как мы зададим структуры правого модуля на N и левого на M, определит соответствующие структуры на $M \otimes_C N$, и наоборот:

$$c(m \otimes n) = cm \otimes n, \qquad (m \otimes n)c = m \otimes nc \quad \text{для любых } m \in M,\ n \in N,\ c \in C.$$

Очевидно, имеется естественный изоморфизм

$$(L \otimes_C M) \otimes_C N \cong L \otimes_C (M \otimes_C N),$$

позволяющий опускать скобки в тензорном произведении над C.

Скручивающий изоморфизм $T\colon M \otimes_C N \longrightarrow N \otimes_C M$ задается формулой

$$T(m \otimes n) = (-1)^{p(m)p(n)}n \otimes m \quad \text{для любых } m \in M,\ n \in N.$$

Упражнение. Если A и B суть C-алгебры, то и $A \otimes_C B$ является C-алгеброй. Скручивающий морфизм $T\colon A \otimes_C B \longrightarrow B \otimes_C A$ есть гомоморфизм C-алгебр. Если A — суперкоммутативная супералгебра, то $A \otimes_C B$ является также и A-алгеброй.

1.2.7. Замена базы. Пусть B — суперкоммутативная C-алгебра. Тогда каждому (правому) C-модулю M соответствует (правый) B-модуль $M_B = M \otimes {}_CB$. Переход от M к M_B называется *заменой базы*. Сходным образом определяется и левый B-модуль ${}_BM = B \otimes {}_CM$.

Упражнение. Имеются следующие канонические изоморфизмы:

$$(M \oplus N)_B \simeq M_B \oplus N_B; \qquad (\Pi(M))_B \simeq \Pi(M_B); \qquad (M \otimes_C N)_B \simeq M_B \otimes_B N_B.$$

1.2.8. *Двойственным* к M назовем C-модуль $M^* = \mathrm{Hom}_C(M, C)$. Однако при вычислениях важно знать в подробностях, как именно происходит спаривание между M^* и M: стоит M^* слева от M или справа. Если M^* спаривается с M, стоя слева, т. е. результат имеет вид (f, m), где $m \in M$, а $f \in M^*$, то M^* называется *двойственным* к M *слева*. А если образ элемента $m \in M$ под действием функционала $f \in M^*$ обозначается (m, f), то M^* *двойственен* к M *справа*.

Если встречаются и левые, и правые двойственные модули, то следует обозначить один из модулей M^* (а его элементы — m^*), а другой — ${}^*M$ (а его элементы — ${}^*m$).

Из определений следует, что если ${}^*M$ — модуль, двойственный к M слева, то

$$\begin{aligned} &(fc, m) = (f, cm), \quad (cf, m) = c(f, m),\\ &(f, mc) = (f, m)c \quad \text{для любых } c \in C,\ m \in M,\ f \in {}^*M. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Другими словами, структура правого C-модуля на ${}^*M$ задается структурой левого модуля на M.

Аналогично, если M^* двойственен M справа, то

$$\begin{aligned} &(mc, f) = (m, cf), \quad (m, fc) = (m, f)c,\\ &(cm, f) = c(m, f) \quad \text{для любых } c \in C,\ m \in M,\ f \in M^* \end{aligned} \tag{1.5}$$

и структура левого C-модуля на M^* задается структурой правого модуля на M.

Структура правого C-модуля на M^* канонически задана второй из формул (1.4), (1.5). Третья формула и в (1.4), и в (1.5) — для красоты: она выражает C-линейность спаривания M^* и M.

Для каждого C-модуля M зададим канонический изоморфизм

$$I^{**}\colon M \longrightarrow (M^*)^*,$$
$$(I^{**}(m),\, n) = (-1)^{p(m)p(n)}(n,\, m).$$

1.2.9. Каждому оператору $F \in \mathrm{Hom}_C(M,\, N)$ соответствует *двойственный оператор* $F^* \in \mathrm{Hom}_C(N^*,\, M^*)$, определенный формулой

$$(F^*\nu,\, m) = (-1)^{p(F)p(\nu)}(\nu,\, Fm) \quad \text{для всех } \nu \in N^*,\ m \in M.$$

Упражнение. Докажите, что

1) $p(F^*) = p(F)$;

2) если $F\colon M \to N$ и $G\colon N \to L$ — гомоморфизмы C-модулей, то

$$(GF)^* = (-1)^{p(F)p(G)}F^*G^*;$$

3) $I^{**}F = F^{**}I^{**}$.

1.2.10. Каждому гомоморфизму C-модулей $F\colon M \to N$ соответствует гомоморфизм $F^{\Pi_l\Pi_l}$, для краткости обозначенный F^{Π}:

$$(F^{\Pi})\colon \Pi(M) \longrightarrow \Pi(N), \qquad F^{\Pi}(\pi(m)) = \pi(F(m)).$$

Ясно, что $(F^{\Pi})^{\Pi} = F$.

1.2.10а. Упражнение. Установите связь между гомоморфизмами, канонически соответствующими гомоморфизму F: уже определенным F^{Π} и гомоморфизмами

$$F^{\Pi_l\Pi_r}\colon \Pi(M) \longrightarrow (N)\Pi, \qquad F^{\Pi_r\Pi_r}\colon (M)\Pi \longrightarrow (N)\Pi, \qquad F^{\Pi_r\Pi_l}\colon (M)\Pi \longrightarrow \Pi(N).$$

1.2.10б. Упражнение. Для любых C-модулей M и N имеется естественный изоморфизм

$$I_{\Pi\bullet}\colon \Pi(M) \otimes_C N \cong \Pi(M \otimes_C N),$$
$$I_{\Pi\bullet}\colon \pi(m) \otimes n \longmapsto \pi(m \otimes n).$$

Определим C-модульный изоморфизм

$$\Pi_{M,N}\colon \Pi(M) \otimes_C \Pi(N) \longrightarrow M \otimes_C N$$

как композицию

$$\Pi(M) \otimes_C \Pi(N) \xrightarrow{I_{\Pi\bullet}} \Pi(M \otimes_C \Pi(N)) \xrightarrow{\Pi(T)}$$
$$\xrightarrow{\Pi(T)} \Pi(\Pi(N) \otimes_C M) \xrightarrow{I_{\Pi\bullet}^{-1}} \Pi(\Pi(N)) \otimes_C M \longrightarrow N \otimes_C M \xrightarrow{T} M \otimes_C N.$$

В явном виде этот изоморфизм задается формулой

$$\Pi_{M,N}\colon \pi(m) \otimes \pi(n) \longmapsto (-1)^{p(m)} m \otimes n.$$

Докажите, что для любого C-модуля M изоморфизм $\Pi_{M^*,M}$ задает спаривание

$$\Pi(M^*) \otimes_C \Pi(M) \longrightarrow M^* \otimes_C M \longrightarrow C,$$

а значит, $\Pi_{M^*,M}$ определяет C-гомоморфизм

$$I_{\Pi(M^*)}\colon \Pi(M^*) \longrightarrow (\Pi(M))^*,$$

точнее, как нетрудно видеть, изоморфизм

$$(I_{\Pi(M^*)}(\pi(n)),\, \pi(m)) = (-1)^{p(n)}(n,\, m) \quad \text{для любых } n \in M^*,\ m \in M.$$

§ 1.3. Свободные модули

В следующем параграфе мы опишем операторы с помощью матриц, точнее суперматриц. Такое описание работает для свободных модулей, свойства которых близки свойствам векторных пространств над полем.

Все модули в этом и следующем параграфе рассматриваются над суперкоммутативной супералгеброй C. Для простоты предположим, что все векторные пространства в этом параграфе конечномерны, а все модули конечнопорождены.

1.3.1. Пусть $I = I_{\bar 0} \coprod I_{\bar 1}$ — объединение непересекающихся подмножеств.

Базис C-модуля M — это **упорядоченный**[1] набор *однородных* элементов $(m_i)_{i \in I}$, таких что $p(m_i) = \bar 0$, если $i \in I_{\bar 0}$, и $p(m_i) = \bar 1$, если $i \in I_{\bar 1}$, причем любой элемент $m \in M$ однозначно представим в виде $\sum c_i^l m_i$ (или в виде $\sum m_i c_i^r$), где $c_i^l,\ c_i^r \in C$ и все $c_i^l,\ c_i^r$, кроме конечного числа, равны 0.

Форматом базиса называется **упорядоченное множество** *Par* четностей базисных векторов. Обычно элементы базиса модуля будут организованы так, что сперва идут все четные элементы, а потом — все нечетные. Такой формат базиса назовем *стандартным*. Некоторые нестандартные форматы базисов тоже часто полезны, например *чередующийся* (четный, нечетный, четный, нечетный, ...).

Часто достаточно рассматривать лишь один формат базисов, но для работы с линейными пространствами **как с супермногообразиями** необходимы все форматы одновременно.

C-модуль M называется *свободным*, если для некоторого набора индексов I у него есть базис. *Суперранг* srk такого модуля — это пара $(r,\, s)$,

---

[1] Хотя часто этот порядок можно проигнорировать, проще не вводить два определения.

иногда обозначаемая $r|s$, где $r = \#(I_{\bar{0}})$, $s = \#(I_{\bar{1}})$. Если C — поле, то суперранг называется *суперразмерностью* и обозначается sdim (особенно если наряду с суперразмерностью суперпространства нам нужна и его (обычная) размерность dim).

Другими словами, свободный модуль M суперранга $r|s$ изоморфен прямой сумме r экземпляров C-модуля C и s экземпляров модуля $\Pi(C)$; мы пишем

$$C^{r|s} = C^r \oplus (\Pi(C))^s.$$

Это разложение отнюдь не инвариантно (относительно автоморфизмов). А вот разложение на четную и нечетную части — инвариантно:

$$C^{r|s} = (C^{r|s})_{\bar{0}} \oplus (C^{r|s})_{\bar{1}}.$$

Лемма. *Суперранг свободного модуля M не зависит от выбора базиса.*

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм алгебры $C/(C_{\bar{1}}) \cong C_{\bar{0}}/(C_{\bar{1}})^2$ в какое-нибудь поле $\mathbb{K}$. Тогда модуль $M \otimes_C \mathbb{K}$ можно рассматривать как суперпространство над $\mathbb{K}$. Пусть $r|s$ — его суперразмерность. Теперь инвариантность чисел r и s следует из инвариантности размерности векторных пространств. □

1.3.2. Поскольку тензорное произведение модулей ранга 1 является модулем ранга 1, а четность произведения равна сумме четностей сомножителей, ясно, что, введя формальную переменную ε, такую что $\varepsilon^2 = 1$, и положив $\operatorname{srk} C^{p|q} = p + q\varepsilon$, мы получаем для суперранга и суперразмерности тензорного произведения естественные формулы

$$\operatorname{srk}(M \otimes_C N) = \operatorname{srk} M \cdot \operatorname{srk} N, \qquad \operatorname{sdim}(M \otimes_{\mathbb{K}} N) = \operatorname{sdim} M \cdot \operatorname{sdim} N.$$

Нередко приходится использовать и классическую размерность, и суперразмерность одновременно. Тогда мы пишем $\dim M = n$ или $\operatorname{rk} M = n$, где $n = r + s$, а $\operatorname{sdim} M = r|s$ или $\operatorname{srk} M = r|s$.

1.3.3. Пусть M — конечномерный свободный C-модуль и $\{m_i\}_{i \in I}$ — базис в M.

Утверждение. *Элементы $m_i^* \in M^*$, заданные формулой*

$$(m_i^*, m_j) = \delta_{ij}, \tag{1.6}$$

образуют базис в M^*, причем $p(m_i^*) = p(m_i)$; в частности, $\operatorname{srk} M^* = \operatorname{srk} M$.

Если модуль M^*, как в формуле (1.6), двойственен к M слева, то и базис $\{m_i^*\}_{i \in I}$ называется *двойственным слева* к базису $\{m_i\}_{i \in I}$, а базис $\{m_i\}_{i \in I}$ — *двойственным справа* к базису $\{m_i^*\}_{i \in I}$.

Базисы $\{m_i^l\}_{i \in I}$ и $\{m_i^r\}_{i \in I}$ модуля M, двойственные к одному и тому же базису модуля M^* соответственно слева и справа, связаны между собой формулой

$$m_i^l = (-1)^{p(m_i^l)} m_i^r.$$

Рассмотрим базис $\{m_i^{**}\}_{i \in I}$ C-модуля M^{**}, двойственный слева к базису $\{m_i^*\}_{i \in I}$. Ясно, что введенный в п. 1.2.8 изоморфизм $I^{**}\colon M \longrightarrow M^{**}$ устанавливает соответствие между базисами:

$$I^{**}(m_i) = (-1)^{p(m_i)} m_i^{**}.$$

Мы всегда будем отождествлять M и M^{**} с помощью этого изоморфизма.

§ 1.4. Суперматрицы

Чтобы *работать* с векторами и операторами, нам, как и в обычной линейной алгебре, потребуется матричное исчисление. Нижеследующие определения мотивированы в § 1.3.

1.4.1. Пусть $\{m_i\}_{i \in I}$ — базис C-модуля M. По определению это значит, что любой вектор $m \in M$ можно однозначно представить в виде

$$m = \sum \mu_i^l m_i, \quad \text{где } \mu_i^l \in C.$$

При этом элементы упорядоченного набора $\{\mu_i^l\}_{i \in I}$ называются *левыми координатами* вектора m (относительно данного базиса). Физики обозначают вектор-строку левых координат $\langle \mu_i^l|$ и называют, вслед за Дираком, *бра-вектором*.

Согласно тому же определению базиса вектор m можно однозначно представить также в виде

$$m = \sum m_i \mu_i^r, \quad \text{где } \mu_i^r \in C.$$

При этом элементы упорядоченного набора μ_i^r называются *правыми координатами* вектора m и составляют вектор-столбец $|\mu^r\rangle$, который физики называют *кет-вектором*[1].

Очевидно, что разница между левыми и правыми координатами зависит от их четности и от четности векторов m_i, другими словами, от номера i:

$$\mu_i^r = (-1)^{p(m_i)p(\mu_i^l)} \mu_i^l.$$

Пусть $\{m_i\}_{i \in I}$ — базис в M, а $\{{}^*m_i\}_{i \in I}$ — двойственный ему слева базис в модуле ${}^*M$, двойственном слева к M. Разложим по базисам два вектора

---

[1] Вместе «bra» и «ket» образуют угловую скобку $\langle\ \rangle$ bracket (см. (1.7)); а буква «c» потерялась в процессе спаривания, как это бывает с любыми украшениями любого «bra».

$^*m \in {}^*M$ и $m \in M$, причем в $^*M$ мы рассмотрим левые координаты, а в M — правые:

$$^*m = \sum a_i{}^*m_i, \quad m = \sum m_i\mu_i.$$

Тогда результат спаривания этих векторов равен

$$(^*m,\, m) = \Big(\sum a_i{}^*m_i,\, \sum m_i\mu_i\Big) = \sum a_i\mu_i = \langle a|\mu\rangle, \tag{1.7}$$

где $\langle a|$ — бра-вектор с координатами a_i, а $|\mu\rangle$ — кет-вектор с координатами μ_i.

Мы хотели бы, чтобы вектор-строка $\langle a|$ являлась матрицей оператора $^*m \in {}^*M$ относительно базисов $\{m_i\}$ в M и $\{1\}$ в C. Подгоним определения под желаемый ответ; это потребует некоторой работы.

1.4.2. Матрица, как известно, — это прямоугольная таблица, элементы которой, как правило, лежат в какой-нибудь алгебре. *Суперматрица* — это матрица, каждой строке и столбцу которой приписана некая четность; четность i-й строки мы будем обозначать $p_{\mathrm{row}}(i)$, а четность j-го столбца — $p_{\mathrm{col}}(j)$. Кроме того, элементы суперматрицы, как правило, лежат в какой-нибудь супералгебре.

Откуда берутся четности строк и столбцов, понятно: мы ведь хотим записывать операторы матрицами. Для этого надо прежде всего фиксировать базисы в суперпространстве-источнике и в суперпространстве-цели. Порядок (формат) базисов отвечает порядкам (форматам) строк и столбцов, в частности, эти порядки задают четности и строк и столбцов.

Обычно мы выбираем стандартный формат базисов; ему отвечает *стандартный формат суперматриц*, представляемый в блочном виде

$$X = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}.$$

Пусть четности строк и столбцов суть

$$\mathrm{Par}_{\mathrm{row}} = (p_{\mathrm{row}}(1),\, \ldots,\, p_{\mathrm{row}}(r+s)),$$
$$\mathrm{Par}_{\mathrm{col}} = (p_{\mathrm{col}}(1),\, \ldots,\, p_{\mathrm{col}}(m+n)).$$

Скажем, что *размер*, или *формат*, суперматрицы равен $\mathrm{Par}_{\mathrm{row}} \times \mathrm{Par}_{\mathrm{col}}$. Если суперматрица квадратная и $\mathrm{Par}_{\mathrm{row}} = \mathrm{Par}_{\mathrm{col}}$, то ее *порядком* назовем $\mathrm{Par} := \mathrm{Par}_{\mathrm{row}} = \mathrm{Par}_{\mathrm{col}}$.

Если у суперматрицы r четных и s нечетных строк, m четных и n нечетных столбцов, то положим $\#(\mathrm{Par}_{\mathrm{row}}) = (r,\, s)$, $\#(\mathrm{Par}_{\mathrm{col}}) = (m,\, n)$ и скажем, что *размер* суперматрицы в стандартном формате равен $(r,\, s) \times (m,\, n)$, а *порядок квадратной матрицы в стандартном формате* — это пара $(r,\, s)$.

Всюду ниже каждая матрица снабжена структурой суперматрицы, если не оговорено обратное.

1.4.3. На пространстве суперматриц одного формата с элементами из супералгебры A введем четность, положив

$$p(X) = \bar 0 \iff p(X_{ij}) + p_{\mathrm{row}}(i) + p_{\mathrm{col}}(j) = \bar 0 \quad \text{для всех } i,\, j, \text{ таких что } X_{ij} \neq 0;$$
$$p(X) = \bar 1 \iff p(X_{ij}) + p_{\mathrm{row}}(i) + p_{\mathrm{col}}(j) = \bar 1 \quad \text{для всех } i,\, j, \text{ таких что } X_{ij} \neq 0.$$

Для суперматриц $X = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ в стандартном формате это определение превращается в следующее:

$$p(X) = \bar 0 \iff p(R_{ij}) = p(U_{kl}) = \bar 0, \quad p(S_{il}) = p(T_{kj}) = \bar 1;$$
$$p(X) = \bar 1 \iff p(R_{ij}) = p(U_{kl}) = \bar 1, \quad p(S_{il}) = p(T_{kj}) = \bar 0$$

для всех $i,\, j,\, k,\, l$.

1.4.4. Если X и Y — суперматрицы с элементами из супералгебры A, то их произведение вычисляется по обычной формуле

$$(XY)_{ij} = \sum_k X_{ik}Y_{kj}.$$

Однако произведение XY определено, только если четности столбцов матрицы X совпадают с четностями соответствующих строк матрицы Y. Очевидно, что $p(XY) = p(X) + p(Y)$.

Упражнение. Докажите, что любая матрица $X \in \mathrm{Mat}(n|0;\, C)_{\bar 1}$ нильпотентна. Более точно, $X^r = 0$ при всех $r > \min(\dim C_{\bar 1},\, n^2)$.

Пусть $\mathrm{Mat}(\mathrm{Par}_{\mathrm{row}} \times \mathrm{Par}_{\mathrm{col}};\, A)$ — суперпространство суперматриц размера $\mathrm{Par}_{\mathrm{row}} \times \mathrm{Par}_{\mathrm{col}}$ с элементами из A. Суперпространство квадратных суперматриц порядка Par с элементами из A обозначим через $\mathrm{Mat}(\mathrm{Par};\, A)$. Если A — ассоциативная супералгебра, то и алгебра $\mathrm{Mat}(\mathrm{Par};\, A)$ тоже ассоциативна.

Часто (но отнюдь не всегда!) достаточно рассматривать только стандартные форматы. Тогда, если $\#(\mathrm{Par}) = (r,\, s)$, мы пишем $\mathrm{Mat}(r|s;\, A)$.

1.4.5. Введем на суперпространстве суперматриц $X = (X_{ij})$ размера $\mathrm{Par}_{\mathrm{row}} \times \mathrm{Par}_{\mathrm{col}}$ с элементами из суперкоммутативной супералгебры C структуру C-модуля по любой из следующих формул (одна из другой получается по Правилу Знаков):

$$(Xc)_{ij} = (-1)^{p(c)p_{\mathrm{col}}(j)}X_{ij}c, \quad (cX)_{ij} = (-1)^{p(c)p_{\mathrm{row}}(i)}cX_{ij} \quad \text{для любого } c \in C.$$

Структуру C-модуля можно ввести и по-другому, определив, в какую матрицу переходит оператор (левого) умножения на скаляр. А именно, для любого набора четностей Par зададим гомоморфизм супералгебр $C \longrightarrow \mathrm{Mat}(\mathrm{Par}; C)$, который каждому $c \in C$ сопоставляет диагональную матрицу

$$\mathrm{scalar}_{Par_{row}}(c) = (c_{ij}), \quad \text{где } c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ (-1)^{p_{\mathrm{row}}(i)p(c)}c, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Упражнение. Определите $\mathrm{scalar}_{Par_{col}}(c)$ — оператор правого умножения.

В стандартном формате порядка $r|s$ получаем

$$\mathrm{scalar}_{r,s}(c) = \mathrm{diag}(c, \ldots, c, (-1)^{p(c)}c, \ldots, (-1)^{p(c)}c),$$

где сперва r раз идет c, а потом s раз $(-1)^{p(c)}c$. Если X — матрица размера $p_{\mathrm{row}} \times p_{\mathrm{col}}$, то

$$cX = \mathrm{scalar}_{\mathrm{Par}_{\mathrm{row}}}(c) \cdot X, \quad Xc = X \cdot \mathrm{scalar}_{\mathrm{Par}_{\mathrm{col}}}(c) \quad \text{для любого } c \in C.$$

В частности, поскольку умножение суперматриц ассоциативно,

$$(cX)Y = c(XY), \quad (Xc)Y = X(cY), \quad X(Yc) = (XY)c.$$

Итак, $\mathrm{Mat}(\mathrm{Par}; C)$ — это C-алгебра.

Упражнение. Опишите центр супералгебры $\mathrm{Mat}(\mathrm{Par}; C)$.

1.4.6. *Вектор-строка* — это суперматрица, состоящая из одной строки четности $\bar{0}$. Аналогично *вектор-столбец* — это суперматрица, состоящая из одного столбца четности $\bar{0}$, см. конец п. 1.4.1.

Понятно, что суперматрицу можно рассматривать как набор строк и как набор столбцов, причем если и те и другие нечетны, то, значит, мы рассматриваем не операторы $M \to C$, а операторы $M \to \Pi(C)$. Изложим подробности.

1.4.7. Пусть набор $\{m_j\}_{j\in J}$ образует базис C-модуля M, а набор $\{n_i\}_{i\in I}$ — базис C-модуля N. В этих базисах оператору $F\colon M \to N$ мы сопоставим суперматрицу ${}^mF = (F_{ij})$ размера $Par_{\mathrm{row}} \times Par_{\mathrm{col}}$, такую что

$$Fm_j = \sum n_i F_{ij}, \quad \text{а } p_{\mathrm{row}}(i) = p(n_i), \ \ p_{\mathrm{col}}(j) = p(m_j). \tag{1.8}$$

И наоборот, формула (1.8) определяет при фиксированных базисах в M и N некоторый C-линейный оператор. Итак, формула (1.8) задает отображение

$$\mathrm{Hom}_C(M, N) \longrightarrow \coprod_{\mathrm{Par}_{\mathrm{row}} \times \mathrm{Par}_{\mathrm{col}}} \mathrm{Mat}(\mathrm{Par}_{\mathrm{row}} \times \mathrm{Par}_{\mathrm{col}}; C). \tag{1.9}$$

Пусть для простоты $M = N$; а значит, $m_i = n_i$. Тогда отображение $F \mapsto {}^mF$ задает изоморфизм супералгебр $\mathrm{End}_C(M) \longrightarrow \mathrm{Mat}(\mathrm{Par}; C)$. При этом изоморфизме оператор умножения на c (слева) $l_c\colon m \mapsto c\,m$ (где $c \in C$, $m \in M$) переходит в $\mathrm{scalar}_{\mathrm{Par}_{\mathrm{row}}}(c)$.

Упражнение. Как выглядят матрицы операторов из группы $\mathrm{GL}(p|q; C)$ для простейших супералгебр $C = \mathbb{K}$, $\Lambda(1)$ и $\Lambda(2)$?

1.4.8. Как меняются координаты векторов и суперматрица операторов при заменах базисов. Для простоты рассмотрим эндоморфизмы одного модуля M, а не гомоморфизмы $M \to N$.

Бросается в глаза вопиющее нарушение прав некоторых базисов и эндоморфизмов: поскольку изоморфизмы должны быть четными, переход от базиса $\{m_i\}_{i\in I}$ к базису $\{m_i'\}_{i\in I}$ разрешен, только если форматы этих базисов совпадают. Например, даже переставить местами базисные векторы разной четности в нашей категории запрещено!

Немного погодя мы, конечно, нарушим запрет (и сколько же интересных структур при этом обнаружится!), а пока — посмотрим, куда нас заведет законопослушание.

Пусть $\{m_i\}_{i\in I}$ и $\{m_i'\}_{i\in I}$ — два базиса в M, такие что $p(m_i) = p(m_i')$ при всех i. Матрица

$${}^mD = (D_{ij})$$

замены базиса задается формулой

$$m_j' = \sum m_i D_{ij}.$$

Из определения ясно, что ${}^mD$ — четная обратимая матрица. Пусть ${}^mF$ и $({}^mF)'$ — матрицы оператора F относительно базисов $\{m_i\}_{i\in I}$ и $\{m_i'\}_{i\in I}$ соответственно, $D\colon m_i \mapsto m_i'$ — оператор перехода от базиса к базису.

Упражнение. Докажите соотношение

$$({}^mF)' = ({}^mD)^{-1} \cdot {}^mF \cdot {}^mD,$$

где ${}^mD$ — матрица оператора D.

Обсуждение. Матрица оператора D четна тогда и только тогда, когда $p(m_i) = p(m_i')$ при всех i. Поскольку морфизмы супералгебр по определению всегда четны, мы вынуждены заключить, что

внутри категории супералгебр нет никакой возможности
установить изоморфизм супералгебр $\mathrm{End}_C(\mathrm{Par}; C)$ и $\mathrm{End}_C(\mathrm{Par}'; C)$
при $\mathrm{Par} \neq \mathrm{Par}'$, даже если $\#(\mathrm{Par}) = \#(\mathrm{Par}')$.

А между тем их изоморфизм очевиден: это две инкарнации (суперматричные реализации) одной и той же супералгебры $\mathrm{End}_C(M)$, где $\mathrm{srk}\, M = \#(\mathrm{Par})$.

Здравый смысл заставляет нас расширить запас допустимых морфизмов. Хорошо бы только вовремя остановиться: считается, что брать любые обратимые матрицы в качестве ${}^{m}D$ будет уже слишком.

Вопрос. А почему, собственно, слишком? Может, сто́ит рискнуть?

1.4.9. Супертранспонирование. Если правые координаты вектора $m \in M$ в базисах $\{m_i\}_{i\in I}$ и $\{m'_i\}_{i\in I}$ связаны формулой

$$|\mu^r\rangle = D\,|\mu'^r\rangle, \quad \text{или} \quad \mu^r_i = \sum_j D_{ij}(\mu'^r_j),$$

то для левых координат того же вектора в тех же базисах имеем

$$\langle\mu^l| = \langle\mu'^l|D^{st},$$

где *супертранспонирование st* определяется следующим образом. Если $X = (X_{ij}) \in \mathrm{Mat}(\mathrm{Par}_{\mathrm{row}} \times \mathrm{Par}_{\mathrm{col}})$, то

$$X^{st} \in \mathrm{Mat}(\mathrm{Par}'_{\mathrm{row}} \times \mathrm{Par}'_{\mathrm{col}}), \quad \text{где } \mathrm{Par}'_{\mathrm{row}} = \mathrm{Par}_{\mathrm{col}},\ \mathrm{Par}'_{\mathrm{col}} = \mathrm{Par}_{\mathrm{row}},$$

причем

$$(X^{st})_{ij} = (-1)^{(\mathrm{Par}_{\mathrm{col}}(i)+\mathrm{Par}_{\mathrm{row}}(j))(p(X)+\mathrm{Par}_{\mathrm{col}}(i))}X_{ji},$$

где четности $\mathrm{Par}_{\mathrm{row}}(i)$, $\mathrm{Par}_{\mathrm{col}}(j)$ даны для суперматрицы X, а НЕ для суперматрицы X^{st}. Знак обусловлен нашим желанием, чтобы X^{st} была матрицей оператора, сопряженного к тому, матрицей которого служит X. В частности, в стандартном формате получаем

$$X = \begin{pmatrix} R & S \\ T & V \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} R & S \\ T & V \end{pmatrix}^{st} = \\ = \begin{pmatrix} R^t & (-1)^{p(X)}T^t \\ -(-1)^{p(X)}S^t & V^t \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} R^t & T^t \\ -S^t & V^t \end{pmatrix}, & \text{если } p(X) = \bar{0}; \\ \begin{pmatrix} R^t & -T^t \\ S^t & V^t \end{pmatrix}, & \text{если } p(X) = \bar{1}. \end{cases}$$

Заметим, что если мы просупертранспонируем суперматрицу дважды, то получим

$$\left(\begin{pmatrix} R & S \\ T & V \end{pmatrix}^{st}\right)^{st} = \begin{pmatrix} R & -S \\ -T & V \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $st^4 = \mathrm{id}$, а $st^2 = \mathrm{Pty}$, где Pty — оператор четности, см. п. 1.1.1.

Пример. Если X — вектор-столбец с координатами $(x_1, \ldots, x_{m+n})$ в стандартном формате (первые m строк четны, а остальные — нечетны; для экономии места мы записали их слева направо, а не сверху вниз), то вектор-строка X^{st} имеет вид

$$(x_1, \ldots, x_m, -(-1)^{p(x_{m+1})}x_{m+1}, \ldots, -(-1)^{p(x_{m+n})}x_{m+n}).$$

Если $Y = (y_1, \ldots, y_{m+n})$ — вектор-строка в стандартном формате (первые m столбцов четны, а остальные — нечетны), то Y^{st} — это вектор-столбец с координатами (также записанными слева направо, а не сверху вниз)

$$(y_1, \ldots, y_m, (-1)^{p(y_{m+1})}y_{m+1}, \ldots, (-1)^{p(y_{m+n})}y_{m+n}).$$

Утверждение. *Справедливо соотношение*

$$(XY)^{st} = (-1)^{p(X)p(Y)}Y^{st}X^{st}.$$

В частности,

$$(cX)^{st} = (-1)^{p(c)p(X)}X^{st}c = c(X^{st}),$$

т. е. супертранспонирование есть C-морфизм.

1.4.10. Упражнение. Пусть $\{m_i\}_{i\in I}$, $\{n_j\}_{j\in J}$ — базисы C-модулей M и N соответственно, ${}^{m}F$ — матрица C-линейного оператора $F\colon M \to N$ относительно этих базисов. Тогда

1) матрицей оператора F^* относительно двойственных слева базисов $\{m^*_i\}_{i\in I}$ и $\{n^*_j\}_{j\in J}$ модулей M^* и N^* является суперматрица

$${}^{m}(F^*) = ({}^{m}F)^{st};$$

2) суперматрица $(({}^{m}F)^{st})^{st}$ является матрицей оператора $F^{**} = F$, но выраженной не относительно исходных базисов, а относительно базисов

$$\{m^{**}_i = (-1)^{p(m_i)}m_i\}_{i\in I} \quad \text{и} \quad \{n^{**}_j = (-1)^{p(n_j)}n_j\}_{j\in J}.$$

Поэтому-то она не обязана совпадать с ${}^{m}F$ (и не совпадает, вообще говоря).

1.4.11. Инволюция П. Пусть $F \in \mathrm{Hom}_C(M, N)$ и матрица оператора F относительно базисов $\{m_i\}_{i\in I}$, $\{n_j\}_{j\in J}$ в M и N соответственно имеет вид

$${}^{m}F = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}.$$

Упражнение. Матрица оператора $F^{\Pi_l\Pi_l}\colon \Pi(M) \longrightarrow \Pi(N)$ относительно базисов $\{\pi(m_i)\}_{i\in I}$ и $\{\pi(n_j)\}_{j\in J}$ в $\Pi(M)$ и $\Pi(N)$ имеет вид (для краткости, когда других родственников (см. п. 1.9.1) модуля M не встречается, мы пишем просто $F^{\Pi} := F^{\Pi_l\Pi_l}$)

$${}^{m}(F^{\Pi}) = \begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}.$$

Как выглядят матрицы оператора $F^{\Pi_l\Pi_r}\colon \Pi(M) \to (N)\Pi$ и аналогичных операторов $F^{\Pi_r\Pi_r}$, $F^{\Pi_r\Pi_l}$?

§ 1.5. Билинейные формы. Ортосимплектические и периплектические группы

В этом параграфе все C-модули изначально предполагаются левыми, а правой структурой мы их наделяем вручную.

1.5.1. Пусть M и N — модули над суперкоммутативной супералгеброй C. Отображение $B\colon M\times N\to C$ называется *билинейной формой*, если оно аддитивно по каждому аргументу и для любых $m\in M$, а $n\in N$, $c\in C$ выполняются равенства

$$B(mc,\, n)=B(m,\, cn) \quad \text{и} \quad B(m,\, nc)=B(m,\, n)c.$$

Тогда

$$B(cm,\, n)=(-1)^{p(B)p(c)}cB(m,\, n).$$

Пример. Если $M=N^*$, то отображение $B(\nu,\, n)=\nu(n)$, где $n\in N$, $\nu\in N^*$, — билинейная форма. Мы часто будем писать $(\nu,\, n):=\nu(n)$.

Упражнение. Каждая билинейная форма B определяет C-линейный гомоморфизм суперпространств

$$B\colon M\otimes_C N\longrightarrow C, \quad B(m\otimes n)=B(m,\, n). \tag{1.10}$$

Обратно, по каждому C-линейному гомоморфизму суперпространств $B\colon M\otimes_C N\to C$ формула (1.10) восстанавливает билинейную форму. Очевидно, что *пространство билинейных форм* $\mathrm{Bil}_C(M,\, N)$ изоморфно пространству $(M\otimes_C N)^*$. Следовательно, $\mathrm{Bil}_C(M,\, N)$ наделено естественной структурой суперпространства, и даже C-модуля:

$$(cB)(m,\, n)=c(B(m,\, n)) \quad \text{и} \quad p(B)=p(B(m,\, n))-p(m)-p(n).$$

Если $M=N$, то мы пишем $\mathrm{Bil}_C(M)$ вместо $\mathrm{Bil}_C(M,\, N)$.

1.5.2. Каждая билинейная форма $B\in\mathrm{Bil}_C(M,\, N)$ задает гомоморфизм

$$\begin{aligned}&B_{M,N^*}: M\longrightarrow N^*,\\ &(B_{M,N^*}(m),\, n)=B(m,\, n) \quad \text{для любых } m\in M,\ n\in N.\end{aligned}$$

Отображение $B\mapsto B_{M,N^*}$ определяет гомоморфизм C-модулей:

$$\mathrm{Bil}_C(M,\, N)\longrightarrow \mathrm{Hom}_C(M,\, N^*).$$

Аналогичным образом определим гомоморфизм

$$\begin{aligned}&B_{N,M^*}:\ \mathrm{Bil}_C(M,\, N)\longrightarrow \mathrm{Hom}_C(N,\, M^*),\\ &(m,\, B_{N,M^*}(n))=(-1)^{p(m)p(B)}B(m,\, n) \quad \text{для любых } m\in M,\ n\in N.\end{aligned}$$

Форма $B\in\mathrm{Bil}_C(M,\, N)$ называется *невырожденной*, если оба соответствующих гомоморфизма B_{M,N^*} и B_{N,M^*} биективны[1].

Вырожденная форма $B\in\mathrm{Bil}_C(M,\, N)$ называется *прямой*, если ядра и образы гомоморфизмов B_{M,N^*} и B_{N,M^*} — *прямые подмодули*, т. е. дополнения к ним суть C-инвариантные модули. (Это понятие потребуется при исследовании суперрасслоений.)

1.5.3. Пусть M и N — C-модули, $\{m_i\}_{i\in I}$ и $\{n_j\}_{j\in J}$ — их базисы соответственно. Сопоставим каждой форме $B\in\mathrm{Bil}_C(M,\, N)$ матрицу ${}^{f}B\in(B_{ij})$, где

$$({}^{f}B)_{ij}=(-1)^{p(m_i)p(B)}B(m_i,\, n_j),$$

которая называется *матрицей* (*Грама*) *билинейной формы* B.

Упражнение. 1) Суперматрица ${}^{f}B$ совпадает с суперматрицей оператора $B_{N,M^*}: N\to M^*$ относительно базисов $\{n_j\}_{j\in J}$ и $\{m_i^*\}_{i\in I}$, где базис $\{m_i^*\}_{i\in I}$ модуля M^* является левым двойственным к базису $\{m_i\}$.

2) Отображение $B\mapsto {}^{f}B$ задает изоморфизм C-модуля $\mathrm{Bil}_C(M,\, N)$ с C-модулем матриц, структура суперматриц на котором определена в п. 1).

3) Если $\langle\mu^l|$ — вектор-строка левых координат вектора $m\in M$, а $|\nu^r\rangle$ — вектор-столбец правых координат вектора $n\in N$, то

$$B(m,\, n)=(-1)^{p(m)p(B)}\langle\mu^l|{}^{f}B|\nu^r\rangle.$$

4) Пусть M — это C-модуль, а D — матрица замены базиса в M (и, стало быть, она четная). Какой формулой связаны между собой матрицы $({}^{f}B)'$ и ${}^{f}B$ билинейной формы B в новом и в старом базисах:

$$({}^{f}B)'=D^{st}({}^{f}B)D \tag{1.11}$$

или

$$({}^{f}B)'=D^{st^3}({}^{f}B)D? \tag{1.12}$$

Каким базисам (левым или правым) отвечает формула (1.11) и каким — (1.12)?

1.5.4. Инволюция *U*. Каждой форме $B\in\mathrm{Bil}_C(M,\, N)$ сопоставим *перевернутую* форму $B^U\in\mathrm{Bil}_C(N,\, M)$ по формуле

$$B^U(n,\, m)=(-1)^{p(n)p(m)}B(m,\, n). \tag{1.13}$$

Отображение $B\mapsto B^U$ задает изоморфизм C-модулей

$$\mathrm{Bil}_C(M,\, N)\longrightarrow \mathrm{Bil}_C(N,\, M).$$

Более того,

$$(B^U)^U=B \quad \text{для всех } B\in\mathrm{Bil}_C(M,\, N).$$

---

[1] Проверять невырожденность формы нужно в координатах, т. е. на языке матриц Грама, которые мы определим чуть ниже.

Форма $B\in \mathrm{Bil}_C(M)$ называется *симметрической*, если $B^U=B$, и *антисимметрической*, если $B^U=-B$.

Упражнение. Подпространства симметрических и антисимметрических форм — прямые подмодули в $\mathrm{Bil}_C(M)$.

1.5.5. В терминах суперматриц инволюция U задается формулой

$$U\colon X\longmapsto (X^U)_{ij}=(-1)^{p_{\mathrm{row}}(i)}(X^{st})_{ij}.$$

В блочной записи суперматриц стандартного формата явная формула для U такова:

$$X=\begin{pmatrix}R&S\\T&V\end{pmatrix}\longmapsto X^U=\begin{cases}\begin{pmatrix}R^t&T^t\\S^t&-V^t\end{pmatrix}, & \text{если } p(X)=\bar{0};\\ \begin{pmatrix}R^t&-T^t\\-S^t&-V^t\end{pmatrix}, & \text{если } p(X)=\bar{1}.\end{cases}$$

Можно сказать, что функции транспонирования при переходе к суперслучаю распределяются между двумя операциями: супертранспонирование st обслуживает всевозможные замены базиса (преобразование матрицы билинейной формы, переход к двойственному оператору), тогда как инволюция U связана с симметризацией.

Отметим, что $U^2=\mathrm{id}$, однако никакому соотношению типа $(XY)^U=\pm Y^UX^U$, аналогичному формуле для транспонирования матриц, инволюция U **не** удовлетворяет.

1.5.6. Инволюция П. С каждой формой $B\in\mathrm{Bil}_C(M,\,N)$ свяжем форму $B^\Pi\in\mathrm{Bil}_C(\Pi(M),\,\Pi(N))$ по формуле

$$B^\Pi(\pi(m),\,\pi(n))=(-1)^{p(m)}B(m,\,n).$$

В блочной записи суперматриц стандартного формата явная формула для матрицы формы B^Π такова:

$${}^fB=\begin{pmatrix}R&S\\T&V\end{pmatrix}\longmapsto {}^f(B^\Pi)=\begin{cases}\begin{pmatrix}V&T\\-S&-R\end{pmatrix}, & \text{если } p(X)=\bar{0};\\ \begin{pmatrix}-V&-T\\S&R\end{pmatrix}, & \text{если } p(X)=\bar{1}.\end{cases}$$

Упражнения. 1) Докажите, что

$$(B^\Pi)^\Pi=-B\quad\text{и}\quad(B^U)^\Pi=-((B)^\Pi)^U.$$

2) Докажите следующую теорему.

Теорема. *Инволюция* Π *переводит каждую симметрическую форму на* M *в анти-симметрическую формы на* $\Pi(M)$, *и наоборот.*

3) Аналогично форме B канонически соответствуют формы $B^{\Pi_r\Pi_l}$, $B^{\Pi_l\Pi_r}$, $B^{\Pi_r\Pi_r}$ из соответствующих суперпространств

$$\mathrm{Bil}_C((M)\Pi,\,\Pi(N)),\quad \mathrm{Bil}_C(\Pi(M),\,(N)\Pi)\quad\text{и}\quad \mathrm{Bil}_C((M)\Pi,\,(N)\Pi).$$

Как выражаются их матрицы через матрицу формы B?

1.5.7. Нормальный вид матрицы билинейной формы. В этом пункте мы будем предполагать, что основное поле $\mathbb{K}$ — это поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Пусть M — свободный модуль суперранга $m|n$ над суперкоммутативной супералгеброй C.

Напомним, что стандартные матрицы J_{2n} и Π_n имеют вид

$$J_{2n}=\begin{pmatrix}0&1_n\\-1_n&0\end{pmatrix},\quad \Pi_{2n}=\begin{pmatrix}0&1_n\\1_n&0\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad \Pi_{2n+1}=\begin{pmatrix}0&0&1_n\\0&1&0\\1_n&0&0\end{pmatrix}$$

Пусть $S_n=\Pi_n$, или $S_n=1_n$, или $S_n=\mathrm{antidiag}_n(1,\,\ldots,\,1))$.

Упражнение. 1) Пусть B — невырожденная симметрическая билинейная форма на суперпространстве суперразмерности $m|n$. Тогда

а) если $p(B)=\bar{0}$, то $n=2s$ и в M есть такой базис, что матрица формы B имеет вид

$$\begin{pmatrix}S_m&0\\0&J_{2s}\end{pmatrix};$$

б) если $p(B)=\bar{1}$, то $m=n$ и в M есть такой базис, что матрица ${}^fB$ формы B имеет вид J_{2n}.

2) Пусть B — невырожденная антисимметрическая форма на суперпространстве суперразмерности $m|n$. Тогда

а) если $p(B)=\bar{0}$, то $m=2s$ и матрицу формы можно привести к виду

$$\begin{pmatrix}J_{2s}&0\\0&S_n\end{pmatrix};$$

б) если $p(B)=\bar{1}$, то $m=n$ и матрицу формы можно привести к виду Π_{2n} [1].

3) К какому нормальному виду можно привести матрицу однородной невырожденной (анти)симметрической билинейной формы над $\mathbb{R}$?

1.5.8. Группы OSp и Pe. Так как все операторы (и их суперматрицы) из $\mathrm{GL}(M;\,C)$ четные, определение оператора, сохраняющего матрицу

---

[1] Обращаем внимание читателя на то, что матрица нечетной невырожденной симметрической формы приводится к виду J_{2n}, а не Π_{2n}.

билинейной формы на C-модуле M, стандартное, как на первом курсе, только транспонирование суперизовано:

$$X \in \mathrm{OSp}(M;\, C) \iff X^{st}BX = B. \tag{1.14}$$

Отметим, что если суперматрица неоднородна относительно четности, то операторы, сохраняющие ее, не образуют группы; поэтому мы рассматриваем только однородные формы.

Обозначим через $\mathrm{OSp}(M;\, C)$ *ортосимплектическую* подгруппу группы $\mathrm{GL}(M;\, C)$, т. е. подгруппу, сохраняющую невырожденную четную симметрическую билинейную форму в свободном C-модуле M суперранга $m|2n$.

Выбрав базис формата Par в M, мы реализуем группу $\mathrm{OSp}(M;\, C)$ суперматрицами и обозначаем эту реализацию $\mathrm{OSp}(\mathrm{Par};\, C)$, или коротко $\mathrm{OSp}(m|2n;\, C)$, если $\#(\mathrm{Par}) = m|2n$, а суперматрицы берутся в стандартном формате.

Обозначим через $\mathrm{Pe}(M;\, C)$ *периплектическую*[1] подгруппу группы $\mathrm{GL}(M;\, C)$, т. е. подгруппу, сохраняющую невырожденную нечетную симметрическую билинейную форму в свободном C-модуле M. Выбрав базис формата Par в M, мы реализуем $\mathrm{Pe}(M;\, C)$ суперматрицами и обозначаем эту реализацию $\mathrm{Pe}(\mathrm{Par};\, C)$ или коротко $\mathrm{Pe}(n;\, C)$, если $\#(\mathrm{Par}) = n|n$, а суперматрицы берутся в стандартном формате.

Поскольку инволюция Π переводит симметрические формы на M в антисимметрические на $\Pi(M)$, мы заключаем, что сохраняющая четную антисимметрическую форму, — обозначим ее $\mathrm{OSp}^a(M;\, C)$ — изоморфна группе $\mathrm{OSp}(M;\, C)$, хотя, конечно, матричные представления у них разные: оба состоят из суперматриц $\{X \in \mathrm{GL}(M;\, C) \mid X^{st}BX = B\}$, но

$$B = \begin{cases} \begin{pmatrix} S_n & 0 \\ 0 & J_{2s} \end{pmatrix} & \text{для } \mathrm{OSp}; \\ \begin{pmatrix} J_{2s} & 0 \\ 0 & S_n \end{pmatrix} & \text{для } \mathrm{OSp}^a. \end{cases}$$

Аналогично обстоит дело с периплектическими группами: $\mathrm{Pe}(M;\, C) \simeq \mathrm{Pe}^a(M;\, C)$, где Pe^a сохраняет антисимметрическую нечетную форму.

Замечание. Когда мы будем заниматься симплектической геометрией на супермногообразиях и ее периплектическим аналогом, нам естественней будет выдвинуть на передний план антисимметрические формы. Поскольку слово «симплектико-ортогональный» звучит коряво, мы стараемся все сводить к OSp, а значок ^{a} можно было бы и опустить, если бы симметрические формы не появлялись иногда одновременно с антисимметрическими: это самое интересное!

---

[1] Слово предложил Андре Вейль: «Как? Вы не знаете древнегреческого?!» — *Прим. ред.*

§ 1.6. Супералгебры Ли. Дифференцирования супералгебр

В этом параграфе мы на время откажемся от введенного в п. 1.1.3 соглашения и не будем требовать от рассматриваемых алгебр ни ассоциативности, ни наличия единичного элемента. Знакомство с элементами теории представлений алгебр Ли читателю не повредит, но не обязательно.

1.6.1. Супералгебра $\mathfrak{g}$ над суперкоммутативной супералгеброй C (советуем читателю вначале считать, что C — это основное поле $\mathbb{K}$) называется *лиевой* супералгеброй или *супералгеброй Ли*, если умножение в ней, обозначаемое, как правило, не точкой $x \cdot y$ и не xy, а скобкой ($[x,\, y]$ или $\{x,\, y\}$), удовлетворяет двум условиям для любых $x,\, y,\, z \in \mathfrak{g}$:

$$[x,\, y] = -(-1)^{p(x)p(y)}[y,\, x], \tag{1.15}$$

$$[x,\, [y,\, z]] = [[x,\, y],\, z] + (-1)^{p(x)p(y)}[y,\, [x,\, z]]. \tag{1.16}$$

Условие (1.15) — это суперантикоммутативность, а условие (1.16) — это *супер тождество Якоби*. Мы записали его в виде, который можно понять, как мы покажем чуть ниже. А можно записать в бессмысленном, зато симметричном виде; он тоже бывает нужен:

$$(-1)^{p(x)p(z)}[x,[y,z]]+(-1)^{p(z)p(y)}[z,[x,y]]+(-1)^{p(y)p(x)}[y,[z,x]]=0. \tag{1.17}$$

Чтобы понять смысл тождества Якоби, скажем, что линейный оператор $D\colon A \to A$ является *супердифференцированием* супералгебры A (произвольной, не обязательно ассоциативной или суперкоммутативной), если однородные компоненты оператора D удовлетворяют суперправилу Лейбница

$$D(ab) = D(a)b + (-1)^{p(D)p(a)}aD(b) \quad \text{для любых } a,\, b \in A.$$

Тождество Якоби означает, что для любого $x \in \mathfrak{g}$ оператор (*присоединенного действия*)

$$\mathrm{ad}_x\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}; \quad \mathrm{ad}_x(y) := [x,\, y],$$

является супердифференцированием супералгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим теперь тождества (1.15) и (1.16) повнимательнее.

Если $x,\, y,\, z \in \mathfrak{g}_{\bar 0}$, то тождества (1.15) и (1.16) означают, что $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ — алгебра Ли.

Если $x \in \mathfrak{g}_{\bar 1}$, $y,\, z \in \mathfrak{g}_{\bar 0}$, то тождество (1.16) показывает, что скобка $[\cdot\,,\cdot]$ задает на $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ структуру правого $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модуля, а тождество (1.15) показывает, как этот модуль превращается в двусторонний.

Если $x \in \mathfrak{g}_{\bar 0}$, $y,\, z \in \mathfrak{g}_{\bar 1}$, то тождество (1.16) показывает, что билинейное симметрическое отображение $[\cdot\,,\cdot]\colon \mathfrak{g}_{\bar 1} \times \mathfrak{g}_{\bar 1} \to \mathfrak{g}_{\bar 0}$ есть морфизм $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модулей.

Интерпретация тождества Якоби для трех нечетных переменных — дело тонкое и будет дана много позже.

Упражнение. Докажите, что тождество Якоби для любых трех элементов из $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ следует из билинейности, суперкососкоммутативности и равенства $[x, [x, x]] = 0$ для всех элементов $x \in \mathfrak{g}_{\bar 1}$.

Итак, чтобы задать супералгебру Ли $\mathfrak{g}$, мы должны

1) задать ее четную часть — алгебру Ли $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ со скобкой $[\cdot\,,\cdot]$;

2) задать $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модуль $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ (скажем, левый);

3) задать симметрический морфизм $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модулей: $[\cdot\,,\cdot]\colon \mathfrak{g}_{\bar 1} \otimes \mathfrak{g}_{\bar 1} \to \mathfrak{g}_{\bar 0}$.

После этого останется только обозначить действие алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ на $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ через $[\cdot\,,\cdot]$, наделить $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ структурой двустороннего $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модуля, положив

$$[x, y] = -[y, x] \quad \text{для } x \in \mathfrak{g}_{\bar 1},\ y \in \mathfrak{g}_{\bar 0},$$

и

4) проверить, что $[x, [x, x]] = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}_{\bar 1}$.

Упражнение. Докажите, что если $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модуль $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ содержит циклический[1] вектор x, то равенство $[x, [x, x]] = 0$ достаточно проверить лишь для него.

Пример. Пусть $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ — это произвольная алгебра Ли, а $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ — произвольный левый $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модуль. Обозначим действие $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ на $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ через $[\cdot\,,\cdot]$ и наделим $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ структурой двустороннего $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модуля, как описано выше. Положим $[x, y] = 0$ для любых $x, y \in \mathfrak{g}_{\bar 1}$. Ясно, что сумма $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar 0} \oplus \mathfrak{g}_{\bar 1}$ превращается тем самым в супералгебру Ли, причем $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ является в ней идеалом. Иными словами, $\mathfrak{g}$ является полупрямой суммой нечетного суперкоммутативного идеала $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ и подалгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar 0}$.

Это тривиальный способ ввести структуру супералгебры Ли на прямой сумме произвольной алгебры Ли и нечетного модуля над ней. Конечно, супералгебры Ли с нетривиальной скобкой на нечетной компоненте много интереснее.

1.6.2. Следующий способ выяснять, является ли $\mathfrak{g}$ супералгеброй Ли, может показаться слишком замысловатым, но иногда без него не обойтись.

Легко видеть, что *замена базы* (переход от C-алгебры $\mathfrak{g}$ к B-алгебре $\mathfrak{g}_B = B \otimes_C \mathfrak{g}$, где B — суперкоммутативная C-алгебра) переводит супералгебры Ли над C в супералгебры Ли над B.

Предложение. *Если $\mathfrak{g}$ — супералгебра с умножением $[\cdot\,,\cdot]$ над C, то $\mathfrak{g}$ является супералгеброй Ли* (*т. е. удовлетворяет тождествам* (1.15) *и* (1.16)) *тогда и только тогда, когда для любой замены базы выполняются равенства*

---

[1] Пусть V — это $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-модуль. Вектор $x \in V$ называется *циклическим*, если $U(\mathfrak{g}_{\bar 0})x = V$, где $U(\mathfrak{g}_{\bar 0})$ — универсальная обертывающая алгебра, см. п. 1.6.7.

а) $[X, X] = 0$ *для любого* $X \in (\mathfrak{g}_B)_{\bar 0}$,

б) $[X, [X, X]] = 0$ *для любого* $X \in (\mathfrak{g}_B)_{\bar 1}$.

Доказательство. Докажем, что при наших условиях тождество Якоби выполняется. Пусть $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{g}$ — произвольные однородные элементы; возьмем $B = C[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$, где $p(\lambda_i) = p(X_i) + \bar 1$. Тогда $X = \sum \lambda_i X_i \in (\mathfrak{g}_B)_{\bar 1}$ и элемент $[X, [X, X]]$ можно представить в виде

$$\sum \lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}\lambda_3^{n_3} X_{n_1 n_2 n_3}, \qquad \text{где } X_{n_1 n_2 n_3} \in \mathfrak{g}.$$

Легко проверить, что коэффициент X_{111} при $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ равен в точности левой части тождества Якоби. А поскольку $[X, [X, X]] = 0$, мы заключаем, что и $X_{111} = 0$.

Выполнение тождества (1.15) доказывается аналогично.

Упражнения. 1) Проверьте, что из условий а) и б) действительно следует тождество (1.15).

2) Пусть $\mathfrak{g}$ — супералгебра над суперкоммутативной супералгеброй C. Докажите, что $\mathfrak{g}$ является ассоциативной (лиевой) супералгеброй тогда и только тогда, когда $(\mathfrak{g}_B)_{\bar 0}$ является ассоциативной (соответственно лиевой) алгеброй для любой суперкоммутативной C-алгебры B. **Важное обстоятельство**: для доказательства обратного утверждения достаточно брать в качестве C лишь конечномерные алгебры Грассмана или даже одну из них, размерность которой больше $\dim \mathfrak{g}$ (если $\mathfrak{g}$ конечномерна). □

1.6.3. В суперслучае, как и в случае обычных алгебр Ли, существуют две общие конструкции супералгебр Ли: переход от ассоциативной супералгебры к лиевой и рассмотрение супералгебры дифференцирований. Разберем эти конструкции более подробно.

Напомним, что на пространстве любой ассоциативной алгебры A можно задать структуру алгебры Ли, определив коммутатор по формуле

$$[a, b] = ab - ba. \tag{1.18}$$

Получающуюся при этом алгебру Ли обычно обозначают A_L.

Пусть A — произвольная ассоциативная супералгебра над C. Определим на ней суперкоммутатор по формуле

$$[a, b] = ab - (-1)^{p(a)p(b)} ba. \tag{1.19}$$

Нетрудно проверить, что введение такого суперкоммутатора превращает суперпространство A в супералгебру Ли, которую мы будем обозначать A_{SL}. Алгебры A, такие что A_L — алгебра Ли, называются *Ли-допустимыми*, а супералгебры A, такие что A_{SL} — супералгебра Ли, назовем *супер Ли-допустимыми*. Например, все ассоциативные (супер)алгебры (супер) Ли-допустимы.

Пример. В частном случае, когда $A = \mathrm{End}_C(M)$ для некоторого суперпространства M, мы получаем очень важный пример *общей линейной* супералгебры Ли, имеющей свое специальное обозначение: $\mathfrak{gl}(M, C) := = \mathrm{End}_C(M)_{SL}$. Выбрав в M базис, мы превращаем $\mathfrak{gl}(M; C)$ в матричную супералгебру Ли $\mathfrak{gl}(\mathrm{Par}; C)$. Если формат базиса стандартный, то и формат суперматриц — стандартный, и матричную супералгебру Ли $\mathfrak{gl}(\mathrm{Par}; C)$ обозначают $\mathfrak{gl}(p|q; C)$, где $p|q = \#(\mathrm{Par}) = \mathrm{rk}\, M$.

Замечание. Отметим, что, поскольку ассоциативная *супер*алгебра A — это просто ассоциативная алгебра с дополнительной структурой ($\mathbb{Z}/2$-градуировкой), мы всегда можем изготовить из A два объекта: алгебру Ли A_L и супералгебру Ли A_{SL}. Если $A_{\bar{1}} \neq 0$, то эти два объекта, конечно, различны. Вот два примера:

1) $\mathrm{Mat}(p|q)_{SL} = \mathfrak{gl}(p|q)$, тогда как $\mathrm{Mat}(p|q)_L = \mathfrak{gl}(p+q)$.

2) Пусть $\mathrm{Weyl}(n) := \mathbb{K}[x, \partial_x]$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — ассоциативная алгебра дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами (*алгебра Вейля*). Положив $\deg x_i = \deg \partial_i = 1$ для всех i и задав четность, как $\deg \bmod 2$, превращаем $\mathrm{Weyl}(n)$ в супералгебру. И алгебра Ли $\mathrm{Weyl}(n)_L$, и супералгебра Ли $\mathrm{Weyl}(n)_{SL}$ очень нужны и обладают рядом замечательных и совсем разных свойств: на $\mathrm{Weyl}(n)_{SL}$ есть суперслед, а $\mathrm{Weyl}(n)_L$ проста по модулю центра (не являющегося прямым слагаемым, что полезно для физиков).

1.6.4. Рассмотрим теперь суперпространство $\mathrm{Der}\, A \subset \mathrm{End}_C(A)$ дифференцирований супералгебры A, т. е. C-линейных операторов $D\colon A \to A$, удовлетворяющих правилу Лейбница (см. п. 1.6.1):

$$D(ab) = D(a)b + (-1)^{p(D)p(a)} aD(b) \quad \text{для любых } a,\, b \in A. \tag{1.20}$$

Как и в четном случае, оно не является подалгеброй ассоциативной супералгебры $\mathrm{End}_C(A)$ (произведение дифференцирований не обязано быть дифференцированием), но является подалгеброй Ли супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(A, C)$ (суперкоммутатор двух дифференцирований является дифференцированием). Положим $\mathfrak{der}_C A := (\mathrm{Der}\, A)_{SL}$ или $\mathfrak{der}_C A := (\mathrm{Der}_C\, A)_L$, если и A, и C рассматриваются без суперструктуры (как алгебры, а не супералгебры).

Упражнение. 1) Докажите, что правило Лейбница эквивалентно соотношению $[D, l_a] = l_{D(a)}$, где $l_a\colon b \mapsto ab$ для любого $b \in A$ — оператор левого умножения на a.

2) Если $D \in \mathfrak{der}_C(A)$ и подмножество $X \subset A$ порождает супералгебру A над C, то оператор D полностью определяется своими значениями на X.

3) Пусть I — двусторонний идеал в супералгебре A. Тогда $DI^{N+1} \subset I^N$. Если подмножество $X \subset I$ порождает идеал I и $DX \subset I$, то и $DI \subset I$, а индуцированный гомоморфизм $A/I \to A/I$ (который мы тоже обозначаем D) является дифференцированием.

В тех случаях, когда A является суперкоммутативной супералгеброй, мы можем определить на пространстве $\mathrm{Der}_C\, A$ структуру A-модуля, положив

$$(aD)(b) = aD(b) \quad \text{для любых } a,\, b \in A.$$

Тогда получим

$$[D_1, aD_2] = D_1(a)D_2 + (-1)^{p(a)p(D_1)} a[D_1, D_2].$$

Пример. Пусть $A = C[x, \xi] = C \otimes_{\mathbb{K}} [x, \xi]$ — супералгебра полиномиальных функций от n четных образующих $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и m нечетных образующих $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$. Как и в чисто четном случае, супералгебра Ли дифференцирований $\mathfrak{der}_C A$ интерпретируется как *супералгебра Ли* (*полиномиальных*) *векторных полей* и обозначается $\mathfrak{vect}(n|m; C) := = \mathfrak{der}_C C[x, \xi]$.

Введем объединенные переменные $y = (x, \xi)$ и определим частные производные $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial y_i}$, положив

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(y_j) = \delta_{ij}$$

и продолжив их на $A = C[y]$ с помощью правила Лейбница и Правила Знаков.

Поскольку согласно упражнению любой оператор $D \in \mathfrak{vect}(n|m; C)$ определяется своими значениями на образующих супералгебры $C[y]$, он обязан иметь вид $D = \sum f_i \partial_i$ для некоторых $f_i \in C[y]$.

Таким образом, мы видим, что частные производные образуют базис $C[y]$-модуля $\mathfrak{vect}(n|m; C)$.

Приведем еще несколько полезных формул, обобщающих правило Лейбница (1.20). Для любого четного дифференцирования D имеем

$$D^n(ab) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} D^k(a) D^{n-k}(b) \quad \text{для любых } a,\, b \in A. \tag{1.21}$$

Для нечетного дифференцирования D придется написать две формулы, первая из которых на первый взгляд может показаться неожиданной:

$$D^{2n}(ab) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} D^{2k}(a) D^{2n-2k}(b) \tag{1.22}$$

и, как следствие из (1.22),

$$\begin{aligned} D^{2n+1}(ab)=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}D^{2k+1}(a)D^{2n-2k}(b)&+\\ +(-1)^{p(a)}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}&D^{2k}(a)D^{2n-2k+1}(b). \end{aligned}\tag{1.23}$$

В частности, хотя произведение линейно независимых дифференцирований D_1 и D_2 никогда не является дифференцированием (если $D_1D_2\neq 0$),

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{квадрат нечетного дифференцирования —}\\ \text{ВСЕГДА дифференцирование.}\end{array}}\tag{1.24}$$

Замечание. Недавно А. Джумадильдаев начал исследовать, при каких $N=N(n)$ антисимметризация отображения $D\mapsto D^N$ (т. е. выражение $\sum\limits_{\sigma\in S_N}\operatorname{sign}(\sigma)X_{\sigma(1)}\ldots X_{\sigma(N)}$) является векторным полем для любых векторных полей $X_1,\ldots X_N\in\mathfrak{vect}(n)$. В процессе этого исследования А. Джумадильдаев обнаружил, что Ли-допустимость алгебры $\mathrm{Weyl}(n)$ следует из «скрытой суперсимметрии», а точнее — факта (1.24) для некоторого универсального нечетного супердифференцирования, см. [Dz].

1.6.5. Часто бывает полезным следующее эквивалентное определение дифференцирования. Пусть A — это C-алгебра, а $\delta=C[t]/(t^2)$, где $p(t)=$ $=p(D)$, а $D\in\operatorname{End}_C(A)$. Положим

$$\varphi_D=1+tD\in\operatorname{End}_\delta(\delta\otimes_C A).$$

Поскольку $\varphi_D\varphi_{-D}=1$, оператор φ_D обратим.

Упражнение. Отображение φ_D является морфизмом супералгебр тогда и только тогда, когда D — дифференцирование супералгебры A.

1.6.6. Супералгебры Ли, сохраняющие билинейные формы. Зная, как оператор $X\in\mathrm{GL}_C(M)$ действует на билинейную форму $B\in\mathrm{Bil}_C(M)$ (он переводит ее в $X^{st}BX$, см. (1.14)), мы получим, продифференцировав это действие, определения супералгебр Ли, соответствующих группам $\mathrm{OSp}(\mathrm{Par};\,C)$ и $\mathrm{Pe}(\mathrm{Par};\,C)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{osp}_B(\mathrm{Par};\,C)&=\{X\in\mathfrak{gl}(\mathrm{Par};\,C)\mid X^{st}B+BX=0\}, &&\text{если } p(B)=\bar 0,\\ \mathfrak{pe}_B(\mathrm{Par};\,C)&=\{X\in\mathfrak{gl}(\mathrm{Par};\,C)\mid X^{st}B+(-1)^{p(X)}BX=0\}, &&\text{если } p(B)=\bar 1. \end{aligned}$$

Для стандартных форматов мы пишем $\mathfrak{pe}(n;\,C)$ вместо $\mathfrak{pe}(n|n;\,C)$.

1.6.6а. Упражнение. Опишите матричный вид элементов супералгебр Ли: 1) $\mathfrak{osp}(m|2n;\,C)$ и $\mathfrak{osp}^a(m|2n;\,C)$; 2) $\mathfrak{pe}(n;\,C)$ и $\mathfrak{pe}^a(n;\,C)$.

На сегодня обозначения суперматриц и построенных из них супералгебр плохо приспособлены для нестандартных форматов. Тем не менее, на практике нестандартные форматы используются довольно часто. Так, например, суперсимметрию суперпространства Минковского всегда выражают именно с их помощью и никак иначе. Поэтому мы предлагаем читателю в качестве упражнения найти матричные выражения элементов супералгебр Ли $\mathfrak{osp}$ and $\mathfrak{pe}$ также и в некоторых нестандартных форматах (для физиков именно эти форматы «стандартны»).

Соглашение. Всюду в дальнейшем мы используем обозначение $\mathfrak{gl}(k|l|m;\,C)$ для формата $\mathrm{Par}=(\bar 0\ldots\bar 0\bar 1\ldots\bar 1\bar 0\ldots\bar 0)$ с l единицами. Аналогично мы используем обозначение $\mathfrak{gl}(k_1|k_2|k_3|\ldots|k_r)$. Случаи, когда форматы начинаются с нечетных векторов, мы обозначаем символом $\mathfrak{gl}(0|k|l|m;\,C)$ и т. п.

1.6.6б. Упражнение. 1) Найдите матричный вид элементов супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(0|n|m|n;\,C)$.

2) Найдите матричный вид элементов супералгебры Ли $\mathfrak{pe}(n|k|k|n;\,C)$.

Если $m=2k$, есть еще один важный формат для матриц из $\mathfrak{osp}$ — это формат $(k|2n|k)$. Соответствующие матрицы имеют вид

$$\begin{pmatrix} A & X & B\\ Y^t & E & -X^t\\ C & Y & -A^t\end{pmatrix},\quad \text{где } E^tJ+JE=0,\ \text{т. е. } E\in\mathfrak{sp}_J(2n),\ B=-B^t,\ C=-C^t.$$

1.6.7. Универсальная обертывающая алгебра. Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная супералгебра Ли, а M — произвольное суперпространство. Будем говорить, что на M задана структура $\mathfrak{g}$-модуля или определено *представление* супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, если задан гомоморфизм супералгебр Ли $\rho\colon\mathfrak{g}\longrightarrow(\operatorname{End}(M))_{SL}$, или, другими словами, линейное отображение, удовлетворяющее условию

$$\rho([x,\,y])=[\rho(x),\,\rho(y)]\quad\text{для любых } x,\,y\in\mathfrak{g}.\tag{1.25}$$

Упражнение. Докажите, что отображение

$$\mathrm{ad}\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),\qquad x\longmapsto\mathrm{ad}_x,$$

задает представление супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ на ней самой. Это представление называется *присоединенным*.

Поскольку на пространстве $\operatorname{End}(M)$ определены две структуры — ассоциативной и лиевой супералгебр, — операторы $X=\rho(x)$ и $Y=\rho(y)$, в отличие от самих элементов x и y, можно не только коммутировать, но и перемножать. При этом условие (1.25) задает соотношение

$$\rho([x,\,y])=XY-(-1)^{p(X)p(Y)}YX,$$

справедливое для операторов любого представления ϱ супералгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Это простое соображение приводит нас, как и в случае алгебр Ли, к понятию *универсальной обертывающей алгебры* $U(\mathfrak{g})$. Итак, положим

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I, \quad \text{где } I = (x \otimes y - (-1)^{p(x)p(y)} y \otimes x - [x,\, y] \ \text{ для любых } x,\, y \in \mathfrak{g}),$$

а $T(\mathfrak{g}) = \underset{i \geqslant 0}{\oplus} T^i(\mathfrak{g})$ — тензорная алгебра[1] суперпространства $\mathfrak{g}$, в которой $T^0(\mathfrak{g}) = \mathbb{K}$, $T^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, $T^i(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{g}$, а идеал I, по которому факторизуем, считается двусторонним.

Очевидно, что алгебра $U(\mathfrak{g})$ наделена естественной возрастающей фильтрацией

$$0 = U_{-1}(\mathfrak{g}) \subset U_0(\mathfrak{g}) \subset U_1(\mathfrak{g}) \subset \ldots \subset U(\mathfrak{g}), \quad \text{где } U_n(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{j \geqslant n} T^j(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g}).$$

Пусть

$$\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) = \oplus \operatorname{gr}_i U(\mathfrak{g}), \quad \text{где } \operatorname{gr}_i U(\mathfrak{g}) = U_i(\mathfrak{g})/U_{i-1}(\mathfrak{g}),$$

— ассоциированная градуированная алгебра.

Теорема (Пуанкаре—Биркгоф—Витт). *Естественный гомоморфизм* $S(\mathfrak{g}) \to \operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$ *является изоморфизмом* $\mathbb{Z}$*-градуированных ассоциативных супералгебр.*

Доказательство. Примените Правило Знаков к любому, желательно короткому, доказательству теоремы ПБВ (см., например, [Sh]). ☐

Конечно, как и в четном случае, универсальная обертывающая $U(\mathfrak{g})$ очень большая по сравнению с самой супералгеброй Ли $\mathfrak{g}$, зато она ассоциативна.

§ 1.7. Суперслед и супердетерминант (березиниан)

В этом параграфе мы определим аналоги гомоморфизмов алгебр Ли $\mathrm{tr}\colon \mathfrak{gl}(n;\, C) \longrightarrow \mathfrak{gl}(1;\, C)$ и групп $\det\colon \mathrm{GL}(n;\, C) \longrightarrow \mathrm{GL}(1;\, C)$, где C — коммутативная алгебра, для случая, когда C — суперкоммутативная супералгебра.

1.7.1. Пусть M — свободный C-модуль. Аналог общей линейной алгебры Ли — это $\mathfrak{gl}(M;\, C)$, а след, или, для большей выразительности, *суперслед*, — это гомоморфизм

$$\mathrm{str}\colon \mathfrak{gl}(M;\, C) \longrightarrow C \cong \mathfrak{gl}(C;\, C),$$

---

[1] Другими словами, *тензорная алгебра* пространства V есть алгебра некоммутирующих многочленов от элементов базиса (супер)пространства V.

определенный, как обычно, как композиция $\mathrm{End}(M;\, C) \xrightarrow{\cong} M^* \otimes_C M \longrightarrow C$ естественного изоморфизма и свертки. На суперпространстве суперматриц суперслед — это отображение $\mathrm{str}\colon \mathfrak{gl}(\mathrm{Par};\, C) \longrightarrow \mathfrak{gl}(1|0;\, C)$, заданное формулой

$$\mathrm{str}\, X = \sum (-1)^{(p(X)+1)p_{\mathrm{col}}(i)} X_{ii} = \sum (-1)^{(p(X_{ii})+1)p_{\mathrm{col}}(i)} X_{ii}.$$

Если суперматрица X задана в стандартном формате, то явный вид суперследа таков:

$$\mathrm{str}\colon X = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} \longmapsto \mathrm{str}\, X = \mathrm{tr}\, R - (-1)^{p(X)}\, \mathrm{tr}\, U = \begin{cases} \mathrm{tr}\, R - \mathrm{tr}\, U, & \text{если } X \text{ четна;} \\ \mathrm{tr}\, R + \mathrm{tr}\, U, & \text{если } X \text{ нечетна.} \end{cases}$$

Утверждение. 1) *Отображение* $\mathrm{str}\colon \mathfrak{gl}(\mathrm{Par};\, C) \longrightarrow \mathfrak{gl}(1|0;\, C)$ *есть* C*-линейный гомоморфизм супералгебр Ли.*

2) *Если произведения суперматриц* XY *и* YX *определены, то*

$$\mathrm{str}\, XY = (-1)^{p(X)p(Y)}\, \mathrm{str}\, YX. \tag{1.26}$$

В частности, если $X,\, D \in \mathrm{Mat}(p|q;\, C)$ *и* D *— четная обратимая суперматрица, то*

$$\mathrm{str}\, DXD^{-1} = \mathrm{str}\, X.$$

3) *Справедливо соотношение* $\mathrm{str}\, X^* = \mathrm{str}\, X$, *в частности,* $\mathrm{str}(({}^m X)^{st}) = \mathrm{str}({}^m X)$, *где* ${}^m X$ *— суперматрица оператора* X.

4) *Справедливо соотношение* $\mathrm{str}\, X^{\Pi} = (-1)^{p(X)+1}\, \mathrm{str}\, X$.

5) *Подпространство*

$$\mathfrak{sl}(M,\, C) := \{X \in \mathfrak{gl}(M,\, C) \mid \mathrm{str}\, X = 0\}$$

является идеалом супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(M,\, C)$.

Супералгебра Ли $\mathfrak{sl}(M,\, C)$ называется *специальной линейной супералгеброй Ли.*

Упражнение. Докажите утверждение, приведенное выше. В частности, проверьте, что

$$\mathrm{str}([X,\, Y]) = 0 \quad \text{для любых } X,\, Y \in \mathfrak{gl}(\mathrm{Par};\, C). \tag{1.27}$$

Формула (1.26) (или, что то же самое, (1.27)) дает инвариантное определение следа (для краткости мы три раза опустили (супер)):

$$\boxed{\text{след должен обращаться в нуль на коммутанте алгебры.}} \tag{1.28}$$

1.7.2. Наводящие соображения. Определение супердетерминанта требует некоторой предварительной работы. Проблема состоит в том, что, хотя формально произведение суперматриц определяется точно так же, как и произведение обычных матриц, элементы суперматриц уже не обязаны коммутировать (они обязаны только суперкоммутировать) между собой. Поэтому у нас нет никакой возможности воспользоваться стандартным определением детерминанта как суммы с правильными знаками всевозможных произведений элементов, стоящих в разных строках и столбцах: мы не знаем, в каком порядке перемножать эти элементы. Придется действовать обходным путем.

Каждый, кому приходилось вычислять детерминант матрицы большого размера, знает, что, разбив ее на блоки, можно сильно облегчить себе работу. Действительно, если $X = \begin{pmatrix} R & S \\ T & V \end{pmatrix}$ — матрица размера $(n+m) \times (n+m)$, то

$$\det X = \det(R - SV^{-1}T) \det V, \tag{1.29}$$

поскольку

$$\begin{pmatrix} R & S \\ T & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_n & SV^{-1} \\ 0 & 1_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R - SV^{-1}T & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ V^{-1}T & 1_m \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

и поскольку оператор $\det$ мультипликативен, а $\det(1_{n+m} + N) = 1$ для любой строго верхнетреугольной или строго нижнетреугольной матрицы N. Попробуем суперизовать формулу (1.29).

Напомним, что группа четных обратимых суперматриц из $\mathrm{Mat}(\mathrm{Par}; C)$ обозначалась $\mathrm{GL}(\mathrm{Par}; C)$ или $\mathrm{GL}(\#(\mathrm{Par}); C)$, если формат суперматриц стандартный. Если $X \in \mathrm{GL}(p|q; C)$ и матрица V обратима, то матрицы R, $SV^{-1}T$ и V содержат только четные элементы, а потому детерминанты, присутствующие в формуле (1.29), корректно определены.

Кроме того, справедливо следующее обобщение леммы из п. 1.1.7.

1.7.3. Утверждение. *Пусть C — суперкоммутативная супералгебра*, $\mathrm{cpr}\colon C \longrightarrow C/(C_{\bar 1})$ — *каноническая проекция, а*

$$\mathrm{cpr}\colon \mathrm{Mat}(n; C) \longrightarrow \mathrm{Mat}(n; \mathrm{cpr}(C))$$

— *индуцированный ей гомоморфизм алгебр — поэлементная проекция.*

Матрица $X \in \mathrm{Mat}(n; C)$ обратима тогда и только тогда, когда обратима матрица $\mathrm{cpr}\,X$.

Следствие. *Если $X = \begin{pmatrix} R & S \\ T & V \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(p|q; C)$, то матрицы R и V обратимы.*

Таким образом, для $X \in \mathrm{GL}(p|q; C)$ формула (1.29) корректно определяет $\det X$.

Упражнения. 1) Докажите утверждение 1.7.3.

2) Докажите, что при $C = \mathbb{K}$ или $\Lambda(1)$ формула (1.29) определяет мультипликативную функцию на $\mathrm{GL}(1|1; C)$, а при $C = \Lambda(n)$, где $n > 1$, эта функция не мультипликативна!

В этой, казалось бы, отчаянной ситуации нам остается только ухватиться за последнюю соломинку и потребовать, чтобы суперслед и супердетерминант были связаны друг с другом так же, как и обычные след и детерминант:

$$\det \exp X = \exp \operatorname{tr} X. \tag{1.31}$$

Тогда мы сразу будем вынуждены заключить, что в чисто нечетном случае супердетерминант должен быть равен $\det V^{-1}$, а не $\det V$. Мы пришли, таким образом, к следующему определению.

1.7.4. Определим *супердетерминант, или березиниан,* как функцию

$$\mathrm{Ber}\colon \mathrm{GL}(p|q; C) \longrightarrow C_{\bar 0}^{\times} = \mathrm{GL}(1|0; C)$$

на группе $\mathrm{GL}(p|q; C)$, заданную формулой (корректно определенной в силу соображений из п. 1.7.3)

$$X = \begin{pmatrix} R & S \\ T & V \end{pmatrix} \longmapsto \mathrm{Ber}\,X = \det(R - SV^{-1}T) \det V^{-1}. \tag{1.32}$$

Определение березиниана (как и суперследа), очевидно, асимметрично. С равным основанием можно рассмотреть функцию

$$\widetilde{\mathrm{Ber}} : X = \begin{pmatrix} R & S \\ T & V \end{pmatrix} \longmapsto \widetilde{\mathrm{Ber}} X = \det(V - TR^{-1}S) \det R^{-1}. \tag{1.33}$$

Отметим, что Ber определен, если матрица V обратима, а $\widetilde{\mathrm{Ber}}$ — если матрица R обратима. Если и V, и R обратимы, то $\widetilde{\mathrm{Ber}} X = (\mathrm{Ber}\,X)^{-1}$, см. следствие из п. 1.7.5.

Упражнение. Суперслед и березиниан связаны между собой точно так же, как и обычные след и детерминант. Докажите, что

$$\mathrm{Ber}\,X = \exp \operatorname{str} \log X, \tag{1.34}$$

если обе части формулы (1.34) определены.

Чтобы не путаться с логарифмом, удобнее пользоваться следствием из формулы (1.34):

$$\mathrm{Ber} \exp X = \exp \operatorname{str} X. \tag{1.35}$$

Мы будем иногда пользоваться следующим упрощенным вариантом формулы (1.34). Пусть I — идеал в C, а $X \in \mathrm{Mat}(p|q; I)_{\bar 0}$. Тогда

$$\mathrm{Ber}(1 + X) \equiv (1 + \operatorname{str} X) \pmod{I^2}. \tag{1.36}$$

Функция Ber называется *березинианом* в честь Ф. А. Березина, который первым описал ее (в случае чисто нечетной размерности). Самое удивительное, что о существовании суперследа он узнал лишь несколько лет спустя и, таким образом, не мог воспользоваться приведенными выше соображениями. (Он получил правильную формулу, рассматривая замену переменных в «интеграле Березина».)

Замечание. В отличие от det, определенного на всем пространстве $\mathrm{Mat}(n;\mathbb{K})$, березиниан не определен на всем суперпространстве $\mathrm{Mat}(p|q;C)$ (ср. § 1.8), зато формулы (1.35) и (1.34) дают его аналитическое продолжение в окрестность единичной матрицы, состоящую из неоднородных относительно четности элементов.

Вопрос. Какими свойствами обладает это продолжение? Например, мультипликативно ли оно?

Сам-то березиниан мультипликативен (и это его основное свойство).

1.7.5. Теорема. *Для любых $X, Y\in \mathrm{GL}(p|q;C)$ выполняется равенство*

$$\mathrm{Ber}\,XY=\mathrm{Ber}\,X\cdot \mathrm{Ber}\,Y.$$

Доказательство. Красивое доказательство мультипликативности березиниана дал Ф. А. Березин в книге [Бер]. Впрочем, утверждение сразу следует из формулы (1.35) или (1.34) по аналитичности[1]. □

Следствие. *Для любого $X\in \mathrm{GL}(p|q;C)$ выполняется равенство*

$$\text{а) } \widetilde{\mathrm{Ber}}X=(\mathrm{Ber}\,X)^{-1},\quad \text{б) } \mathrm{Ber}\,X^{st}=\mathrm{Ber}\,X,\quad \text{в) } \mathrm{Ber}\,X^{\Pi}=(\mathrm{Ber}\,X)^{-1}.$$

1.7.6. В начале п. 1.7.4 мы определили Ber только на суперматрицах стандартного формата. Формулы (1.35) и (1.34) годятся для любого формата Par, но они, увы, неявные. Чтобы получить явную формулу для любого формата, воспользуемся изоморфизмом группы абстрактных операторов с суперматричной группой

$$\mathrm{GL}(M;C)\cong \mathrm{GL}(\mathrm{Par};C)\cong \mathrm{GL}(p|q;C). \tag{1.37}$$

Применительно к суперматрицам это означает, как и в обычном случае, что если поменять местами соседние строки (столбцы), то детерминант поменяет знак. Такими перестановками суперматрицу можно перевести из произвольного формата в стандартный, а потом вычислить Ber.

---

[1] Первое доказательство (к счастью, не опубликованное) этого утверждения буквально копировало то (занудное), что приведено для матриц в «Курсе алгебры» А. Г. Куроша, но в [Лдет], кроме теоремы 1.7.5, есть еще вычисление «супер K_1» для суперкоммутативных суперколец.

Упражнение. Напишите явную формулу для березиниана матрицы в формате $m|q|n$, где $m+n=p$, и в чередующемся формате: оба формата часто встречаются.

В силу мультипликативности березиниана следующие подмножества являются группами, причем изоморфными:

$$\begin{gathered}\mathrm{SL}(M;C)=\{X\in \mathrm{GL}(M;C)\mid \mathrm{Ber}\,X=1\},\\ \mathrm{SL}(\mathrm{Par};C)=\{X\in \mathrm{GL}(\mathrm{Par};C)\mid \mathrm{Ber}\,X=1\}.\end{gathered} \tag{1.38}$$

Выражения (1.38) задают различные реализации так называемой *специальной линейной группы*, являющейся, как мы увидим, группой C-точек специальной линейной супергруппы.

Утверждение. *Пусть N — прямой подмодуль модуля M, и пусть M, N и M/N свободны, а $X\in \mathrm{End}_C(M)$. Если $XN\subset N$, то определены ограничение оператора X на подмодуль N и индуцированный оператор $X_{M/N}$ на фактормодуле M/N, причем*

$$\begin{gathered}\mathrm{str}\,X=\mathrm{str}\,X_N+\mathrm{str}\,X_{M/N},\\ \mathrm{Ber}\,X=\mathrm{Ber}\,X_N\cdot \mathrm{Ber}\,X_{M/N}.\end{gathered}$$

1.7.7. Ber X — точный квадрат на Pe$(n;C)$. А. Сергеев заметил, что на группе $\mathrm{Pe}(n;C)$ березиниан $\mathrm{Ber}X$ является точным квадратом. Действительно, вспомним, что если B — нечетная невырожденная суперсимметрическая билинейная форма, то

$$\mathrm{Pe}(M;C)=\{X\in \mathrm{GL}(M;C)\mid B(Xu,Xv)=B(u,v) \text{ для любых } u,v\in M\},$$

или, в базисе стандартного формата,

$$\mathrm{Pe}(M;C)=\{X\in \mathrm{GL}(n|n;C)\mid J_{2n}=X^{st}J_{2n}X\}.$$

Поэтому матрица $X=\begin{pmatrix}R&S\\T&V\end{pmatrix}$ принадлежит $\mathrm{Pe}(n;C)$ тогда и только тогда, когда

$$T^tR-R^tU=0,\quad T^tS-R^tV=-1_n,\quad V^tS+S^tV=0.$$

Таким образом, $V=(R^t)^{-1}(1+T^tS)$, и получается, что

$$\begin{aligned}\mathrm{Ber}\,X&=\det(R-SV^{-1}T)\det V^{-1}=\\ &=\det R\det(1-R^{-1}SV^{-1}T)\det R^t\det(1+T^tS)^{-1}=\\ &=\det{}^2R\det(1-R^{-1}SV^{-1}T)\det{}^{-1}(1+T^tS).\end{aligned}$$

Поскольку матрицы $R^{-1}SV^{-1}T$ и T^tS, очевидно, нильпотентны, существуют корни $(1-R^{-1}SV^{-1}T)^{1/2}$ и $(1+T^tS)^{1/2}$, а значит, функция $\mathrm{Ber}\,X$ является точным квадратом. Для любого элемента $X\in \mathrm{Pe}(M;C)$ положим

$$\mathrm{Ser}\,X=\sqrt{\mathrm{Ber}\,X}=\det R\det(1-R^{-1}SV^{-1}T)^{1/2}\det(1+T^tS)^{-1/2}.$$

Замечание. Наблюдение А. Сергеева становится очевидным, если вспомнить (см. п. 1.6.7), что супералгебра Ли $\mathfrak{pe}(n; C)$, отвечающая супергруппе $\mathcal{P}\!e(n)$, состоит из суперматриц вида $\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$, где $B = B^t$, и $C = -C^t$ (или — в другой инкарнации — $B = -B^t$ и $C = C^t$), а $\operatorname{str}\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix} = 2\operatorname{tr} A$. Теперь вспомним формулу, выражающую березиниан через суперслед.

Теорема. *Для любых* X, $Y \in \mathrm{Pe}(M;\, C)$ *выполняется равенство*

$$\mathrm{Ser}\, XY = \mathrm{Ser}\, X \cdot \mathrm{Ser}\, Y.$$

Упражнение. Докажите теорему.

Положим

$$\mathrm{SPe}(M;\, C) = \{X \in \mathrm{Pe}(M;\, C) \mid \mathrm{Ber}\, X = 1\};$$
$$\mathrm{SSPe}(M;\, C) = \{X \in \mathrm{Pe}(M;\, C) \mid \mathrm{Ser}\, X = 1\}.$$

Следствие. *Справедливо соотношение*

$$\mathrm{SPe}(M;\, C) \simeq \mathbb{Z}/2 \ltimes \mathrm{SSPe}(M;\, C).$$

1.7.8. Пусть $D \in \mathfrak{der} C$ — произвольное супердифференцирование супералгебры C, а $X \in \mathrm{GL}(p|q;\, C)$. Определим действие оператора D на суперматрице X формулой (ср. с определением $\mathrm{scalar}_{p,q}(c)$ в п. 1.4.5)

$$(DX)_{ij} = (-1)^{p(D)p_{row}(i)} D(X_{ij}).$$

Предложение. *Если* $D \in \mathfrak{der} C$, *а* $X \in \mathrm{GL}(p|q;\, C)$, *то*

$$D\ \mathrm{Ber}\, X = \mathrm{str}(DX \cdot X^{-1})\, \mathrm{Ber}\, X.$$

Доказательство. Воспользуемся результатами п. 1.6.6 и рассмотрим морфизм $\varphi_t = 1 + tD\colon C \longrightarrow C$. Поскольку φ_t — морфизм супералгебр, $\mathrm{Ber}\, \varphi_t(X) = \varphi_t\, \mathrm{Ber}\, X$.

Теперь, с одной стороны,

$$\mathrm{Ber}\, \varphi_t X = \mathrm{Ber}(X + tDX) = \mathrm{Ber}(1 + tDX \cdot X^{-1})\, \mathrm{Ber}\, X.$$

Поскольку $t^2 = 0$, мы получаем $\mathrm{Ber}(1 + t \cdot DX \cdot X^{-1}) = 1 + \mathrm{str}(t \cdot DX) \cdot X^{-1}$, и, следовательно,

$$\mathrm{Ber}\, \varphi_t X = \mathrm{Ber}\, X + t \cdot \mathrm{str}(DX \cdot X^{-1})\, \mathrm{Ber}\, X.$$

А с другой стороны, $\varphi_t(\mathrm{Ber}\, X) = \mathrm{Ber}\, X + tD\ \mathrm{Ber}\, X$. Следовательно,

$$t\ \mathrm{str}(DX \cdot X^{-1})\, \mathrm{Ber}\, X = tD\ \mathrm{Ber}\, X. \qquad \square$$

1.7.9. Явный вид обратной суперматрицы.

Пусть

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(m|n;\, \mathcal{C}), \quad \text{где } \mathcal{C} \text{ — суперкоммутативная супералгебра.}$$

Непосредственно проверяется (см. (1.30)), что

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Однако если так обращать большие суперматрицы, то придется много раз обращать матрицы размеров $m \times m$ и $n \times n$. Есть еще немало аналогичных формул, одна неудобней другой. Следующий аналог обычного способа с алгебраическими дополнениями наиболее предпочтительный из всех нам известных.

Пусть суперматрица $X^{(ij)}$ получена из суперматрицы X вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Здесь i, j пробегают значения от 1 до $m + n$, но мы разрешаем им принимать также значение 0, что означает, что мы не вычеркиваем строку или столбец. Пусть $A^\vee$ — суперматрица размера $m \times m$ с элементами

$$A^\vee_{ij} = (-1)^{i+j}\, \mathrm{Ber}\, X^{ji} = (-1)^{i+j} \det(A^{ji} - B^{j0}D^{-1}C^{0i}) \det D^{-1} =$$
$$= (-1)^{i+j} \det(A - BD^{-1}C)^{ji} \det D^{-1}.$$

Аналогично пусть $D^\vee$ — матрица размера $n \times n$ с элементами

$$D^\vee_{ij} = (-1)^{i+j}\, \mathrm{Ber}\, \pi(X^{j+m, i+m}) = (-1)^{i+j} \det(D^{ji} - C^{j0}A^{-1}B^{0i}) \det D^{-1} =$$
$$= (-1)^{i+j} \det(D - CA^{-1}B)^{ji} \det A^{-1}.$$

Теорема. *Справедливо равенство*

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} (\mathrm{Ber}\ X)^{-1} \cdot A^\vee & -\mathrm{Ber}\ X \cdot A^{-1}BD^\vee \\ -(\mathrm{Ber}\ X)^{-1} \cdot D^{-1}CA^\vee & \mathrm{Ber}\ X \cdot D^\vee \end{pmatrix}.$$

Упражнение. Докажите теорему.

Указание. Достаточно доказать любое из равенств $XX^{-1} = 1$ или $X^{-1}X = 1$. Первое из них почему-то легче доказать (формулы получаются проще). Воспользуйтесь тем, что из определения матрицы $A^\vee$ следует, что

$$(A - BD^{-1}C) \cdot A^\vee = A^\vee (A - BD^{-1}C) = \det(A - BD^{-1}C) \det D^{-1} \cdot 1_m = \mathrm{Ber}\, X \cdot 1_m,$$

и аналогично для $D^\vee$:

$$(D - CA^{-1}B) \cdot D^\vee = D^\vee (D - CA^{-1}B) = (\mathrm{Ber}\, X^\Pi) \cdot 1_n = (\mathrm{Ber}\ X)^{-1} \cdot 1_n. \quad \square$$

§ 1.8. Странная супералгебра $Q(n)$, странный след и странный детерминант

В этом параграфе мы введем супералгебру $Q(n)$ — еще один «странный» («queer») аналог обычной матричной алгебры и специфический странный след на ней, а на группе обратимых странных суперматриц определим странный детерминант.

1.8.1. Супералгебра $Q(A)$. Пусть A — произвольная (например, не обязательно суперкоммутативная) супералгебра. Супералгебра $Q(A)$ состоит из выражений вида $X = a + \varepsilon b$, где a, $b \in A$, а четность и умножение заданы формулами

$$Q(A)_i = A_i \oplus \varepsilon A_{i-\bar{1}}, \quad \text{где } i \in \mathbb{Z}/2;$$

$$(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) = (ac - (-1)^{p(b)} bd) + \varepsilon(bc + (-1)^{p(a)} ad).$$

Супералгебру $Q(A)$ можно, таким образом, охарактеризовать как расширение супералгебры A с помощью такого элемента ε, что

$$p(\varepsilon) = \bar{1}, \quad \varepsilon^2 = -1 \quad \text{и} \quad \varepsilon a = (-1)^{p(a)} c\varepsilon \ \text{ для любых } \ a \in A.$$

Если A — супералгебра над суперкоммутативной супералгеброй C, то определим *окучивания* (о-Q-чивания) ее *слева* и *справа* соответственно, положив

$$Q(A) \cong Q(C) \otimes_C A \quad \text{и} \quad (A)Q \cong A \otimes_C Q(C).$$

Очевидно, что и $Q(A)$, и $(A)Q$ суть C-алгебры.

Рассмотрим два частных случая. Если A — чисто четная коммутативная алгебра, то пространство $Q(C)_{\bar{1}}$ изоморфно $\Pi(A)$, а умножение

$$Q(A)_{\bar{1}} \times Q(A)_{\bar{1}} \longrightarrow Q(A)_{\bar{0}} = A, \tag{1.39}$$

коммутативное с точки зрения обычной алгебры, является антикоммутативным (не суперкоммутативным!) с супер точки зрения. Аналогично если A — алгебра Ли, то $Q(A)$ — супералгебра Ли.

Таким образом, окучивание может привести к интересным результатам, если на пространстве A имеются две нетривиальные операции: симметрическая и антисимметрическая (и та и другая с приставкой супер, если A — супералгебра).

Упражнение. Если A — ассоциативная алгебра, то $Q(A)$ — ассоциативная супералгебра. Если A — алгебра с единицей, то супералгебра $Q(A)$, вообще говоря, не суперкоммутативна (пример: $Q(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^s$).

1.8.2. Интерпретация супералгебры $Q(A)$. Пусть C — суперкоммутативная супералгебра, а A — линейная супералгебра над C, т. е. подалгебра супералгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_C(A)$. Если M — свободный

A-модуль, то супералгебру $Q(A)$ тоже можно реализовать как линейную над C. Для этого рассмотрим тензорное произведение C-модулей $Q(C) \otimes_C M$ и зафиксируем в $\mathrm{End}_C Q(C)$ произвольный нечетный оператор I, такой что $I^2 = -1$. Тогда отображение

$$X + \varepsilon Y \longmapsto 1 \otimes X + I \otimes Y \quad \text{при } X,\ Y \in A \tag{1.40}$$

задает вложение супералгебры $Q(A)$ в $\mathrm{End}_C(Q(C) \otimes_C M)$.

В матричном виде это вложение выглядит следующим образом. Если ${}^mI = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$, где λ, $\mu \in C_{\bar{0}}$ и $\lambda\mu = -1$, а ${}^mX$, ${}^mY$ — матрицы операторов X, Y в некотором базисе $\{m_1, \ldots, m_n\}$ C-модуля M, то отображение (1.40) имеет вид

$${}^mX + \varepsilon\, {}^mY \longmapsto \begin{pmatrix} {}^mXA & (-1)^{p(Y)+1} \lambda\, {}^mY \\ \mu\, {}^mY & (-1)^{p(X)}\, {}^mX \end{pmatrix}$$

в базисе $\{1 \otimes m_1, \ldots, 1 \otimes m_n, \varepsilon \otimes m_1, \ldots, \varepsilon \otimes m_n\}$ модуля $Q(C) \otimes_C M$.

Положим $Q(n; C) := Q(\mathrm{Mat}(n|0; C))$. В простейшем случае $I = J_{2n}$ образ супералгебры $Q(n; C)$ в $\mathrm{Mat}(n|n; C)$ состоит из матриц вида (*реализация J*)

$$\begin{pmatrix} A & (-1)^{p(B)+1} B \\ B & (-1)^{p(A)} A, \end{pmatrix}, \tag{1.41}$$

где A, $B \in \mathrm{Mat}(n|0;\ C)$. Часто используется и другая реализация (*реализация* Π) супералгебры $Q(n;\ C)$, в которой она состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & (-1)^{p(B)} B \\ B & (-1)^{p(A)} A \end{pmatrix}. \tag{1.42}$$

Если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, то реализация Π соответствует $I = \sqrt{-1}\,\Pi_{2n}$.

Упражнение. 1) Какая матрица отвечает элементу εB в реализации Π?

2) Докажите, что в реализации Π супералгебра $Q(n; C)$ является централизатором суперматрицы Π_{2n}, а в реализации J — централизатором суперматрицы J_{2n}.

Обычно над $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ супералгебру $Q(n; C)$ *определяют* как $C(J_{2n})$ и интерпретируют как супералгебру, сохраняющую нечетную комплексную структуру. Докажите, что над $\mathbb{C}$ супералгебры $C(J_{2n})$ и $C(\Pi_{2n})$ изоморфны (и даже сопряжены), а над $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ — нет.

3) Докажите, что $Q(\mathrm{Mat}(p|q;\ C)) \simeq Q(p+q;\ C)$.

4) Докажите, что $Q(Q(n; C)) \simeq \mathrm{Mat}(n|n; C)$.

Вопрос. Как интерпретировать в терминах оQчивания алгебры $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$?

Указание. Ответ для $\mathbb{H}$ ищите в главе, посвященной суперверсии группы Брауэра.

1.8.3. Странный след. Суперслед тождественно равен нулю на $Q(n;\,C)\subset\mathrm{Mat}(n|n;\,C)$, как ее не вложи, см. (1.41) и (1.42). Вместо него на $Q(n;\,C)$ есть другой, «странный» да еще и нечетный след, заданный формулой

$$\mathrm{qtr}(A+\varepsilon B)=\mathrm{str}\,B.$$

Обозначим через $\mathfrak{q}(n;\,C)=Q(n;\,C)_{SL}$ *странную супералгебру Ли.*

Упражнение. 1) Докажите, что

$$\mathrm{qtr}[X,\,Y]=0\quad\text{при всех } X,\,Y\in Q(n;\,C). \tag{1.43}$$

2) Докажите, что коммутант $\mathfrak{q}'(1;\,C)$ супералгебры Ли $\mathfrak{q}(1;\,C)$ состоит из элементов вида $1\otimes c$, где $c\in C$, и, значит, изоморфен C, а факторалгебра Ли $\mathfrak{q}(1;\,C)/\mathfrak{q}'(1;\,C)$ изоморфна, как супералгебра Ли, суперпространству $\Pi(C)$ с нулевой скобкой. Образ элемента ε в этом факторе будем обозначать через $\bar{\varepsilon}$.

3) Докажите, что отображение

$$\mathfrak{q}(n;\,C)\longrightarrow\mathfrak{q}(1;\,C)/\mathfrak{q}'(1;\,C),\qquad A+\varepsilon B\longmapsto\bar{\varepsilon}\ \mathrm{str}\,B,$$

является морфизмом супералгебр Ли.

За свойство (1.43) отображение qtr и названо следом. Это свойство означает, что «странный» след $\mathrm{qtr}\colon\mathfrak{q}(n;\,C)\longrightarrow\mathfrak{gl}(1;\,C)\simeq C_{\mathrm{SL}}$ является гомоморфизмом супералгебр Ли (уважает скобку). Однако qtr *не морфизм*! Еще бы: он ведь меняет четность.

Чтобы получить морфизм, нужно ввести нечетный параметр. Обозначим его τ и заметим, что $\mathfrak{gl}(1;\,C)\otimes_C C[\tau]\simeq\mathfrak{gl}(1;\,C[\tau])\simeq C[\tau]$ — коммутативная супералгебра Ли, причем отображение

$$\mathfrak{q}(1;\,C)/\mathfrak{q}'(1;\,C)\longrightarrow\mathfrak{gl}(1;\,C),\qquad\bar{\varepsilon}c\longmapsto\tau c,$$

задает вложение супералгебр Ли. Тогда и сквозное отображение

$$\mathfrak{q}(n;\,C)\longrightarrow\mathfrak{gl}(1;\,C[\tau]),\qquad A+\varepsilon B\longmapsto\tau\,\mathrm{str}\,B,$$

является морфизмом супералгебр Ли.

1.8.4. GQ$(n;\,C)$. Обозначим через $\mathrm{GQ}(n;\,C)$ группу четных обратимых элементов из $Q(n;\,C)$. Группа $\mathrm{GQ}(n;\,C)$ — «странный» аналог общей линейной группы.

Группу $\mathrm{GQ}(n;\,C)$ можно рассматривать как подгруппу *общей* суперматричной группы $\mathrm{GL}(n|n;\,C)$, состоящей из обратимых суперматриц вида

$$X=\begin{cases}\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}, & \text{если } Q(n;\,C)=C(J_{2n});\\[2mm] \begin{pmatrix}A&B\\-B&A\end{pmatrix}, & \text{если } Q(n;\,C)=C(\Pi_{2n}).\end{cases}$$

Другая реализация: $\mathrm{GQ}(n;\,C)$ изоморфна группе *всех* (любых: четных, нечетных, неоднородных) обратимых суперматриц из $\mathrm{Mat}(n|0;\,C)$. Изоморфизм дается формулой

$$A+\varepsilon B\longmapsto A+B.$$

А учитывая изоморфизм $Q(\mathrm{Mat}(p|q;\,C))\simeq Q(p+q;\,C)$, можно по аналогии отождествить группу $\mathrm{GQ}(p+q;\,C)$ с группой **всех** обратимых суперматриц из $\mathrm{Mat}(p|q;\,C)$.

В свете того что $\mathrm{str}\,|_{Q(n)}=0$, следующая лемма совершенно очевидна.

Лемма. *На подгруппе* $\mathrm{GQ}(n;\,C)\subset\mathrm{GL}(n|n;\,C)$ *березиниан тождественно равен* 1.

Доказательство. Если $X\in C(J_{2n})$, то $X=\begin{pmatrix}R&S\\S&R\end{pmatrix}$ и, значит, $X=X^{\Pi}$, где $\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}^{\Pi}=\begin{pmatrix}D&C\\B&A\end{pmatrix}$. Поэтому $\mathrm{Ber}\,X=(\mathrm{Ber}\,X)^{-1}$, см. п. 1.7.3.

Рассмотрим матрицу $X_t=\begin{pmatrix}R&tS\\tS&R\end{pmatrix}$ над $C[t]$, где $p(t)=\bar{0}$. Тогда

$$\mathrm{Ber}\,X_t=1+a_1t+\ldots+a_rt^r\in C[t].$$

Пусть i — наименьший номер, такой что $a_i\neq0$. Тогда

$$1=(\mathrm{Ber}\,X_t)^2=1+2a_it^i+t^{i+1}(\ldots),$$

откуда следует что $a_i=0$. Значит, $\mathrm{Ber}\,X_t=1$ при всех t, в частности, при $t=1$. □

Перейдем теперь к определению странного детерминанта. Для каждой нечетной матрицы $X\in\mathrm{Mat}(n|0;\,C)$ положим

$$F(X)=\sum_{i\geqslant1}\frac{\mathrm{str}(X)^{2i-1}}{2i-1}. \tag{1.44}$$

Заметим, что на самом-то деле ряд (1.44) — многочлен (см. упражнение из п. 1.4.4).

Упражнения. 1) Докажите, что если $A,\,B\in\mathrm{Mat}(n|0;\,C)$, причем матрица A четна, а B нечетна, то $F(AB)=F(BA)$. В частности, если матрица A обратима, то $F(ABA^{-1})=F(B)$.

2) Докажите, что если матрица $D\in\mathrm{Mat}(n|0;\,C)_{\bar{1}}$ делится на некоторый нечетный элемент супералгебры C, то

$$F(B+D)=F(B)+\mathrm{str}\,D(1-B^2)^{-1}.$$

Определим теперь *странный детерминант* $\mathrm{qet}\colon\mathrm{GQ}(n;\,C)\to C_{\bar{1}}$ формулой

$$\mathrm{qet}(A+\varepsilon B)=F(A^{-1}B)=\sum_{i\geqslant1}\frac{\mathrm{str}(A^{-1}B)^{2i-1}}{2i-1}. \tag{1.45}$$

Замечание. Обращаем внимание читателя на сходство формулы (1.45) с формулой для аргумента комплексного числа (это логарифм, следы членов с четными номерами равны 0). Конечно, это не случайно.

1.8.5. Теорема. *Если* $X,\ Y \in \mathrm{GQ}(n;\ C)$, *то*

$$\operatorname{qet} XY = \operatorname{qet} X + \operatorname{qet} Y. \tag{1.46}$$

Доказательство. Для любой нечетной матрицы $B \in \mathrm{Mat}(n|0;\ C)$ положим $X_B = 1 + \varepsilon B \in \mathrm{GQ}(n;\ C)$. Тогда можно представить любой элемент $X = A + \varepsilon B \in \mathrm{GQ}(n;\ C)$ в виде $X = AX_{A^{-1}B} = X_{BA^{-1}}A$.

Если матрица E содержит только один ненулевой элемент, то соответствующую матрицу X_E будем называть *элементарной.*

1.8.5а. Упражнения. 1) Докажите теорему для случая, когда один из элементов X или Y лежит в подгруппе $\mathrm{GL}(n|0;\ C) \subset \mathrm{GQ}(n;\ C)$.

2) Докажите, что

$$A^{-1}X_BA = X_{A^{-1}BA}, \quad X_BX_D = (1+BD)X_{(1+BD)^{-1}(B+D)}.$$

3) Докажите, что группа $\mathrm{GQ}(n;\ C)$ порождается подгруппой $\mathrm{GL}(n|0;\ C)$ и элементарными матрицами.

4) Обозначим через G подмножество тех элементов $X \in \mathrm{GQ}(n;\ C)$, для которых

$$\operatorname{qet}(XY) = \operatorname{qet} X + \operatorname{qet} Y \quad \text{при всех } Y \in \mathrm{GQ}(n;\ C).$$

Ясно, что G является подгруппой в $\mathrm{GQ}(n;\ C)$, содержащей $\mathrm{GL}(n|0;\ C)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить, что все элементарные матрицы лежат в G. Более того, в силу упражнения из п. 1.8.4 равенство (1.46) достаточно проверить лишь для пар вида $X = X_E$, $Y = X_B$, где X_E — элементарная матрица. Тогда

$$\operatorname{qet} X_EX_B = F((1+EB)^{-1}(E+B)).$$

Учитывая, что матрица E содержит лишь один ненулевой элемент (причем нечетный), получаем

$$(1+EB)^{-1}(E+B) = (1-EB)(E+B) = E + B - EB^2 = B + E(1-B^2).$$

В силу свойства 2) упражнения из п. 1.8.4 заключаем, что

$$\operatorname{qet} X_EX_B = F(B + E(1-B^2)) = F(B) + \operatorname{str} E = \operatorname{qet} X_B + \operatorname{qet} E,$$

что и требовалось доказать. □

1.8.5б. Упражнения. 1) Докажите, что коммутант $\mathrm{GQ}'(1;\ C)$ группы $\mathrm{GQ}(1;\ C)$ изоморфен группе $C_{\bar 0}^{\times} \simeq \mathrm{GL}(1;\ C)$, а фактор по нему изоморфен аддитивной группе $\Pi(C_{\bar 1})$.

2) Теорема 1.8.5 означает, что $\operatorname{qet}\colon \mathrm{GQ}(n;\ C) \longrightarrow \mathrm{GQ}(1;\ C)/\,\mathrm{GQ}'(1,\ C)$ — гомоморфизм групп, но не морфизм. Чтобы получить морфизм, мы опять должны ввести нечетный параметр; обозначим его τ.

Докажите, что вложение

$$\begin{gathered}\Pi(C_{\bar 1}) \simeq \mathrm{GQ}(1;\ C)/\,\mathrm{GQ}'(1,\ C) \longrightarrow \mathrm{GL}(1;\ C[\tau]),\\ c \longmapsto 1 + \tau c \quad \text{для любого } c \in C_{\bar 1},\end{gathered}$$

является групповым морфизмом.

3) Докажите, что соответствующее сквозное отображение

$$\widetilde{\operatorname{qet}}\colon \mathrm{GQ}(n;\ C) \longrightarrow \mathrm{GL}(1;\ C[\tau]), \quad X \longmapsto 1 + \tau \operatorname{qet} X,$$

является групповым морфизмом.

4) Докажите, что для любого $X \in \mathfrak{q}(n;\ C)_{\bar 1}$ справедлива формула

$$\exp(\tau \operatorname{qtr} X) = \widetilde{\operatorname{qet}} \exp X.$$

5) Как и для суперследа, имеется упрощенная формула, описывающая связь между qet и qtr. Если $I \subset C$ — идеал и $X \in Q(n;\ I)$, то

$$\operatorname{qet}(1_{2n} + X) \equiv \operatorname{qtr}(X) \mod I^2.$$

1.8.6. Π-симметрии, *J*-симметрии и *Q*-модули. Пусть M — свободный C-модуль, а $\Pi \in \mathrm{End}_C(M)$ — нечетный оператор, такой что $\Pi^2 = \mathrm{id}_M$. Пару $(M,\ \Pi)$ назовем *Q-модулем с Π-симметрией.*

Если $(N,\ \Pi')$ — другой Q-модуль, то гомоморфизмами Q-модулей будут по определению считаться только элементы суперпространства

$$\mathrm{Hom}_C^Q(M,\ N) := \{X \in \mathrm{Hom}_C(M,\ N) \mid \Pi'X = (-1)^{p(X)}X\Pi\}.$$

Очевидно, что $\mathrm{Hom}_C^Q(M,\ N)$ есть C-подмодуль модуля $\mathrm{Hom}_C(M,\ N)$. Если $(L,\ \Pi'')$ тоже Q-модуль, то композиция гомоморфизмов задает морфизм

$$\mathrm{Hom}_C^Q(N,\ L) \otimes_C \mathrm{Hom}_C^Q(M,\ N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C^Q(M,\ L).$$

Положим

$$Q_C(M) = Q_C(M,\ \Pi) = \mathrm{Hom}_C^Q(M,\ M).$$

Очевидно, что $Q_C(M)$ — подсупералгебра в $\mathrm{End}_C(M)$. Пусть $\mathrm{GQ}_C(M)$ — группа четных обратимых элементов из $Q_C(M)$. Ясно, что $\mathrm{GQ}_C(M)$ — группа автоморфизмов Q-модуля $(M,\ \Pi)$.

1.8.6а. Упражнение. Пусть $\operatorname{rk} M < \infty$. Из наличия Π-симметрии у M следует ограничение на суперранг: $\operatorname{srk} M = n|n$. Кроме того, в M есть базис $\{m_1,\ \ldots,\ m_n,\ m'_1,\ \ldots,\ m'_n\}$, такой что при всех i выполняются равенства $p(m_i) = p(m'_i) + 1$ и

$$\Pi m_i = m'_i, \quad \Pi m'_i = m_i. \tag{1.47}$$

В частности, все Q-модули над $\mathbb{C}$ суперранга $n|n$ изоморфны.

Над $\mathbb{R}$ есть и другой тип Q-модулей: с нормировкой $\Pi^2 = -\operatorname{id}_M$. Назовем их *$J$-симметриями* по аналогии с комплексными структурами.

Базис $\mathfrak{M} = \{m_1, \ldots, m_n, m'_1, \ldots, m'_n\}$, удовлетворяющий условию (1.47), назовем *Q-базисом*; для J-симметрии в одном из двух равенств в (1.47) (любом) нужно вставить знак минус.

Каждому $X \in Q_C(M)$ сопоставим суперматрицу в некотором Q-базисе. Это задает изоморфизм супералгебр $Q_C(M) \longrightarrow Q(n; C)$ и изоморфизм групп $\mathrm{GQ}_C(M) \longrightarrow \mathrm{GQ}(n; C)$. Если $\mathfrak{N} = \{\tilde{m}_1, \ldots, \tilde{m}_n, \tilde{m}'_1, \ldots, \tilde{m}'_n\}$ — другой Q-базис того же формата, то матрица перехода от $\mathfrak{M}$ к $\mathfrak{N}$ принадлежит группе $\mathrm{GQ}(n; C)$.

Положив $\operatorname{qtr} X = \operatorname{qtr}({}^m X)$ и $\operatorname{qet} X = \operatorname{qet}({}^m X)$, где ${}^m X$ — суперматрица оператора X в каком-то Q-базисе, мы определяем гомоморфизмы

$$\operatorname{qtr}\colon Q_C(M) \longrightarrow Q_C(C) \quad \text{и} \quad \operatorname{qet}\colon \mathrm{GQ}_C(M) \longrightarrow \mathrm{GQ}_C(C).$$

Из сказанного ниже следует, что эти гомоморфизмы определены корректно, т. е. не зависят от выбора базиса.

1.8.6б. Упражнение. 1) Пусть (M, Π) — Q-модуль, $N \subset M$ — Q-подмодуль, т. е. тоже Q-модуль, а Π-симметрия на N индуцирована с M. Пусть M, N и M/N — свободные модули и $X \in Q_C(M)$ — такое преобразование, что $XN \subset N$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{qtr} X &= \operatorname{qtr} X_N + \operatorname{qtr} X_{M/N}, &\quad &\text{если } X \in Q_C(M),\\ \operatorname{qet} X &= \operatorname{qet} X_N - \operatorname{qet} X_{M/N}, &\quad &\text{если } X \in \mathrm{GQ}_C(M). \end{aligned}$$

2) Докажите равенство

$$D \operatorname{qet} X = \operatorname{qtr}(DX \cdot X^{-1}) \cdot \operatorname{qet} X.$$

1.8.7. *Q*-тензорное произведение *Q*-модулей. Если (M, Π) — это Q-модуль, а N — свободный C-модуль, то супертензорные произведения $M \otimes_C N$ и $N \otimes_C M$ обладают естественными Π-симметриями $\Pi \otimes 1$ и $1 \otimes \Pi$ соответственно и, тем самым, являются Q-модулями, причем

$$\begin{aligned} Q_C(M \otimes_C N) &= \operatorname{Hom}^Q_C(M \otimes_C N) = Q_C(M) \otimes_C \operatorname{End}_C(N);\\ Q_C(N \otimes_C M) &= \operatorname{End}_C(N) \otimes_C Q_C(M). \end{aligned}$$

Если же мы рассмотрим супертензорное произведение двух Q-модулей, то оно будет обладать слишком большой симметрией.

Для простоты разберем более подробно случай $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Выбор Q-базиса в Q-модуле (M, Π) суперранга $n|n$ позволяет отождествить сам модуль с супертензорным произведением $Q(C) \otimes_C M_{\bar 0}$ или $M_{\bar 0} \otimes_C Q(C)$, если положить $\varepsilon = i\Pi$ (т. е. если рассматривать $Q(C)$ как Q-модуль с оператором $i\varepsilon$ в качестве симметрии). Это отождествление снабжает (M, Π) структурой левого или соответственно правого $Q(C)$-модуля. Алгебра $Q_C(M)$ сохраняет эту структуру и совпадает с централизатором $Q(C)$:

$$Q_C(M) = \operatorname{End} M_{\bar 0} \otimes Q_C(Q(C)) \quad \text{или} \quad Q_C(M) = Q_C(Q(C)) \otimes \operatorname{End} M_{\bar 0},$$

причем $Q_C(Q(C)) \simeq Q(C)$.

Пусть теперь (M, Π_M) и (N, Π_N) — два Q-модуля. Представим их в описанном виде:

$$M = M_{\bar 0} \otimes_C Q(C)_M, \qquad N = Q(C)_N \otimes_C N_{\bar 0},$$

где $Q(C)_M = \operatorname{Span}(1_M, \varepsilon_M)$ и $Q(C)_N = \operatorname{Span}(1_N, \varepsilon_N)$ — два изоморфных, но разных экземпляра супералгебры $Q(C)$.

К сожалению, даже после такого представления мы не можем рассмотреть тензорное произведение M и N над $Q(C)$, поскольку не каждый модуль над $Q(C)$ двусторонний.

Однако произведение алгебр эндоморфизмов соответствующих Q-структур слишком мaлó для всего тензорного произведения $M \otimes_C N$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = Q_C(M) \otimes Q_C(N) = \operatorname{End} M_{\bar 0} \otimes Q_C(Q(C)_M) \otimes Q_C(Q(C)_N) \otimes \operatorname{End} N_{\bar 0} \simeq\\ \simeq \operatorname{End} M_{\bar 0} \otimes \operatorname{End} Q(C) \otimes \operatorname{End} N_{\bar 0} \simeq \operatorname{End}(M_{\bar 0} \otimes_C Q(C) \otimes_C N_{\bar 0}). \end{aligned}$$

Заметим, тем не менее, что подмодули V_1, $V_2 \subset M \otimes_C N$, определенные как

$$\begin{aligned} V_1 &= \operatorname{Span}(1_M \otimes 1_N + \varepsilon_M \otimes \varepsilon_N,\ \ \varepsilon_M \otimes 1_N - 1_M \otimes \varepsilon_N),\\ V_2 &= \operatorname{Span}(1_M \otimes 1_N - \varepsilon_M \otimes \varepsilon_N,\ \ \varepsilon_M \otimes 1_N + 1_M \otimes \varepsilon_N), \end{aligned}$$

инвариантны относительно умножения на $\varepsilon_M \otimes 1_N$ слева и $1_M \otimes \varepsilon_N$ справа. Поэтому, отождествив

$$\begin{aligned} Q_C(Q(C)_M) &= \operatorname{Span}(1_M \otimes 1_N,\ 1_M \otimes \varepsilon_N),\\ Q_C(Q(C)_N) &= \operatorname{Span}(1_M \otimes 1_N,\ \varepsilon_M \otimes 1_N), \end{aligned}$$

мы видим, что алгебра $\mathcal{A}$ действует в каждом из подмодулей

$$W_1 = M_{\bar 0} \otimes V_1 \otimes N_{\bar 0} \quad \text{и} \quad W_2 = M_{\bar 0} \otimes V_2 \otimes N_{\bar 0},$$

причем $M \otimes_C N = W_1 \oplus W_2$.

Назовем *Q-тензорным произведением* $M \otimes^Q N$ модулей (M, Π_M) и (N, Π_N) каждый (любой) из изоморфных модулей W_1 и W_2. Как видим, Q-тензорное произведение составляет половину от обычного тензорного произведения.

§ 1.9. Тензоры в линейной супералгебре

Тензорами в линейной алгебре классики называли элементы различных конечномерных модулей над $\mathrm{GL}(V)=\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$, где $n=\dim V$. Как правило, этот термин применяется, впрочем, не ко всем конечномерным модулям, а лишь к тем, которые построены из двух основных блоков: *тавтологического модуля* V и двойственного к нему V^*. На этих модулях $1_n\in\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ действует как скалярный оператор, умножающий на (неотрицательное) **целое** число.

Сперва положим (надеемся, что точку видно)

$$T^{\boldsymbol\cdot}(V) := \bigoplus_{n\geqslant 0} T^n(V), \tag{1.48}$$

где $T^0(V)=\mathbb{K}$, $T^1(V)=V$, а $T^n(V)=V\otimes_C\ldots\otimes_C V$ ($n\geqslant 1$ сомножителей).

Элементы пространства $T^n(V)$ называются *контравариантными тензорами* ранга (типа, валентности) n.

Пространство $T^{\boldsymbol\cdot}(V)$ наделено естественной структурой алгебры:

$$(v_1\otimes\ldots\otimes v_n)(w_1\otimes\ldots\otimes w_m) := v_1\otimes\ldots\otimes v_n\otimes w_1\otimes\ldots\otimes w_m.$$

Аналогично определим пространство

$$T_{\boldsymbol\cdot}(V) := \bigoplus_{m\geqslant 0} T^m(V^*).$$

Элементы пространства $T^m(V^*)$ называются *ковариантными тензорами* ранга (типа, валентности) m. Наконец, положим

$$T^n_m(V) = T^n(V)\otimes T^m(V^*);\qquad T^{\boldsymbol\cdot}_{\boldsymbol\cdot}(V) = \bigoplus_{n,m\geqslant 0} T^n_m(V).$$

Элементы пространства $T^n_m(V)$ называются *тензорами ранга* (*типа*, *валентности*) $(n,\,m)$.

Все перечисленные понятия имеют непосредственные прямые, однако более сложные аналоги в суперслучае. Сразу обратим внимание читателя на два хорошо известных факта, с которыми в суперслучае нам придется распроститься:

1) если $\operatorname{char}\mathbb{K}=0$, то представление группы $\mathrm{GL}(V)$ в пространстве $T^{\boldsymbol\cdot}_{\boldsymbol\cdot}(V)$ вполне приводимо;

2) в n-й внешней степени модуля V ранга n элемент группы $\mathrm{GL}(V)$ действует, умножая на детерминант элемента.

Замечания. 1) Оба этих утверждения в суперслучае неверны. С точки зрения теории представлений суперслучай похож на случай положительной характеристики.

2) Несмотря на то что в наши дни теория представлений является рабочим инструментом каждого теоретического физика, тензоры никогда не определяются в учебниках в терминах представлений алгебр Ли. Влияние сложившихся традиций столь велико, что мы даже не решаемся включить в этот параграф «спинорные» представления, известные каждому физику чуть не с первого курса и не менее важные для физиков, чем тензоры. Мы выносим их, а также Хау-двойственные (R. Howe) им осцилляторные представления в другие тома.

1.9.1. Тензоры-родственники. Специфика суперслучая.

1) У $\mathrm{GL}(m|n,\,C)$-модуля V не один «родственник» — V^*, а несколько: во-первых, даже двойственных модулей не один, а два: левый модуль ${}^*V$, и правый модуль V^*; во-вторых, $\Pi(V)$ и $(V)\Pi$ и их левые и правые двойственные. Над $\mathbb{C}$ количество родственников еще возрастает за счет эрмитово сопряженных.

2) Если представление det группы $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) := \mathrm{GL}(V)$ можно реализовать как прямое слагаемое в тензорах типа $T^n(V)$, где $\dim V=n$, то 1-мерное представление супергруппы $\mathrm{GL}(n|m;\,C)$, заданное березинианом, не реализуется как прямое слагаемое даже в пространстве тензоров более общего вида $T^n_m(V)$, см. ниже, а является фактором некоторого подмодуля.

На время мы удовлетворимся наивным определением тензора над суперпространством (C-модулем) V как элемента супералгебры $T^{\boldsymbol\cdot}(V)$. При необходимости мы рассмотрим также (для простоты — над $\mathbb{K}$)

$$T^{\boldsymbol\cdot}(V\oplus V^*\oplus\Pi(V)\oplus\Pi(V^*)).$$

Над $\mathbb{K}$ можно, как легко видеть, ограничиться четырьмя родственниками. Над C обязательно рассматривать всю мишпоху¹⁾: составляя пакет программ для работы с супералгебрами Ли, в частности, для вычисления их когомологий, Грозман (см. [Gr]) был вынужден все это тщательно описать (в отличие от людей, компьютер не умеет делать умный вид, если не понимает).

С точки зрения представлений (алгебр Ли), естественно обобщить понятие тензора на другие классические группы и их алгебры Ли, а также не делать принципиального различия между тензорами и спинорами. Мы так и поступим в следующем томе, и даже раньше.

1.9.2. Симметрическая алгебра модуля. В супералгебре $T^{\boldsymbol\cdot}_C(M)$ рассмотрим двусторонний идеал I^s, порожденный элементами вида

$$xy-(-1)^{p(x)p(y)}yx,\qquad \text{где } x,\,y\in M=T^1_C(M).$$

Симметрической (правильней бы: *суперсимметрической*) *алгеброй* над C-модулем M называется

$$\mathbb{S}^{\boldsymbol\cdot}_C(M) := T^{\boldsymbol\cdot}_C(M)/I^s,\qquad \text{где } x,\,y\in M=T^1_C(M).$$

---

1) Мишпоха́ — это семья на идише.

Очевидно, что элементы из M порождают $\mathbb{S}^{\bullet}_C(M)$ и супералгебра $\mathbb{S}^{\bullet}_C(M)$ суперкоммутативна.

1.9.3. Кососимметрическая, или внешняя, или антисимметрическая, алгебра модуля. Определим *кососимметрическую* (часто говорят *внешнюю*) *супералгебру* C-модуля M, положив

$$\mathbb{E}^{\bullet}_C(M) = \mathbb{S}^{\bullet}_C(\Pi(M)).$$

Для простоты мы часто пишем $S(M)$ и $E(M)$. (Здесь трехходовая смена обозначений. Во-первых, исчезла точка, во-вторых, сменился шрифт, а в-третьих, исчез индекс C. Дальше без предупреждения индексы то появляются для ясности, то исчезают для краткости.)

Естественнейшим образом возникает и конкурирующее определение. Пусть I^{Λ} — двусторонний идеал в $T^{\bullet}_C(M)$, порожденный элементами

$$x \otimes y + (-1)^{p(x)p(y)} y \otimes x, \quad \text{где } x,\, y \in M = T^1_C(M).$$

Назовем супералгебру

$$\Lambda_C(M) = T_C(M)/I^{\Lambda}$$

антисимметрической супералгеброй C-модуля M. В отличие от $S(M)$ и $E(M)$, супералгебра $\Lambda(M)$ не суперкоммутативна относительно четности, индуцированной четностью в $T(M)$. Однако если вспомнить, что и $T(M)$, и все три введенных выше факторалгебры еще и $\mathbb{Z}$-градуированы степенью (рангом) тензора, то легко проверить, что алгебра $\Lambda(M)$ *градуированно-коммутативна* относительно $(\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z})$-градуировки: для любых $x,\, y \in \Lambda(M)$ имеем

$$xy = (-1)^{\deg(x)\deg(y) + p(x)p(y)} yx.$$

Замечание. Нам больше нравится определять аналог внешней алгебры векторного пространства как $E_C(M)$, поскольку эта супералгебра суперкоммутативна и с ней просто работать, но, честно говоря, это дело вкуса. Дело в том, что, как пространства, $\Lambda_C(M)$ и $E_C(M)$ изоморфны, а умножение можно слегка переделать, положив

$$x * y = (-1)^{p(x)\deg(y)} xy \quad \text{для } x,\, y \in \Lambda_C(M),$$

и задать новую четность на $\Lambda_C(M)$, положив

$$P(x) = p(x) + \deg_2(x), \quad \text{где } \deg_2(x) = \deg x \mod 2.$$

Легко видеть, что умножение «$*$» и новая четность «превращают» $\Lambda_C(M)$ в $E_C(M)$, в частности, относительно P и «$*$» супералгебра $\Lambda_C(M)$ суперкоммутативна. Дальнейшее развитие этого замечания см. в Дополнении (теорема Неклюдовой), где показана ненужность (в точно описанном в теореме смысле) «цветных» супералгебр. [1]

1.9.4. Как и соответствующие алгебры, супералгебры $T(M)$, $S(M)$ и $E(M)$ обладают (естественно ожидаемыми по аналогии) свойствами универсальности, ср. [Ленг], описание которых мы опускаем за очевидностью.

При первом знакомстве с супералгебрами удивляет следующий факт.

Утверждение. *Пусть* $\operatorname{rk} M = p|q$. *Если* $pq \neq 0$, *то при любом* $n \in \mathbb{Z}_+$ *и* $E^n_C(M) \neq 0$, *и* $S^n_C(M) \neq 0$.

Действительно, пусть $\mathbb{E}$ и $\mathbb{S}$ — операторы внешней и симметрической степеней суперпространств, а E и S — операторы внешней и симметрической степеней пространств. Тогда

$$\mathbb{S}^n(V) = \bigoplus_{i+j=n} S^i(V_{\bar 0}) \otimes E^j(V_{\bar 1});$$
$$\mathbb{E}^n(V) = \bigoplus_{i+j=n} E^i(V_{\bar 0}) \otimes S^j(V_{\bar 1}).$$

Как правило, нам не встречаются одновременно $\mathbb{S}(V)$ и $\mathbb{E}(V)$, поэтому мы обозначаем умножение точкой или просто ставим сомножители рядом; при необходимости же симметрическое (точнее, суперсимметрическое) умножение мы обозначаем знаком $\circ$, а антисимметрическое — знаком $\wedge$. Обычно для простоты пишут $S(V)$ и $E(V)$ вместо $\mathbb{S}(V)$ и $\mathbb{E}(V)$, однако иногда такая запись вносит путаницу.

1.9.5. Действие симметрической группы. Каждая перестановка $\sigma \in S_n$ действует на $T^n_C(M)$, переставляя сомножители. Приняв во внимание четности, мы, вслед за А. Сергеевым, получаем новый взгляд на представления симметрической группы. А именно, определим линейные отображения symm и alt — *симметризацию* и *антисимметризацию* (употребляют и корявое по-русски слово «альтернация») следующим образом. Пусть в упорядоченном наборе однородных элементов $x_1, \ldots, x_n \in M$ подмножество $\{x_{i_1}, \ldots x_{i_k}\}$, где $k \leqslant n$, — упорядоченный поднабор всех нечетных элементов. Пусть $\sigma' \in S_k$ — перестановка этих нечетных элементов, индуцированная перестановкой $\sigma \in S_n$, действующей на множестве $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Положим [2]

$$\operatorname{sgn}(\sigma;\, x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{sgn} \sigma'.$$

---

[1] До недавнего времени нам, собственно, не были известны другие примеры «цветно-коммутативных» алгебр, что усиливало впечатление, что изучать «цветные» супералгебры — пустое занятие. Недавние результаты В. Овсиенко с коллегами (см. arXiv)показали, однако, новое, совершенно неожиданное, и очень перспективное направление их исследования.

[2] Для тех, кто знает слово «коцикл»: функция $\operatorname{sgn}(\sigma;\, x_1, \ldots, x_n)$ — коцикл на группе S_n.

Определим отображения

$$\mathrm{symm}_n\colon T^n_C(M)\longrightarrow S^n_C(M),$$

$$\mathrm{symm}_n(x_1\otimes\ldots\otimes x_n)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma;\,x_1,\,\ldots,\,x_n)x_{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes x_{\sigma(n)}.$$

Иногда бывает полезно отображение

$$\mathrm{alt}_n:=\mathrm{symm}_n\circ\Pi\colon T^n(\Pi(M))\longrightarrow S^n(\Pi(m)).$$

Пусть

$$\mathrm{symm}=\bigoplus_{n\geqslant 1}\mathrm{symm}_n,\qquad \mathrm{alt}=\bigoplus_{n\geqslant 1}\mathrm{alt}_n\,.$$

1.9.6. Пусть M и N — C-модули, а $F\in(\mathrm{Hom}_C(M,\,N))_{\bar 0}$. Морфизм F индуцирует, очевидно, естественный морфизм C-алгебр $T(F)\colon T_C(M)\longrightarrow T_C(N)$, согласованный с заменами базы.

Аналогичные утверждения, очевидно, верны и для симметрической, и для внешней алгебр, и соответствующие морфизмы обозначаются $S(F)$ и $E(F)$.

Если $M=L\oplus N$ — прямая сумма C-модулей, то определим вложение $\alpha\colon M\longrightarrow S(L)\otimes_C S(N)$, положив

$$\alpha(l,\,n)=l\otimes 1+1\otimes n.$$

Упражнение. 1) Гомоморфизм $S(\alpha)\colon S(M)\longrightarrow S(L)\otimes_C S(N)$, продолжающий α, является изоморфизмом.

2) Аналогично $E(\alpha)\colon E(M)\longrightarrow E(L)\otimes_C E(N)$ тоже изоморфизм.

Пусть $N\subset M$ — подмодуль, а I_N — идеал, порожденный множеством N. Положим

$$\mathrm{gr}_{\bullet}\,I_N=\bigoplus_{i\geqslant 0}\mathrm{gr}_i\,I_N,\qquad\text{где}\quad \mathrm{gr}_i\,I_N=I^i_N/I^{i-1}_N,\quad I^0_N=C,\quad I^{-1}_C=0.$$

На супералгебре I_N есть и другая градуировка, унаследованная от $S^{\bullet}(M)$:

$$\mathrm{gr}^{\bullet}\,I_N=\bigoplus_{k\geqslant 0}\mathrm{gr}^k\,I_N,\qquad\text{где}\quad \mathrm{gr}^k\,I_N=I_N\cap S^k(M).$$

Утверждение. *Если N — прямое слагаемое в M, то*

$$\mathrm{gr}^n_i\,I_N\simeq S^i(N)\otimes S^{n-i}(M/N).$$

1.9.7. Базисы в C-модулях $S(M)$ и $E(M)$. Если M — свободный C-модуль ранга $p|q$, а $\{m_1,\,\ldots,\,m_{p+q}\}$ — базис стандартного формата, то *мультииндексом типа* $(p_{\bar 0},\,q_{\bar 1})$ назовем набор $N=(n_1,\,\ldots,\,n_p,\,\nu_1,\,\ldots$ $\ldots,\,\nu_q)$, где $n_i\in\mathbb{Z}_+$, а $\nu_j=0,\,1$. Для $N=(N_1,\,\ldots,\,N_{p+q})$ положим

$$|N|=\sum N_i\quad\text{и}\quad m^N=m_1^{N_1}\otimes\ldots\otimes m_{p+q}^{N_{p+q}}.$$

Упражнение. Набор мономов m^N для всевозможных мультииндексов N типа $(p_{\bar 0},\,q_{\bar 1})$ образует базис C-модуля $S_C(M)$; мономы с $|N|=r$ образуют базис C-модуля $S^r_C(M)$.

Аналогично набор мономов вида $(\Pi(m))^N$ для всех мультииндексов типа $(q_{\bar 0},\,p_{\bar 1})$ образует базис C-модуля $E_C(M)$; мономы с $|N|=r$ образуют базис C-модуля $E^r_C(M)$.

Иногда базис в M обозначают $x_1,\,\ldots,\,x_{p+q}$, знак тензорного умножения опускают и записывают $S_C(M)$ в виде $C[x]$ или $C[M]$.

1.9.8. Модуль $\mathrm{Vol}_C(M)$ (см. [БЛ]). Пусть M — свободный C-модуль ранга $p|q$. Каждому базису $\mathfrak{M}=(m_1,\,\ldots,\,m_{p+q})$ модуля M сопоставим символ $v_{\mathfrak{M}}$, причем $p(v_{\mathfrak{M}})=p+q \mod 2$. Пусть $\mathrm{Vol}_C(M)$ — фактор свободного C-модуля, порожденного символами $v_{\mathfrak{M}}$, по подмодулю, порожденному следующими соотношениями:

1) в стандартных базисах

$$v_{g(\mathfrak{M})}=(\mathrm{Ber}\,g)v_{\mathfrak{M}},\quad \begin{array}{l}\text{где } g(\mathfrak{M})=(gm_1,\,\ldots,\,gm_{p+q})\\ \text{для всех } g\in\mathrm{GL}_C(M);\end{array}\tag{1.49}$$

2) для базисов $\mathfrak{M}$ любых форматов и $\sigma\in S_{p+q}$ положим

$$v_{\sigma(\mathfrak{M})}=(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}v_{\mathfrak{M}},\quad\text{где } \sigma(\mathfrak{M})=(m_{\sigma(1)},\,\ldots,\,m_{\sigma(p+q)}).\tag{1.50}$$

Обозначим через $vol_{\mathfrak{M}}$ образ элемента $v_{\mathfrak{M}}$ в $\mathrm{Vol}_C(M)$.

Упражнение. 1) Докажите, что $\mathrm{Vol}_C(M)$ — свободный C-модуль с одной образующей, в качестве которой можно выбрать $vol_{\mathfrak{M}}$ для любого базиса. Группы $\mathrm{GL}_C(M)$ и S_{p+q} действуют на $\mathrm{Vol}_C(M)$ по вышеприведенным формулам (1.49) и (1.50).

2) Если $M=N\oplus L$ — сумма свободных C-модулей, то, объединив базис $\mathfrak{N}$ модуля N с базисом $\mathfrak{L}$ модуля L, мы получим изоморфизм

$$\mathrm{Vol}_C(N)\otimes_C\mathrm{Vol}_C(L)\longrightarrow\mathrm{Vol}_C(M).$$

Если $q=0$, то, представив M в виде суммы p модулей ранга 1 каждый, получаем изоморфизм

$$\mathrm{Vol}_C(M)\longrightarrow E^p_C(M),\qquad vol_{m_1,\ldots,m_p}\longmapsto\Pi(m_1)\cdot\ldots\cdot\Pi(m_p).$$

Если $pq\neq 0$, то $\mathrm{Vol}_C(M)$ — подфактор модуля $E^p_C(M)\otimes E^q_C(M)$, а не прямое слагаемое, см. том 2.

1.9.9. Пусть A — суперкоммутативная C-алгебра, M — модуль над A и $D_A\in\mathfrak{der}_C(A)$. Назовем оператор $D_M\in\mathrm{End}_C(M)$ *дифференцированием* C-модуля M, *согласованным с* D_A, если

$$D_M(ma)=D_M(m)a+(-1)^{p(m)p(D_M)}mD_A(a),$$

или, что эквивалентно,

$$[D_M, a] = D_A(a).$$

Оператор $D \in \mathrm{Hom}_C(A, M)$, такой что

$$D(ab) = D(a)b + (-1)^{p(a)p(D)} aD(b) \quad \text{для любых } a, b \in A,$$

назовем *супердифференцированием* из C-алгебры A в A-модуль M. Суперпространство таких супердифференцирований обозначим через $\mathfrak{Der}(A, M)$.

Упражнение. Пусть $D_A \in \mathfrak{Der}_C(A)$, и пусть D_M и D_N — супердифференцирования A-модулей M и N, согласованные с D_A. Докажите следующие утверждения.

1) Операторы $D_\otimes \in \mathrm{End}_C(M \otimes_A N)$ и $D_{\mathrm{Hom}} \in \mathrm{End}_C(\mathrm{Hom}_A(M, N))$, такие что для любых $m \in M$, $n \in N$ и $X \in \mathrm{Hom}_A(M, n)$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} D_\otimes(m \otimes n) &= D_M(m) \otimes n + (-1)^{p(m)p(D_M)} m \otimes D_N(n), \\ D_{\mathrm{Hom}}(X) &= D_N(X) - (-1)^{p(D_N)p(X)} X D_M, \end{aligned}$$

являются супердифференцированиями, согласованными с D_A.

2) В частности, определены согласованные с D_A супердифференцирования $D_{M^*} \in \mathrm{End}_C(M^*)$ и $D_{\Pi(M)} \in \mathrm{End}_C(\Pi(M))$.

---

3) У A-модуля $T^{\bullet}_A(M)$ имеется единственное супердифференцирование D_T, согласованное на $T^0 = A$ и $T^1 = M$ с D_A и D_M соответственно. Аналогичные супердифференцирования D_S и D_E имеются и у модулей $S_A(M)$ и $E_A(M)$.

4) Пусть M — свободный A-модуль ранга $p|q$. Существует единственное дифференцирование $D_{\mathrm{Vol}} \in \mathrm{End}_C(\mathrm{Vol}_C(M))$, согласованное с D_A и такое, что

$$D_{\mathrm{Vol}}(v_{\mathfrak{M}}) = (\mathrm{str}\, D_{\mathfrak{M}}(M)) \cdot v_{\mathfrak{M}},$$

где матрица $D_{\mathfrak{M}}(M) = (D_{ij})$ определена формулой

$$D_{\mathfrak{M}}(M) m_i = \sum_j m_j D_{ji}.$$

§ 1.10. Дифференциальные градуированные супералгебры (DGA)

1.10.1. *Дифференциальная градуированная супералгебра* — это $\mathbb{Z}$-градуированная супералгебра A с нечетным супердифференцированием (дифференциалом) d, таким что $d^2 = 0$.

Под названием DGA эти супералгебры появились как важный инструмент в топологии (см. [ГМ]) сравнительно поздно: лет за 20 до суперсимметрий, а могли бы и много раньше: и все необходимое было, и полезность этих алгебр была замечена.

Пример. *Коцепной комплекс* — это набор $\{M_i, d_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ модулей над суперкоммутативной супералгеброй C и гомоморфизмов («дифференциалов») $d_i \colon M_i \longrightarrow M_{i+1}$, таких что

$$p(d_i) = \bar{1} \quad \text{и} \quad d_{i+1} \circ d_i = 0 \quad \text{при всех } i.$$

В «обычной» математике комплексы во всех[1] примерах ограничены с одной стороны:

$$M_i = 0 \quad \text{при } i < 0.$$

Ниже мы увидим, что в суперматематике такое ограничение неестественно (важный пример: комплекс интегро-дифференциальных форм на чисто нечетном суперпространстве).

Цепной комплекс определяется аналогично, но дифференциалы действуют, уменьшая индекс: $d_i \colon M_i \to M_{i-1}$; соответственно требуется, чтобы выполнялись условия

$$p(d_i) = \bar{1} \quad \text{и} \quad d_i \circ d_{i+1} = 0 \quad \text{при всех } i.$$

---

[1] Известных мне. — *Прим. ред.*

Этот набор данных можно описать единообразно, рассмотрев $C[\xi]$-модуль $M=\bigoplus M_i$, где ξ — нечетная переменная, такая что $\xi^2=0$. Действие этой переменной ξ на M реализуется посредством дифференциалов d_i. Индекс i часто опускают, и такое обезличивание дифференциалов и отождествляет их с ξ.

Бикомплексы в нашей терминологии — это $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-градуированные модули над $C[\xi_1, \xi_2]$. Аналогично определяются *поликомплексы*.

1.10.1a. Вопрос. Поскольку эти объекты до сих пор рассматривались над коммутативными алгебрами C, а не над СУПЕРалгебрами, никто не задумывался над вопросом: какая — в данном контексте — заложена идея в том, что имеются и C_+-, и C_--модули?

1.10.2. Два модуля универсальных дифференциалов. Пусть $A\subset B$ — суперкоммутативные супералгебры, а $m\colon B\otimes B\to B$ — умножение в B. Положим

$$I:=I_{B/A}=\operatorname{Ker} m.$$

Положим

$$\mathrm{Covect}_{B/A}:=I/I^2,\quad \Omega^1_{B/A}:=\Pi(I/I^2).$$

Определим отображение $d=d_{B/A}\colon B\longrightarrow \mathrm{Covect}_{B/A}$, положив

$$d(b)=(b\otimes 1-1\otimes b)\mod I^2,$$

и его нечетную копию $d=d_{B/A}\colon B\longrightarrow\Omega^1_{B/A}$, положив

$$d(b)=\Pi(b\otimes 1-1\otimes b)\mod I^2.$$

Утверждение ([МаАГ]). *Модули* $\mathrm{Covect}_{B/A}$ *и* $\Omega^1_{B/A}$ *универсальны в следующем смысле: для каждого дифференцирования $d'\colon B\to M$ супералгебры B в B-модуль M существует и единствен морфизм B-модулей $\psi\colon \mathrm{Covect}_{B/A}\to M$, если гомоморфизм d' четен, и $\psi\colon\Omega^1_{B/A}\to M$, если гомоморфизм d' нечетен, такой что*

$$d'=\psi\circ d_{B/A}.$$

Положив в утверждении $M=B$, получаем модуль коуниверсальных дифференцирований

$$\mathrm{Vect}_{B/A}=\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Covect}_{B/A},\, B).$$

Упражнение. Двойственная формула

$$\mathrm{Covect}_{B/A}=\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Vect}_{B/A},\, B)\qquad(1.51)$$

верна не всегда. (Приведите пример алгебр B и A, когда формула (1.51) неверна. Ответ приведен в книге [МаАГ], а суперность здесь не при чем.)

1.10.3. Комплекс де Рама.

Утверждение. *Если $\{b_j\}_{j\in J}$ — система образующих A-алгебры B, то $\{db_j\}_{j\in J}$ — система образующих B-модуля* $\mathrm{Covect}_{B/A}$.

Пример. Пусть $B=A[T_1, \ldots, T_{m+n}]$, где m из образующих T_i четны, а остальные нечетны. Тогда элементы dT_i, такие что $p(dT_i)=p(T_i)+\bar{1}$, порождают модуль $\Omega^1_{B/A}$ над A, а с ним и A-алгебру

$$\Omega^{\bullet}_{B/A}=A[T,\, dT].\qquad(1.52)$$

Дифференциальная градуированная (степенью относительно элементов dT_i) супералгебра $\Omega^{\bullet}$ называется *супералгеброй внешних форм* или, если вспомнить про d, *комплексом де Рама* (над (супер)многообразием, функции на котором образуют (супер)алгебру $A[T]$).

Идеал $I\subset\Omega^{\bullet}$ называется *дифференциальным*, если $dI\subset I$.

1.10.3a. Теорема (лемма Пуанкаре, см. [МаКП, БЛ]). *Пусть гомоморфизм $\varphi\colon A\to B$, задающий структуру A-алгебры на B. Тогда d — A-линейное дифференцирование, причем $d(\varphi(a))=0$. Последовательность*

$$0\longrightarrow A\hookrightarrow\Omega^0_{B/A}=B\xrightarrow{d}\Omega^1_{B/A}\longrightarrow\Omega^2_{B/A}\longrightarrow\ldots$$

точна.

Дифференцирование d можно интерпретировать как нечетное векторное поле на супермногообразии, функции на котором образуют супералгебру $A[T, dT]$. В последующих главах мы охарактеризуем d и другие (мы назвали их *гомологическими*) векторные поля X на супермногообразиях, такие что $X^2=0$).

Обсуждение. 1) Дифференциал d, который можно продолжить до дифференцирования супералгебры, нечетен. Если вместо $S_B(\Omega^1_{B/A})=\Omega^{\bullet}_{B/A}$ взять $S_B(\mathrm{Covect}_{B/A})$, то продолжить четный дифференциал d до дифференцирования этой супералгебры невозможно.

2) Начав с $B=\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_n]$, где все T_i четны, получаем $\Omega^{\bullet}=\mathbb{K}[T_i, dT_i]$. Обозначив dT_i через θ_i, видим, что

$$d=\sum\theta_i\frac{\partial}{\partial T_i}.$$

Начав с $B=\mathbb{K}[\theta_1, \ldots, \theta_n]$, где все θ_i нечетны, получаем $\Omega^{\bullet}=\mathbb{K}[\theta_i,\, d\theta_i]$. Обозначив $d\theta_i$ через T_i, видим, что

$$d=\sum T_i\frac{\partial}{\partial\theta_i}.$$

Поскольку T_i четны, нет резона ограничивать себя, как на многообразиях, только полиномиальными функциями от дифференциалов. Вопрос о том, как соответствующим образом обобщить гомологическую алгебру, — **открытая проблема**, касающаяся, очевидно, и общего случая (1.52), когда есть хоть один четный элемент dT_i.

1.10.4. Комплексы Кошуля и березиниан. Пусть C — суперкоммутативная супералгебра, а $x = (x_1, \ldots, x_{m+n})$ — набор из m четных и n нечетных ее элементов. Определим *правый комплекс Кошуля*, положив

$$K_\cdot(C, x) = \mathbb{Z}[\hat{x}_i] \otimes_{\mathbb{Z}} C, \quad \text{где } p(\hat{x}_i) = p(x_i) + \bar{1},$$

с градуировкой $\deg C = 0$, $\deg \hat{x}_i = 1$ при всех i. Действие дифференциала

$$d = \sum \hat{x}_i \otimes x_i$$

— правое умножение.

Определим *левый комплекс Кошуля*, положив

$$K^\cdot(C, x) = C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\hat{x}_i], \quad \text{где } p(\hat{x}_i) = p(x_i) + \bar{1},$$

с градуировкой $\deg C = 0$, $\deg \hat{x}_i = 1$ при всех i. Действие дифференциала

$$d = \sum x_i \otimes \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i}$$

— левое умножение.

Упражнение. Пусть теперь M — свободный C-модуль конечного ранга. Пусть $\mathfrak{M} = \{m_i\}_{i \in I}$ — базис в M, а $\mathfrak{M}^* = \{m_i^*\}_{i \in I}$ — левый двойственный базис в M^*. Докажите, что

1) элемент

$$d = \sum \Pi(m_i) m_i^* \in S_C(\Pi(M) \oplus M^*)$$

не зависит от выбора базиса $\mathfrak{M}$ в M и $d^2 = 0$;

2) $(K^\cdot(C, M), d)$ — правый комплекс Кошуля.

Обозначим через $H(K^\cdot(C, M))$ гомологии комплекса $(K^\cdot(C, M), d)$. Обозначим четные элементы базиса $\mathfrak{M}$ через x, а нечетные — через θ. Очевидно, что элемент $h_{\mathfrak{M}} = \Pi(x_1) \ldots \Pi(x_m)\theta_1^* \ldots \theta_n^*$ — коцикл.

Утверждение ([МаКП]). *Отображение* $\mathrm{Vol}_C(M) \longrightarrow H(K^\cdot(C, M))$, *которое переводит элемент* $vol_{\mathfrak{M}}$ *в класс элемента* $h_{\mathfrak{M}}$, *не зависит от выбора базиса и является изоморфизмом четности* m *между* $\mathrm{Vol}_C(M)$ *и соответствующей группой гомологий комплекса* $K^\cdot(C, M)$.

§ 1.11. Вещественные структуры

1.11.1. Вещественные структуры на алгебрах и модулях. Пока — ничего суперного.

1) Пусть A — коммутативная алгебра над $\mathbb{C}$. Антилинейная над $\mathbb{C}$ инволюция $\rho\colon A \to A$, т. е. $\mathbb{R}$-линейный гомоморфизм

$$\rho\colon A \longrightarrow A, \quad a \longmapsto \rho(a),$$

такой что $\rho^2 = \mathrm{id}$ и

$$\rho(ab) = \rho(a)\rho(b), \quad \rho(\lambda a) = \bar{\lambda}\rho(a) \quad \text{для любых } a, b \in A, \ \lambda \in \mathbb{C},$$

называется *вещественной структурой* на A. Положим

$$\mathrm{Re}\, A = \{a \in A \mid \rho(a) = a\}, \quad \mathrm{Im}\, A = \{a \in A \mid \rho(a) = -a\}.$$

Алгебра $\mathrm{Re}\, A$ называется *вещественной формой* алгебры A.

Можно считать и по-другому: пусть A — алгебра над $\mathbb{C}$, а B — алгебра над $\mathbb{R}$; тогда B называется *вещественной формой* алгебры A, если $A \simeq B \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. При таком определении существование антилинейной инволюции алгебры A, выделяющей алгебру B как множество неподвижных точек, надо доказывать.

Есть ровно два разных способа продолжить вещественную структуру ρ с алгебры A на A-модуль M:

а) *вещественной структурой* на M называется $\mathbb{R}$-линейное отображение $\rho\colon M \to M$, такое что

$$\rho^2 = \mathrm{id}, \quad \rho(am) = \rho(a)\rho(m) \quad \text{для любых } a \in A, \ \ m \in M;$$

положим

$$\mathrm{Re}\, M := M^\rho = \{m \in M \mid \rho(m) = m\}, \quad \mathrm{Im}\, M = \{m \in M \mid \rho(m) = -m\};$$

тогда

$$M = \mathrm{Re}\, M \oplus \mathrm{Im}\, M = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Re}\, M;$$

пространство $\mathrm{Re}\, M$ называется *вещественной формой* модуля M;

б) *кватернионной структурой* на M называется $\mathbb{R}$-линейное отображение $\rho\colon M \to M$, такое что

$$\rho^2 = -\,\mathrm{id}, \quad \rho(am) = \rho(a)\rho(m) \quad \text{для любых } a \in A, \ m \in M;$$

ясно, что M — сумма подпространств, отвечающих собственным значениям $\pm i$, а вещественных элементов в M нет (их и не может быть, ибо они не определены).

2) Если A — некоммутативная $\mathbb{C}$-алгебра, то $\mathbb{R}$-линейное отображение $\rho\colon A \to A$, такое что

$$\rho^2 = \mathrm{id} \ \text{ и } \ \rho(ab) = \rho(b)\ \rho(a), \quad \rho(ca) = \bar{c}\rho(a) \quad \text{для любых } c \in \mathbb{C}, \ a, b \in A,$$

называется *эрмитовой структурой* на A, а иногда — *антилинейным антиавтоморфизмом*.

1.11.2. Вещественные структуры на супералгебрах. Если учесть все возможности: и на $A_{\bar{0}}$, и на $A_{\bar{0}}$-модуле $A_{\bar{1}}$, и возможную эрмитову структуру, то всего набегает 8 типов вещественных структур: пусть $\varepsilon_i = \pm 1$, тогда *вещественной* или $\mathbb{R}$-*структурой типа* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ на супералгебре A назовем четное $\mathbb{R}$-линейное отображение $\rho\colon A \to A$, такое что

$$\rho^2(a) = (\varepsilon_1)^{p(a)}a, \quad \rho(ab) = \varepsilon_3(\varepsilon_2)^{p(a)p(b)}\,\rho(b)\,\rho(a),$$
$$\rho(ca) = \bar{c}\,\rho(a) \quad \text{для любых } c \in \mathbb{C} \text{ и } a,\ b \in A.$$

Такое изобилие возможностей гнетет, и справедливо: относительно естественного отношения эквивалентности имеется на самом деле всего две возможности. Мы скажем, что две $\mathbb{R}$-структуры ρ и ρ' *эквивалентны* (и запишем $\rho \sim \rho'$), если существует автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(A)$, такой что $\rho' = \varphi\rho\varphi^{-1}$.

Предложение. *Классы вещественных структур типов* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, $(\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \varepsilon_3)$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, -\varepsilon_3)$ *и* $(\varepsilon_1, -\varepsilon_2, -\varepsilon_3)$ *эквивалентны.*

Доказательство. Если $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ — тип вещественной структуры ρ, то $-\rho$ — структура типа $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, -\varepsilon_3)$, а ρ', где $\rho'(g) = (i)^{p(g)}\,\rho(g)$, имеет тип $(\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \varepsilon_3)$. $\square$

Соглашение. В дальнейшем мы рассматриваем только две структуры: 1) *вещественную структуру* только типа $(1, -1, -1)$ и 2) *кватернионную структуру* только типа $(-1, -1, -1)$.

Ясно, что вещественные формы выделяются антилинейными автоморфизмами порядка 2, а кватернионные структуры задаются антилинейными автоморфизмами порядка 4, ограничение которых на четную часть имеет порядок 2.

Упражнение. Если A — супералгебра с единицей, то $\varepsilon_3 \equiv 1$.

Согласно предложению это ограничение (иметь единицу) несущественно, равно как и знак у ε_2.

Замечание. Если A — супералгебра Ли, то кватернионных структур у нее обычно довольно много. Их «полезность» известна пока лишь физикам, и то лишь на одном-двух примерах, поэтому и классификационные задачи здесь **открыты**, за исключением решенных в [Ser].

1.11.3. Вещественные структуры на модулях над супералгебрами. Пусть ρ — вещественная структура типа $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ на супералгебре A, а $\sigma\colon M \to M$ есть $\mathbb{R}$-линейное отображение A-бимодуля M, такое что для любых $a \in A$ и $m \in M$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \sigma^2(m) &= \eta((-\varepsilon_2)^{p(\rho)}\varepsilon_1)^{p(\sigma)}m, \quad \text{где } \eta = \pm 1; \\ \sigma(am) &= \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_2^{p(a)p(m)}\,\sigma(m)\rho(a); \\ \sigma(ma) &= (-1)^{p(\rho)p(a)}\varepsilon_3 \cdot \varepsilon_2^{p(a)p(m)}\rho(m)\sigma(a). \end{aligned} \tag{1.53}$$

Тогда σ называется *продолжением* на M *вещественной структуры* ρ и обычно тоже обозначается ρ. *Типом* структуры σ является набор

$$(\text{тип структуры } \rho \text{ на } A,\ \eta,\ p(\sigma)).$$

Естественнее определить продолжение $\sigma\colon M \to M$ вещественной структуры ρ на A не формулами (1.53), а положив (здесь $\eta_i = \pm 1$ при $i = 1, 2, 3, 4$)

$$\sigma^2(m) = \eta_1(\eta_2)^{p(m)}m \quad \text{и} \quad \sigma(am) = \eta_3(\eta_4)^{p(a)p(m)}\sigma(m)\rho(a). \tag{1.54}$$

К счастью, удается выразить все параметры η_i, кроме одного, через параметры ε_j с помощью тождеств

$$\sigma(a(bm)) = \sigma((ab)m) \quad \text{и} \quad \sigma^2(am) = \eta_1(\eta_2)^{p(am)}am. \tag{1.55}$$

Упражнение. Выведите формулу (1.53) из (1.54) и (1.55).

Вопрос. Как известно, вещественные структуры можно интерпретировать в терминах когомологий (Галуа). Есть ли аналогичные интерпретации у кватернионных структур и вещественных структур типа (ε, η, p) на модулях?

Если даны A-модули M и N с вещественными структурами на них (обозначенными одним символом ρ) типов (ε, η, p) и (ε, η', p') соответственно, то по ним можно построить несколько A-модулей с естественными вещественными структурами, см. таблицу 1.1, где $a^\rho := \rho(a)$.

1.11.4. Псевдоэрмитовы формы и псевдоунитарные операторы. В этом пункте основное поле — $\mathbb{C}$, а cj означает продолжение комплексного сопряжения с $\mathbb{C}$ на суперкоммутативную $\mathbb{C}$-алгебру C.

Каждому оператору $F \in \mathrm{Hom}_C(M, N)$ сопоставим *эрмитово сопряженный* оператор $F^{h*} \in \mathrm{Hom}_C(N^*, M^*)$.

Упражнение. Выразите матрицу оператора F^{h*} через матрицу оператора F.

Вопрос. Существует ли аналог сопряженного оператора для кватернионной структуры на C?

Определим *псевдоэрмитову* («полуторалинейную») форму H на C-модулях M и N как билинейную над $\mathbb{R}$ форму $H\colon M \times N \to C$, такую

Таблица 1.1. **Вещественные структуры на некоторых A-модулях**

На чем задана	Определение структуры	Тип структуры	Замечания
A	ρ^{-1}	$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$	$\rho^{-1} = \rho$ при $\varepsilon_1 = 1$
S	ρ^{-1}	(η, r)	существует только при $(-\varepsilon_2)^r = 1$
$\mathrm{Der}_C(A, S)$	$X^\rho a = (-\varepsilon_2)^{p(X)p(a)}(Xa^{\rho^{-1}})^\rho$	$(1, r)$ (A-модуль)	$X^\rho \in \mathrm{Der}_C(A, S)$ всегда, но ρ — вещественная структура, лишь если супералгебра A суперкоммутативна и $r = 0$
$\mathfrak{der}_C(A, A)$	как и выше	$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1)$	как и выше
$\mathrm{Covect}\, A$ $\Omega^1 A$	$(da)^\rho = da^\rho$ $(da)^\rho = (-\varepsilon_2)^{p(a)} da^\rho$	$(1, 0)$ $(\varepsilon_1, 0)$	супералгебра A суперкоммутативна, а вещественная структура задана условием $d^\rho = d$
$S \otimes S' \simeq$ $\simeq S' \otimes S$	$(s \otimes t)^\rho =$ $= (-1)^{rp(t)}\varepsilon_3(\varepsilon_2)^{p(s)p(t)} t^\rho \otimes s^\rho$	$(\eta\eta'(-\varepsilon_2)^{rr'}, r + r')$	супералгебра A суперкоммутативна, иначе $S \otimes S' \not\simeq S' \otimes S$
$A[S]$	как и выше	$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$	существует только при $\eta = 1$, $r = 0$
$\Omega^{\boldsymbol{\cdot}} A$	как и выше	$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$	существует только при $\varepsilon_1 = 1$

что для любых $m \in M$, $n \in N$, $c \in \mathbb{C}$ выполнены равенства

$$H(cm, n) = (-1)^{p(c)p(H)} cH(m, n),$$
$$H(mc, n) = H(m, \mathrm{cj}(c)n),$$
$$H(m, cn) = H(m, n)\,\mathrm{cj}(c).$$

На суперпространстве $\mathrm{Herm}_C(M, N)$ псевдоэрмитовых форм введем структуру C-модуля, отождествив $\mathrm{Herm}_C(M, N)$ с $(M \otimes_C N)^*$ по формуле

$$H(m \otimes n) = H(m, n).$$

Если M и N — свободные модули, то, выбрав какие-нибудь их базисы $\{m_i\}_{i \in I}$ и $\{n_j\}_{j \in J}$ соответственно, мы можем псевдоэрмитовой форме H сопоставить матрицу ${}^fH$ с элементами

$$({}^fH)_{ij} = (-1)^{p(m_i)p(H)} H(m_i, n_j).$$

Переворачивание псевдоэрмитовых форм определим такой же формулой, что и переворачивание билинейных форм (см. (1.13)):

$$hu\colon \mathrm{Herm}_C(M, N) \longrightarrow \mathrm{Herm}_C(N, M),$$
$$H^{hu}(n, m) = (-1)^{p(n)p(m)} H(m, n).$$

Положим $\mathrm{Herm}_C(M) := \mathrm{Herm}_C(M, M)$ и скажем, что псевдоэрмитова форма $H \in \mathrm{Herm}_C(M)$ *симметрическая*, если $H^{hu} = H$, и *антисимметрическая*, если $H^{hu} = -H$.

Аналогично тому, как мы представляем C в виде $C = \mathrm{Re}\, C \oplus \mathrm{Im}\, C$, для каждого линейного оператора $F \in \mathrm{Herm}_C(M)$ положим

$$(\mathrm{Re}\, F)(m) = \frac{1}{2}(F(m) + \mathrm{cj}(F(m)));$$
$$(\mathrm{Im}\, F)(m) = \frac{1}{2}(F(m) - \mathrm{cj}(F(m)))$$

и назовем эти операторы *вещественной* и *мнимой* частями оператора F.

Упражнение. Докажите следующие утверждения.

1) Если оператору $F\colon M \to N$ в фиксированных базисах C-модулей M и N отвечает суперматрица ${}^mF$, то эрмитово сопряженному оператору F^{h*} в левых дуальных базисах соответствует суперматрица

$${}^m(F^{h*}) = \mathrm{cj}(({}^mF)^{st}),$$

элементы которой сопряжены с помощью cj.

2) Если в M и N сделать замену базисов с помощью суперматриц X и Y соответственно, то матрицы псевдоэрмитовой формы $H \in \mathrm{Herm}_C(M, N)$ в старом и новом базисах связаны формулой

$$({}^fH)' = X^{st} \cdot {}^fH \cdot \mathrm{cj}(Y).$$

3) Невырожденную симметрическую (соответственно антисимметрическую) *псевдоэрмитову* форму H над C можно привести к каноническому виду с суперматрицей

$$\begin{pmatrix} I_n^r & 0 \\ 0 & iI_m^s \end{pmatrix} \ \left(\text{соответственно } \begin{pmatrix} iI_n^r & 0 \\ 0 & I_m^s \end{pmatrix}\right), \quad \text{если } p(H) = \bar{0},$$

или

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ iI_n & 0 \end{pmatrix} \ \left(\text{соответственно } \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -iI_n & 0 \end{pmatrix}\right), \quad \text{если } p(H) = \bar{1}.$$

Эрмитова форма — частный случай *псевдоэрмитовой*, когда форма четна, причем $r = s = 0$, или когда форма нечетна. Оператор, сохраняющий эрмитову форму, назовем *унитарным*, а псевдоэрмитову — *псевдоунитарным*. Группа унитарных операторов, сохраняющих четную форму, обозначается $U(p|q; C)$, а группа унитарных операторов, сохраняющих нечетную форму, обозначается $\mathrm{PeU}(p|q; C)$. Группа псевдоунитарных операторов, сохраняющих четную форму, обозначается $U(n, r|m, s; C)$. Все псевдоунитарные операторы, сохраняющие нечетную форму, унитарны по определению.

Обсуждение. Мы видим, что эрмитовы формы в суперслучае никогда не знакоопределены на всем суперпространстве. Насколько нам известно, исследований, подобных проводимых в учебниках для первых курсов физических факультетов, о связи эрмитовости и вероятности для суперэрмитовых форм не проводилось. Даже для четных форм, а ведь еще есть и нечетные!

Проблема. Интерпретировать эрмитовы формы, в том числе нечетные, в терминах теории вероятности или «энергии».

1.11.5. Комплексификация и овеществление. Каждое векторное суперпространство L суперразмерности $p+q\varepsilon$ над $\mathbb{C}$ можно рассматривать как суперпространство $L_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$, которое называется *овеществлением* суперпространства L.

Возможны два случая:

$$\begin{aligned} &1)\quad \mathbb{C} \text{ чисто четно; тогда } \operatorname{sdim}_{\mathbb{R}} L_{\mathbb{R}} = 2\operatorname{sdim}_{\mathbb{C}} L;\\ &2)\quad \mathbb{C} \text{ — это } \mathbb{C}^s = Q(1)\text{; тогда } \operatorname{sdim}_{\mathbb{R}} L_{\mathbb{R}} = (1+\varepsilon)(p+q). \end{aligned} \tag{1.56}$$

Аналогично каждому оператору $F \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(L, M)$ отвечает его *овеществление* $F_{\mathbb{R}}$ — это тот же оператор, но рассматриваемый как элемент суперпространства $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(L_{\mathbb{R}}, M_{\mathbb{R}})$. Пусть ${}^{m}F = X + iY$ — матрица оператора F относительно базисов $\{l = (l_1, \ldots, l_{p+q})\}$ и $\{m = (m_1, \ldots, m_{r+s})\}$ в $L^{p,q}$ и $M^{r,s}$ соответственно. Тогда матрица оператора ${}^{m}(F_{\mathbb{R}})$ в базисах $\{l, il\}$ и $\{m, im\}$ имеет в соответствии с двумя возможностями (1.56) для каждого суперпространства следующий вид:

$$1)\ \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad 2)\ \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}. \tag{1.57}$$

Комплексной структурой на вещественном суперпространстве L называется однородный (относительно четности) эндоморфизм J, такой что $J^2 = -\operatorname{id}$. Вещественное суперпространство L с комплексной структурой J можно рассматривать как комплексное суперпространство, и в зависимости от четности оператора J оно обозначается так:

$$\begin{aligned} &1)\quad L^{\mathbb{C}} = (L, J), \text{ если } p(J) = \bar{0};\\ &\left.\begin{aligned} &2л)\ {}^{Q}L = (L, J) \text{ с левым действием оператора } J,\\ &2п)\ L^{Q} = (L, J) \text{ с правым действием оператора } J, \end{aligned}\right\} \text{ если } p(J) = \bar{1}. \end{aligned} \tag{1.58}$$

Упражнение. Проверьте, что в подходящем базисе стандартного формата в конечномерном суперпространстве L матрицу оператора J можно представить в виде

1) $\operatorname{diag}(J_{2p}, J_{2q})$, если $p(J) = \bar{0}$,

2) J_{2n}, если $p(J) = \bar{1}$.

Итак, существуют две существенно разных комплексификации:

1) четная комплексификация $L^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} L$ — это комплексификация вещественного суперпространства L,

2) нечетная комплексификация, которая подразбивается на два типа (левое и правое оQчивания): ${}^{Q}L = \mathbb{C}^s \otimes_{\mathbb{R}} L$ и $L^{Q} = L \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^s$.

Заметим, что оQчивание применимо не только к вещественным суперпространствам, но и к комплексным, и аналогично «обычную» комплексификацию можно применять как к пространству L над $\mathbb{R}$, так и к пространствам L^{Q} и ${}^{Q}L$ над $\mathbb{R}$.

Наконец, для каждого суперпространства L над $\mathbb{C}$ определим суперпространство $\bar{L}$ как копию суперпространства L с $\mathbb{C}$-действием, заданным формулой

$$c \cdot l = \bar{c}l \quad \text{для любых } c \in \mathbb{C},\ l \in L. \tag{1.59}$$

Овеществление разных комплексификаций приводит к разным ответам (здесь L — суперпространство над $\mathbb{R}$):

$$(L^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} = L \oplus L, \quad (Q(L))_{\mathbb{R}} = L \oplus \Pi(L). \tag{1.60}$$

А вот результаты разных комплексификаций суперпространств L, заданных над $\mathbb{C}$ (случай 1) и над $\mathbb{C}^s$ (случай 2):

$$\begin{aligned} &(1)\quad (L_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = L \oplus \bar{L}, &&Q(L_{\mathbb{R}}) = L \oplus \Pi(\bar{L})\\ &(2)\quad (L_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = L \oplus \Pi(L), &&Q(L_{\mathbb{R}}) = L \oplus \bar{L}. \end{aligned} \tag{1.61}$$

Упражнения. 1) Для суперпространства $\bar{L}$, заданного формулой (1.59), выразите lc через cl для любых $l \in L$ и $c \in C$.

2) Докажите формулы (1.60) и (1.61).

§ 1.12. Примеры вещественных структур

1.12.1. Дуальные формы любой комплексной супералгебры изоморфны. Впервые утверждение, составившее заголовок этого подпункта, доказала для *некоторых* простых конечномерных супералгебр Ли М. Паркер, см.[Ser]. Утверждение, однако, верно в гораздо большей общности.

Пусть $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ — произвольная (не обязательно с единицей) супералгебра над $\mathbb{C}$. Пусть $A_{\mathbb{R}}$ — это алгебра A, рассматриваемая над $\mathbb{R}$. Пусть I — четный линейный оператор на A, такой что (здесь $i = \sqrt{-1}$)

$$I(a) = ia \quad \text{при всех } a \in A.$$

Супералгебра B называется *вещественной формой* супералгебры A, если B — подсупералгебра в $A_{\mathbb{R}}$, а $A_{\mathbb{R}} = B \oplus I(B)$ как линейное пространство.

Если $B = B_{\bar 0} \oplus B_{\bar 1}$ — вещественная форма супералгебры A, то $B' = B_{\bar 0} \oplus I(B_{\bar 1})$ тоже вещественная форма супералгебры A; она называется *дуальной к B вещественной формой*.

Пусть на A есть $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-градуировка, *согласованная* с четностью, т. е.

1) $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$ как линейное пространство;

2) $[A_i, A_j] \subset A_{i+j \mod 4}$;

3) каждая компонента A_i является однородным пространством, четность которого равна четности числа i.

1.12.1а. Утверждение. *Пусть B — вещественная форма супералгебры A, такая что B — градуированная подсупералгебра в $A_{\mathbb{R}}$, т. е. B не просто подсупералгебра в $A_{\mathbb{R}}$, а такая, что*

$$B = \bigoplus_{i=0}^{3}(B \cap A_i) \quad \textit{как линейные пространства.}$$

Пусть B' — дуальная вещественная форма. Тогда супералгебры B и B' изоморфны.

Доказательство. Вот какое отображение $F\colon B \to B'$ устанавливает изоморфизм:

$$F(b) = \begin{cases} b, & \text{если } \deg b = 0;\\ I(b), & \text{если } \deg b = 1;\\ -b, & \text{если } \deg b = 2;\\ -I(b), & \text{если } \deg b = 3. \end{cases}$$
□

1.12.1б. Примеры вещественных структур на супералгебре Грассмана $\Lambda_{\mathbb{C}}(n)$. Пусть $\theta = (\theta_1, \ldots \theta_n)$ — образующие супералгебры Грассмана $\Lambda_{\mathbb{C}}(n)$. При $n = 0$ есть, очевидно, лишь одна — *каноническая* — вещественная структура. При $n = 1$ вещественных структур много: ясно, что $\rho(\theta) = \lambda\theta$, где $\lambda \in \mathbb{C}$. Инволютивность отображения ρ означает только, что $\lambda\bar\lambda = 1$, т. е. $\lambda = \exp(i\varphi)$, а соответствующая вещественная форма состоит из элементов вида $a + b\exp(i\varphi/2)\theta$, где $a, b \in \mathbb{R}$.

При $n = 2k$ положим $\theta = (\xi, \eta)$, где $\xi = (\xi_1, \ldots \xi_k)$, $\eta = (\eta_1, \ldots \eta_k)$. Следующие примеры вещественных структур являются самыми распространенными (математики предпочитают первую из них, а физики — вторую):

1) $\rho_{bar}(\theta_j) = \exp(i\varphi_j)\theta_j$ (как правило, математики полагают $\varphi_j = 0$ при всех $j = 1, \ldots, n$);

2) $\rho_{tr}(\xi_j) = i \cdot \eta_j$; $\rho_{tr}(\eta_j) = -i \cdot \xi_j$ при всех $j = 1, \ldots, k$ и $i = \sqrt{-1}$.

Очевидно, что можно (а при n нечетном — необходимо) составлять смеси этих структур, и кажется, что все они различны, т. е. приводят к неизоморфным вещественным формам. Однако, это не так. Несмотря на разнообразие вещественных структур имеет место следующее утверждение.

1.12.2. Все вещественные формы супералгебры Грассмана изоморфны. Пусть $Gr(n; \mathbb{K})$ — комплексная супералгебра Грассмана с n образующими над полем $\mathbb{K}$. Пусть I — четный оператор умножения на $i = \sqrt{-1}$ в $G := Gr(n; \mathbb{C})$. Для естественной фильтрации супералгебры Грассмана

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n,$$

индуцированной степенью элементов относительно образующих, положим $V = G_1/G_2$, и пусть $\pi\colon G_1 \to V$ — естественная проекция. Заметим, что

1) $G = \mathbb{C} \cdot 1 \oplus G_1$ как линейное пространство;

2) $G_{\bar 1} \subset G_1$.

1.12.2а. Утверждение ([Бер]). *Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in G_{\bar 1}$ — такие элементы, что $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\pi(\varphi_1), \ldots, \pi(\varphi_n)) = V$. Тогда элементы φ_i порождают G_1 как свободную алгебру с соотношениями*

$$\varphi_i\varphi_j = -\varphi_j\varphi_i \quad \textit{при любых} \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{1.62}$$

Все соотношения между элементами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ суть следствия соотношений (1.62).

1.12.2б. Лемма. *Пусть B — вещественная форма супералгебры G. Тогда $1 \in B$.*

Доказательство. По определению вещественной формы можно представить единицу 1 в виде $x + I(y)$ для некоторых $x, y \in B$. Тогда для любого элемента $z \in B$ имеем

$$0 = z - z \cdot 1 = (z - zx) - I(zy).$$

Поэтому $zy = 0$ при всех $z \in B$. Итак, $zy = 0$ при всех $z \in G$. Следовательно, $y = 0$, а $1 = x \in B$. □

1.12.2в. Лемма. *Существуют элементы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in B_{\bar 1}$, такие что $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\pi(\varphi_1), \ldots, \pi(\varphi_n)) = V$.*

Доказательство. Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_n \in G_{\bar 1}$ — такие элементы, что $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\pi(\theta_1), \ldots, \pi(\theta_n)) = V$ (т. е. эти элементы порождают G_1). Представим их в виде $\theta_i = x_i + I(y_i)$, где $x_i, y_i \in B$. Тогда все элементы x_i, y_i нечетные. Поскольку пространство $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n), \pi(y_1), \ldots \ldots, \pi(y_n))$ содержит все $\pi(\theta_i)$, оно совпадает с V. Поскольку $\dim_{\mathbb{C}} V = n$, среди $2n$ элементов $\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n), \pi(y_1), \ldots, \pi(y_n)$ можно найти n элементов, порождающих все пространство V. □

1.12.2г. Теорема. *Супералгебры B и $Gr(n; \mathbb{R})$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, как в лемме 1.12.2в. Тогда они удовлетворяют условию утверждения 1.12.2а, а значит, они удовлетворяют соотношениям (1.62), и все соотношения между ними вытекают из (1.62). Таким образом, подсупералгебра $C \subset G_{\mathbb{R}}$, порожденная 1 и $\theta_1, \ldots, \theta_n$, изоморфна $Gr(n; \mathbb{R})$. Поскольку алгебра B замкнута относительно умножения и содержит все элементы $1, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, она содержит и всю алгебру C. А так как $\dim B = \dim Gr(n; \mathbb{R})$, мы заключаем, что $B = C$. □

Задача. Верна ли теорема для $n = \infty$?

§ 1.13. Лемма Шура. Неприводимые представления типов G и Q

В этом параграфе нет модулей над суперкоммутативными супералгебрами, а только суперпространства над полем.

1.13.1. Пусть A — ассоциативная супералгебра с единицей. *Представление* супералгебры A в суперпространстве M — это, как уже было сказано, то же самое, что и действие супералгебры A на суперпространстве M, превращающее M в A-модуль. Полезно это выразить и по-другому: *представлением супералгебры* A в суперпространстве M называется морфизм супералгебр $\rho\colon A \longrightarrow \mathrm{End}(M)$, такой что $\rho(1) = \mathrm{id}_M$.

Связанный с каждым конечномерным представлением ρ элемент $\chi_\rho \in A_{\bar{0}}^{\times}$, заданный формулой

$$\chi_\rho(a) = \mathrm{str}\,\rho(a) \quad \text{при всех } a \in A, \tag{1.63}$$

назовем *центральным характером*[1] представления ρ. Очевидно, χ_ρ обладает следующими свойствами:

а) $\chi_\rho([a, b]) = 0$, в частности, $\chi_\rho(a^2) = 0$ для всех $a \in A_{\bar{1}}$;

б) если $N \subset M$ — инвариантное подпространство, то

$$\chi_\rho|_N + \chi_\rho|_{M/N} = \chi_\rho;$$

в) $\chi_{\pi(\rho)} = -\chi_\rho$, где представление $\pi(\rho)\colon A \longrightarrow \mathrm{End}(\Pi(M))$ определено формулой

$$a \longmapsto \pi(\rho(a)).$$

Если в модуле M нет нетривиальных (отличных от $\{0\}$ и M) инвариантных под**супер**пространств, а инвариантные подпространства (неоднородные) все-таки есть, то он называется *неприводимым типа* Q. Если же в модуле M нет никаких инвариантных подпространств, то он называется *неприводимым типа* G или *абсолютно неприводимым*. Если A-модуль M имеет тип X ($= G$ или Q), то и представление $\rho\colon A \to \mathrm{End}(M)$ супералгебры A называется *неприводимым* того же типа X, что и модуль M.

Обозначим централизатор представления ρ через

$$C(\rho) = \{X \in \mathrm{End}(M) \mid [X, \rho(a)] = 0 \ \text{ для всех } a \in A\}.$$

Теорема (аналог леммы Шура). *Пусть* $\mathbb{K}$ — *алгебраически замкнутое поле, а* $\rho\colon A \to \mathrm{End}(M)$ — *конечномерное неприводимое представление. Тогда может представиться одна и только одна из следующих возможностей*:

1) ρ — *представление типа* G; *тогда* $\rho(A) = \mathrm{End}(M)$ *и* $C(\rho) = \mathbb{K}$; *кроме того*, $\chi_\rho \neq 0$ *и* $\rho \ncong \pi(\rho)$;

2)[1] ρ — *представление типа* Q; *тогда* $\mathrm{sdim}\, M = n|n$ *и существует нечетный оператор* $\Pi \in C(\rho)$, *такой что* $\Pi^2 = -\mathrm{id}$ *или* $+\mathrm{id}$, *собственные подпространства которого и являются неоднородными инвариантными подпространствами*; *при этом*

$$\rho(A) = C(\Pi); \qquad C(\rho) \simeq \mathbb{K}[\Pi] = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}\Pi;$$

кроме того, $\chi_\rho \equiv 0$ *и* $\rho \cong \pi(\rho)$.

Доказательство. Заменив A на $\rho(A)$, можно считать, что $A \subset \mathrm{End}(M)$.

1) Из теоремы Бернсайда (см. [Ленг]) следует, что $A = \mathrm{End}(M)$, а отсюда — все остальное.

2) Пусть $\mathrm{pr} \in \mathrm{End}(M)$ — проекция на $M_{\bar{0}}$ параллельно $M_{\bar{1}}$, а

$$A_{\mathrm{pr}} = A \cdot 1 + A \cdot \mathrm{pr}.$$

Отметим, что A_{pr} — подалгебра в $\mathrm{End}(M)$. Это следует из формул

$$\mathrm{pr}^2 = \mathrm{pr}, \qquad X = \begin{cases} \mathrm{pr}\cdot X, & \text{если } X \in A_{\bar{0}}, \\ (1 - \mathrm{pr}) \cdot X, & \text{если } X \in A_{\bar{1}}. \end{cases}$$

Поскольку любое A_{pr}-инвариантное подпространство в M однородно, а представление A_{pr} в M, очевидно, неприводимо, $A_{\mathrm{pr}} = \mathrm{End}(M)$ в силу п. 1.

Если V — неоднородное A-инвариантное подпространство, то ясно, что $\mathrm{pr}(V) \neq 0$ и $\mathrm{pr}(V)$ инвариантно относительно $(A_{\mathrm{pr}})_{\bar{0}} = \mathrm{End}_{\bar{0}}(M)$. Получается, что $\mathrm{pr}(V) = M_{\bar{0}}$. Аналогично

$$(1 - \mathrm{pr})(V) = M_{\bar{1}}, \qquad V \cap M_{\bar{0}} = V \cap M_{\bar{1}} = 0.$$

---

[1] Отметим, что у термина «центральный характер» есть и другой смысл — это некий специальный гомоморфизм центра универсальной обертывающей алгебры.

[1] Если характеристика основного поля равна 2, то формулировку этого пункта теоремы следует изменить. Она будет дана в соответствующем месте.

Итак, $\mathrm{pr}\colon V \to M_{\bar 0}$ и $(1-\mathrm{pr})\colon V \to M_{\bar 1}$ — изоморфизмы. В частности, $\operatorname{sdim} M = n|n$, и в некотором базисе $\{m_i\}_{i\in I}$ пространства $M_{\bar 0}$ подпространство V можно представить как

$$V = \mathrm{Span}\{m_i + \pi(m_i) \mid i \in I\}.$$

В базисе $\{m_i, \pi(m_i)\}$ суперпространства M рассмотрим операторы $P_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $P_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$. Поскольку V является A-инвариантным, мы получаем

(1) $XP_+ = P_+X$ и $XP_- = P_-X$ при всех $X \in A_{\bar 0}$;
(2) $XP_+ = P_-X$ и $XP_- = P_+X$ при всех $X \in A_{\bar 1}$.

Положим

$$\Pi = P_+ - P_-.$$

Тогда $\Pi^2 = -\,\mathrm{id}$ и $[X, \Pi] = 0$ для всех $X \in A$, т. е. $A \subset C(\Pi)$

Поскольку сумма $C(\Pi) \oplus C(\Pi)\,\mathrm{pr}$ прямая, а $A_{\mathrm{pr}} = \mathrm{End}(M)$, мы получаем $A \simeq C(\Pi)$. Отсюда вытекают все прочие утверждения п. 2. ☐

Упражнение. Сформулируйте супераналог леммы Шура над $\mathbb{R}$ (ср. [Ad], [Her]). Ответ приведен в гл. 7.

1.13.2. Теорема (критерии G- и Q-неприводимости). *Неприводимое представление* ρ *супералгебры* A *имеет тип* G, *если* $[\rho(A), \rho(A)] \supset \rho(A)_{\bar 1}$, *и тип* Q, *если* $[\rho(A), \rho(A)] \supset \rho(A)_{\bar 0}$.

Упражнение. Докажите теорему 1.13.2.

1.13.3. На представлениях типа Q центральный характер χ_ρ тождественно равен 0, но ему есть замена. Определим *нечетный центральный характер* $\chi\omega_\rho$, положив

$$\chi\omega_\rho(a) = \mathrm{qtr}\,\rho(a) \quad \text{для всех } a \in A.$$

Очевидно, что $\chi\omega_\rho([a, b]) = 0$, в частности, $\chi\omega_\rho(a^2) = 0$ при всех $a \in A_{\bar 1}$.

Замечание. Нечетный центральный характер $\chi\omega_\rho$ зависит, очевидно, от реализации алгебры $\rho(A)$ в виде $C(\Pi)$, точнее, от выбора оператора Π, такого что

$$\Pi^2 = -\,\mathrm{id} \quad (\text{или } \Pi^2 = \mathrm{id}) \quad \text{и} \quad \Pi \in (C_\rho)_{\bar 1}.$$

Согласно лемме Шура, Π однозначно определяется с точностью до знака, поэтому $\chi\omega_\rho$ имеет аналогичный произвол.

1.13.4. Пример: представления супералгебр Ли. Скажем, что *неприводимое представление* супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ *имеет тип* G или Q, если соответствующее представление алгебры $U(\mathfrak{g})$ имеет этот тип.

1) Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n|m)$. *Все неприводимые конечномерные представления супералгебры Ли* $\mathfrak{gl}(n|m)$ *имеют тип* G.

Действительно, проверим, что $[U, U] \supset U_{\bar 1}$, где $U = U(\mathfrak{g})$. Пусть в стандартном базисе

$$\mathfrak{g}_- = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathfrak{g}_0 = \left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathfrak{g}_+ = \left\{\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Очевидно, что эти подпространства собственные относительно оператора $\mathrm{Ad}_{1_{n|m}}$ с собственными значениями -1, 0 и 1 соответственно. Пространство U натянуто на элементы из $\mathfrak{g}_0^{\otimes i} \otimes \mathfrak{g}_+^{\otimes j} \otimes \mathfrak{g}_-^{\otimes k}$ при всех i, j, k.

Оператор $\mathrm{Ad}_{1_{n|m}}$ действует на $\mathfrak{g}_0^{\otimes i} \otimes \mathfrak{g}_+^{\otimes j} \otimes \mathfrak{g}_-^{\otimes k}$, умножая на $j - k$, и никогда не обращается в 0 на нечетных элементах. Следовательно, $[U, U] \supset U_{\bar 1}$.

2) Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{q}(2)$. *Все неприводимые конечномерные представления супералгебры* $\mathfrak{q}(2)$ *имеют тип* Q.

Упражнение. Докажите утверждение 2.

Литература

[Ад] *Адамс Дж.* Лекции по группам Ли / Пер. с англ. Н. Р. Камышанского. Прил. А. Л. Онищика. М.: Наука, 1979.

[Бер] *Березин Ф. А.* Введение в суперанализ. 2-е изд., испр. и доп. / Под ред. Д. А. Лейтеса. М.: МЦНМО, готовится к печати.

[БЛ] *Бернштейн И. Н.*, *Лейтес Д. А.* Инвариантные дифференциальные операторы и неприводимые представления суперaлгебы Ли векторных полей // Сердика (Журнал болгарского математического общества). 1981. Т. 7, №. 4. С. 320–334.

[ВдВ] *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1976.

[Гел] *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. Изд. 4-е, расширенное. М.: Наука, 1971.

[ГМ] *Гельфанд С.*, *Манин Ю. И.* Методы гомологической алгебры. Т. 1. М.: Наука, 1988.

[Лдет] *Лейтес Д. А.* Об одном аналоге определителя // Успехи матем. наук. 1975. Т. 35, № 3. С. 156–157.

[Ленг] *Ленг С.* Алгебра. М: Мир, 1968.

[МаКП] *Манин Ю. И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984.

[МаАГ] *Манин Ю. И.* Введение в теорию аффинных схем и квантовых групп / Под ред. Д. А. Лейтеса, С. М. Львовского. М.: МЦНМО, готовится к печати.

[Пра] *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, 1996.

[Серг] *Серганова В. В.* Классификация простых вещественных супералгебр Ли и симметрических суперпространств // Функц. анализ и его прил. 1983. Т. 17, вып. 3. С. 46–54.

[Gr] *Grozman P.* `SuperLie`; `http://www.equaonline.com/math/SuperLie`

[Dz] *Dzhumadil'daev A.* N-commutators // Comment. Math. Helv. 2004. V. 79, № 3. P. 516–553; `arXiv:math/0203036`

Dzhumadildaev A. 10-commutators, 13-commutators, and odd derivations // J. Nonlinear Mathem. Physics. 2008. V. 15, №. 1. P. 87–103.

[Her] *Herstein I. N.* Abstract algebra. Third edition. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc., 1996.

Herstein I. N. Topics in algebra. Second edition. Lexington, Mass.-Toronto, Ont.: Xerox College Publishing, 1975.

Херстейн И. Некоммутативные кольца / Пер. с англ. М.: Мир, 1972.

[Shoi] *Shoikhet B.* Kontsevich formality and PBW algebras; `arXiv:0708.1634`

Глава 2

Аффинная алгебраическая геометрия с суперкоммутативными супералгебрами суперфункций

Алгебраическая геометрия — наука, изучающая многообразия, заданные полиномиальными уравнениями, а в качестве функций признающая только полиномиальные или рациональные функции. Читатель, который в первый раз столкнулся с таким подходом, находится, вероятно, в недоумении: зачем себя так обеднять, когда есть множество разных других нужных классов функций (гладкие, аналитические, кусочно-непрерывные, ... — вот их бы и изучать), и задумывается: какие же важные понятия и теоремы удалось раскопать в этой рукотворной полупустыне полиномиальных функций?

Конечно, читатель образованный (пролиставший главу 1) понимает, что в «чисто нечетном случае» — когда четных переменных нет — никаких других функций, кроме многочленов, нет [1], и наука, изучающая многочлены, — как раз то, что нам нужно. Вот азы этой науки мы и напомним. А заодно — ответим до некоторой степени на вопрос из предыдущего абзаца.

Вот нетривиальные и важные моменты, заслуживающие специального внимания.

- Все утверждения и рассуждения надо делать функториально. Попросту говоря, надо все утверждения рассматривать зависящими от параметров, принадлежащих произвольному супермногообразию, а рассуждения (доказательства) не должны зависеть от супермногообразия параметров. (Если этому совету не следовать, можно потерять нечетные параметры задачи, а в чем без них смысл суперизации?!)
- Дифференциальные уравнения (даже на многообразиях) обладают скрытой (а на самом деле явной, если ее хотя бы один раз увидеть) суперсимметрией.

Есть очень хорошие «классические» учебники по алгебраической геометрии, к которым все время добавляются новые, не хуже. Однако все эти книги довольно толстые, и если читатель не собирается хоть отчасти становиться алгебраическим геометром, то *слишком* толстые. Одним из лучших введений в предмет являются лекции Ю. И. Манина 1966–68 гг. по алгебраической геометрии, составившие первые две главы книги [МаАГ]. Ниже мы почти дословно воспроизведем, отмечая суперспецифику, часть этих лекций.

За годы, прошедшие с тех пор, как Ю. И. Манин читал свои лекции, язык схем Гротендика, почти-точек А. Вейля [We], окольцованных пространств и представимых функторов стал известным многим теоретическим физикам (в основном — благодаря поразительным работам Виттена (Witten)) и постепенно заинтересовывает и математиков.

Воспроизводя лекции Ю. И. Манина [МаАГ], послужившие моделью для определения суперсхемы (см. [Л0]), а с ней и любого (гладкого, аналитического, и т. д.) супермногообразия, я буду стараться вовсю использовать лекции М. Рида [Reid], как в их математической части, так и в методической, которую он сам, плевав на политкорректность, описал так:

«Книга покрывает примерно тот же материал, что и книга Атьи и Макдональда [АМ], главы 1–8, но дешевле, содержит больше картинок и гораздо более пристрастна».

Основные идеи: поверхностный обзор. Самая основная идея алгебраической геометрии — проинтерпретировать любое кольцо (или алгебру) как кольцо (алгебру) функций на чем-то. Для коммутативных алгебр и суперкоммутативных супералгебр эту программу удалось реализовать очень хорошо. В этой главе встречаются только такие (суперкоммутативные) супералгебры и рассматриваются, причем все они — с единицей.

Посмотрим, например, на соответствие между точками в K^n, где K — поле, и максимальными идеалами в $K[x]$, где [1] $x=(x_1, \ldots, x_n)$:

$$p=(a_1, \ldots, a_n)\in K^n \longleftrightarrow \mathfrak{m}_p=(x_1-a_1, \ldots, x_n-a_n).$$

Очевидно, что $\mathfrak{m}_p$ состоит из функций (кроме полиномов, мы пока никаких других функций не рассматриваем), обращающихся в точке p в 0.

Мы будем последовательно развивать другую точку зрения на $\mathfrak{m}_p$, а именно, смотреть на $\mathfrak{m}_p$ как на ядро некоторого гомоморфизма

$$K[x_1, \ldots, x_n]\longrightarrow K.$$

Мы выясним, почему естественно рассматривать гомоморфизмы в другие кольца и, соответственно, другие идеалы, а не только максимальные.

---

[1] Вообще-то, если переменных бесконечно много, то формулы (многочлены или ряды), включающие их все, — дело уже обычное при изучении, например, вертексных операторов. Работать с такими функциями непросто, даже если они «всего лишь» многочлены.

[1] Запись $(A_1, \ldots, A_n)$ используется для обозначения как *упорядоченного* набора элементов $A_1, \ldots, A_n$, так и идеала, этими элементами порожденного. Лучше бы было обозначать идеал символом $\langle A_1, \ldots, A_n\rangle$, но из контекста обычно и так понятно, что имеется в виду.

Начнем с простейшего случая — рассмотрим гиперповерхность X в аффинном пространстве K^n, заданную одним уравнением $F=0$, где $F\in K[x]$:

$$X=\{p=(a_1,\,\ldots,\,a_n)\in K^n \mid F(p)=0\}. \tag{2.1}$$

Каждый элемент алгебры $A=K[x]/(F)$ можно рассматривать как функцию на X со значениями в K. Действительно, если $g\in A$ — класс полинома $\tilde g\in K[x]$, то значение $g(p)=\tilde g(p)$, где $p\in X$, не зависит от выбора представителя $\tilde g$ в классе g, ибо все, что делится на F, тождественно равно нулю на X.

До какой степени можно рассматривать элементы из A как функции на X, показывают следующие примеры.

Если многочлен F неприводим или разлагается на попарно взаимно простые множители, то он порождает в $K[x]$ идеал всех функций на K^n, обращающихся в 0 на X. (Доказательство см. в [Reid].)

Даже в досуперную эпоху люди встречались с нильпотентами и делителями нуля.

Разлагая (как на первом курсе или как Ньютон какой-нибудь) функцию в ряд Тейлора с точностью до t^{N+1}, мы фактически рассматриваем факторкольцо $\mathbb{R}[t]/(t^{N+1})$, в котором $t,\ t^2,\ \ldots,\ t^N$ являются *нильпотентами*, т. е. такими элементами, что некоторая их степень равна 0, хотя они сами совсем не нули.

Сходное понятие — *делители нуля*, т. е. такие ненулевые элементы x, y кольца R, что $xy=0$.

Сто́ит поэтому дать более или менее геометрическую интерпретацию этим первоосновным понятиям — нильпотентам и делителям нуля. Кое-что можно увидеть сразу. Посмотрим, что происходит, если многочлен F (см. соотношения (2.1)) разлагается на взаимно простые множители; скажем, $F=f_1f_2$. Во-первых, в алгебре $A=K[x]/(F)$ есть делители нуля: например, это f_1 и f_2. А во-вторых, $X=X_1\coprod X_2$, где X_i выделяется уравнением $f_i=0$. Итак,

> наличие делителей нуля в алгебре A функций на X означает, что алгебраическое многообразие X приводимо, т.е. $X=\coprod X_i$.

Делители нуля, которые мы пока рассматривали, не были нильпотентами. Пусть теперь $F=f^ng$, где $n\geqslant 2$. Тогда отличный от 0 элемент $fg\in A=K[x]/(F)$ всюду на X равен 0. В явном виде такие функции нам в анализе не встречались. Итак,

> если в A есть нильпотенты, то они обращаются в 0 на всей гиперповерхности X, а F не порождает идеал функций, обращающихся в 0 на всей этой гиперповерхности.

Отметим, что если все коэффициенты многочлена F целые, то можно рассматривать не $K[x]/(F)$, а $\mathbb{Z}[x]/(F)$. Этот пример показывает, что все время думать, что множество функций образует алгебру, а не кольцо, слишком ограничительно. Рассматривая кольца как кольца функций на чем-то, мы привносим геометрическую интерпретацию в арифметику.

Однако, как мы увидим, максимальные идеалы плохо ведут себя при отображениях. Какие именно идеалы «ведут себя хорошо», т. е. функториально, — вопрос очень трудный, если рассматривать произвольные кольца, ср. подходы Розенберга, Голана и Вершорена-ван Ойстаена в работах [Ro1], [Ro2], [Go], [VvO]. Для коммутативных колец Гротендик предложил рассматривать *простые* идеалы, поведение которых отображениях безупречно, снабдил множество $\operatorname{Spec} A$ простых идеалов топологией Зарисского (на первый взгляд — отталкивающе грубой, но естественной, если никаких функций, кроме полиномов, нет) и уснастил получившееся топологическое пространство $\operatorname{Spec} A$ пучком (понятие, введенное Ж. Лере), что позволило «функциям» на $\operatorname{Spec} A$ принимать в *разных* точках значения в *разных* множествах.

Эти понятия довольно сложные, в двух словах их не опишешь. Мы введем их постепенно и покажем на примерах, какой от них прок.

Пора от (слишком) беглого обзора идей переходить к делу. Отметим лишь, вслед за М. Ридом, что важный подкласс колец, которые мы должны рассматривать, — нормальные нётеровы — являются пересечениями колец с дискретным нормированием, а последние суть аналоги нашего пространства $\mathbb{R}$, но с необычной (p-адической) топологией. Некоторые модели нашего физического мира, похоже, следует формулировать с учетом всех топологий на $\mathbb{R}$, как стандартной, так и p-адических. Как и множество других простых, ярких и приносящих немедленную «пользу» идей, пущенных в мат-физический обиход последних лет, эта идея, лежащая в основе «арифметической физики», тоже впервые была впервые высказана Виттеном[1].

Всюду ниже слово «кольцо» («алгебра») означает, если не оговорено противное, суперкоммутативное суперкольцо (суперралгебру) с единицей.

§ 2.1. Уравнения и идеалы

В этом параграфе основное кольцо K фиксировано. Сто́ит сперва представлять себе в качестве K либо поле ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_p$, …), либо $\mathbb{Z}$, а поднаторевши — супералгебру Грассмана. Сравнивая конструкции из этой главы с конструкцией схем Гротендика ([МаАГ]), мы увидим, что суперизация

---

[1] `http://www.sns.ias.edu/~witten/`.

производится дословно; разница между суперслучаями и «классическими» случаями проявляется лишь в примерах.

Пусть I и J — множества индексов, $T=\{T_j \mid j\in J\}$ — набор независимых переменных, часть из которых четна, а часть — нечетна, а $F=\{F_i\}_{i\in I}$ — набор полиномов из $K[T]$.

2.1.1. *Системой уравнений* относительно неизвестных T называется система

$$F_i(T)=0, \quad \text{где } i\in I. \tag{2.2}$$

Почему в определение системы входит основное кольцо K, понятно: коэффициенты системы лежат в K. В дальнейшем мы будем для краткости записывать системы уравнений в виде троек $X:=(K,\, T,\, F)$.

Иногда возникает искушение и решения искать в $K^{|J|}$, однако если мы слишком поддадимся этому искушению, то необоснованно себя ограничим: почему бы не рассматривать комплексные корни многочленов с вещественными или даже целыми коэффициентами?

Радикальное решение: рассматривать решения в *любой* (коммутативной) K-алгебре A, а «для простоты» — во всех сразу.

Почему алгебра A должна быть K-алгеброй, понятно: подставив $a_j\in L$ вместо T_j, мы должны уметь умножать коэффициенты многочленов F_i на мономы $a_{j_1}\dots a_{j_k}\in A$ и складывать результаты.

Чтобы задать на A структуру K-алгебры, достаточно иметь гомоморфизм колец $i\colon K\to A$, который и задает действие алгебры K на A (ниже 1_A — единица в кольце A, а 1 — единица в $\mathbb{Z}$):

$$k\cdot 1_A=i(k)\cdot 1_A \quad \text{для любого } k\in K.$$

Отметим, что любое кольцо является $\mathbb{Z}$-алгеброй: $1\mapsto 1_A$.

Упражнение. Докажите, что если $K=\mathbb{F}_p$ или $\mathbb{Q}$, то никакого гомоморфизма $K\to A$, где $A=\mathbb{Z}$, нет и быть не может. Нет также гомоморфизмов $\mathbb{Q}\to\mathbb{F}_{p^2}$.

Итак, *решением системы* X, *заданной уравнениями* (2.2), *со значениями в* K*-алгебре* A называется любой набор $t=(t_j)_{j\in J}$ элементов из A, такой что

$$F_i(t)=0, \quad \text{где } i\in I.$$

Множество всех таких решений обозначим $X(A)$.

Две системы уравнений X и Y относительно одного и того же множества неизвестных и с коэффициентами в одном и том же кольце K называются *эквивалентными*, если $X(A)=Y(A)$ для любой K-алгебры A.

Среди всех систем уравнений, эквивалентных данной системе X, есть одна выделенная — самая большая. Первое, что приходит в голову, — это взять в качестве левых частей самой большой системы идеал (F), порожденный левыми частями системы (2.2). Оказывается, так и надо сделать.

Утверждение. 1) *Идеал* (F) *содержит левые части самой большой системы, эквивалентной исходной системе.*

2) *Имеет место взаимно однозначное соответствие*

$$X(A) \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \mathrm{Hom}_K(K(X), A),$$

где $K(X) = K[T]/(F)$, *а* Hom_K — *множество гомоморфизмов* K-*алгебр.*

Система (X) над K называется *совместной над* A, если $X(A) \neq \varnothing$, и *несовместной над* A — в противном случае [1].

Наконец, отметим, что, рассматривая системы уравнений как идеалы, порожденные левыми частями этих уравнений (считая, что справа всегда стоит 0), нет необходимости фиксировать одну систему неизвестных. Естественнее отождествить системы, полученные одна из другой обратимой заменой неизвестных, и считать одной из неизвестных любую образующую кольца $K(X) := K[T]/(F)$.

2.1.2. Точки K-алгебры A. *Точкой* K-*алгебры* A *со значениями в* K-*алгебре* B или, короче, B-*точкой алгебры* A называется любой гомоморфизм K-алгебр $h\colon A \to B$. Если B — поле, то B-точки алгебры A называются *геометрическими*.

Происхождение термина следующее. Если $V = K^n$ есть n-мерное аффинное пространство над полем K, то его точки однозначно соответствуют максимальным идеалам алгебры $K[x]$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, являющейся алгеброй полиномиальных функций на V. А каждая точка (элемент) пространства V является линейным функционалом на двойственном пространстве V^*, который, как легко показать, следующим образом однозначно продолжается до гомоморфизма алгебр

$$S^{\boldsymbol{\cdot}}(V^*) = K[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow K; \quad \text{здесь } V^* = \mathrm{Span}(x_1, \ldots, x_n).$$

То, что гомоморфизм $K[x] \to K$, будучи ограничен на V^*, задает функционал $V^* \to K$, т. е. элемент (точку) из V, — очевидно.

Следующий шаг — отделить свойства фиксированной алгебры A от прихотей переменной алгебры B: рассматривать идеалы в A, т. е. ядра гомоморфизмов $h\colon A \to B$, а не сами гомоморфизмы. Ниже мы забракуем естественный, казалось бы, выбор — максимальные идеалы. Самые подходящие для (супер)коммутативной геометрии идеалы — это простые.

Идеал $\mathfrak{p} \subset A$ называется *простым*, если $\mathfrak{p} \neq A$ и

$$a, b \in A, \quad ab \in \mathfrak{p} \implies \text{либо } a \in \mathfrak{p}, \ \text{либо } b \in \mathfrak{p}. \tag{2.3}$$

Вышеприведенное определение применяется к коммутативным кольцам. Идеалы же некоммутативных колец со свойством (2.3) называются *вполне простыми*. Путаницу вносит словоупотребление *простой идеал* применительно к тем идеалам $\mathfrak{p}$ некоммутативных колец, которые для любых идеалов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \subset A$ удовлетворяют условию

$$\text{если } \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}, \text{ то по крайней мере один из идеалов } \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \text{ лежит в } \mathfrak{p}. \tag{2.4}$$

---

[1] В школе, да и в университете, в определении совместности часто опускают слова «над A», представляя, таким образом, частично совместные системы как полностью несовместные.

Я предлагаю распутать ситуацию и называть *простыми идеалами* в любых кольцах те, что удовлетворяют свойству (2.3) (как это сделано в [Л0]), а новый термин *вполне простой идеал* применять к тем, что удовлетворяют условию (2.4).

Напомню, что кольцо A называется *областью целостности*, если A не содержит делителей нуля. (Если не оговорить, что $1 \neq 0$, следует дополнительно потребовать, чтобы выполнялось условие $A \neq 0$.) Очевидно, что если $\mathfrak{p} \subset A$ — простой идеал, то $A/\mathfrak{p}$ — область целостности. Множество всех простых идеалов кольца A обозначается $\mathrm{Spec}\,A$ и называется *спектром*, а сами простые идеалы — *точками* этого спектра.

В этой главе мы будем изучать множества $\mathrm{Spec}\,A$, снабжать их топологией и оснащать пучками колец. Предмет изучения существует.

Теорема. *Если* $A \neq 0$, *то* $\mathrm{Spec}\,A \neq \varnothing$.

Доказательство сразу следует из леммы Цорна (о связи леммы Цорна с аксиомой выбора, принципом полного упорядочения и др. см. в [Bla]).

Напомним, что множество упорядочено *частично*, если не для каждой пары элементов a, $b \in M$ можно сказать, верно ли, что $a \leqslant b$ или что $b \leqslant a$. Если же про *каждую* пару a, $b \in N$ можно сказать, что либо $a \leqslant b$, либо $b \leqslant a$, то N *вполне упорядочено*. Элемент $u \in M$ называется *верхней гранью* подмножества N, если $n \leqslant u$ для всех $n \in N$. Элемент $m \in M$ называется *максимальным*, если утверждение о том, что $m \leqslant s$, неверно для любого $s \in M$.

Лемма (Цорна). *Пусть в частично упорядоченном множестве* M *каждое вполне упорядоченное подмножество* $N \subset M$ *содержит верхнюю грань. Тогда в* M *есть максимальный элемент.*

Отметим, что любой максимальный идеал прост, а фактор по нему — поле (а докажите-ка это).

2.1.2а. Предложение. *Пусть* $I \subsetneq A$ — *идеал. Тогда существует максимальный идеал* m, *содержащий* I.

Напомним, что $\coprod$ — несвязное объединение, т. е. запись $X \coprod Y$ означает, что $X \cap Y = \varnothing$, даже если Y — другая копия множества X, для чего символ $\coprod$ и изобретен; ниже мы просто хотим подчеркнуть, что $A^\times$ и все остальное не пересекаются.

Следствие. *Справедливо соотношение* $A = A^\times \coprod \mathfrak{m}_\lambda$, *где* $A^\times$ — *множество единиц (обратимых элементов), а* $\mathfrak{m}_\lambda$ — *максимальные идеалы, занумерованные какими-то индексами* λ.

Упражнения. 1) Опишите $\mathrm{Spec}\,A$, если а) A — поле, б) $A = \mathbb{Z}$.

Ответ: а) (0); б) $\{(0), (2), (3), \ldots, (p), \ldots\}$.

2) Пусть k — поле, $A = k[x]$. Кольцо полиномов от одной переменной — кольцо главных идеалов. (Это следует из существования деления

с остатком.) Поэтому

$$\operatorname{Spec} k[x] = \{(0)\} \coprod \{(f) \mid f \text{ — неприводимый многочлен}\}.$$

2а) Например, если $k = \mathbb{C}$ (или любое другое алгебраически замкнутое поле), то неприводимые многочлены — только линейные многочлены вида

$$ax + b = a(x - \alpha), \quad \text{где } a,\ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Поэтому

$$\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x] = \{(0)\} \coprod \Bigl(\coprod_{\alpha \in \mathbb{C}} \{\alpha\}\Bigr).$$

Мы видим, что $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]$ больше, чем $\mathbb{C}$: приросла еще одна точка (0).

2б) Если $k = \mathbb{R}$, то неприводимые многочлены (со старшим коэффициентом 1; ясно, что это не уменьшает общности), кроме линейных, имеют вид

$$x^2 + px + q, \quad \text{где } p^2 < 4q.$$

Поэтому

$$\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x] = \{(0)\} \coprod \mathbb{R} \coprod_{p^2 < 4q} \{(p,\, q) \in \mathbb{R}\}.$$

3) Какие из перечисленных простых идеалов в примерах 2а и 2б максимальны?

4) Кольца $K[x,\, y]$ и $\mathbb{Z}[x]$ уже не являются кольцами главных идеалов, и описание простых идеалов в них — дело непростое, но пока посильное. Опишите простые идеалы в $\mathbb{C}[x,\, \theta]$, где $p(x) = \bar{0}$, $p(\theta) = \bar{1}$. То же для $\mathbb{R}[x,\, \theta]$ и $\mathbb{Z}[x,\, \theta]$. А «для разбега» подумайте, как доказать следующее предложение.

2.1.3. Предложение. 1) *Простые идеалы в* $\mathbb{C}[x,\, y]$ *суть*

(0),

(f), *где* $f \in \mathbb{C}[x,\, y]$ *— неприводимый многочлен*;

максимальные идеалы $\mathfrak{m}$, *имеющие вид* $\mathfrak{m} = (p,\, q)$, *где* $p \in \mathbb{C}[x]$ *— неприводимый многочлен (степени* > 0*), а многочлен* $q \in \mathbb{C}[x,\, y]$ *таков, что его ограничение по модулю* p *— неприводимый элемент в* $(\mathbb{C}[x]/p)[y]$.

2) *Простые идеалы в* $\mathbb{Z}[y]$ *суть*

(0),

(f), *где* $f \in \mathbb{Z}[y]$ *— неприводимый многочлен*;

максимальные идеалы $\mathfrak{m}$, *имеющие вид* $(p,\, q)$, *где* p *— простое число, а многочлен* $q \in \mathbb{Z}[y]$ *таков, что его ограничение по модулю* p *— неприводимый элемент из* $\mathbb{F}_p[y]$.

Доказательство см. в книге [Reid]. (Наша книга ведь не учебник по алгебраической геометрии.)

Примеры. А) **Уравнение над** $\mathbb{Z}$: пусть X — это уравнение

$$0 \cdot T + 2 = 0. \tag{2.5}$$

Очевидно, что $X(C) = \begin{cases} 0, & \text{если } 1_C + 1_C \neq 0, \\ C, & \text{если } 1_C + 1_C = 0. \end{cases}$

Б) **Алгебра математической логики в геометрических терминах.** По двум высказываниям P и Q построим их сумму и произведение с помощью операций[1] конъюнкции $\wedge$, дизъюнкции $\vee$ и отрицания ($\bar{P}$ означает «не P»), положив

$$P + Q = (P \vee Q) \wedge (\bar{P} \vee \bar{Q}) \quad (\textit{симметрическая разность}),$$
$$PQ = P \wedge Q.$$

Упражнения. 1) Пустое высказывание $\varnothing$ служит нулем 0, а $\bar{\varnothing}$ — единицей 1.

2) $P^2 = P$ для любого P.

3) $2P = P + P = 0$ для любого P.

4) *Булево кольцо* — это любое кольцо R с 1, в котором $P^2 = P$ для любого $P \in R$. С учетом тождеств

$$P + Q = (P + Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2 = P + Q + PQ + QP$$

мы видим, что в любом булевом кольце $PQ = -QP$, поэтому

$$2P = P + P = P^2 + P^2 = 0,$$

а значит, $P = -P$. Итак, любое булево кольцо — коммутативная алгебра над $\mathbb{F}_2$. Верно ли, что любой простой идеал в булевой алгебре максимальный?

В) **Система дифференциальных уравнений.** Мы уже видели, почему естественно в качестве «наибольшей» системы уравнений, эквивалентной данной системе F, брать систему, содержащую, как правило, бесконечное число уравнений — по одному на каждый элемент из идеала (F). Но эти кольца были с конечным числом образующих, а системы — с конечным числом неизвестных. Даже самые простые дифференциальные уравнения приводят к алгебраическим системам с бесконечным числом неизвестных,

---

[1] А. Рудакову (см. [Ru]) отчасти удалось связать с супералгебрами логические операции, подозрительно похожие на обозначения операций в алгебре Грассмана, введенных самим Грассманом, см. [BBR]: Грассман ввел в том, что мы называем «алгеброй Грассмана» две операции; то умножение, которое мы используем все время, лишь одна из них.

Вопрос Насколько далеко можно обобщить результат Рудакова?

морально подготавливая нас к главам В. Молоткова о бесконечномерных многообразиях и супермногообразиях.

Для простоты будем считать, что в этом примере основное поле $K=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Напомним, что классы эквивалентности функций, многочлены Тейлора которых степени $\leqslant m$ совпадают в точке $x\in K^n$, называются *m-струями в точке x*. Обозначим m-струю функции f в точке x символом

$$[f]_x^m = \Big(f(x),\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x),\ \ldots,\ \frac{\partial^m f}{\partial x^\sigma}(x)\Big), \quad \text{где } |\sigma| = m.$$

Пусть $u=(u_1, \ldots, u_r)$ — набор из r функций на K^n. *Системой дифференциальных уравнений* (с полиномиальными коэффициентами) назовем набор X:

$$F_i\Big(x,\ u,\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j},\ \ldots\ \frac{\partial^{|\sigma|}u_1}{\partial x^\sigma},\ \ldots,\ \frac{\partial^{|\sigma|}u_r}{\partial x^\sigma}\Big) = 0, \quad i\in I. \tag{2.6}$$

Пусть p^j_σ, где $1\leqslant j\leqslant r$, а $0\leqslant|\sigma|\leqslant m$ суть дополнительные к x координаты в пространстве $J^m(n, r)$, состоящем из m-струй отображений $\mathbb{K}^m\to\mathbb{K}^r$. Другими словами, p^j_σ — это «возможное значение» частной производной $\dfrac{\partial^{|\sigma|}u_j}{\partial x^\sigma}$.

Определим оператор *полной l-й производной* как

$$D_l = \frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{j,\sigma} p^j_{\sigma+1_l}\frac{\partial}{\partial p^j_\sigma}, \quad \text{где } 1_l = (\underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{l-1},\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0).$$

По аналоги с предыдущим попробуем определить «самую большую» систему, эквивалентную системе (2.6). Для этого определим k-е продолжение $X^{(k)}$ системы (2.6), положив

$$F_i=0, \quad D^\tau F_i = 0 \quad \text{для всех } i\in I \text{ и } |\tau|\leqslant k, \tag{2.7}$$

где, конечно, $D=(D_1, \ldots, D_n)$, а τ — мультииндекс.

Заметим теперь, что любую функцию на $J^m(n, r)$ можно однозначно поднять до функции на $J^\infty(n, r)$ — проективном пределе $\lim\limits_{m\longrightarrow\infty}\operatorname{proj}$ пространств $J^m(n, r)$, определив поднятие функции f как функцию $(\pi^\infty_m)^*(f)$, индуцированную канонической проекцией $\pi^\infty_m\colon J^\infty(n, r)\longrightarrow J^m(n, r)$.

Если исходные левые части F_i уравнения (2.6) принадлежали алгебре $F^m(n, r)$ (полиномиальных) функций на $J^m(n, r)$, то положим

$$R = (\pi^\infty_m)^*(F^m(n, r))\subset F(J^\infty(n, r)),$$

т. е. R — подалгебра в алгебре функций на пространстве ∞-струй, порожденная прообразами левых частей уравнения (2.6) относительно проекции π^∞_m.

Так вот, в простейших случаях «самой большой системой», эквивалентной системе X, является идеал в R, порожденный системой $X^{(\infty)} = \lim\limits_{k\longrightarrow\infty}\operatorname{proj} X^{(k)}$, см. [NJ].

Г) **Метабелевы алгебры.** Вышеприведенное определение простого идеала применимо дословно не только к суперкоммутативным суперкольцам. Оно применимо даже к неоднородным (относительно четности) подкольцам $B\subset A$; при этом надо рассматривать двусторонние простые идеалы.

Для тех, кто думает, что без неоднородных относительно четности объектов можно обойтись, отмечу, что они обязательны в таком обыденном действии, как локализация по простому идеалу в суперкоммутативной супералгебре. Собственно, это было единственное технически сложное место при написании (неопубликованных[1]: стоит это упражнение сделать, как его тривиальность становится очевидной) подробностей заметки [Л0]: если в знаменателях неоднородные элементы, то как сравнивать дроби и как делить на знаменатели (только с одной стороны, как в некоммутативной геометрии, или ответ от способа не зависит)?

§ 2.2. Функции на спектрах и топология Зарисского

2.2.1. Функции на спектрах. Пусть $X=(K,\ T=(T_j)_{j\in J},\ F=(F_i)_{i\in I})$ — система уравнений, $X(L)$ — множество решений в K-алгебре L. Мы считаем $K(X)=K[T]/(F)$ алгеброй функций на множестве решений системы X, а

$$X(L) := \operatorname{Hom}_K(K(X),\ L)$$

— множеством L-точек системы X. Любой элемент $f\in K(X)$ можно себе представлять как функцию на $X(L)$:

$$f(\varphi)\overset{\text{def}}{=}\varphi(f) \quad \text{для всех } \varphi\in X(L).$$

Эта формула отражает фундаментальную двойственность

$$\boxed{\text{пространство} \longleftrightarrow \text{множество функций на этом пространстве.}}$$

Интересно и переставить смысловое ударение в этой двойственности:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{алгебра} \longleftrightarrow \text{множество,}\\ \text{на котором элементы этой алгебры служат функциями.}\end{array}}$$

Применим теперь эти соображения к пространству $\operatorname{Spec} A$. Сами элементы алгебры A не удается интерпретировать как функции на $\operatorname{Spec} A$; приходится привлечь много, вообще говоря, неизоморфных полей: по одному

---

[1] Теперь и эти подробности опубликованы, см. [NvO]. — *Прим. ред.*

для каждой точки спектра. Каждый элемент $f \in A$ рассматривается тогда как функция на $\operatorname{Spec} A$, но — какой поворот темы! — со своей областью значений в каждой точке. А именно, если $x \in \operatorname{Spec} A$, а $p_x \subset A$ — простой идеал, отвечающий точке x (являющийся точкой x), то по определению значение функции f в точке x есть элемент $f(x) = f \mod p_x$ поля частных $k(x) = \operatorname{Frac}(A/p_x)$.

2.2.2. Точки пересечения и их кратности. На плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами T_1, T_2 рассмотрим фиксированную параболу $T_1 - T_2^2 = 0$ и одну прямую из семейства $T_1 - r = 0$, где $r \in \mathbb{R}$ — параметр. Их пересечение задается системой уравнений

$$\begin{cases} T_1 - T_2^2 = 0, \\ T_1 - r = 0, \end{cases}$$

которой отвечает алгебра $A_t = \mathbb{R}[T_1, T_2]/(T_1 - T_2^2, T_1 - r)$.

Легко проверить, что как алгебра A_r изоморфна

$$\begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & \text{если } r > 0, \\ \mathbb{R}[T]/(T^2), & \text{если } r = 0, \\ \mathbb{C}, & \text{если } r < 0. \end{cases}$$

Поэтому у A_r две геометрические (т. е. со значением в поле) $\mathbb{R}$-точки, если $r > 0$; одна — если $r = 0$, и ни одной, — если $r < 0$. Геометрических $\mathbb{C}$-точек всегда две, кроме $r = 0$, однако единообразие восстанавливается, если подходящим образом приписать пересечению *кратность*, равную

$$\dim_{\mathbb{R}} A_r = 2 \quad \text{при всех } r \in \mathbb{R}.$$

Итак, особенности типа точек пересечения, слившихся в точку касания, приводят к появлению нильпотентов в кольце функции на том, что пересеклось[1].

2.2.3. Дифференциальные окрестности. Пусть $p_x \subset A$ — идеал, отвечающий точке $x \in \operatorname{Spec} A$. «Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки до членов порядка m включительно» означает, алгебраически, что мы рассматриваем классы функций

$$f \mod p_x^{m+1}, \qquad \text{где } f \in A.$$

---

[1] Ю. Неретин предложил такой пример подсхемы. Возьмем кривые

$$(x^2 + y^2)^2 = 1 + \varepsilon, \quad z = 0$$

и

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z^2 = \varepsilon.$$

Пределы семейств (при $\varepsilon \to 0$) геометрически одинаковы (да и кратности тоже), но вот идеал помнит еще что-то (в данном случае подрасслоение в конормальном расслоении).

Элементы из p_x являются «бесконечно малыми» порядка $\geqslant 1$: в кольце $A/(p_x^{m+1})$ они становится нильпотентами. (Вообще-то интерпретация спектра $\operatorname{Spec} A/(p_x^{m+1})$) как дифференциальной[1] окрестности соответствует нашей интуиции лишь если p_x — максимальный идеал.)

2.2.4. Топология Зарисского на Spec *A*. Поскольку топологию можно задавать как с помощью открытых множеств, так и описав их дополнения — замкнутые множества, мы опишем замкнутые множества, мотивировка определения которых нагляднее. А именно, минимальное естественное требование на «совместимость» топологии с «функциями» — требование, чтобы множество нулей функции было замкнутым множеством. Для полиномиальных функций топология, удовлетворяющая этому требованию, называется *топологией Зарисского* на $\operatorname{Spec} A$. Чтобы ее описать, для любого $E \subset A$ положим

$$V(E) = \{x \in \operatorname{Spec} A \mid f(x) = 0 \ \text{ при всех } f \in E\}.$$

Лемма. *Множества $V(E)$ составляют при всевозможных $E \subset A$ набор, удовлетворяющий аксиомам замкнутых множеств.*

Упражнения. Докажите следующие утверждения:

1) $\varnothing = V(1)$; $\operatorname{Spec} A = V(\varnothing)$;

2) $V(E_1) \cup V(E_2) = V(E_1 E_2)$, где $E_1 E_2 = \{fg \mid f \in E_1, g \in E_2\}$;

3) $\bigcap\limits_{i \in I} V(E_i) = V\Bigl(\bigcap\limits_{i \in I} E_i\Bigr)$ для любого I.

2.2.5. Какие функции обращаются в нуль на *V*(*E*)? Очевидно, что функции $f \in (E)$, т. е. лежащие в идеале, порожденном множеством E, обращаются в нуль на $V(E)$; более того, на $V(E)$ в нуль обращаются и такие функции $f \in A$, что $f^n \in (E)$ для некоторого n. Оказывается, этим все исчерпывается.

Вспомните определение радикала $\mathfrak{r}(I)$ идеала I.

Теорема. *Если $f(x) = 0$ при всех $x \in V(E)$, то $f \in \mathfrak{r}((E))$.*

Заметим, что из биномиальной формулы для $(a + b)^n$ следует, что множество всех нильпотентов образует идеал. Он называется *нильрадикалом* кольца A, мы обозначим его $\operatorname{Nil}(A)$.

В [МаАГ] показано, что функция, обращающаяся в нуль во всех точках из $\operatorname{Spec} A$, является нильпотентом в A. Другими словами,

$$\operatorname{Nil}(A) = \bigcap_{p \in \operatorname{Spec} A} p.$$

Идеал, совпадающий со своим радикалом, называется *радикальным идеалом*.

---

[1] Т. е. окрестности точки и идеала ростков функций в этой точке.

Следствие. *Отображение $I \mapsto V(I)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между радикальными идеалами и замкнутыми подмножествами в* $\operatorname{Spec} A$.

2.2.6. Незамкнутые точки. Топология Зарисского очень нехаусдорфова. В частности, отдельные точки могут быть незамкнуты. Вот описание замыкания $\overline{\{x\}}$ наудачу выбранной точки $x \in \operatorname{Spec} A$:

$$\overline{\{x\}} = \bigcap_{E \subset \mathfrak{p}_x} V(E) = V\Big(\bigcup_{E \subset \mathfrak{p}_x} E\Big) = V(\mathfrak{p}_x) = \{y \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p}_y \supset \mathfrak{p}_x\}.$$

Другими словами, $\overline{\{x\}} \cong \operatorname{Spec} A/\mathfrak{p}_x$, и только точки, отвечающие максимальным идеалам, замкнуты.

Если в A нет делителей нуля, то $\overline{(0)} = \operatorname{Spec} A$.

Упражнение. Опишите замыкания точек в $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]$, $\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x]$, $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p$ и $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p$.

2.2.7. Размерность. Если $y \in \overline{\{x\}}$, то y называется *специализацией* точки $x \in \operatorname{Spec} A$. Последовательность точек $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ топологического пространства X назовем *цепочкой длины n* с началом в точке x_0 и концом в точке x_n, если все точки различны и x_{i+1} является специализацией точки x_i при всех i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. *Высотой* точки $x \in X$ назовем верхнюю грань длин цепочек с началом в точке x, а *размерностью пространства* X — верхнюю грань высот его цепочек.

Примеры. 1) Последовательность простых идеалов

$$(0) \subset (T_1) \subset (T_1, T_2) \subset \ldots \subset (T_1, \ldots, T_n)$$

показывает, что $\dim K[T_1, \ldots, T_n] \geqslant n$, если K — поле.

2) Последовательность

$$(0) \subset (p) \subset (p, T_1) \subset \ldots \subset (p, T_1, \ldots, T_n),$$

где p — простое число, показывает, что $\dim \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n] \geqslant n+1$.

Приведенное выше классическое определение размерности восходит к Евклиду: замкнутые точки «ограничивают» кривые, кривые «ограничивают» поверхности и т. п., см. [MaD, MaDim]. Однако если A — супералгебра, то это определение не улавливает нечетную размерность пространства $\operatorname{Spec} A$.

Вообще-то в суперслучае, как мы увидим, изучая интегрирование, все наоборот: например, границей точки является $0|1$-мерная прямая, и т. д. (Расшифровка этого «и т. д.» — увлекательнейшая **открытая проблема**.)

2.2.8. Открытые множества. Каждому элементу f кольца A сопоставим *большое открытое множество*

$$D(f) = \operatorname{Spec} A \setminus V(f).$$

Поскольку для любого подмножества $E \subset A$ имеем $\operatorname{Spec} A \setminus V(E) = \bigcup\limits_{f \in E} D(f)$, множества $D(f)$ составляют базис открытых множеств в топологии Зарисского.

Пример. Замкнутые точки в $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[T]$ — это максимальные идеалы $(T - t)$, где $t \in \mathbb{C}$, составляющие «комплексную прямую», а непустые открытые множества — это (0) и эта «прямая» без конечного множества точек. Как видим, замыкание любого открытого множества — весь спектр $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[T]$.

2.2.9. Неприводимые множества. Так называются множества, точнее, топологические пространства X, удовлетворяющие любому из следующих условий:

а) любое непустое открытое подмножество в X плотно;

б) любые два непустых открытых подмножества в X пересекаются;
в) если $X = X_1 \cup X_2$, где и X_1, и X_2 замкнуты, то или $X = X_1$, или $X = X_2$.

Доказательство эквивалентности. То, что п. а) и б) эквивалентны, — очевидно; если условие п. в) не выполняется, т. е. $X = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 замкнуты, то $X \setminus X_2 = X_1 \setminus (X_1 \cap X_2)$ — неплотное открытое множество в противоречии с п. а). Если же условие п. а) неверно и $U \subset X$ — не плотное открытое множество, то $X = \bar{U} \cup (X \setminus U)$. □

§ 2.3. Аффинные суперсхемы

Напомним, что все рассматриваемые кольца либо коммутативны, либо суперкоммутативны.

Любому отображению множеств $\alpha\colon X \to Y$ соответствует отображение $\alpha^*\colon F(Y) \to F(X)$ колец функций на этих множествах, заданное формулой

$$\alpha^*(f)(x) = f(\alpha(x)). \tag{2.8}$$

Формулу (2.8) надо пояснить. Например, если X и Y — топологические пространства, а рассматриваемые функции непрерывны, то формула (2.8) хороша лишь для непрерывных отображений α. Таким образом, формула (2.8) указывает, какой класс отображений f сто́ит брать в качестве морфизмов. Эта же формула показывает, как мы скоро увидим, почему максимальные идеалы недостаточно хороши, если отображения «множеств» $\alpha\colon X \to Y$ задавать, взяв за основу функции, с помощью отображений $\alpha^*\colon F(Y) \to F(X)$. В этом параграфе мы разберем это подробно.

Отметим, что если $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм колец, то прообраз $\varphi^{-1}(p)$ каждого простого идеала $p \subset B$ прост. Действительно, φ индуцирует вложение $A/\varphi^{-1}(p) \longrightarrow B/p$, а поскольку в B/p нет делителей нуля, их нет и в $A/\varphi^{-1}(p)$. Поэтому гомоморфизм φ задает отображение

$$\varphi_*\colon \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A, \quad \varphi_*(p) = \varphi^{-1}(p).$$

Теорема. 1) *Отображение φ_* непрерывно относительно топологий Зарисского на* $\operatorname{Spec} B$ *и* $\operatorname{Spec} A$.

2) *Справедливо соотношение* $(\varphi\psi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.

Доказательство. Утверждение 2 очевидно, а для доказательства утверждения 1 достаточно показать, что прообраз замкнутого множества замкнут, что верно:

$$\begin{aligned} y \in V(\varphi(E)) \iff \varphi(E) \subset \varphi^{-1}(p_y) = p_{\varphi_*(y)} \iff \\ \iff \varphi_*(y) \in V(E) \iff y \in (\varphi_*)^{-1}(V(E)). \end{aligned}$$ □

Теорема показывает, что сопоставление $\operatorname{Spec}\colon \mathsf{Rings}^\circ \longrightarrow \mathsf{Top}$ является контравариантным функтором из категории (супер)колец в категорию топологических пространств.

2.3.1. Предварительное определение аффинной схемы. Тройку (X, α, A), где X — топологическое пространство, а $\alpha\colon X \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ — изоморфизм топологических пространств, назовем *аффинной схемой*. *Морфизмом аффинных схем* $(Y, \beta, B) \longrightarrow (X, \alpha, A)$ называется пара (f, φ), где $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, а $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм колец, такой что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] & \operatorname{Spec} B \arrow[d, "\varphi_*"] \\
X \arrow[r, "\alpha"] & \operatorname{Spec} A
\end{tikzcd}$$

Аффинную схему $(\operatorname{Spec} A, \mathrm{id}, A)$, где id — тождественное отображение, будем кратко обозначать $\operatorname{Spec} A$.

Это определение предварительное, ибо из таких объектов нельзя склеить глобальную схему, для определения которой мы снабдим $\operatorname{Spec} A$ пучком. Однако пучок, которым мы оснастим $\operatorname{Spec} A$, восстанавливается по A, поэтому мы пока опишем все что можно, не вводя нового понятия.

2.3.2. Примеры, показывающие разницу между $\mathrm{Hom}\,(A,\ B)$ и множеством непрерывных отображений из $\operatorname{Spec} B$ в $\operatorname{Spec} A$. 1) Выполняется равенство $A = B = \mathbb{Z}$. Очевидно, что $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ состоит лишь из id, в то время как автоморфизмов в пространстве $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ полным полно́ (они образуют группу перестановок S_∞ бесконечного (счетного) числа элементов: мы можем произвольно переставлять замкнутые точки — простые идеалы (p)).

2) Пусть $A = K[T]$, где K — поле, а $B = \mathbb{Z}$. Имеется бесконечно много отображений $\operatorname{Spec}\mathbb{Z} \longrightarrow \operatorname{Spec} K[T]$, даже если K — конечное поле, ибо, напомним, $\operatorname{Spec} K[T] = \{(0)\} \cup \{(f) \mid f \text{ — неприводимый многочлен}\}$. А вот гомоморфизмов $K[T] \longrightarrow \mathbb{Z}$ вообще нет: $\mathrm{Hom}(K[T], \mathbb{Z}) = \varnothing$.

3) Предыдущие примеры могли навести на мысль, что гомоморфизмов колец куда меньше, чем непрерывных отображений спектров. Вот пример противоположного рода. Пусть A — кольцо с единственным простым идеалом, например поле K, или суперaлгебра Грассмана $\Lambda_K(n)$ над полем K, или $K[T_1, \ldots, T_m]/(T_iT_j)_{1\leqslant i,j\leqslant m}$. Тогда геометрически $\operatorname{Spec} A$ — одна точка, но автоморфизмы кольца A могут составить даже группу Ли. Таким образом,

одноточечные схемы могут иметь «внутренние степени свободы» подобно элементарным частицам. (2.9)

2.3.3. Спектр, представляющий идею вектора. Здесь читателю предлагается что-то понять сразу в суперслучае, в то время как он еще не знает этого в классике. О чем, собственно, идет речь, говорится в конце пункта. Поэтому стоит при первом чтении все нечетные параметры проигнорировать, ср. [МаАГ].

Пусть A — суперкольцо, $B = A[T, \theta]/(T^2, T\theta)$, а $t = T \mod (T^2)$, где $p(T) = \bar{0}$, $p(\theta) = \bar{1}$. Проекция $\pi\colon B \to A$, $a + bt + c\theta \mapsto a$, задает изоморфизм топологических пространств $\pi_*\colon \operatorname{Spec} A \longrightarrow \operatorname{Spec} B$, но никоим образом не схем, поскольку схема $(\operatorname{Spec} B, \mathrm{id}, B)$ богаче нильпотентами. Вот как эти нильпотенты себя проявляют.

Пусть $i\colon A \to B$ — гомоморфизм колец, такой что $\pi i = \mathrm{id}$. Тогда $i(f) - f \in tA + \theta A$. Определим отображения ∂_i, $\delta_i\colon A \to A$, положив

$$i(f) - f = t\partial_i(f) + \theta\delta_i(f).$$

Поскольку i — гомоморфизм, ∂_i — четное дифференцирование, а δ_i — нечетное, т. е. для $D_i = \partial_i$ или δ_i имеем

$$\begin{aligned} D_i(f+g) &= D_i(f) + D_i(g),\\ D_i(fg) &= D_i(f)g + (-1)^{p(f)p(D_i)}D_i(g). \end{aligned}$$

Линейность очевидна, а сравнивая $i(fg)$ с $i(f)i(g)$ и учитывая то, что $\theta^2 = T^2 = T\theta = 0$, получаем формулу Лейбница.

Легко видеть, что и наоборот, каждому однородному дифференцированию $D\colon A \to A$ отвечает гомоморфизм $i(D)\colon A \to B$,

$$i(D)(a) = a + \begin{cases} tD(a), & \text{если } p(D) = \bar{0},\\ \theta D(a), & \text{если } p(D) = \bar{1}, \end{cases}$$

а гомоморфизму $i(D)$ — проекция $i(D)_*$ одного спектра на другой.

Если дифференцирование кольца A отождествить, как принято в дифференциальной геометрии, с векторным полем на $\operatorname{Spec} A$, то можно считать, что $\operatorname{Spec} B$ — это $\operatorname{Spec} A$ с торчащим из каждой точки множеством векторов, как на еже. В частности, если A — поле, то $\operatorname{Spec} K$ — это точка, а $(\operatorname{Spec} B, \mathrm{id}, B)$ — «идея» вектора, торчащего из этой точки.

2.3.4. Чем Spec лучше, чем множество всех максимальных идеалов Spm. Известно (см., например, [Ленг]), что любой гомоморфизм колец $\varphi\colon B \to A$ можно разложить в композицию эпиморфизма $B \longrightarrow B/\operatorname{Ker}\varphi$ и вложения $B/\operatorname{Ker}\varphi \longrightarrow A$. Опишем свойства отображений φ_* в этих случаях.

Упражнение. Если $\varphi\colon B \to A$ — эпиморфизм, то φ_* — гомеоморфизм пространства $\operatorname{Spec} A$ на замкнутое подмножество $V(\operatorname{Ker}\varphi) \subset \operatorname{Spec} B$.

Итак, сюръективные гомоморфизмы колец превращаются во вложения пространств. А вот вложения колец не обязательно индуцируют сюръективные отображения спектров: только *замыкание* множества ${}^a\varphi(\operatorname{Spec} A)$ совпадает со $\operatorname{Spec} B$.

Пусть $\varphi\colon B \to A$ — гомоморфизм колец, и пусть $x \in \operatorname{Spm} A$, а $y \in \operatorname{Spm} B$. Вообще говоря, точка ${}^a\varphi(x)$ незамкнута, а $({}^a\varphi)^{-1}(y)$ содержит и незамкнутые точки. Вот пример.

Пусть $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, а $\varphi\colon \mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Z}_p[T]$ — естественное вложение. Пусть $p_x = (1 - pT)$ — максимальный идеал в $\mathbb{Z}_p[T]$, соответствующий точке x. Факторкольцо $\mathbb{Z}_p[T]/p_x$ изоморфно полю p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Очевидно,

$$\varphi^{-1}(p_x) = \mathbb{Z}_p \cap (1 - pT) = (0).$$

Поэтому ${}^a\varphi(x) \notin \operatorname{Spm}\mathbb{Z}_p$. Более общо, замкнутая точка x переходит в $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_p$ в общую точку, которая является открытым множеством, будучи дополнением к (p)! В частности,

$$\boxed{\operatorname{Spm} A \text{ не является функтором по } A, \text{ в отличие от } \operatorname{Spec} A.}$$

Пусть теперь $p_y = (p) \subset \mathbb{Z}_p[T]$, а $x = (p) \subset \mathbb{Z}_p$. Тогда $y \in ({}^a\varphi)^{-1}(x)$; точка x замкнута, а y — нет. Впрочем, здесь нет ничего неожиданного.

Еще очевиднее пример проекции плоскости на прямую $K[T_1] \hookrightarrow K[T_1, T_2]$. Прообраз точки $T_1 = 0$ на прямой содержит, конечно, общую точку T_2-оси, незамкнутую в плоскости.

Пусть $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинная схема, $a \subset A$ — некоторый идеал. *Замкнутой подсхемой X, соответствующей идеалу a*, называется схема $(V(a), a, A/a)$, где $\alpha\colon V(a) \longrightarrow \operatorname{Spec} A/a$ — канонический изоморфизм пространств, определенный в упражнении 2.3.4.

Таким образом, замкнутые *подсхемы* схемы $X = \operatorname{Spec} A$ находятся во взаимно однозначном соответствии со *всевозможными идеалами* кольца A, в отличие от замкнутых *подмножеств пространства* $\operatorname{Spec} A$, которые отвечают *радикальным идеалам*.

Мы будем часто обозначать подсхему $(V(a), \alpha, A/a)$ просто $\operatorname{Spec} A/a$ и опускать слово «замкнутый», потому что в этом параграфе никакие другие подсхемы не рассматриваются.

Носителем подсхемы $Y = \operatorname{Spec} A/a \subset X$ называется пространство $V(a)$; оно обозначается $\operatorname{Supp} Y$.

Каноническому гомоморфизму колец $A \to A/a$ отвечает мономорфизм схем $Y \to X$, который называется *замкнутым вложением подсхемы Y*.

Для любого кольца L назовем $X(L) := \operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} L, X) = \operatorname{Hom}(A, L)$ *множеством L-точек схемы X*. Очевидно, что L-точки подсхемы Y

образуют подмножество $Y(L) \subset X(L)$, а функтор $L \mapsto Y(L)$ — подфунктор функтора $L \mapsto X(L)$.

На множестве замкнутых подсхем схемы X имеется естественная упорядоченность: $Y_1 \subset Y_2$, если $\mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2$ (где $\mathfrak{a}_i$ — идеал, определяющий Y_i). Использование знака включения оправдано тем, что

$$Y_1 \subset Y_2 \iff Y_1(L) \subset Y_2(L)$$

для всех колец L.

Отношение «Y есть замкнутая подсхема X» транзитивно в очевидном смысле слова.

Для всякого замкнутого множества $V(E) \subset X$ существует единственная *наименьшая* замкнутая подсхема с носителем $V(E)$: она определяется идеалом $r((E))$, и в ее кольце нет нильпотентов. Схемы, кольца которых не содержат нильпотентов, называются *приведенными*. В частности, подсхема $\operatorname{Spec} A/N$, где N — нильрадикал кольца A, является наименьшей замкнутой подсхемой, носитель которой — все пространство $\operatorname{Spec} A$. Если $X = \operatorname{Spec} A$, то схему $\operatorname{Spec} A/N$ обозначают

$$X_{\mathrm{red}} := \operatorname{Spec} A/N.$$

В суперслучае есть специфический аналог приведенности; положим

$$X_{\mathrm{rd}} := \operatorname{Spec} A/(A_{\bar{1}}). \tag{2.10}$$

2.3.5. Функторы, представимые кольцом (как задавать супергруппы). Происхождение определений этого пункта: если G — группа, то на множестве $G(X) := G^X$ (скажем, непрерывных) функций на любом множестве (многообразии) X структура группы задается поточечным умножением. Физики называют группу G^X группой токов (на X). Часто оказывается удобнее работать не с G, X и G^X, а с алгебрами функций на них. А теперь забудем, что эти алгебры суть алгебры функций на чем-то, сохранив те их свойства, которые не меняются при отображениях $X \to Y$.

Пусть K — фиксированное кольцо. Любая K-алгебра A представляет функтор из категории K-алгебр в категорию множеств

$$K\text{-}\mathsf{Algs} \longrightarrow \mathsf{Sets}, \quad L \longmapsto A(L) := \operatorname{Hom}_K(A, L).$$

Напомним, что *группа в категории* C — это такой объект $G \in \operatorname{Ob}\mathsf{C}$, что $G(X)$ — группа для любого объекта $X \in \operatorname{Ob}\mathsf{C}$, и это соответствие функториально по X. Если C — категория гладких супермногообразий (которые мы рассмотрим ниже), или их вариант — категория алгебраических супермногообразий, или их до некоторой степени частный случай — категория аффинных суперсхем $X = \operatorname{Spec} C$, то функтор $P_A\colon \mathsf{Rings}^\circ \longrightarrow \mathsf{Sets}$, представимый супералгеброй A, можно интерпретировать как функтор, представимый суперсхемой $\operatorname{Spec} A$. Приведем несколько примеров.

Пример 1G. *Мультипликативная группа* $\mathcal{G}_m$:

$$\mathcal{G}_m(C) = C_{\bar{0}}^{\times}.$$

Этот функтор представим алгеброй $A = K[T_1, T_2]/(T_1T_2 - 1)$. Действительно, $\operatorname{Hom}_K(A, C)$ находится во взаимно однозначном соответствии с парами $t_1, t_2 \in C$, такими что $t_1t_2 = 1$, ибо $t_2 = t_1^{-1}$, а t_1 пробегает $C^{\times}$. Функториальность отображения $C \mapsto \mathcal{G}_m(C)$ очевидна.

Пример 1Q. *Мультипликативная группа* $\mathcal{GQ}_m$:

$$\mathcal{GQ}_m(C) = C^{\times}.$$

Упражнение. 1) Какой супералгеброй представи́м функтор $\mathcal{GQ}_m$?

2) Определим функтор

$$\mathcal{GQ}(m) := \mathrm{GQ}(m;\, C).$$

Какой супералгеброй он представи́м?

Пример 2G. *Группа обратимых суперматриц* $\mathcal{GL}(\mathrm{Par})$ произвольного формата Par. Для простоты обозначений рассмотрим $\mathrm{GL}(m|n)$:

$$\mathcal{GL}(m|n)(C) = \mathrm{GL}(m|n;\, C).$$

Этот функтор представим супералгеброй

$$A = K[U,\, T_{ij}]_{i,j=1}^{m+n}/(U \operatorname{Ber}(T) - 1),$$

в которой $p(T_{ij})$ есть четность (ij)-й матричной единицы, $T = (T_{ij})_{i,j=1}^{m+n}$ — суперматрица стандартного формата, а $p(U) = \bar{0}$.

Пример 3$^+$. *Аддитивная группа* $\mathcal{G}_a^+$:

$$\mathcal{G}_a^+(C) = C_{\bar{0}} \quad \text{как группа по сложению.}$$

Пример 3$^-$. *Аддитивная группа* $\mathcal{G}_a^-$:

$$\mathcal{G}_a^-(C) = C_{\bar{1}} \quad \text{как группа по сложению.}$$

Пример 4. *Группа автоморфизмов K-алгебры K'.* Стандартный подход теории Галуа, где K' и K — поля, приводит к незначительной, а часто и тривиальной группе, если расширение $K' \supset K$ несепарабельно и т. п. Функторный подход подсказывает описывать не группу автоморфизмов $\operatorname{Aut}(K'/K)$ поля K' над K, а функтор

$$L \longmapsto \operatorname{Aut}_K(L'/L), \quad \text{где } L' = L \underset{K}{\otimes} K'.$$

Функториальность очевидна, а чтобы найти представляющий объект, рассмотрим базис e_i, где $1 \leqslant i \leqslant n$, K-модуля K'. В этом базисе умножение в K' задается структурными константами $c_{ij}^k \in K$:

$$e_ie_j = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} c_{ij}^k e_k. \tag{2.11}$$

Очевидно, что $L' = \oplus Le'_i$, где $e'_i = 1 \otimes e_i$, и любой K-автоморфизм L-модуля L' задается обратимой матрицей $(t_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ с элементами из L. Условие, что $\tau \in \mathrm{Aut}(L'/L)$, означает, что τ сохраняет умножение (2.11):

$$\tau(e'_i)\tau(e'_j) = \sum_k c_{ij}^k \tau(e'_k). \tag{2.12}$$

Условие (2.12), выраженное в терминах *неопределенных* переменных $(T_{ij})_{i,j=1}^n$, есть система алгебраических соотношений с коэффициентами из K, к которым надо добавить соотношение $T \det(T_{ij}) - 1 = 0$ (и дополнить набор переменных (T_{ij}) дополнительной переменной T), чтобы получить автоморфизм.

Пример. Пусть K — поле, $K' = K(\sqrt{a})$, где $a \in K^\times \setminus (K^\times)^2$. Положим $e_1 = 1$, $e_2 = \sqrt{a}$, тогда таблица умножения $e_i e_j$ имеет вид

	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	$a \cdot e_1$

Для любого гомоморфизма τ имеем $\tau(1) = 1$; пусть

$$\tau(\sqrt{a}) = T_1 \cdot 1 + T_2\sqrt{a}.$$

Учтя, что $(\tau(\sqrt{a}))^2 = a$, и разложив по базису e_1 и e_2 слева и справа, получаем

$$\begin{cases} T_1^2 + T - 2^2 a = a, \\ 2T_1T_2 = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Матрица (T_{ij}) из общего случая имеет теперь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_1 & T_2 \end{pmatrix},$$

поэтому условие $T \det(T_{ij}) - 1 = 0$ приобретает вид

$$T \cdot T_2 - 1 = 0. \tag{2.14}$$

Алгебра A, представляющая функтор автоморфизмов K-алгебры K', имеет разный вид в следующих двух случаях.

Случай 1. Пусть $\mathrm{char}\, K \neq 2$ (и, следовательно, элемент 2 обратим в любой K-алгебре). Тогда

$$A = K[T,\, T_1,\, T_2]/(T_1^2 + aT_2^2 - a,\, T_1T_2,\, TT_2 - 1).$$

Если у L нет делителей нуля, то L-точки этой K-алгебры устроены просто: поскольку элемент T_2 обратим, $T_1 \mapsto 0$, следовательно, $T_2 \to \pm 1$. Группа Галуа изоморфна $\mathbb{Z}/2$, и нетривиальный автоморфизм переводит $\sqrt{a}$ в $b - \sqrt{a}$.

Если у L есть делители нуля, то L-точек гораздо больше; читатель может попробовать их описать.

Случай 2. Пусть $\mathrm{char}\, k = 2$. Тогда

$$A = K[T,\, T_1,\, T_2]/(T_1^2 + aT_2^2 - a,\, TT_2 - 1),$$

другими словами, множество L-точек совпадает с множеством L-точек окружности $T_1^2 + aT_2^2 - a = 0$, в которых значение переменной T_2 обратимо.

В частности, если L — поле, то получаются следующие возможности:

1) $t_2 = 1 \Longrightarrow t_1 = 0$, и автоморфизм — тождественный;

2) $a = \dfrac{t_1^2}{1 - t_2^2}$, и нетривиальные L-точки существуют, лишь если $\sqrt{a} \in L$.

Тогда уравнение окружности превращается в $(T_1 + \sqrt{T}_2 + \sqrt{a})^2 = 0$, и мы получаем целую прямую автоморфизмов (без одной точки: $T_2 \neq 0$), а группа $\mathrm{Aut}(L'/L)$ изоморфна, очевидно, $L^\times$.

Все дело в том, что если $\sqrt{a} \in L$, то в алгебре $L' = L \underset{K}{\otimes} K'$ имеются нильпотенты. Действительно, $K(\sqrt{a}) \subset L$, поэтому $K(\sqrt{a}) \underset{K}{\otimes} K(\sqrt{a}) \subset L'$, но, с другой стороны,

$$K(\sqrt{a}) \underset{K}{\otimes} K(\sqrt{a}) \simeq K(\sqrt{a})[x](x^2 - a) \simeq K(\sqrt{a})[y]/(y^2),$$

и автоморфизмы просто умножают y на обратимые элементы.

§ 2.4. О скрытой суперсимметрии каждого дифференциального уравнения на многообразии

Как известно, Софус Ли ввел группы, носящие теперь его имя, чтобы сделать для дифференциальных уравнений то же, что Галуа сделал для алгебраических. С этого началось изучение симметрий дифференциальных уравнений и их решений, которое продолжается и по сей день. О симметриях дифференциальных уравнений написано много (см., например, [BCD, KLV] и цитированные там работы), однако суперсимметрии дифференциальных уравнений никто почему-то до сих пор не отмечал. Восполним этот пробел.

Э. Картан сделал важнейший с суперточки зрения шаг: переформулировал понятие «дифференциальное уравнение» в терминах внешних форм. Изложению этого подхода посвящены книги [BCG, G].

Напомним, что дифференциальному уравнению порядка k (для простоты — обыкновенному, переход к уравнениям в частных производных очевиден) относительно неизвестной $u(x)$, т. е. выражению вида (в этой главе F — полиномиальная функция, а в дальнейших главах — гладкая или любая другая)

$$F\Big(x,\, u,\, \frac{du}{dx},\, \dots,\, \frac{d^k u}{dx^k}\Big) = 0, \tag{2.15}$$

можно сопоставить *дифференциальный* (т. е. замкнутый относительно внешнего дифференцирования d) идеал, порожденный в кольце $\mathbb{K}[x, u, p, dx, du, dp]$, где $p = (p_1, \dots, p_k)$, функцией $F(x, u, p)$ и внешними (нечетными, антикоммутирующими) формами

$$\begin{aligned} \omega_0 &= du - p_1 dx, \\ \omega_1 &= dp_1 - p_2 dx, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \omega_{k-1} &= dp_{k-1} - p_k dx. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Единственное, чего не сделали Э. Картан и его последователи, это не сказали, **что** же выделяет этот дифференциальный идеал и где. А именно, соответствующий дифференциальному уравнению дифференциальный идеал выделяет некоторую под**супер**схему в $\operatorname{Spec}\mathbb{K}[x, u, p, dx, du, dp]$, причем, как сказано выше (см. [KLV, BCD]), переменные p надо считать принадлежащими бесконечномерному пространству бесконечно продолженных струй. Такая интерпретация дифференциальных уравнений показывает как искать их возможные суперсимметрии, перемешивающие четные и нечетные переменные.

В свете этой интерпретации открытие физиков — пионеров суперсимметрии, перемешивающей векторные поля и спинорные, а также координаты и поля, уже не так потрясает.

Задача. Описать супергруппы суперсимметрий классических уравнений математической физики. (Интересно, какие из них не сводятся к группам.)

§ 2.5. Окольцованные и суперокольцованные пространства. Суперсхемы

2.5.1. Предпучки и пучки. Пусть X — топологическое пространство. Предположим, что для каждого открытого множества $U \subset X$ задано множество $P(U)$ и для каждой пары открытых множеств $U \subset V$ задано отображение $r^V_U\colon P(V) \longrightarrow P(U)$. Система $\{P(U), r^V_U \mid$ всевозможные открытые множества $U, V\}$ называется *предпучком* (*множеств*) на X, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $P(\varnothing)$ состоит из одного элемента;

2) если $U \subset V \subset W$ — открытые множества в X, то

$$r^W_U = r^V_U \circ r^W_V.$$

Некоторые замечания: элементы из $P(U)$ называются *сечениями* предпучка P над U; сечение следует представлять себе как функцию, определенную над U. Отображения r^V_U называются *ограничениями* (области определения функции). Условие 1 удобно по формальным соображениям. Условие 2 выражает естественную транзитивность ограничения. Введя Top_X — *категорию открытых множеств на* X, в которой объектами являются открытые подмножества в X, а морфизмами — вложения, мы можем переформулировать определение совсем коротко: *предпучок множеств на X есть контравариантный функтор из Top_X в категорию множеств* Sets.

Настоящие функции можно умножать и складывать; аналогично можно рассматривать предпучки групп, колец и т. д. Пусть P — предпучок множеств на X; если на каждом множестве $P(U)$ задана алгебраическая структура группы, кольца и т. п., а отображения ограничения r^V_U являются гомоморфизмами этой структуры, то P называется *предпучком групп, колец и т. д.* Наконец, можно рассматривать внешние законы композиции: например предпучок модулей над предпучком колец (заданные на одном и том же топологическом пространстве). Предпучки непрерывных (дифференцируемых, аналитических и т. п.) функций на пространстве X обладают дополнительными свойствами «аналитического продолжения», которые аксиоматизированы в следующем определении.

Предпучок P на топологическом пространстве X называется *пучком*, если он удовлетворяет следующему условию:

> для любого открытого множества $U \subset X$, его открытого покрытия $U = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ и системы сечений $s_i \in P(U_i)$, удовлетворяющей условиям
>
> $$r^{U_i}_{U_i\cap U_j}(s_i) = r^{U_j}_{U_i\cap U_j}(s_j) \quad \text{для любых } i, j \in I,$$
>
> существует одно и только одно сечение $s \in P(U)$, для которого
>
> $$s_i = r^U_{U_i}(s) \quad \text{для любых } i \in I.$$

Иначе говоря, из согласованных сечений на U_i можно склеить сечение над U; всякое сечение над U однозначно определяется набором своих ограничений на U_i.

Множество сечений $P(U)$ (пред)пучка P обозначают также символом $\Gamma(U, P)$.

Соотношение между пучками и предпучками следующее: естественными объектами являются пучки, но различные конструкции над ними часто приводят к предпучкам, которые не являются пучками.

2.5.2. Окольцованные пространства. *Окольцованным пространством* называется пара $(X, \mathcal{O}_X)$, состоящая из пространства X и пучка колец $\mathcal{O}_X$ на X, который называется *структурным пучком*.

Морфизмом окольцованных пространств $F\colon (X_1, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y_1, \mathcal{O}_Y)$ называется пара, состоящая из морфизма $f\colon X \to Y$ топологических пространств и набора гомоморфизмов колец

$$\{f^*_U\colon \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \quad \text{для любого открытого подмножества } U \subset Y\}, \tag{2.17}$$

согласованного с отображениями ограничения, т. е. такого, что

а) диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Y(U) \arrow[r, "f^*_U"] \arrow[d, "r^U_V"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \arrow[d, "r^{f^{-1}(U)}_{f^{-1}(V)}"] \\
\mathcal{O}_Y(V) \arrow[r, "f^*_V"] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))
\end{tikzcd} \tag{2.18}$$

коммутируют для каждой пары открытых подмножеств $V \subset U \subset Y$;

б) для любого открытого подмножества $U \subset Y$ и пары $u \in U$ и $g \in \mathcal{O}_Y(U)$, такой что $g(y) = 0$, выполняется условие

$$f^*_U(g)(x) = 0 \quad \text{при всех } x, \text{ таких что } f(x) = y. \tag{2.19}$$

Пояснение. Если X и Y — отделимые пространства, а $\mathcal{O}_X$ и $\mathcal{O}_Y$ — пучки непрерывных (гладких, аналитических, т. е. «достаточно хороших») функций на них, то каждому морфизму $f\colon X \to Y$ соответствует гомоморфизм колец

$$f^*_U\colon \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)),$$

который каждой функции $g \in \mathcal{O}_Y(U)$ сопоставляет функцию

$$f^*_U(g)(x) = g(f(x)) \quad \text{при всех } x \in f^{-1}(U), \tag{2.20}$$

т. е. областью определения функции $f^*_U(g)$ является $f^{-1}(U)$ и $f^*_U(g)$ постоянна на полном прообразе каждой точки $y \in U$.

В алгебраической геометрии (когда функции только полиномиальны или рациональны) все топологические пространства нехаусдорфовы, и их структурные пучки мало похожи на пучки функций на многообразиях:

1) набор гомоморфизмов колец $\{f^*_U \mid U \text{ открытое подмножество}\}$ **НЕ** восстанавливается по f, и его *надо задавать отдельно*;

2) условие

$$f^*_U(g)(x) = g(f(x)) \quad \text{для всех } x \in f^{-1}(U) \tag{2.21}$$

заменено на более слабое условие (2.19).

Окольцованное пространство $(\operatorname{Spec} A, \widetilde{A})$ названо в статье [Л0] *аффинной схемой*, а окольцованное топологическое пространство $(X, \mathcal{O}_X)$, у каждой точки x которого есть открытая окрестность U, такая что $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ — аффинная схема, названо (*супер*)*схемой*. В свете теоремы Воличенко (см. том 2), характеризующей метабелевы алгебры как произвольные подалгебры в суперкоммутативных супералгебрах, естественно назвать эти окольцованные пространства *аффинной метасхемой* и *метасхемой* соответственно, чтобы отличить их от классических объектов.

До сего дня это определение оказалось невостребованным: в категории метасхем так много морфизмов, что всех их никто пока не научился использовать [1]. Мы же сейчас определим те объекты, работа с которыми получается.

2.5.2а. Суперокольцованные пространства. Суперсхемы. *Суперокольцованным пространством* назовем пару $(X, \mathcal{F})$, где X — топологическое пространство, а $\mathcal{F}$ — пучок супералгебр на X. *Морфизмом суперокольцованных пространств* $\varphi\colon (X, \mathcal{F}) \longrightarrow (Y, \mathcal{G})$ назовем пару $(\tilde\varphi, \{\varphi^*_U \mid U \subset Y\})$, состоящую из

1) непрерывного отображения $\tilde\varphi\colon X \to Y$,

2) набора гомоморфизмов **супер**алгебр $\varphi^*_U\colon \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(\tilde\varphi^{-1}(U))$, определенного для каждой пары открытых подмножеств $U \subset Y$ и согласованного с отображениями ограничения:

$$r^{\tilde\varphi^{-1}(V)}_{\tilde\varphi^{-1}(U)}\varphi^*_V = \varphi^*_U r^V_U \quad \text{для любых открытых множеств } U \subset V \subset X. \tag{2.22}$$

Разница между окольцованными пространствами и суперокольцованными пространствами в том, что для окольцованных пространств морфизмы φ^*_U — это произвольные гомоморфизмы алгебр, даже если пучки $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — это пучки супералгебр, в то время как морфизмы тех же объектов, рассмотренных в категории суперокольцованных пространств, должны сохранять четность.

Ясно, что любое суперокольцованное пространство можно считать окольцованным, рассматривая гомоморфизмы пучков, не сохраняющие четность.

Суперокольцованное пространство, изоморфное одному из $(\operatorname{Spec} A, \widetilde{A})$, где A — суперкоммутативное кольцо, назовем *аффинной суперсхемой*. Суперокольцованное топологическое пространство $(X, \mathcal{O}_X)$, локально изоморфное аффинной суперсхеме, назовем *суперсхемой*.

§ 2.6. Проблема

Основная задача любой алгебраической геометрии (хоть коммутативной, хоть некоммутативной) — проинтерпретировать любое кольцо или ал-

---

[1] В третьей главе книги [МаАГ] изложен подход, в котором даже у коммутативных алгебр оказывается неожиданно много неизвестных ранее автоморфизмов. Эти автоморфизмы тоже никто до сих пор (2013) не научился использовать.

гебру (допустим, из некоторого класса) как кольцо или алгебру на чем-то. Например, следуя основополагающей идее И. М. Гельфанда, Ю. Шрейдер (см. [Шре]) доказал, что каждую нормированную коммутативную алгебру C можно отождествить с алгеброй функций на множестве максимальных идеалов алгебры C (это утверждение известно как *теорема Гельфанда*, см. [ГеРШ]).

Для каждой коммутативной (*комплексной*) C^*-*алгебры* $\mathcal{C}$ *с единицей существует компактное хаусдорфово пространство* S, *такое что* $\mathcal{C}$ *изоморфна и изометрична алгебре* $C(S)$ *всех непрерывных комплекснозначных функций на* S.

Верить ответу статьи [ПС] («для некоммутативных алгебр аналога теоремы Гельфанда нет») не хочется, даже если статья не содержит формальных ошибок *в принятых в статье определениях*: для полиномиальных супералгебр аналог теории Гротендика есть, все алгебраические утверждения как алгебры, так и геометрии суперизованы, и теорема Гельфанда — единственное известное нам исключение, пока не допускающее суперизацию. Не замахиваясь на обобщение теоремы Гельфанда на *произвольные* некоммутативные алгебры, я предлагаю подумать над почти коммутативным, но все-таки некоммутативным случаем суперкоммутативных супералгебр.

Что следует считать аналогом нормы супералгебры и сколько таких аналогов? Как выглядит аналог теоремы Гельфанда для супералгебр?

Литература

[АтМ] *Атья М.*, *Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру. М: Мир, 1972.

[БВД] *Бочаров А. В.*, *Вербовецкий А. М.*, *Дужин С. В.*, *Самохин А. В.*, *Торхов Ю. Н.*, *Хорькова Н. Г.*, *Четвериков В. Н.* Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Под ред. Виноградова А. М. и Красильщика И. С. 2-е изд., испр. М.: Факториал Пресс, 2005. (XX век. Математика и механика. Вып. 9.)

[ГеРШ] *Гельфанд И. М.*, *Райков Д. А.*, *Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца. М.: Физматгиз, 1960.

[Гриф] *Гриффитс Ф.* Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. ИО НФМИ, 1999.

[ВКЛ] *Виноградов А. М.*, *Красильщик И. С.*, *Лычагин В. В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986.

[Л0] *Лейтес Д. А.* Спектры градуированно-коммутативных колец // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29, № 3. С. 209–210.

[Ленг] *Ленг С.* Алгебра. М: Мир, 1968.

[МаД] *Манин Ю. И.* Новые размерности в геометрии // Успехи матем. наук. 1984. Т. 39, вып. 6 (240). С. 47–73.

[МаАГ] *Манин Ю. И.* Введение в теорию аффинных схем и квантовых групп / Под ред. Д. А. Лейтеса, С. М. Львовского. М.: МЦНМО, готовится к печати.

[Нест] *Неструев Д.* Гладкие многообразия и наблюдаемые. М.: МЦНМО, 2000.

[ПС] *Пламеневский Б. А.*, *Сеничкин В. Н.* Разрешимые операторные алгебры // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6, № 5. С. 1–87.

[Рид] *Рид М.* Алгебраическая геометрия для всех /Пер. с англ. Б. З. Шапиро. Новокузнецк: НФМИ, 1998.

[Шре] *Шрейдер Ю. А.* Структура максимальных идеалов в кольцах мер с конволюцией // Мат. сборник. 1950. Т. 27 (69). С. 297–318.

[BBR] *Barnabei M.*, *Brini A.*, *Rota G.-C.* On the exterior calculus of invariant theory // J. Algebra. 1985. V. 96. P. 120–160.

[Bla] *Blass A.* Existence of bases implies the axiom of choice // Axiomatic set theory (Boulder, Colo., 1983). P. 31–33. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1984. (Contemp. Math. V. 31.)

[BCG] *Bryant R. L.*, *Chern S. S.*, *Gardner R. B.*, *Goldschmidt H. L.*, *Griffiths P. A.* Exterior differential systems // Mathematical Sciences Research Institute Publications. V. 18. New York: Springer-Verlag, 1991. Есть русский перевод сокращенной версии: [G].

[Go] *Golan J.* Structure sheaves over a noncommutative ring // Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. V. 56. New York: Marcel Dekker, Inc., 1980.

Golan J. Semirings and affine equations over them: theory and applications // Mathematics and its Applications. V. 556. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 2003.

[MaDim] *Manin Yu.* The notion of dimension in geometry and algebra // Bull. Amer. Math. Soc. 2006. V. 43. P. 139–161.

[NvO] *Năstăsescu C.*, *Van Oystaeyen F.* Methods of graded rings. Berlin: Springer, 2004. (Lecture Notes in Mathematics. V. 1836.)

[Ro1] *Rosenberg A.* Noncommutative algebraic geometry // SoS, 26/1988-8; A version: Noncommutative algebraic geometry and representations of quantized algebras // Mathematics and its Applications. V. 330. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1995; позднейшие добавки: препринты MPIM-Bonn 1999-83, 84, 2003-110, 111, 112.

[Ro2] *Rosenberg A.* Almost quotient categories, sheaves and localization // SoS, 25/1987-7.

[Ru] *Rudakov A.* Marked trees and generating functions with odd variables // Normat. 1999. V. 47, № 2. P. 66–73, 95.

[VvO] *van Oystaeyen F.*, *Verschoren A. H.* Non-commutative algebraic geometry // Springer Lect. Notes Math. 1981. V. 887.

García M. Márquez Hernández C. M., *Verschoren A.* Structure sheaves and noncommutative topologies // J. Algebra. 1997. V. 194, № 1. P. 224–244.

[We] *Weil A.* Théorie des points proches sur les variétés différentiables (French) // Géométrie différentielle (Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg, 1953). P. 111–117. Paris: CNRS, 1953.

Глава 3

Анализ на суперобластях

Так же как многообразие склеено из кусков попроще — областей, супермногообразие склеено из более простых кусков, которые называются суперобластями. В этой главе мы будем изучать эти более простые куски. Все объекты, рассматриваемые в этой главе (функции, отображения и так далее), гладкие, т. е. бесконечно дифференцируемые, или, как еще говорят, принадлежащие классу C^∞. Основное поле — $\mathbb{R}$.

Нетривиальные и важные моменты, заслуживающие специального внимания:

- интегральные формы и их обобщения: псевдодифференциальные и псевдоинтегральные формы;
- $1|1$-мерное время (его характеризация будет дана в главе о дифференциальных уравнениях).

§ 3.1. Линейные супермногообразия. Суперобласти

3.1.1. Определение суперобластей. *Суперобластью* $\mathcal{U}^{n|m}$ *размерности* $n|m$ называется пара $(U, C^\infty(\mathcal{U}))$, где U — открытая область в $\mathbb{R}^n$, а $C^\infty(\mathcal{U}) = C^\infty(U) \otimes \Lambda^\bullet(V) = C^\infty(U)[v_1, \ldots, v_m]$ для некого m-мерного нечетного пространства V и базиса $v_1, \ldots, v_m$ в нем. Часто вместо $\mathcal{U}^{n|m}$ мы пишем просто $\mathcal{U}$.

Вспомним теперь, что такое $\mathcal{U}_{rd}$, где $\mathcal{U}$ — суперокольцованное пространство, см. гл. 2. Область $U = \mathcal{U}_{rd}$ называется *подстилающей областью*, или *базой*, суперобласти $\mathcal{U}$. Если pt — точка подстилающей области U, то мы будем говорить также, что pt — *точка суперобласти* $\mathcal{U}$, и писать $\mathrm{pt} \in \mathcal{U}$ (мы используем очевидно неуклюжее обозначение pt, поскольку другие возможности представляются нам еще более неудачными).

Простейшая суперобласть — это

$$\mathcal{R}^{n|m} = (\mathbb{R}^n, C^\infty(\mathbb{R}^{n|m})), \quad \text{где } C^\infty(\mathbb{R}^{n|m}) = C^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^m(V).$$

Мы называем $\mathcal{R}^{n|m}$ *векторным супермногообразием* размерности $n|m$. Ниже мы покажем, что между суперобластями $\mathcal{R}^{n|m}$ и векторными суперпространствами размерности $n|m$ имеется взаимно однозначное соответствие. Заметим, что если $m = 0$, то эти объекты, хотя и из разных категорий (супермногообразий и векторных суперпространств соответственно), имеют совпадающие теоретико-множественные модели: оба можно описать в терминах точек, составляющих $\mathbb{R}^m$. Если $n \neq 0$, то, пользуясь лишь одной теоретико-множественной моделью, описать $\mathcal{R}^{n|m}$ невозможно, а описать $\mathbb{R}^{n|m}$ — пожалуйста: это то же, что и $\mathbb{R}^{n+m}$, но представленное в виде прямой суммы однородных подпространств.

Система координат на $\mathcal{R}^{n|m}$ состоит из упорядоченного набора *координат*, которые делятся на четные и нечетные. Обращаем внимание читателя на то, что понятие системы координат отнюдь не очевидно. Дадим предварительное определение, которое мы будем уточнять вплоть до гл. 5 включительно.

В нашем самом предварительном определении в качестве четных координат на $\mathcal{R}^{n|m}$ мы берем координаты $u_1, \ldots, u_n$ на $\mathbb{R}^n$, а в качестве нечетных — базисные элементы $\xi_1, \ldots, \xi_m$ произвольного базиса некоторого m-мерного пространства V.

Обычно для простоты и удобства мы будем записывать систему координат в *стандартном формате* $x = (x_1, \ldots, x_{n+m})$, где $x_1 = u_1, \ldots, x_n = u_n$, $x_{n+1} = \xi_1, \ldots, x_{n+m} = \xi_{n+m}$. Другие форматы нумеруются упорядоченными наборами Par четности координат. Такие форматы тоже нужны, хотя, к счастью, не часто.

Элементы супералгебры $C^\infty(\mathcal{U})$ называются *функциями* на $\mathcal{U}$. Каждую функцию f на $\mathcal{U}$ можно однозначно выразить в терминах координат в виде

$$f(x) = \sum_\nu f_\nu(u)\xi^\nu = \sum_{\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_m)} f_\nu(u)\xi_1^{\nu_1}\ldots\xi_m^{\nu_m}, \qquad (3.1)$$
$$\text{где } \nu_i = 0,\ 1 \text{ и } f_\nu \in C^\infty(U),$$

или в виде

$$f(x) = f_0(u) + \sum_{k>0}\ \sum_{j_1<\ldots<j_m} f_{j_1\ldots j_m}(u)\xi_{j_1}\ldots\xi_{j_m}, \quad \text{где } f_0, f_{j_1\ldots j_m} \in C^\infty(U). \qquad (3.2)$$

Отсюда следует, что алгебра [1] $C^\infty(\mathcal{U})/(C^\infty(\mathcal{U})_{\bar{1}})$ естественно изоморфна алгебре $C^\infty(U)$. Мы будем иногда обозначать образ функции $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ под действием канонической проекции cpr: $C^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow C^\infty(U)$ через $\tilde{f}$.

Значением функции f в точке $\mathrm{pt} \in U$ называется число $\mathrm{cpr}(f)(\mathrm{pt})$. Гомоморфизм $s_{\mathrm{pt}}\colon C^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$, определенный формулой $s_{\mathrm{pt}}(f) = \mathrm{cpr}(f(\mathrm{pt}))$, является, очевидно, морфизмом супералгебр.

Замечание. Функция на суперобласти $\mathcal{U}$ не обязательно определяется своими значениями в точках подстилающей области U. Например, каждая нечетная координатная функция ξ_i тождественно равна нулю во всех точках.

---

[1] Напомним, что символом (S) мы обозначаем идеал, порожденный множеством S.

Морфизм суперобластей $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ — это пара $\varphi = (\tilde\varphi, \varphi^*)$, где $\tilde\varphi\colon U \to V$ — это гладкое отображение подстилающих областей, а

$$\varphi^*\colon C^\infty(\mathcal{V}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{U})$$

— морфизм *супер*алгебр, такой что $\tilde\varphi$ и φ^* удовлетворяют условию

$$\varphi^*(f)(\mathrm{pt}) = f(\tilde\varphi(\mathrm{pt})) \quad \text{для любых } f \in C^\infty(V) \text{ и } \mathrm{pt} \in U.$$

Композиция морфизмов $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ и $\psi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ определяется формулами

$$\widetilde{\psi\varphi} = \tilde\psi\tilde\varphi, \qquad (\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*.$$

Замечание. 1) Морфизмы супералгебры φ^* рассматриваются в категории супералгебр с единицей, другими словами, всегда выполняется равенство $\varphi^*(1) = 1$. Гомоморфизму $C^\infty(\mathcal{V}) \longrightarrow 0 \in C^\infty(\mathcal{U})$ не соответствует никакого морфизма суперобластей.

2) Ясно, что данное выше определение морфизма суперобластей не позволяет нам построить внутренний $\underline{\mathrm{Hom}}$ в категории супермногообразий. Данное выше определение есть определение множества $\mathbb{R}$-*точек морфизмов супермногообразий*, т. е. это есть определение подстилающего многообразия некоторого бесконечномерного супермногообразия. В частности, хотелось бы определить супергруппу диффеоморфизмов $\underline{\mathrm{Hom}}(M, M)$. Это сделано В. Молотковым в главе о бесконечномерных супермногообразиях в томе 2.

Морфизм $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ называется *диффеоморфизмом*, если существует морфизм $\psi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ (*обратный морфизму* φ), такой что $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ — тождественные морфизмы.

Пусть $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ диффеоморфизм. Мы будем часто отождествлять $C^\infty(\mathcal{U})$ с $C^\infty(\mathcal{V})$ посредством φ^*, т. е. писать f вместо $\varphi^*(f)$.

Наше предварительное определение системы координат слишком ограничительно. Например, естественно расширить множество наборов функций из $C^\infty(\mathcal{U})$, достойных называться системами координат, следующим образом. Пусть $y = (v, \eta)$ — система координат на суперобласти $\mathcal{V}$, а $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ диффеоморфизм суперобластей. Каждый образ вышеопределенной системы координат под действием морфизма суперобластей, т. е. каждый набор

$$x = \varphi^*(y) = (\varphi^*(v_1), \ldots, \varphi^*(v_n),\ \varphi^*(\eta_1), \ldots, \varphi^*(\eta_m)), \tag{3.3}$$

тоже будет называться *системой координат* на $\mathcal{U}$. Переход от координат x к координатам y будет называться *заменой координат*. И все же замена (3.3) описывает пока только лишь *геометрические точки* супермногообразия всех систем координат, так что мы где-то потеряли нечетные параметры и обретем их лишь в § 4.3.

3.1.2. Примеры суперобластей. 1) Суперобласть U размерности $n|0$ — это просто область U в $\mathbb{R}^n$.

2) Подстилающей областью суперобласти $\mathcal{U}$ размерности $0|n$ является точка. Однако, поскольку $C^\infty(\mathcal{U}) = \Lambda(m)$, у суперобласти $\mathcal{U}$ имеется полным-полно нетривиальных диффеоморфизмов, а именно группа $\mathrm{Aut}_{ev}\,\Lambda^\bullet(m)$ автоморфизмов, сохраняющих четность.

3) Пусть E — векторное расслоение над областью U со слоем, изоморфным пространству V, и пусть $\Lambda^\bullet(E)$ — внешняя алгебра расслоения E. Расслоению E сопоставим суперобласть $\mathcal{U} = (U, C^\infty(\mathcal{U}))$, где $C^\infty(\mathcal{U})$ — супералгебра гладких сечений расслоения $\Lambda^\bullet(E)$. Ясно, что каждый автоморфизм векторного расслоения $\Lambda^\bullet(E)$ индуцирует автоморфизм суперобласти $\mathcal{U}$.

Однако не все диффеоморфизмы суперобласти $\mathcal{U}$ получаются таким образом. Действительно, морфизмы $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ находятся по определению во взаимно однозначном соответствии с гомоморфизмами супералгебр функций $\varphi^*\colon C^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{U})$, а каждый гомоморфизм определен на («топологических») образующих супералгебры, которые мы назвали координатами. Рассмотрим соответствующие формулы:

$$\begin{cases} \varphi^*(u_i) = \varphi_i^0(u) + \boxed{\displaystyle\sum_r \sum_{i_1<\ldots<i_{2r}} \varphi_i^{i_1\ldots i_{2r}}(u)\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_{2r}}}\,, \\ \varphi^*(\xi_j) = \displaystyle\sum_r \sum_{j_1<\ldots<j_{2r+1}} \varphi_j^{j_1\ldots j_{2r+1}}(u)\xi_{j_1}\ldots\xi_{j_{2r+1}} \end{cases} \tag{3.4}$$

Члены $\varphi^*(u_i) = \varphi_i^0(u)$ определяют диффеоморфизм подстилающей области U. Линейные члены $\varphi^*(\xi_j) = \sum_i \varphi_j^i(u)\xi_i$ определяют замены координат слоя V (над каждой точкой — своя замена, отсюда и зависимость от u). Высшие по ξ члены в формуле (3.4) задают эндоморфизм всего слоя — всей супералгебры Грассмана $\Lambda^\bullet(V)$.

Ну а теперь, наконец, разницу между векторным расслоением $\Lambda^\bullet(E)$ и суперобластью $\mathcal{U}$ легко почувствовать, взглянув на взятые в рамочку члены из формулы (3.4). Эти члены не имеют никакого смысла в обычной дифференциальной геометрии, а в теории супермногообразий они этот смысл обретают. Итак,

в категории супермногообразий больше морфизмов, чем в категории векторных расслоений: морфизмы с не обращающимися в нуль членами в рамочке формулы (3.4) и составляют дополнительные морфизмы.

Привилегированные наборы систем координат, т. е. атласы. Оказывается, на любом гладком супермногообразии можно выбрать атлас так, что взятые в рамочку члены из формулы (3.4) обратятся в нуль при любом переходе от карты к карте. Ю. И. Манин назвал такие супермногообразия *расщепимыми*, а В. Молотков — *векторизуемыми*. А вот среди алгебраических (суперсхем) и аналитических супермногообразий есть нерасщепимые, для которых избавиться от членов в рамочке невозможно; соответствующие препятствия впервые описал В. П. Паламодов, [1] а подробно некоторые примеры рассмотрели Ю. И. Манин (см. [МаКП]) и А. Л. Онищик (см. [Oal]); см. также важную статью [DW].

4) Пусть $\mathcal{U}$ — суперобласть, а U — подстилающая область. Рассмотрим U как $n|0$-мерное супермногообразие и зададим морфизм $\mathrm{cem}\colon U\to\mathcal{U}$ — *каноническое вложение* (cem = canonical embedding), положив

$$\widetilde{\mathrm{cem}}=\mathrm{id}\colon U\longrightarrow\mathcal{U},\qquad \mathrm{cem}^*(f)=\mathrm{cpr}(f).$$

Заметим, что при $m>0$ морфизм cem не является диффеоморфизмом, хотя $\widetilde{\mathrm{cem}}$ — всегда диффеоморфизм.

Каноническое вложение согласовано с морфизмами суперобластей, т. е.

$$\widetilde{\mathrm{cem}}\cdot\tilde{\varphi}=\widetilde{\varphi\cdot\mathrm{cem}}\quad\text{для любого морфизма } \varphi\colon\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V}.$$

Заметьте: вложение $C^\infty(U)\longrightarrow C^\infty(\mathcal{U})$, определенное формулой $f\mapsto f\cdot 1$, задает морфизм суперобластей $\mathcal{U}\to U=\mathcal{U}_{\mathrm{rd}}$. Однако, в отличие от cem, этот морфизм не согласован с заменой координат, т. е. никакой *канонической* проекции $\mathcal{U}\to\mathcal{U}_{\mathrm{rd}}$ не существует.

Лемма. *Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — суперобласти. Тогда любому морфизму супералгебр $\alpha\colon C^\infty(\mathcal{V})\longrightarrow C^\infty(\mathcal{U})$ отвечает единственное гладкое отображение $\tilde{\varphi}\colon U\to V$, такое что пара $(\tilde{\varphi},\alpha)$ есть морфизм суперобластей $\mathcal{U}\to\mathcal{V}$.*

Доказательство. Пусть $y=(v,\eta)$ — система координат на $\mathcal{V}$. Если нужный нам морфизм $\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ существует, то он единствен, поскольку координаты точки $\tilde{\varphi}(\mathrm{pt})\in\mathcal{V}$ единственным образом определяются из условия

$$v_i(\tilde{\varphi}(\mathrm{pt}))=(\alpha(v_i))(\mathrm{pt})\quad\text{для любой точки } \mathrm{pt}\in U.$$

Покажем, что для любой функции $f\in C^\infty(\mathcal{V})_{\bar 0}$ область V содержит точку $\tilde{\varphi}(\mathrm{pt})$ с координатами $(\alpha(v_1)(\mathrm{pt}),\ldots,\alpha(v_n)(\mathrm{pt}))$, причем $f(\tilde{\varphi}(\mathrm{pt}))=\alpha(f)(\mathrm{pt})$. Фиксируем произвольную точку $\mathrm{pt}\in U$ и произвольную функцию $f\in C^\infty(\mathcal{V})_{\bar 0}$ и построим по ним функцию $g_{\mathrm{pt}}\in C^\infty(\mathcal{V})_{\bar 0}$:

$$g_{\mathrm{pt}}=\sum(v_i-\alpha(v_i)(\mathrm{pt}))^2+(f-\alpha(f)(\mathrm{pt}))^2.$$

Если $\mathrm{cpr}(g_{\mathrm{pt}})$ не обращается в нуль на V, то существует функция $\tilde{h}_{\mathrm{pt}}\in C^\infty(\mathcal{V})$, такая что $\tilde{h}_{\mathrm{pt}}\cdot\mathrm{cpr}(g_{\mathrm{pt}})=1\in C^\infty(\mathcal{V})$. Итак, благодаря доказанному

---

[1] Так я написал в первом издании этой книги. Это неверно: первым был Грин [Green].

в п. 1.6.5, существует функция $h_{\mathrm{pt}}\in C^\infty(V)$, такая что $h_{\mathrm{pt}}g_{\mathrm{pt}}=1\in C^\infty(V)$. Следовательно, $\alpha(h_{\mathrm{pt}})\alpha(g_{\mathrm{pt}})=1\in C^\infty(\mathcal{U})$, но ведь $\alpha(g_{\mathrm{pt}})(\mathrm{pt})=0$; получили противоречие.

Следовательно, найдется точка $\mathrm{pt}_1\in V$, такая что

$$v_i(\mathrm{pt}_1)=\alpha(v_i)(\mathrm{pt})\quad\text{для любого } i \text{ и } f(\mathrm{pt}_1)=\alpha(f)(\mathrm{pt}).\qquad\square$$

Эта лемма показывает, что любой морфизм суперобластей можно задать с помощью морфизма супералгебр функций. Кроме того, из этой леммы следует, что любой морфизм $s\colon C^\infty(\mathcal{U})\longrightarrow\mathbb{R}$ имеет вид $s=s_{\mathrm{pt}}$ для некоторой точки $\mathrm{pt}\in U$, т. е. подстилающая область может быть восстановлена по супералгебре $C^\infty(\mathcal{U})$.

3.1.3. Координатная запись морфизмов суперобластей. В обычном анализе на многообразиях координатная запись морфизмов играет важную роль. Пусть U и V — области с координатами x и y соответственно. Морфизм $\tilde{\varphi}\colon U\to V$ единственным образом восстанавливается по набору функций $y_i^*=\varphi^*(y_i)\in C^\infty(U)$.

Аналогичное утверждение верно и для суперобластей, и мы будем часто его использовать. Пусть $\varphi\colon\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ — морфизм суперобластей, а $y=(v,\eta)$ — система координат на $\mathcal{V}$. Набор функций

$$y^*=(v^*,\eta^*),\quad\text{где } v_i^*=\varphi^*(v_i)\in C^\infty(\mathcal{U})_{\bar 0}\ \text{ и }\ \eta_j^*=\varphi^*(\eta_j)\in C^\infty(\mathcal{U})_{\bar 1},$$

называется *координатной записью морфизма* φ. Он удовлетворяет следующему условию:

$$\text{если } \mathrm{pt}\in U,\quad\text{то } (v_1^*(\mathrm{pt}),\ldots,v_n^*(\mathrm{pt}))\in V. \tag{3.5}$$

Действительно, $v^*(\mathrm{pt})$ — координаты точки $\tilde{\varphi}(\mathrm{pt})$.

Соглашение. Всюду ниже в аналогичных ситуациях мы будет предполагать что с помощью координат $v_1,\ldots,v_n$ множество $\mathcal{V}_{\mathrm{rd}}$ отождествлено с какой-то областью в $\mathbb{R}^n$.

Теорема (о координатной записи морфизмов). *Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — суперобласти, а $y=(v,\eta)$ — система координат на $\mathcal{V}$. Пусть набор функций $y^*=(v^*,\eta^*)$, где $v_i^*\in C^\infty(\mathcal{U})_{\bar 0}$ и $\eta_j^*\in C^\infty(\mathcal{U})_{\bar 1}$, удовлетворяет условию* (3.5). *Тогда существует единственный морфизм суперобластей $\varphi\colon\mathcal{U}\to\mathcal{V}$, такой что $\varphi^*(y_i)=y_i^*$.*

Упражнение. Докажите теорему.

3.1.4. Замкнутые и открытые суперобласти. Обозначим через U_Γ, где $\Gamma\subset\{1,\ldots,n+m\}$ — какое-то подмножество, подобласть в U, выделенную уравнениями $\{x_i=0\mid i\in\Gamma,\ p(x_i)=\bar 0\}$, где $x=(x_1,\ldots,x_{n+m})$ — система координат на суперобласти $\mathcal{U}$. Положим

$$C^\infty(\mathcal{U}_\Gamma):=C^\infty(U_\Gamma)[\{x_j\mid j\notin\Gamma,\ p(x_j)=\bar 1\}].$$

Пара $(U_\Gamma, C^\infty(\mathcal{U}_\Gamma))$ задает суперобласть, которую мы обозначим $\mathcal{U}_{x,\Gamma}$. Мы будем говорить, что $\mathcal{U}_{x,\Gamma}$ — *замкнутая подсуперобласть в* $\mathcal{U}$, *выделенная набором уравнений* $\{x_i = 0 \mid i \in \Gamma\}$.

Определим каноническое вложение $\mathrm{cem}_{x,\Gamma}\colon \mathcal{U}_{x,\Gamma} \to \mathcal{U}$ (или просто cem) формулами

$$\mathrm{cem}^*(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \in \Gamma,\\ x_j & \text{при } j \notin \Gamma. \end{cases}$$

Функция $f|\mathcal{U}_{x,\Gamma} := \mathrm{cem}^*(f) \in C^\infty(\mathcal{U}_{x,\Gamma})$ называется *ограничением* функции $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ на $\mathcal{U}_{x,\Gamma}$.

Замкнутой подсуперобластью $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ называется любая суперобласть $\mathcal{W} = \mathcal{U}_{x,\Gamma}$ для каких-то x и Γ вместе с каноническим вложением $\mathrm{cem}\colon \mathcal{W} \to \mathcal{U}$. Частный случай: подстилающая область; здесь $\Gamma = \{n+1, \ldots, n+m\}$.

Пусть $\mathcal{U}$ — суперобласть с координатами $x = (u, \xi)$. Каждому открытому подмножеству $W \subset U$ мы сопоставим суперобласть

$$(W, C^\infty(\mathcal{W})), \quad \text{где } C^\infty(\mathcal{W}) = C^\infty(W)[\xi_1, \ldots, \xi_n].$$

Суперобласть $\mathcal{W}$ называется *открытой подсуперобластью* в $\mathcal{U}$.

Для любой функции $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ мы определим ее *ограничение* $f|_{\mathcal{W}}$ на открытую подсуперобласть $\mathcal{W}$, положив

$$(\Sigma f_\nu \xi^\nu)|_{\mathcal{W}} = \Sigma f_\nu|_{\mathcal{W}} \cdot \xi^\nu.$$

Морфизм $\mathrm{cem}\colon \mathcal{W} \to \mathcal{U}$, определенный формулой $\mathrm{cem}^*(f) = f|_W$, назовем *каноническим вложением* открытой подсуперобласти $\mathcal{W}$.

Из теоремы о координатной записи морфизмов немедленно вытекает, что морфизм $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, такой что $\tilde{\varphi}(V) \subset W \subset U$, однозначно пропускается через морфизм $\psi\colon \mathcal{W} \to \mathcal{U}$, так что $\varphi = \mathrm{cem} \cdot \psi$. В частности, отсюда следует, что открытая суперобласть $\mathcal{W}$ вместе с каноническим морфизмом cem определяется по подмножеству W с точностью до канонического изоморфизма, т. е. они не зависят от выбора системы координат на U.

Локально замкнутой подсуперобластью $\mathcal{W}$ в $\mathcal{U}$ называется замкнутая подсуперобласть в открытой суперобласти $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Пусть $\psi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ — морфизм суперобластей. Если $\mathcal{W}$ — локально замкнутая подсуперобласть в $\mathcal{U}$, то *ограничением* морфизма φ на $\mathcal{W}$ назовем морфизм $\varphi|_{\mathcal{W}} = \varphi \circ \mathrm{cem}$, где $\mathrm{cem}\colon \mathcal{W} \to \mathcal{U}$ — каноническое вложение.

Если $\mathcal{V}'$ — открытая подсуперобласть в $\mathcal{V}$, то $\varphi^{-1}(\mathcal{V}')$ — открытая подсуперобласть в $\mathcal{U}$, соответствующая открытому подмножеству $\tilde{\varphi}^{-1}(V') \subset U$.

Окрестностью точки $\mathrm{pt} \in \mathcal{U}$ назовем любую открытую подсуперобласть $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$, такую что $\mathrm{pt} \in W$, и тогда скажем, что $\mathrm{pt} \in \mathcal{W}$.

Как и в классическом анализе (на многообразиях), мы часто будем говорить, что какое-то свойство выполняется «локально, в окрестности точки pt». Например, утверждение «функция $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ обратима в окрестности точки pt» означает, что существует окрестность $\mathcal{V}$ точки pt в $\mathcal{U}$, такая что функция $f|_{\mathcal{V}}$ обратима.

Выражение «морфизм $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ является диффеоморфизмом в окрестности точки pt» означает, что существуют окрестность $\mathcal{V}$ точки pt в $\mathcal{U}$ и окрестность $\mathcal{V}'$ точки $\varphi(\mathrm{pt})$ в $\mathcal{W}$, такие что ограничение $\varphi|_{\mathcal{V}}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ — диффеоморфизм.

3.1.5. Произведение суперобластей. Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — суперобласти с координатами (u, ξ) и (v, η) соответственно. *Произведением суперобластей* $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ называется суперобласть $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$, подстилающая область которой — это $U \times V$, а координаты — (u, v, ξ, η). Определим морфизмы-проекции $\mathrm{pr}_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{U} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ и $\mathrm{pr}_{\mathcal{V}}\colon \mathcal{U} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, положив

$$\mathrm{pr}_{\mathcal{U}}^*(u_i) = u_i, \quad \mathrm{pr}_{\mathcal{U}}^*(\xi_k) = \xi_k^*, \quad \mathrm{pr}_{\mathcal{V}}^*(v_j) = v_j, \quad \mathrm{pr}_{\mathcal{V}}^*(\eta_l) = \eta_l.$$

3.1.5а. Лемма. *Если* $\mathcal{W}$ — *суперобласть, то для каждой пары морфизмов* $\varphi\colon \mathcal{W} \to \mathcal{U}$ *и* $\psi\colon \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ *существует единственный морфизм* $\varphi \times \psi\colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, *такой что* $\mathrm{pr}_{\mathcal{U}} \circ (\varphi \times \psi) = \varphi$ *и* $\mathrm{pr}_{\mathcal{V}} \circ (\varphi \times \psi) = \psi$.

Доказательство этой леммы немедленно следует из координатной записи морфизмов. ☐

Соглашение. Мы часто будем отождествлять $C^\infty(\mathcal{U})$ и $C^\infty(\mathcal{V})$ с подсупералгебрами $\mathrm{pr}_{\mathcal{U}}^*(C^\infty(\mathcal{U}))$ и $\mathrm{pr}_{\mathcal{V}}^*(C^\infty(\mathcal{V}))$ супералгебры $C^\infty(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$, соответственно и, не рассусоливая, писать f и g вместо $\mathrm{pr}_{\mathcal{U}}^*(f)$ и $\mathrm{pr}_{\mathcal{V}}^*(g)$ для $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ и $g \in C^\infty(\mathcal{V})$.

3.1.5б. Лемма (Адамар). *Пусть* $\mathcal{U}$ — *суперобласть с координатами* $(u_1, \ldots, u_n, \xi_1, \ldots, \xi_m)$, *а* $\mathrm{pt} \in \mathcal{U}$. *Обозначим через* I_{pt} *идеал в* $C^\infty(\mathcal{U})$, *порожденный функциями* $u_1 - s_{\mathrm{pt}}(u_1), \ldots, u_n - s_{\mathrm{pt}}(u_n), \xi_1, \ldots, \xi_m$.

Тогда для любой функции $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ *и любого целого числа* $r \geqslant 0$ *найдется многочлен* P_r *от переменных* (u, ξ), *такой что* $(f - P_r) \in I_p^{r+1}$.

Доказательство. Из явной записи функции из $C^\infty(\mathcal{U})$, заданной формулами (3.1) и (3.2), следует, что лемму достаточно доказать только в случае $m = 0$, когда она совпадает с классической леммой Адамара. ☐

3.1.6. Следствие. *Ядро гомоморфизма* $s_{\mathrm{pt}}\colon C^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *совпадает с* I_{pt}.

Действительно, ясно, что $I_{\mathrm{pt}} \subset \mathrm{Ker}\, s_{\mathrm{pt}}$, а из леммы Адамара следует, что $C^\infty(\mathcal{U}) = I_{\mathrm{pt}} \oplus \mathbb{R}$.

3.1.7. Лемма (как восстановить функцию по ее значениям). *Пусть* $\mathcal{U}^{n|m}$ — *суперобласть,* $f, f' \in C^\infty(\mathcal{U})$, *а* $r > m$. *Предположим, что* $f - f' \in I_{\mathrm{pt}}^r$ *для любой точки* $\mathrm{pt} \in \mathcal{U}$. *Тогда* $f = f'$.

Эта лемма показывает, что, хотя функцию $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ и нельзя восстановить по ее значению в точках суперобласти $\mathcal{U}$, т. е. по ее образам в $C^\infty(\mathcal{U})/I_{\text{pt}} = \mathbb{R}$, ее все-таки можно восстановить, если мы знаем все ее производные до порядка r, где $r > m$, включительно, или, другими словами, если мы знаем образы функции f в суперoccалгебрах $C^\infty(\mathcal{U})/I^r_{\text{pt}}$ для всех точек $\text{pt} \in \mathcal{U}$.

Упражнение. Докажите лемму.

§ 3.2. Векторные и ковекторные поля

3.2.1. Частные производные. Пусть $\mathcal{U}^{n|m}$ — суперобласть, $x = (u, \xi)$ — система координат на $\mathcal{U}$. Определим *частные производные* $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\colon C^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{U})$ по правилу Лейбница, положив $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$. В явном виде мы получим, что

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(f\xi_1^{\nu_1}\ldots\xi_m^{\nu_m}) = \frac{\partial f}{\partial u_i}\xi_1^{\nu_1}\ldots\xi_m^{\nu_m},$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}(f\xi_1^{\nu_1}\ldots\xi_m^{\nu_m}) = (-1)^{\nu_1+\ldots+\nu_{j-1}}\nu_j f\xi_1^{\nu_1}\ldots\xi_{j-1}^{\nu_{j-1}}\xi_{j+1}^{\nu_{j+1}}\ldots\xi_m^{\nu_m}$$

при всех $f \in C^\infty(U)$. Ясно, что $p(\partial_i) = p(x_i)$.

3.2.2. Базис в $C^\infty(U)$-супералгебре $\mathfrak{der}C^\infty(\mathcal{U})$. Пусть $\mathfrak{der}C^\infty(\mathcal{U})$ — супералгебра Ли дифференцирований супералгебры $C^\infty(\mathcal{U})$ со скобкой, заданной суперкоммутатором.

Лемма. *Супералгебра Ли $\mathfrak{der}C^\infty(\mathcal{U})$ — свободный $C^\infty(\mathcal{U})$-модуль с базисом $\{\partial_i\}$.*

Доказательство. Пусть $D \in \mathfrak{der}C^\infty(\mathcal{U})$. Положим $D_i = D(x_i)$ и рассмотрим векторное поле $D' = D - \sum D_i\partial_i$. Так как $D'(x_i) = 0$ при всех i, то $D'(P) = 0$ для любого многочлена $P \in \mathbb{R}[x]$. По лемме 3.1.7 достаточно проверить, что $D'(f) \in I^{m+1}_{\text{pt}}$ для любой функции $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ в любой точке $\text{pt} \in \mathcal{U}$. Выберем многочлен P так, чтобы выполнялось равенство $f - P \in I^{m+2}_{\text{pt}}$. Тогда $D'(f) = D'(f) - D'(P) = D'(f - P) \in I^{m+1}_{\text{pt}}$. □

3.2.3. Векторные и ковекторные поля. По аналогии с обычным анализом назовем элементы супералгебры $\mathfrak{der}C^\infty(\mathcal{U})$ *векторными полями* и обозначим $C^\infty(\mathcal{U})$-модуль $\mathfrak{der}C^\infty(\mathcal{U})$ символом $\mathfrak{vect}(\mathcal{U})$. Явная формула для скобки векторных полей получается, как обычно, применением левых и правых частей следующего равенства к «пробным функциям»:

$$[f\partial_i, g\partial_j] = f(\partial_i g)\partial_j - (-1)^{(p(f)+p(\partial_i))(p(g)+p(\partial_j))}g(\partial_j f)\partial_i.$$

Обозначим $C^\infty(\mathcal{U})$-модуль

$$(\mathfrak{vect}(\mathcal{U}))^* = \operatorname{Hom}_{C^\infty(\mathcal{U})}(\mathfrak{vect}(\mathcal{U}), C^\infty(\mathcal{U}))$$

символом $\operatorname{Covect}(\mathcal{U})$, а его элементы назовем *ковекторными полями*.

Определим **четный** $\mathbb{R}$-линейный оператор — *дифференциал*, положив $d\colon C^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \operatorname{Covect}(\mathcal{U})$,

$$\langle df, D\rangle = (-1)^{p(f)p(D)}D(f) \quad \text{или} \quad \langle D, df\rangle = D(f) = \sum D_i\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

где $f \in C^\infty(\mathcal{U})$, а $D = \sum D_i\dfrac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{vect}(\mathcal{U})$. Сравнивая эти две формулы, мы видим, что удобнее рассматривать $\operatorname{Covect}(\mathcal{U})$ как **правый** $C^\infty(\mathcal{U})$-модуль: знаков потребуется меньше.

Оператор d является, очевидно, четным дифференцированием супералгебры $C^\infty(\mathcal{U})$ в $C^\infty(\mathcal{U})$-модуль $\operatorname{Covect}(\mathcal{U})$, т. е.

$$d(fg) = (df)g + f(dg).$$

Очевидно, что $\operatorname{Covect}(\mathcal{U})$ является гладкой версией модуля Covect_A универсальных **четных** дифференцирований, рассмотренного здесь для $A = C^\infty(\mathcal{U})$, а в гл. 1 — для алгебр полиномов.

Пусть $x = (u, \xi)$ — система координат на $\mathcal{U}$. Векторные поля ∂_i образуют базис в модуле $\mathfrak{vect}(\mathcal{U})$. Отсюда следует, что ковекторные поля dx_i образуют базис в модуле $\operatorname{Covect}(\mathcal{U})$, двойственный справа к базису $\{\partial_i\}_{i=1}^{\dim\mathcal{U}}$.

Если $f \in C^\infty(\mathcal{U})$, то

$$df = \sum dx_i\partial_i(f),$$

т. е. $|\partial_i f\rangle$ — вектор-столбец правых координат вектора df в базисе $\{dx_i\}_{i=1}^{\dim\mathcal{U}}$. Если $\langle h_i|$ является вектор-строкой левых координат векторного поля D в базисе $\{\partial_i\}_{i=1}^{\dim\mathcal{U}}$, то

$$D(f) = \langle D, df\rangle = \sum h_i(\partial_i f).$$

3.2.4. Производная Ли. Определим действие супералгебры Ли $\mathfrak{vect}(\mathcal{U})$ в суперпространствах $C^\infty(\mathcal{U})$, $\mathfrak{vect}(\mathcal{U})$ и $\operatorname{Covect}(\mathcal{U})$, которое (в этих, а также и более общих случаях действий в тензорных полях) называется *производной Ли* (вдоль векторного поля $X \in \mathfrak{vect}(\mathcal{U})$), для любых $f \in C^\infty(\mathcal{U})$, $D \in \mathfrak{vect}(\mathcal{U})$, $\alpha \in \operatorname{Covect}(\mathcal{U})$ положив

$$L_X(f) = X(f),$$
$$L_X(D) = [X, D],$$
$$\langle L_X(\alpha), D\rangle = L_X(\alpha(D) - (-1)^{p(X)p(\alpha)}\langle\alpha, L_X(D)\rangle.$$

Упражнения. Докажите следующие утверждения:
1) $L_X(fD) = L_X(f)D + (-1)^{p(X)p(f)}fL_X(D)$;
2) $L_X(\alpha f) = L_X(\alpha)f + (-1)^{p(X)p(\alpha)}\alpha(L_X(f))$;
3) $L_X(\langle\alpha, D\rangle) = \langle L_X(\alpha), D\rangle + (-1)^{p(X)p(D)}\langle\alpha, L_X(D)\rangle$, в частности,

$$L_X(df) = (-1)^{p(X)}d(X(f));$$

4) $[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}$;

5) координатная запись производной Ли дается формулами

$$L_{h\partial_i}(f) = h\partial_i f;$$

$$L_{h\partial_i}(g\partial_j) = h\partial_i(g)\partial_j - (-1)^{p(h\partial_i)p(g\partial_j)}g\partial_j(h)\partial_i;$$

$$L_{h\partial_i}(dx_j) = \delta_{ij}\sum_k dx_k(\partial_k h).$$

3.2.5. Касательное и кокасательное пространства. Для каждой точки $\mathrm{pt}\in\mathcal{U}$ мы назовем суперпространство $T_{\mathrm{pt}}(\mathcal{U}) = \mathfrak{vect}(\mathcal{U})/I_{\mathrm{pt}}\mathfrak{vect}(\mathcal{U})$ *касательным пространством к* $\mathcal{U}$ *в точке* pt. Пространство $T^*_{\mathrm{pt}}(\mathcal{U}) = \mathrm{Covect}(\mathcal{U})/I_{\mathrm{pt}}\,\mathrm{Covect}(\mathcal{U})$ мы назовем *кокасательным пространством к* $\mathcal{U}$ *в точке* pt. Образ (ко)векторного поля X в пространстве $T_{\mathrm{pt}}(\mathcal{U})$ называется *значением (ко)векторного поля* X *в точке* pt.

Мы будем обозначать значения векторных полей ∂_i и ковекторных полей dx_i в точке pt теми же символами: ∂_i и dx_i. Ясно, что $\{\partial_i\in T_{\mathrm{pt}}(\mathcal{U})\}_{i=1}^{n+m}$ и $\{dx_i\in T^*_{\mathrm{pt}}(\mathcal{U})\}_{i=1}^{n+m}$ — двойственные базисы.

Упражнение. Докажите, что

$$T^*_{\mathrm{pt}}(\mathcal{U}) = I_{\mathrm{pt}}/I^2_{\mathrm{pt}} \quad \text{и} \quad dx_i = (x_i - x_i(\mathrm{pt})) \pmod{I^2_{\mathrm{pt}}}.$$

3.2.6. Цепное правило. Пусть $\varphi\colon \mathcal{U}^{m,n}\longrightarrow\mathcal{V}^{r,s}$ — морфизм суперобластей, а x и y — системы координат на $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ соответственно. *Суперматрица* I_{xy} *частных производных координат* y *по* x определяется формулами

$$(I_{xy})_{ij} = \partial_i\varphi^*(y_j), \qquad p_{\mathrm{row}}(i) = p(x_i), \quad p_{\mathrm{col}}(j) = p(y_j).$$

Очевидно, что I_{xy} — четная суперматрица.

Теорема (цепное правило). *Справедливо равенство*

$$\frac{\partial\varphi^*(f)}{\partial x_i} = \sum_{1\leqslant j\leqslant r+s}\frac{\partial\varphi^*(y_j)}{\partial x_i}\varphi^*\Big(\frac{\partial f}{\partial y_j}\Big) \quad \text{при } i = 1, \ldots, m+n, \tag{3.6}$$

или, в матричных обозначениях,

$$\Big|\frac{\partial\varphi^*(f)}{\partial x}\Big\rangle = I_{xy}\Big|\varphi^*\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\Big\rangle \quad \text{для любых } f\in C^\infty(\mathcal{U}). \tag{3.7}$$

Если $\psi\colon\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ *— морфизм супермногообразий, а* $z = (w, \zeta)$ *— система координат на* $\mathcal{W}$, *то*

$$I_{xz} = I_{xy}\cdot\varphi^*(I_{yz}). \tag{3.8}$$

Следствие. *Если* x *и* y *— две системы координат на* $\mathcal{U}$, *то*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_j}. \tag{3.9}$$

Если z *— третья система координат, то* $I_{xz} = I_{xy}I_{yz}$. *В частности, матрица* I_{xy} *обратима.*

Доказательство теоремы. Обозначим через D разницу между левой и правой частями в формуле (3.6). Из п. 3.2.4 следует, что при любых $f, g\in C^\infty(\mathcal{V})$ и $D(f), D(g)\in C^\infty(\mathcal{U})$ выполняется равенство

$$D(fg) = D(f)\varphi^*(g) + (-1)^{p(D)p(f)}\varphi^*(f)D(g).$$

Непосредственные вычисления показывают, что $D(y_j) = 0$ при $j = 1, \ldots, r+s$. Поэтому из правила Лейбница следует равенство $D(f) = 0$ для любого многочлена f, зависящего от y, а лемма из п. 3.1.7 позволяет продолжить это равенство на любые функции. □

3.2.7. Предложение (инвариантность формы первого дифференциала). *Пусть* $\varphi\colon\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ *— морфизм суперобластей. Тогда существует и единствен морфизм* $\varphi^*\colon \mathrm{Covect}\,\mathcal{V}\longrightarrow\mathrm{Covect}(\mathcal{U})$, *согласованный с умножениями на функции и коммутирующий с* d, *т. е. для любых* $f\in C^\infty(\mathcal{V})$, $\alpha\in\mathrm{Covect}(\mathcal{V})$ *выполняются равенства*

$$\varphi^*(\alpha f) = \varphi^*(\alpha)\varphi^*(f), \qquad \varphi^*(df) = d\varphi^*(f).$$

Доказательство. Пусть x и y — системы координат на $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ соответственно. Если $\alpha = \sum dy_j f_j$, то согласно предположению

$$\varphi^*(\alpha) = \sum d\varphi^*(y_j)\varphi^*(f_j) = \sum dx_i I_{ij}\varphi^*(f_j), \quad \text{где } I_{ij} = (I_{xy})_{ij}. \tag{3.10}$$

Формула (3.10) однозначно определяет морфизм φ^*. Давайте проверим, что из цепного правила следует, что $\varphi^*(df) = d(\varphi^* f)$. Действительно,

$$\varphi^*(df) = \varphi^*\Big(\sum dy_j\frac{\partial f}{\partial y_j}\Big) = \sum dx_i I_{ij}\varphi^*\Big(\frac{\partial f}{\partial y_j}\Big) = \sum dx_i\frac{\partial(\varphi^* f)}{\partial x_i} = d(\varphi^* f). \ \square$$

Замечания. 1) Из доказательства следует, что предложение эквивалентно цепному правилу.

2) Ясно, что I_{xy} — суперматрица оператора φ^*, т. е. $\varphi^*(dy) = dx\cdot I_{xy}$.

Здесь мы рассматриваем действия матриц (операторов) на вектор-строках справа, в то время как в гл. 1 мы преимущественно рассматривали левое действие на вектор-столбцах.

3.2.8. Суперматрица частных производных и матрицы Якоби. В обычном анализе вместо матрицы I_{xy} обычно используется транспонированная матрица I^t_{xy}, которая называется *матрицей Якоби*. Поэтому давайте тоже введем *матрицу Якоби* J_φ отображения φ, положив $J_\varphi = (I_{xy})^{st}$. Другими словами, в стандартном формате эта суперматрица имеет вид

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial u} & -\dfrac{\partial v}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} & \dfrac{\partial \eta}{\partial \xi} \end{pmatrix}.$$

Из формулы (3.8) следует, что $J_{\psi\cdot\varphi} = \varphi^*(J_\psi)J_\varphi$.

3.2.9. Предположим, что $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ — морфизм суперобластей, $p \in U$ и $q \in \tilde{\varphi}(p)$. Каждый морфизм $\varphi^*\colon \operatorname{Covect}(\mathcal{V}) \longrightarrow \operatorname{Covect}(\mathcal{U})$ определяет морфизм кокасательных пространств $D_p\varphi^*\colon T^*_p(V) \longrightarrow T^*_p(U)$ и двойственный ему морфизм касательных пространств $D_p\varphi\colon T_p(\mathcal{U}) \longrightarrow T_q(\mathcal{V})$. Морфизм $D_p\varphi$ называется *дифференциалом* отображения φ в точке p.

В координатах имеет место формула

$$(D_p\varphi^*)(dy) = dx \cdot I_{xy}(p).$$

Ни морфизм $\mathfrak{vect}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathfrak{vect}(\mathcal{V})$, ни морфизм $\mathfrak{vect}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathfrak{vect}(\mathcal{U})$ не индуцированы, вообще говоря, морфизмом φ. Ситуация меняется, если $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ — *открытое вложение*, т. е. φ является диффеоморфизмом суперобласти $\mathcal{U}$ на открытую подсуперобласть в $\mathcal{V}$.

Лемма. *Если φ — открытое вложение, то существует единственное отображение $\varphi^*\colon \mathfrak{vect}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathfrak{vect}(\mathcal{U})$, такое что*

$$\begin{gathered} \varphi^*(D)(\varphi^*(f)) = \varphi^*(D(f)), \\ \varphi^*(fD) = \varphi^*(f)\varphi^*(D), \\ \varphi^*(\langle D, \alpha\rangle) = \langle \varphi^*(D), \varphi^*(\alpha)\rangle \end{gathered}$$

при всех $f \in C^\infty(\mathcal{U})$, $X \in \mathfrak{vect}(\mathcal{U})$, $\alpha \in \operatorname{Covect}(\mathcal{U})$.

На $C^\infty(\mathcal{U})$, $\mathfrak{vect}(\mathcal{U})$ и $\operatorname{Covect}(\mathcal{U})$ производная Ли инвариантна относительно φ^* в следующем смысле:

$$\varphi^* \circ L_D = L_{\varphi^*(D)}\varphi^*.$$

Доказательство. Пусть x — координаты на $\mathcal{V}$. Поскольку φ — открытое вложение, $\varphi^*(x_i) \neq 0$ при всех i. Если $D = \sum D_i(x)\partial_i$, то

$$\varphi^*(D)(\varphi^*(x_i)) = \varphi^*(D(x_i)) = \varphi^*(x_i) \implies \varphi^*(D) = \sum \varphi^*(D_i)\frac{\partial}{\partial\varphi^*(x_i)}. \qquad \square$$

§ 3.3. Ряд Тейлора и формула Тейлора

3.3.1. Формула Тейлора. В анализе на многообразиях ряд Тейлора функции f — это степенной ряд, который асимптотически стремится к f в некоторой окрестности данной точки p. Коэффициенты этого ряда выражаются в терминах производных функции f в точке p.

Поскольку на суперобластях значения функции в точке несут недостаточную информацию, чтобы восстановить функцию, мы должны использовать ряды Тейлора, зависящие от дополнительных параметров.

Пусть $\mathcal{U}^{n|m}$ и $\mathcal{V}^{r|s}$ — суперобласти с координатами $x = (u, \xi)$ и $y = (v, \eta)$, соответственно. Отождествим $\mathcal{U}$ с замкнутой подсуперобластью в $\mathcal{W} = \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, выделенной системой уравнений $\{v_i = 0,\ \eta_j = 0;\ \text{при всех } i, j\}$. В этом пункте мы рассмотрим вариант формулы Тейлора, в котором (u, ξ) — параметр, и приблизим функцию $f \in C^\infty(\mathcal{W})$ многочленами от (v, η) с коэффициентами, зависящими от u, ξ.

Обозначим через $I_{\mathcal{U}}$ идеал в супералгебре $C^\infty(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$, порожденный $y = (v, \eta)$. Положим

$$\varkappa! = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\varkappa}(y^\varkappa) = k_1! \ldots k_n!(-1)^{|\nu|(|\nu|-1)/2},$$

где $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_m$, а $\varkappa = (k_1, \ldots, k_n, \nu_1, \ldots, \nu_m)$ — мультииндекс типа (n, m).

Теорема. *Пусть $f \in C^\infty(\mathcal{W})$ и $k \geqslant 0$. Тогда существует единственный многочлен*

$$T_k(f) = \sum_{|\varkappa| \leqslant k} f_\varkappa y^\varkappa,$$

где $f_\varkappa \in C^\infty(\mathcal{U})$, такой что $f - T_k(f) \in I^{k+1}_{\mathcal{U}}$. Коэффициенты многочлена $T_k(f)$ имеют вид

$$f_\varkappa = \frac{1}{\varkappa!}\left(\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\varkappa} f\right)\Big|_{\mathcal{U}}.$$

Многочлен $T_k(f)$, определенный в этой теореме, называется *многочленом Тейлора* степени k функции f от переменных y, а формальный степенной ряд $T(f) = \sum f_\varkappa y^\varkappa$ называется *рядом Тейлора* функции f.

3.3.2. Формула Тейлора (другой вариант). Пусть $\mathcal{U}$ — суперобласть с координатами $x = (u, \xi)$. На $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ рассмотрим координаты x, x', где x' — другая копия координат x, и пусть $\Delta x_i = x_i - x'_i$.

Суперобласть в $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$, заданная уравнениями $\{\Delta x_i = 0 \text{ при всех } i\}$, — *диагональ* — будет обозначаться $\Delta(\mathcal{U})$.

Мы отождествим $C^\infty(\mathcal{U})$ с подсупералгеброй в $C^\infty(\mathcal{U} \times \mathcal{U})$, положив $f(x) \mapsto f(x) \cdot 1$. Кроме того, мы сопоставим каждой функции $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ функцию $f(x') = f(x + \Delta x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

Теорема. *Для любого $k \geqslant 0$ выполняется соотношение*

$$f(x + \Delta x) \equiv \sum_{|\varkappa| \leqslant k} f_\varkappa(x)(\Delta x)^\varkappa \pmod{I^{k+1}_\Delta},$$

где $f_\varkappa = \dfrac{1}{\varkappa!}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^\varkappa f \in C^\infty(\mathcal{U}) \in C^\infty(\mathcal{U} \times \mathcal{U})$, *а* I_Δ — *идеал, порожденный элементами* $\{\Delta x_i$ *при всех* $i\}$.

Доказательство этой теоремы легко следует из теоремы 3.3.1. □

Из теоремы 3.3.2 вытекает следующая интерпретация частных производных, отвечающая известному определению

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + t, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{t}$$

из обычного анализа на многообразиях. А именно, пусть $x = (u, \xi)$ — система координат на $\mathcal{U}$. Из формулы Тейлора следует, что функция

$$h_i(x, t) = f(x_1, \ldots, x_i + t, \ldots, x_{n+m}) - f(x),$$

где $p(t) = p(x_i)$, может быть представлена в виде $h_i(x, t) = tg_i(x, t)$, где значение $g_i(x, t)|_{t=0}$ не зависит от выбора функции g_i. (Заметим, что если t нечетно, то функция $g_i(x, t)$ определена неоднозначно.)

§ 3.4. Теоремы об обратной и неявной функциях

3.4.1. Теорема (об обратной функции). *Пусть* $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ — *морфизм суперобластей* $p \in \mathcal{U}$ *и* $q = \varphi(p)$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

а) φ — *диффеоморфизм в окрестности точки* p;

б) *дифференциал* $D\varphi\colon T_p(\mathcal{U}) \longrightarrow T_q(\mathcal{V})$ — *изоморфизм касательных пространств.*

Пусть $x = (u, \xi)$ и $y = (v, \eta)$ — системы координат на U и V соответственно. Тогда условие б) в точности описывает обратимость матрицы Якоби отображения φ в точке p — достаточное условие для существования обратной функции.

Упражнение. Докажите теорему.

3.4.2. Теорема (о неявной функции). *Пусть* $\mathcal{U}$ *и* $\mathcal{V}$ — *суперобласти*, $\varphi\colon \mathcal{U} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ — *морфизм суперобластей*, $p \in \mathcal{U}$, $q \in \mathcal{V}$ *и* $r = \varphi(p \times q) \in \mathcal{W}$. *Пусть матрица Якоби морфизма* $\varphi_q = \varphi|_{\mathcal{U} \times q}\colon \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ *обратима в точке* p (т. е. дифференциал $D\varphi_q\colon T_p(U) \longrightarrow T_r(W)$ обратим).

Тогда существуют окрестность $\mathcal{V}_0$ *точки* q *и морфизм* $\psi\colon \mathcal{V}_0 \to \mathcal{U}$, *такие что*

$$\varphi^\circ(\psi \times \mathrm{id}) = \mathrm{cem} \circ \mathrm{prt}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}, \tag{3.11}$$

где $\mathrm{cem}\colon r \to w$ — *вложение, а* $\mathrm{prt}\colon \mathcal{V} \to r$ — *сжатие в точку, заданные формулами*

$$\mathrm{cem}^*(f) = f(r) \quad \text{и} \quad \mathrm{prt}^*(1) = 1.$$

Если $\psi'\colon \mathcal{V}'_0 \to \mathcal{U}$ — *другой морфизм, удовлетворяющий условию* (3.11), *то* $\psi'|_{\mathcal{V}'_0 \cap \mathcal{V}_0} = \psi$.

В обычном анализе условие (3.11) означает, что для любой точки $q' \in V_0$ найдется единственная точка $p' \in U_0$, такая что $\varphi(p' \times q') = r$, причем p' гладко зависит от q'.

Лемма. *Теорема об обратной функции следует из теоремы о неявной функции. Верно и обратное утверждение*: *из теоремы об обратной функции следует теорема о неявной функции.*

Известное нам доказательство этой леммы очень занудно.

Упражнение. Докажите лемму и обратное утверждение.

3.4.3. Теорема (глобальная теорема об обратной функции). *Пусть* $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ — *морфизм суперобластей. Пусть суперматрица* J_φ *обратима в каждой точке* $p \in \mathcal{U}$, *а* $\tilde{\varphi}\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ — *вложение. Тогда* φ — *диффеоморфизм суперобластей* $\mathcal{U} \to \mathcal{W}$, *где* $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ — *открытая подсуперобласть.*

Доказательство. По теореме 3.4.1 на базе у нас есть локальный диффеоморфизм, который по условию еще и взаимно однозначен. Тогда он просто является диффеоморфизмом. А теперь разберемся с функциями.

Пусть x — система координат на $\mathcal{U}$. По теореме 3.4.1 в окрестности каждой точки $q \in \mathcal{W}$ найдутся функции x_i^*, такие что $\varphi^*(x_i^*) = x_i$. Это условие однозначно определяет функции x_i^*. Следовательно, мы можем склеить эти функции в глобальные функции x_i^* на всем W. Используя координатную запись морфизмов, мы можем теперь определить морфизм $\psi\colon \mathcal{W} \to \mathcal{U}$, такой что $\psi^*(x_i) = x_i^*$.

Поскольку $(\psi\varphi)^*(x_i) = x_i$, отображение $\psi\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ является тождественным морфизмом. В частности, $\varphi^*\psi^* = \mathrm{Id}$. Из п. 3.4.2 следует, что достаточно проверить, что $\psi^*\varphi^* = \mathrm{Id}$ или что ядро морфизма φ^* равно нулю.

Пусть $f \in C^\infty(\mathcal{W})$ и $\varphi^* f = 0$. Поскольку локально φ^* — изоморфизм, мы видим, что f обращается в нуль в окрестности каждой точки. Следовательно, $f = 0$. □

Следствие. 1) *Пусть* $\mathcal{U}^{n|m}$ — *суперобласть, а* $x = (u, \xi)$ — *система функций на* $\mathcal{U}$, *такая что четные функции* $u_1, \ldots, u_n$ *разделяют точки на* U *и множество ковекторов* $\{du, d\xi\}$ *образует базис кокасательного пространства* $T_p^*(\mathcal{U})$ *в каждой точке* $p \in U$. *Тогда* x — *система координат на* $\mathcal{U}$.

2) *Пусть* $v_1, \ldots, v_k \in C^\infty(\mathcal{U})_{\bar{0}}$ *и* $\eta_1, \ldots, \eta_l \in C^\infty(\mathcal{U})_{\bar{1}}$. *Эти функции можно дополнить до системы координат в окрестности любой точки* $p \in \mathcal{U}$ *тогда и только тогда, когда дифференциалы* dv_i *и* $d\eta_j$ *линейно независимы в этой точке.*

Указание. 1) Примените теорему 3.4.3 к морфизму $\varphi\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{n|m}$, заданному формулой $\varphi^*(x') = x$, где x' — система координат на $\mathbb{R}^{n|m}$.

3.4.4. Иммерсии и субмерсии. Пусть $\varphi\colon \mathcal{U}^{n,m} \longrightarrow \mathcal{V}^{k,l}$ — морфизм суперобластей, $p \in \mathcal{U}$ и $q \in \mathcal{V}$. Морфизм φ называется *иммерсией в точке* p, если в окрестностях точек p и q существуют координаты u, ξ и v, η соответственно, такие что (здесь $n \leqslant k$, $m \leqslant l$)

$$\begin{aligned} &\varphi^*(v_i) = u_i \quad \text{при } 1 \leqslant i \leqslant n, && \varphi^*(v_i) = 0 \quad \text{при } i > n,\\ &\varphi^*(\eta_j) = \xi_j \quad \text{при } 1 \leqslant j \leqslant m, && \varphi^*(\eta_j) = 0 \quad \text{при } j > m. \end{aligned}$$

Морфизм φ называется *субмерсией в точке* p, если в окрестностях точек p и q существуют координаты u, ξ и v, η соответственно, такие что (здесь $n \geqslant k$, $m \geqslant l$)

$$\begin{aligned} \varphi^*(v_i) &= u_i \quad \text{при } 1 \leqslant i \leqslant k,\\ \varphi^*(\eta_j) &= \xi_j \quad \text{при } 1 \leqslant j \leqslant ln. \end{aligned}$$

Теорема. *Морфизм φ является иммерсией (субмерсией) в точке p тогда и только тогда, когда дифференциал $D\varphi(p)$ является вложением (эпиморфизмом).*

Упражнение. Дайте (очевидное) определение суперранга (srk) суперматрицы.

В терминах матрицы Якоби J_φ теорема означает, что $\operatorname{srk} J_\varphi(p) = (n, m)$ для иммерсий и $\operatorname{rk} J_\varphi(p) = (k, l)$ для субмерсий.

Доказательство (теоремы). Пусть y — система координат на $\mathcal{V}$, а $y_i^* = \varphi^*(y_i)$. Если $D\varphi$ — вложение, то существует подмножество индексов Γ, такое что множество $\{dy_i^* \mid i \in \Gamma\}$ — базис в $T_p^*(U)$. Из результатов п. 3.4.3 следует, что функции $\{y_i^* \mid i \in \Gamma\}$ задают систему координат в окрестности точки p.

Определим морфизм $\psi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ и набор функций y_i' на V формулами

$$\psi^*(y_i^*) = y_i \text{ и } y_i' = \begin{cases} y_i & \text{при } i \in \Gamma,\\ y_i' = y_i - \psi^*(y_i^*) & \text{при } i \notin \Gamma. \end{cases}$$

Ясно, что $\{dy_i' \mid i \in \Gamma\}$ — базис в пространстве $T_q^*(\mathcal{V})$, так что $\{y_i' \mid i \in \Gamma\}$ — система координат в окрестности точки q. Итак,

$$\varphi^*(y_i') = \begin{cases} y_i^* & \text{при } i \in \Gamma,\\ 0 & \text{при } j \notin \Gamma. \end{cases}$$

Следовательно, φ — иммерсия.

Если $D\varphi$ — эпиморфизм, то в силу результатов п. 3.4.3 множество $\{y_i^* \mid i \in \Gamma\}$ можно расширить до системы координат в окрестности точки p. Итак, φ — субмерсия. □

§ 3.5. Дифференциальные и псевдодифференциальные формы

3.5.1. Дифференциальные формы. Пусть $\mathcal{U}^{n,m}$ — суперобласть. Суперкоммутативная супералгебра $\Omega^\bullet(\mathcal{U}) = E^\bullet_{C^\infty(\mathcal{U})}(\mathrm{Covect}(\mathcal{U}))$ называется супералгеброй *дифференциальных форм* на $\mathcal{U}$. Мы будем отождествлять $\Omega^0(\mathcal{U})$ с $C^\infty(\mathcal{U})$, а $\Omega^1(\mathcal{U})$ с $\Pi(\mathrm{Covect}(\mathcal{U}))$.

Пусть $f \in C^\infty(\mathcal{U})$. Допуская вольность речи [1], мы обозначаем символом df дифференциальную форму $\pi(df) \in \Omega^1(\mathcal{U})$, поэтому $p(df) = p(f) + \bar{1}$.

Пусть x — система координат на $\mathcal{U}$. Тогда дифференциальные формы dx_i образуют базис $C^\infty(\mathcal{U})$-модуля $\Omega^1(\mathcal{U})$, следовательно, $\Omega^\bullet(\mathcal{U}) = C^\infty(\mathcal{U})[dx]$. *Степенью* дифференциальной формы $\omega \in \Omega$ называется ее степень относительно дифференциалов dx, поэтому $\Omega^\bullet$ есть $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}$-градуированная алгебра: она градуирована четностью p и степенью deg.

3.5.2. Суперобласть $\widehat{\mathcal{U}}$ и псевдодифференциальные формы. Дадим геометрическую интерпретацию супералгебры $\Omega^\bullet(\mathcal{U})$. А именно, мы введем некоторую суперобласть $\widehat{\mathcal{U}}$ и рассмотрим $\Omega^\bullet(\mathcal{U})$ как подсупералгебру в $C^\infty(\widehat{\mathcal{U}})$.

Пусть x — система координат на $\mathcal{U}^{n|m}$. Определим $\mathcal{U}_x$ как суперобласть $\mathcal{U} \times \mathcal{R}^{n|m}$ с координатами x, $\hat{x}$, где $p(\hat{x}_i) = p(x_i) + \bar{1}$. Если y — другая система координат на $\mathcal{U}$, то отождествим суперобласти $\widehat{\mathcal{U}}_x$ и $\widehat{\mathcal{U}}_y$ с помощью изоморфизма $\alpha_{yx}\colon \widehat{\mathcal{U}}_x \to \widehat{\mathcal{U}}_y$, заданного формулами

$$\alpha_{yx}^*(y_i) = y_i, \quad \alpha_{yx}^*(\hat{y}_i) = \sum \hat{x}_j \frac{\partial}{\partial x_j} y_i,$$

или

$$\hat{y} = \hat{x} I_{yx}.$$

Пусть $\widehat{\mathcal{U}}$ — класс эквивалентности суперобластей $\widehat{\mathcal{U}}_x$ относительно определенной выше эквивалентности. Ясно, что $\widehat{\mathcal{U}}$ однозначно восстанавливается по $\mathcal{U}$. Итак, каждой системе координат x на $\mathcal{U}$ отвечает система координат x, $\hat{x}$ на $\widehat{\mathcal{U}}$.

Морфизм-проекция $\mathrm{pr}\colon \widehat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$, заданный формулой $\mathrm{pr}^*(x_i) = x_i$, не зависит от системы координат x и позволяет нам отождествить супералгебру $C^\infty(\mathcal{U})$ с подсупералгеброй супералгебры $C^\infty(\widehat{\mathcal{U}})$.

Продолжим вложение $\mathrm{pr}^*\colon C^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow C^\infty(\widehat{\mathcal{U}})$ до морфизма супералгебр $\mathrm{pr}^*\colon \Omega^\bullet(\mathcal{U}) \longrightarrow C^\infty(\widehat{\mathcal{U}})$, положив $\mathrm{pr}^*\colon dx_i \mapsto \hat{x}_i$. Образ супералгебры $\Omega^\bullet(\mathcal{U})$

---

[1] Вольность речи проявляется в том, что из записи df не видно, четный или нечетный дифференциал мы рассматриваем. Обычно, но, увы, не всегда, это ясно из контекста: например, у Г. М. Фихтенгольца дифференциал d четный, а у Р. Уэллса (см. [Wel]), как правило (но не всегда), нечетный.

состоит из функций, полиномиальных по $\hat{x}$. Поскольку дифференциал $df = \sum \hat{x}_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ определен инвариантно, морфизм pr^* не зависит от выбора системы координат. Мы будем отождествлять суперaлгебру $\Omega^\bullet(\mathcal{U})$ с подсупералгеброй в $C^\infty(\widehat{\mathcal{U}})$ с помощью морфизма pr^*.

Супералгебра $\widehat{\Omega}(\mathcal{U}) := C^\infty(\widehat{\mathcal{U}})$ называется супералгеброй *псевдодифференциальных форм.*

Заметим, что если нечетных координат на $\mathcal{U}$ нет, т. е. $\mathcal{U}$ — область, а не суперобласть, то $\widehat{\Omega}(\mathcal{U}) = \Omega(\mathcal{U})$.

Мы скажем, что $\omega \in \widehat{\Omega}(\mathcal{U})$ — *однородная* форма степени λ, если

$$\omega(x,\, t\hat{x}) = t^\lambda \omega(x,\, \hat{x}) \quad \text{для любого } t \in \mathbb{R}.$$

Подсупералгебра $\widehat{\Omega}^{(\cdot)}(\mathcal{U}) = \coprod\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \widehat{\Omega}^{(\lambda)}(\mathcal{U})$ однородных псевдодифференциальных форм в $\widehat{\Omega}(\mathcal{U})$ — важная алгебра.

3.5.3. Внешний дифференциал. Дифференциал d, определенный в следующей лемме, называется *внешним дифференциалом.*

Лемма. *Существует и единственно дифференцирование* $d\colon \Omega(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega(\mathcal{U})$, *такое что*

а) $p(d) = \bar{1}$, $\deg d = 1$;

б) *если* $f \in C^\infty(\mathcal{U})$, *то* $df = \sum dx_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$;

в) $d^2 = 0$.

Дифференциал d *можно единственным образом продолжить до дифференцирования супералгебры* $\widehat{\Omega}(\mathcal{U})$. *В координатах* x, $\hat{x}$ *он имеет вид*

$$d = \sum \hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3.12}$$

Доказательство. Дифференциал d однозначно определен условиями а)–в) на образующих, т. е. на всех $f \in \Omega^0(\mathcal{U})$ и $dx_i \in \Omega^1(\mathcal{U})$ (поскольку $d(dx_i) = 0$). Отсюда следуют единственность дифференциала d как на $\Omega(\mathcal{U})$, так и на $\widehat{\Omega}(\mathcal{U})$, и его явный вид. ☐

3.5.4. Внутреннее произведение. Пусть $X \in \mathfrak{vect}(\mathcal{U})$. Дифференцирование ι_X, определенное ниже, называется *внутренним умножением* на X.

Лемма. 1) *Дифференцирование* $\iota_X\colon \Omega^\bullet(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathcal{U})$, *такое что*

а) $p(\iota_X) = p(X) + \bar{1}$, $\deg \iota_X = -1$;

б) *если* $\alpha \in \mathrm{Covect}(\mathcal{U})$ *и* $\pi(\alpha) \in \Omega^1(\mathcal{U})$, *то* $\iota_X(\pi(\alpha)) = (-1)^{p(X)}(X,\, \alpha)$, *т. е.*

$$\iota_X(df) = (-1)^{p(X)} X(f) \quad \textit{для любых } f \in C^\infty(\mathcal{U}). \tag{3.13}$$

существует и единственно.

Дифференцирование ι_X *можно единственным образом продолжить до дифференцирования супералгебры* $\widehat{\Omega}(\mathcal{U})$. *В координатах* x, $\hat{x}$ *явная формула имеет вид (здесь* $\hat{\partial}_i := \dfrac{\partial}{\partial \hat{x}_i}$*)*

$$\iota_X = (-1)^{p(X)} \sum f_i \hat{\partial}_i \quad \textit{для любого } X = \sum f_i \partial_i. \tag{3.14}$$

2) *Гомоморфизм* $\iota\colon \mathfrak{vect}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathfrak{vect}(\widehat{\mathcal{U}})$, *где* $X \mapsto \iota_X$, *является нечетным* $C^\infty(\mathcal{U})$*-линейным гомоморфизмом, причем* $[\iota_X,\, \iota_Y] = 0$ *для любых* X, $Y \in \mathfrak{vect}(\mathcal{U})$.

Заметим, что условия (3.13) и (3.14) эквивалентны.

Доказательство. Из условий а)–б) следует, что $\iota_X(\Omega^0(\mathcal{U})) = 0$ и $\iota_X(dx_i) = (-1)^{p(X)} X(x_i)$. Отсюда вытекает единственность дифференцирования ι_X на $\Omega(\mathcal{U})$ и $\widehat{\Omega}(\mathcal{U})$, равно как и явные формулы (3.13) и (3.14). ☐

3.5.5. Производная Ли. *Сравните результаты этого пункта с п.* 3.2.4! Дифференцирование L_X, определенное ниже, называется *производной Ли* вдоль X.

Лемма. 1) *Пусть* $X \in \mathfrak{vect}(\mathcal{U})$. *Существует единственное дифференцирование* $L_X\colon \Omega^\bullet(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathcal{U})$, *такое что*

а) $p(L_X) = p(X)$ *и* $\deg L_X = 0$,

б) $L_X(f) = X(f)$ *для любых* $f \in C^\infty(\mathcal{U})$,

в) $[d,\, L_X] = 0$.

Дифференцирование L_X, *заданное условиями* а)–в), *можно единственным образом продолжить до дифференцирования супералгебры* $\widehat{\Omega}(\mathcal{U})$. *В координатах* x, $\hat{x}$ *явная формула имеет вид*

$$L_X = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum df_i \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + (-1)^{p(X)} \sum_{i,j} \hat{x}_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i}$$

для любых $X = \sum f_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

2) *Пусть* X, $Y \in \mathfrak{vect}(\mathcal{U})$. *Тогда* $L_X = [d,\, \iota_X]$, $[L_X,\, \iota_Y] = (-1)^{p(X)} \iota_{[X,Y]}$ *и* $[L_X,\, L_Y] = L_{[X,Y]}$.

Доказательство. Из условий а)–в) следует, что $L_X(f) = X(f)$ для любой функции $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ и

$$L_X(dx_i) = (-1)^{p(X)} d(X(x_i));$$

следовательно, оператор L_X однозначно определен на $\Omega(\mathcal{U})$ и $\widehat{\Omega}(\mathcal{U})$. Положим

$$L_X = [d,\, \iota_X].$$

Тогда условия а)–в) выполняются, и по уже доказанному мы построили желаемое дифференцирование L_X. Явная формула для L_X и п. 2 проверяются непосредственно. ☐

3.5.6. Морфизмы φ^* и $\hat{\varphi}$.

Лемма. *Пусть* $\varphi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{U}$ — *морфизм суперобластей. Гомоморфизм* $\varphi^*\colon C^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{V})$ *можно однозначно продолжить до гомоморфизма супералгебр* $\varphi^*\colon \Omega(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega(\mathcal{V})$, *коммутирующего с внешним дифференциалом* (*т. е. такого, что* $d\varphi^* = \varphi^* d$).

Морфизм φ^* *можно однозначно продолжить также и до морфизма супералгебр* $\hat{\varphi}^*\colon \widehat{\Omega}(\mathcal{U}) \longrightarrow \widehat{\Omega}(\mathcal{V})$, *т. е.* φ^* *задает морфизм суперобластей* $\hat{\varphi}\colon \widehat{\mathcal{V}} \to \widehat{\mathcal{U}}$. *В координатах* x, $\hat{x}$ *морфизм* $\hat{\varphi}$ *задается формулами*

$$\hat{\varphi}^*(x_i) = \varphi^*(x_i), \quad \hat{\varphi}^*(\hat{x}_i) = d(\varphi^*(x_i)) = \sum \hat{y}_j \frac{\partial}{\partial y_j}(\varphi^*(x_i)). \tag{3.15}$$

Доказательство. Из формулы $\varphi^*(dx_i) = d(\varphi^*(x_i))$ следует единственность как φ^*, так и $\hat{\varphi}$. Определим теперь морфизм $\hat{\varphi}\colon \widehat{\mathcal{V}} \to \widehat{\mathcal{U}}$ формулами (3.15). ☐

Упражнение. Проверьте, что морфизм супералгебр $\hat{\varphi}^*$ коммутирует с d и что $\hat{\varphi}^*(\Omega(\mathcal{U})) \subset \Omega(\mathcal{V})$.

3.5.7. Лемма Пуанкаре. Пусть $\mathcal{U}^{n|m}$ — суперобласть с координатами x, выбранными так, что начало координат содержится в $\mathcal{U}$. Скажем, что суперобласть $\mathcal{U}$ *звездчатая относительно точки* 0, если для любого t, такого что $0 \leqslant t \leqslant 1$, существует морфизм $\varphi_t\colon \mathcal{U}\to\mathcal{U}$, такой что $\varphi_t^*(x_i) = tx_i$.

Теорема (лемма Пуанкаре). *Пусть суперобласть* $\mathcal{U}$ *звездчатая относительно точки* 0, *а* $d\colon \widehat{\Omega}(\mathcal{U}) \longrightarrow \widehat{\Omega}(\mathcal{U})$ — *внешний дифференциал. Тогда*

$$\operatorname{Ker} d = \operatorname{Im} d \oplus \mathbb{R}\cdot 1, \tag{3.16}$$

где $\mathbb{R}\cdot 1$ — *одномерное пространство констант. Равенство* (3.16) *верно также и для ограничения* $d|_{\Omega(\mathcal{U})}$.

Доказательство. Из п. 3.5.3 следует включение

$$\operatorname{Ker} d \supset \operatorname{Im} d \oplus \mathbb{R}\cdot 1.$$

Рассмотрим набор морфизмов $\{\hat{\varphi}_t \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, таких что

$$\hat{\varphi}_t^*(x_i) = tx_i \quad \text{и} \quad \hat{\varphi}_t^*(\hat{x}_i) = t\hat{x}_i \quad \text{при всех } i.$$

Применяя цепное правило, мы видим, что $[d, \hat{\varphi}_t^*] = 0$ и $t\dfrac{d}{dt}\hat{\varphi}_t^* = L_X\hat{\varphi}_t^*$ для любого поля $X = \sum x_i\partial_i$. Положим

$$\psi(\omega) = \int_0^1 \frac{1}{t}[\hat{\varphi}_t^*(\omega) - \hat{\varphi}_0^*(\omega)]dt \quad \text{для любой формы } \omega \in \widehat{\Omega}(\mathcal{U}).$$

Благодаря теореме 3.3.1 интегральное выражение — гладкая функция от t. Следовательно, интеграл имеет смысл. Мы видим, что $[d, \psi] = 0$ и

$$L_X(\psi(\omega)) = \int_0^1 \frac{1}{t}L_X(\hat{\varphi}_t^*(\omega) - \hat{\varphi}_0^*(\omega))dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(\hat{\varphi}_t^*(\omega))dt =$$
$$= \hat{\varphi}_1^*(\omega) - \hat{\varphi}_0^*(\omega) = \omega - \hat{\varphi}_0^*(\omega).$$

Положим $H(\omega) = i_X \circ \psi(\omega)$. Итак, если $\omega \in \operatorname{Ker} d$, то

$$d\,H(\omega) = [d, H](\omega) = [d, i_X] \circ \psi(\omega) = L_X \circ \psi(\omega) = \omega - \hat{\varphi}_\circ^*(\omega),$$

т. е.

$$\omega = d\,H(\omega) + \hat{\varphi}_\circ^*(\omega) \in \operatorname{Im} d + \mathbb{R}\cdot 1 \quad (\operatorname{Im}\hat{\varphi}_\circ^* = \mathbb{R}\cdot 1),$$

что доказывает включение $\operatorname{Ker} d \subset \operatorname{Im} d \oplus \mathbb{R}\cdot 1$.

Если $\omega \in \Omega(\mathcal{U})$, то $H(\omega) \in \Omega(\mathcal{U})$, следовательно, теорема верна также и для $d|_{\Omega(\mathcal{U})}$. ☐

3.5.8. Дифференциальные формы как полилинейные функции. В анализе на многообразиях дифференциальные формы часто определяют как полилинейные функции от векторных полей. Дадим аналогичную интерпретацию дифференциальным формулам и на суперобластях. Для этого заметим, что на самом-то деле формы даже и на областях рассматриваются как полилинейные функции на $\Pi(\mathfrak{vect}(\mathcal{U}))$, а не на $\mathfrak{vect}(\mathcal{U})$. Для краткости мы будем писать $\widetilde{X}$ вместо $\pi(X)$. Пусть $\omega^l \in \Omega^l(\mathcal{U})$ и $X_1, \ldots, X_l \in \mathfrak{vect}(\mathcal{U})$. Положим

$$\omega^l(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_l) = (-1)^{p(\omega^l)(p(X_1)+\ldots+p(X_l)+l)} \cdot \iota_{X_1}\ldots\iota_{X_l}\omega^l.$$

Легко проверить, что

а) перестановка аргументов $\widetilde{X}_i$ и $\widetilde{X}_{i+1}$ умножает ω^l на $(-1)^{(p(X_i)+1)(p(X_{i+1})+l)}$;
б) $\omega^l(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_l f) = \omega^l(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_l)f$ для любой функции f.
(3.17)

Из явного описания базисов в $C^\infty(\mathcal{U})$-модулях $\mathfrak{vect}(\mathcal{U})$ и $\Omega^l(\mathcal{U})$ следует, что каждое отображение

$$(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_l) \longmapsto \omega(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_l),$$

которое удовлетворяет условиям (3.17), определяет одну-единственную форму $\omega^l \in \Omega^l(\mathcal{U})$. Следовательно, дифференциальные формы могут быть заданы как такие отображения.

С этой новой точки зрения легко вывести явные формулы для d, ι_X и L_X. (*Указание.* Примените правило знаков к формулам обычного анализа.) Поскольку явные выражения ужасны, а главное — абсолютно никогда не нужны для счета руками, кроме как для форм самых малых степеней, а со старшими степенями легко справляется пакет программ Грозмана `SuperLie` [Gr], мы приведем их только для форм самых малых степеней:

$$\begin{aligned}(\omega\,\omega')(\widetilde{X},\ \widetilde{Y}) &= (-1)^{p(\omega')p(\widetilde{X})}\omega(\widetilde{X})\omega'(\widetilde{Y}) + (-1)^{p(\widetilde{Y})(p(\omega')+p(\widetilde{X}))}\omega(\widetilde{Y})\omega'(\widetilde{X}),\\ df(\widetilde{X}) &= -(-1)^{p(f)p(X)}X(f),\\ d\omega(\widetilde{X},\ \widetilde{Y}) &= -(-1)^{p(\omega)p(X)}L_X(\omega(\widetilde{Y})) - (-1)^{(p(\omega)+p(X))p(Y)}L_Y(\omega(\widetilde{X}))+\\ &\qquad + (-1)^{p(\omega)+p(X)}\omega([\widetilde{X},\ \widetilde{Y}])\end{aligned}$$

для любых ω, $\omega' \in \Omega^1(\mathcal{U})$, $f \in \Omega^0(\mathcal{U})$ и X, $Y \in \mathfrak{vect}(\mathcal{U})$.

3.5.9. Теорема Дарбу. Назовем дифференциальную 2-форму *невырожденной*, если соответствующая ей билинейная форма, определенная в п. 3.5.8, невырожденна. Скажем, что дифференциальная форма ω *замкнута*, если $d\omega = 0$.

Теорема. *Пусть ω — невырожденная однородная (относительно четности) дифференциальная 2-форма на $r|s$-мерной вещественной суперобласти $\mathcal{U}$. Для любой точки из $\mathcal{U}$ система координат в окрестности этой точки, такая что ω имеет вид*

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \sum_{1\leqslant i\leqslant[\frac{r}{2}]} dp_i dq_i + \sum_{1\leqslant j\leqslant s} \varepsilon_j (d\theta_j)^2, \ \text{ где } \varepsilon_j = \pm 1, \quad \text{если } p(\omega) = \bar{0};\\ \omega_1 &= \sum d\xi_i dq_i, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } p(\omega) = \bar{1},\end{aligned} \tag{3.18}$$

существует тогда и только тогда, когда $d\omega = 0$. В частности, если $p(\omega) = \bar{0}$, то $r = 2n$, а если $p(\omega) = \bar{1}$, то $r = s$.

Над $\mathbb{C}$ четную форму с равным успехом можно привести к другому каноническому виду, часто более удобному в приложениях:

$$\omega_0 = \sum dp_i dq_i + \begin{cases} \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k} \varepsilon_j (d\xi_j d\eta_j), & \text{если } s = 2k,\\ \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k} \varepsilon_j (d\xi_j d\eta_j) + \varepsilon (d\theta)^2, & \text{если } s = 2k+1,\end{cases} \tag{3.19}$$

где и ε, и ε_j при всех j одновременно равны 1 (*или, если удобнее,* -1).

Доказательство (из которого ясно, что эта теорема чисто алгебраическая, а не аналитическая, как можно подумать) см. в [ГрЛе]. ☐

Упражнение. При каких условиях форму ω_0 можно привести к виду (3.19), а при каких — к виду (3.18) над $\mathbb{R}$?

§ 3.6. Формы объема

3.6.1. Каноническая форма объема $\hat{v}_{\widehat{\mathcal{U}}}$ на $\widehat{\mathcal{U}}$. Определим форму объема на $\widehat{\mathcal{U}}$, положив $\hat{v}_{\widehat{\mathcal{U}}} = v_{x,\hat{x}}$, где x — любая система координат на $\mathcal{U}$. Оказывается, $\hat{v}_{\widehat{\mathcal{U}}}$ не зависит от выбора системы координат x. Другими словами, если y — другая система координат на $\mathcal{U}$, то $v_{y,\hat{y}} = v_{x,\hat{x}}$.

Действительно, давайте вычислим якобиан $\dfrac{D(y,\ \hat{y})}{D(x,\ \hat{x})} = \operatorname{Ber} I_{(x,\hat{x}),(y,\hat{y})}$. Организуем координаты в наборы нестандартного формата: x, $\hat{x}$ и y, $\hat{y}$. Тогда суперматрица $I_{(x,\hat{x}),(y,\hat{y})}$ принимает следующий блочный вид (нестандартного формата):

$$\begin{pmatrix} A & B\\ 0 & D\end{pmatrix}.$$

Заметим, что $A_{ij} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} y_j = \dfrac{\partial}{\partial \hat{x}_i} \hat{y}_j = D_{ij}$ и соответствующие друг другу строки и столбцы суперматриц A и D имеют противоположные четности, так что $D = \Pi(A)$. Из следствия п. 1.7.5 следует, что

$$\frac{D(y,\ \hat{y})}{D(x,\ \hat{x})} = \operatorname{Ber} A \cdot \operatorname{Ber} \Pi(A) = 1.$$

Лемма. *Пусть $X \in \mathfrak{vect}\mathcal{U}$. Векторные поля d, ι_X, $L_X \in \mathfrak{vect}(\widehat{\mathcal{U}})$ аннулируют форму $\hat{v}_{\widehat{\mathcal{U}}}$.*

Доказательство немедленно вытекает из определения действия векторных полей на формах объема и явных формул для d, ι_X, L_X. ☐

3.6.2. Как интегрировать псевдодифференциальные формы. Индексом c выделим пространство тензоров с компактным носителем. Заметим, что подсуперпространство $\Omega_c(\mathcal{U})$ является идеалом в $\Omega(\mathcal{U})$.

Напомним, что если $m = 0$, т. е. никаких нечетных координат на $\mathcal{U}$ нет, то $\widehat{\Omega}_c(\mathcal{U}) = \Omega_c(\mathcal{U})$. Если же на $\mathcal{U}$ все-таки есть нечетная координата, скажем ξ, то $\widehat{\Omega}_c(\mathcal{U}) \cap \Omega(\mathcal{U}) = 0$, поскольку $\Omega(\mathcal{U})$ содержит только полиномиальные функции по ξ.

Определим интеграл $\int\limits_{\mathcal{U},x} \omega$ псевдодифференциальной формы $\omega \in \widehat{\Omega}_c(\mathcal{U})$ относительно заданной системы координат x на $\mathcal{U}$ формулой

$$\int\limits_{\mathcal{U},x} \omega := \int\limits_{\widehat{\mathcal{U}}} \omega\, \hat{v}_{(x,\hat{x})},$$

где ω рассматривается как функция на $\widehat{\mathcal{U}}$.

Каждая система координат x на $\mathcal{U}$ определяет ориентацию на суперобласти $\widehat{\mathcal{U}}$, соответствующую системе координат $(x,\ \hat{x})$. Легко проверить, что системы координат x и y определяют одну и ту же ориентацию на $\widehat{\mathcal{U}}$, если значение якобиана $\dfrac{D(y)}{D(x)}$ положительно на $\mathcal{U}$.

Из предыдущего следует, что выражение $\int\limits_{\mathcal{U},x} \omega$ инвариантно относительно замен координат.

Лемма. *Пусть* $X \in \mathfrak{vect}(\mathcal{U})$ *и* $\omega \in \widehat{\Omega}_c(\mathcal{U})$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathcal{U}} d\omega = \int\limits_{\mathcal{U}} i_X\omega = \int\limits_{\mathcal{U}} L_X\omega = 0.$$

Упражнение. Докажите лемму.

Замечание. Мы видим теперь, что интегрировать дифференциальные формы на суперобластях невозможно. Можно интегрировать только псевдодифференциальные формы с компактным носителем, а когда нечетных координат нет, псевдодифференциальные формы и обычные дифференциальные формы — это одно и то же. В последующих главах мы введем другие формы, которые можно интегрировать на суперобластях, — интегральные формы.

§ 3.7. Интегральные и псевдоинтегральные формы. Поливекторные поля

3.7.1. Пусть $\mathcal{U}^{n|m}$ — суперобласть. Положим $\Sigma(\mathcal{U}) = \bigoplus \Sigma_i(\mathcal{U})$, где

$$\Sigma_{n-m-i}(\mathcal{U}) = \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{U})}(\Omega^i(\mathcal{U}),\ \mathrm{Vol}(\mathcal{U})).$$

Элементы $\mathbb{Z}$-градуированного $C^\infty(\mathcal{U})$-модуля $\Sigma(\mathcal{U})$ называются *интегральными формами*, поскольку, как мы вскоре увидим, их можно интегрировать.

Элементы суперпространства $\widehat{\Sigma}(\mathcal{U}) = \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{U})}(\widehat{\Omega}(\mathcal{U}),\ \mathrm{Vol}(\mathcal{U}))$ называются *псевдоинтегральными формами*.

Важные частные случаи.

$\underline{m = 0}$: существует канонический изоморфизм

$$\Omega^n(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathrm{Vol}(\mathcal{U}), \qquad dx_1 \ldots dx_n \longmapsto v_x. \tag{3.20}$$

Этот изоморфизм можно продолжить до изоморфизма $\Omega(\mathcal{U}) \longrightarrow \Sigma(\mathcal{U})$, согласованного с $C^\infty(\mathcal{U})$-действием. В этом случае никаких псевдоформ нет и суперпространство $\Sigma(\mathcal{U})$ наделено естественной структурой суперкоммутативной супералгебры.

В общем случае, как мы увидим ниже, $\Sigma(\mathcal{U})$ — всего лишь $\Omega(\mathcal{U})$-модуль, а не супералгебра.

$\underline{m = 1}$: в этом случае мы можем единообразно обобщить как формы из Ω^i, так и формы из Σ_j, и рассмотреть пространства *интегро-дифференциальных форм* Φ^λ, где $\lambda \in \mathbb{K}$, а $\mathbb{K}$ — основное поле. Пространства Φ^λ превращаются в Ω^i или Σ_j при некоторых значениях параметра λ.

Более точно, пусть $x = (u_1, \ldots, u_n, \xi)$. Рассмотрим $\mathbb{K}$-градуированный Ω-модуль $\Phi = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathbb{K}} \Phi^\lambda$ (мы полагаем, что $\deg \hat{x}_i = 1 \in \mathbb{K}$), порожденный элементами $\hat{\xi}^\lambda$ при всех $\lambda \in \mathbb{K}$. Мы полагаем $\deg \hat{\xi}^\lambda = \lambda$ и $p(\hat{\xi}^\lambda) = \bar{0}$ и накладываем соотношения

$$\hat{\xi}^0 = 1 \quad \text{и} \quad \hat{\xi} \cdot \hat{\xi}^\lambda = \hat{\xi}^{\lambda+1} \quad \text{при всех } \lambda \in \mathbb{K}. \tag{3.21}$$

Определим действие векторных полей ∂_i, $\hat{\partial}_i$ и $\partial_{\hat{\xi}}$ на Φ, полагая

$$\partial_\xi(\hat{\xi}^\lambda) = \partial_i(\hat{\xi}^\lambda) = \hat{\partial}_i(\hat{\xi}^\lambda) = 0 \text{ и } \partial_{\hat{\xi}}(\hat{\xi}^\lambda) = \lambda\hat{\xi}^{\lambda-1}. \tag{3.22}$$

Теперь на Φ заданы естественные действия дифференцирований d, ι_X и L_X, согласованные с действиями их тезок d, ι_X и L_X на Ω.

Ясно, что $\Phi = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathbb{K}} \Phi^\lambda$ — суперкоммутативная супералгебра.

Пусть $\Phi_{\mathbb{Z}} = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathbb{Z}} \Phi^\lambda$. Зададим отображения $\alpha\colon \Omega \to \Phi_{\mathbb{Z}}$ и $\beta\colon \Phi_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Vol}$, положив

$$\alpha(\omega) = \omega, \quad \beta(\hat{u}_1 \ldots \hat{u}_n \hat{\xi}^{-1}) = v_{u,\xi}. \tag{3.23}$$

Ясно, что α и β согласованы со структурой $\Omega^\bullet$-модуля и с операторами d, ι_X и L_X. Из явных формул для базисов модулей $\Omega^\bullet$, $\Sigma_\bullet$ и Φ над Ω^0 мы сразу выводим, что последовательность

$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet \xrightarrow{\alpha} \Phi_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\beta} \Sigma_\bullet \longrightarrow 0 \tag{3.24}$$

точна.

3.7.2. Структура $\Omega(\mathcal{U})$-модуля на $\Sigma(\mathcal{U})$. Пусть M — $\mathbb{Z}$-градуированный $C^\infty(\mathcal{U})$-модуль. Если M — бесконечномерный модуль, то описать произвольные эндоморфизмы модуля M довольно трудно. Поэтому мы выделим суперпространство *операторов конечного типа*

$$\mathrm{End}^f_{C^\infty(\mathcal{U})}(M) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{End}^i_{C^\infty(U)}(M), \tag{3.25}$$

где End^i — суперпространство операторов степени i. Иными словами, операторы конечного типа — это те, которые можно представить в виде конечной суммы операторов степени i.

Каждому оператору $F \in \mathrm{End}^f_{C^\infty(\mathcal{U})}(\Omega^\bullet(\mathcal{U}))$ сопоставим *двойственный оператор* $F^* \in \mathrm{End}^f_{C^\infty(\mathcal{U})}(\Sigma_\bullet(\mathcal{U}))$ с помощью формулы

$$F^*(\sigma)(\omega) = (-1)^{p(F)p(\sigma)}\sigma(F(\omega)) \quad \text{для всех } \omega \in \Omega^\bullet \ \text{ и } \ \sigma \in \Sigma_\bullet. \tag{3.26}$$

Поскольку $\mathrm{Vol}(\mathcal{U})$ является свободным $C^\infty(\mathcal{U})$-модулем с одной образующей, дуализация $F \mapsto F^*$ задает изоморфизм

$$*\colon\ \mathrm{End}^i_{C^\infty(\mathcal{U})}(\Omega^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathcal{U})) \longrightarrow \mathrm{End}^i_{C^\infty(\mathcal{U})}(\Sigma_{\boldsymbol{\cdot}}(\mathcal{U})), \tag{3.27}$$

который называется $*$-*изоморфизмом*.

Зададим на $\Sigma_{\boldsymbol{\cdot}}(\mathcal{U})$ структуру $\Omega^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathcal{U})$-модуля, положив

$$(\omega\sigma)(\omega') = (-1)^{p(\sigma)p(\omega)}\sigma(\omega\omega') \quad \text{для всех } \omega,\ \omega' \in \Omega^{\boldsymbol{\cdot}},\ \sigma \in \Sigma_{\boldsymbol{\cdot}}. \tag{3.28}$$

Другими словами, $\omega\sigma = (l_\omega)^*\sigma$, где l_ω — оператор левого умножения на ω в $\Omega^*(\mathcal{U})$.

Лемма. *Любой $\Omega^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathcal{U})$-линейный оператор $F \in \mathrm{End}^f_{C^\infty(\mathcal{U})}(\Sigma_{\boldsymbol{\cdot}}(\mathcal{U}))$ имеет вид $(l_\omega)^*$ для некоторой формы $\omega \in \Omega^*(\mathcal{U})$.*

Доказательство. Действительно, F^* тоже $\Omega^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathcal{U})$-линейный оператор, но уже на пространстве $\Omega^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathcal{U})$, а значит, F^* совпадает с оператором умножения на $\omega = F^*(1)$. □

3.7.3. Суперобласть $\check{\mathcal{U}}$ и поливекторные поля. Элементы суперкоммутативной супералгебры $E^{\boldsymbol{\cdot}}_{C^\infty(\mathcal{U})}(\mathfrak{vect}(\mathcal{U}))$ называются *поливекторными полями*.

Пусть x — система координат на $\mathcal{U}$. Координаты $\hat{x}$ на $\widehat{\mathcal{U}}_x$ являются, в сущности, дифференциалами dx, и их поведение определено координатами x. Введем теперь двойственные к ним координаты, положив $\check{x}_i = \pi(\partial_i)$. Пусть $\check{\mathcal{U}}_x$ — суперобласть с координатами x, $\check{x}$. Если y — другая система координат на $\mathcal{U}$, то отождествим $\check{\mathcal{U}}_x$ и $\check{\mathcal{U}}_y$ с помощью формул

$$y_i = f_i(x), \qquad \check{y} = \check{x}(I_{yx})^{-1}. \tag{3.29}$$

(За определением матрицы I_{yx} вернитесь к п. 3.2.6.)

Обозначим через $\check{\mathcal{U}}$ класс эквивалентности суперобластей $\check{\mathcal{U}}_x$ относительно указанного отождествления. Морфизм $\mathrm{pr}\colon \check{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$, заданный формулой $\mathrm{pr}^*(x_i) = x_i$, конечно же, не зависит от выбора системы координат x и дает нам возможность отождествить алгебру функций $C^\infty(\mathcal{U})$ с подалгеброй *псевдополивекторных полей* $C^\infty(\check{\mathcal{U}})$.

Определим супералгебру $\Sigma_{(\boldsymbol{\cdot})}(\check{\mathcal{U}}) = \coprod\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} \Sigma_{(\lambda)}(\check{\mathcal{U}})$ *однородных псевдополивекторных полей* степени однородности λ таким же образом, как мы определяли однородные псевдодифференциальные формы.

3.7.4. Связности. Пусть $\mathcal{U}$ — суперобласть, $F = C^\infty(\mathcal{U})$, а M — F-модуль конечного ранга (т. е., как мы увидим, пространство сечений некоторого векторного расслоения E над суперобластью $\mathcal{U}$). Есть два эквивалентных определения связностей.

1) *Связностью* на M (или на E) называется *нечетное* $\mathbb{R}$-линейное дифференцирование $\nabla\colon M \longrightarrow \Omega^1 \otimes_F M$, согласованное с внешним дифференциалом, т. е. такое, что

$$\nabla(fm) = df \otimes m + (-1)^{p(f)} f\nabla(m) \ \text{для всех } f \in F,\ m \in M. \tag{3.30}$$

Поскольку $\mathfrak{vect}(\mathcal{U}) = \Pi(\mathrm{Hom}_F(\Omega^1, F))$, то, дуализируя и меняя четность, мы получим другое определение, которое сейчас и сформулируем. Чтобы увидеть, что оно действительно эквивалентно первому определению, надо в каком-то одном (любом) из определений заменить модуль M на $\Pi(M^*)$.

2) *Связностью* на M (или на E) называется *четное* отображение $\nabla\colon \mathfrak{vect}(\mathcal{U}) \times M \longrightarrow M$, которое F-линейно по первому аргументу, аддитивно по второму аргументу и удовлетворяет следующему соотношению для всех $f \in F$, $m \in M$, $D \in \mathfrak{vect}(\mathcal{U})$, где, как обычно, $\nabla_D(m)$ — это $\nabla(D, m)$:

$$\nabla_D(fm) = D(f)m + (-1)^{p(f)p(D)} f\nabla_D(m). \tag{3.31}$$

Оператор ∇_D называется *ковариантной производной* вдоль векторного поля D. Мы будем переходить от одного определения к другому, как и все: молча, хотя это иногда заставляет задуматься на ровном месте.

Элемент $m \in M$ называется ∇-*горизонтальным*, если $\nabla_D(m) = 0$ при всех $D \in \mathfrak{vect}(\mathcal{U})$. Если существует базис в M, такой что все его элементы ∇-горизонтальны, то ∇ называется *плоской связностью*.

Форма

$$C_\nabla = \frac{1}{2}[\nabla,\ \nabla] = \nabla^2 \in (\Omega^2 \otimes_F \mathrm{End}_F(M))_{\bar{0}} \tag{3.32}$$

называется *формой кривизны* связности ∇. Функторный подход показывает, что **супермногообразие** форм кривизны отвечает всему суперпространству $\Omega^2 \otimes_F \mathrm{End}_F(M)$.

Из определения (3.32) формы кривизны связности ∇ следует, что

$$\text{связность } \nabla \text{ плоская тогда и только тогда, когда } C_\nabla = 0; \tag{3.33}$$

это инвариантное определение плоской связности.

Ясно, что на свободном F-модуле M существует по крайней мере одна (плоская) связность: положим

$$\nabla_0(fm_i) = df \otimes m_i \quad \text{для любых } f \in F \text{ и некоторого базиса } \{m_i\}_{i \in I} \text{ of } M.$$

Действительно, зафиксировав плоскую связность $\nabla_0 = d$ на M, мы видим, что любая связность $\nabla \in \mathrm{Conn}(M)$ имеет вид $\nabla = d + \alpha$, $\alpha \in {}$ $\in \mathrm{Mat}_{\bar{1}}(\mathrm{rk}\, M;\ \Omega^1)$. Матричнозначная форма α называется *формой связности* ∇.

Набор связностей на M составляет таким образом, аффинное суперпространство $\mathrm{Conn}(M) \simeq (\Omega^1 \otimes_F \mathrm{End}_F(M))_{\bar{1}}$. Функторный подход (как в примере 4 п. 2.3.5) показывает, что **супермногообразие** связностей отвечает всему суперпространству $\Omega^1 \otimes_F \mathrm{End}_F(M)$; нечетными параметрами супермногообразия связностей являются элементы пространства $(\Omega^1 \otimes_F \mathrm{End}_F(M))_{\bar{0}}$.

Отображение ∇ можно продолжить на дифференциальные формы высших степеней, а дуализируя, и на интегральные формы:

$$\nabla\colon \Omega^i \otimes_F M \longrightarrow \Omega^{i+1} \otimes_F M, \qquad \nabla\colon M \otimes_F \Sigma_i \longrightarrow M \otimes_F \Sigma_{i+1} \tag{3.34}$$

с помощью формул

$$\begin{gathered}\nabla(\omega \otimes m) = d\omega \otimes m + (-1)^{p(\omega)}\omega \cdot \alpha(m) \text{ при любых } \omega \in \Omega^i,\ m \in M,\\ \nabla(m \otimes \sigma) = T(\nabla(m))(\sigma) + (-1)^{p(m)} m \otimes d\sigma \text{ при любых } \sigma \in \Sigma_i,\ m \in M,\end{gathered} \tag{3.35}$$

где

$$T\colon \Omega^1 \otimes_F M \cong M \otimes_F \Omega^1 \tag{3.36}$$

— скручивающий изоморфизм.

Очевидно, что любую связность можно продолжить до действий и на суперпространстве псевдоформ $\widehat{\Omega}^{\bullet}$, и на суперпространстве Φ.

Пусть (M_i, ∇_i) суть F-модули со связностями, $i = 1, 2$. Определим их *тензорное произведение* $(M_1 \otimes_F M_2, \nabla^{\otimes} = \nabla_1 \otimes \nabla_2)$, а также *модуль гомоморфизмов* $(\mathrm{Hom}_F(M_1, M_2), \nabla^{\mathrm{Hom}})$, положив

$$\begin{aligned}&\nabla^{\otimes}(m_1 \otimes m_2) = \nabla_1(m_1) \otimes m_2 + (-1)^{p(m_1)}(T \otimes 1)(m_1 \otimes \nabla_2(m_2)),\\ &\nabla^{\mathrm{Hom}}(F)(m_1) = \nabla_2(F(m_1)) - (-1)^{p(F)}(1 \otimes F)(\nabla_1(m_1))\end{aligned} \tag{3.37}$$

для любых $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$, $F \in \mathrm{Hom}_F(M_1, M_2)$.

3.7.5. Упражнение (тождество Бианки). Пусть ∇ — связность на M, а ∇^{End} — индуцированная связность на $\mathrm{End}_F(M)$. Докажите, что

$$\nabla^{\mathrm{End}}(C_{\nabla}) = 0. \tag{3.38}$$

3.7.6. Аффинная связность. Связность на $\mathfrak{vect}(\mathcal{U})$ называется *аффинной*. Мы скажем, что аффинная связность *согласована с F-билинейной формой g*, если для любых X, Y, $Z \in \mathfrak{vect}(\mathcal{U})$ выполняется тождество

$$L_X(g(Y, Z)) = (-1)^{p(X)p(g)} g(\nabla_X(Y), Z) + (-1)^{p(X)(p(Y)+p(g))} g(Y, \nabla_X(Z)). \tag{3.39}$$

В дифференциальной геометрии на многообразиях обычно рассматривают связности, согласованные с метрикой, т. е. с симметрической формой. Однако форма g может с тем же успехом быть симплектической (т. е. антисимметрической) или периплектической и при этом симметрической, а также периплектической, но антисимметрической. Изучение связностей, согласованных с антисимметрическими формами, на самом деле интересно даже и на многообразиях.

Мы скажем, что аффинная связность *симметрична*, если

$$\nabla_X(Y) - (-1)^{p(X)p(Y)}\nabla_Y(X) = [X, Y]. \tag{3.40}$$

На многообразиях существует и единственна симметрическая аффинная связность, согласованная с любой заданной (ненулевой) метрикой. Она называется *связностью Леви-Чивиты*. На супермногообразиях ситуация гораздо более замысловатая, см. [LPS].

Задача. Суперизуйте результаты классиков о каноническом виде дифференциальных 1-форм (и уравнений Пфаффа, которые они задают) с простыми особенностями, а затем — теоремы М. Житомирского (см. [Zh]), который описал канонические виды дифференциальных 1-форм (и соответствующих уравнений Пфаффа) с унимодальными особенностями.

Опишите супералгебры Ли, сохраняющие канонические 1-формы (и уравнения Пфаффа). Заметим, что, в отличие от классического случая, супералгебра, сохраняющая одно из уравнений Пфаффа с простой особенностью, проста (в физике ее называют фактором супералгебры Рамона (Ramond) по центру, см. [GLS]).

Литература

[ГрЛе] *Грозман П.*, *Лейтес Д.* Неголономные аналоги тензоров Римана и Вейля для многообразий флагов // Теор. и матем. физика. 2007. Т. 153, № 2. С. 186–219; `arXiv:math.DG/0509399`

[МаКП] *Манин Ю. И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984.

[Уэл] *Уэллс Р.* Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях / Пер. с англ. М.: Мир, 1976.

[DW] Donagi R., Witten E., Supermoduli space is not projected. `arXiv:1304.7798`

[Green] *Green P.* On holomorphic graded manifolds // Proc. AMS. 1982. V. 85. P. 587–590.

[Gr] *Grozman P.* `SuperLie`. `http://www.equaonline.com/math/SuperLie`

[GLS] *Grozman P.*, *Leites D.*, *Shchepochkina I.* Lie superalgebras of string theories // Acta Mathematica Vietnamica. 2001. V. 26, № 1. P. 27–63; `arXiv:hep-th/9702120`

[LPS] *Leites D.*, *Poletaeva E.*, *Serganova V.*, On Einstein equations on manifolds and supermanifolds, J. Nonlinear Math. Physics. 2002. V. 9, № 4. P. 394–425; `arXiv:math.DG/0306209`

[Oal] *Onishchik A. L.* Flag supermanifolds, their automorphisms and deformations // The Sophus Lie Memorial conference (Oslo, 1992). Oslo: Scand. Univ. Press, 1994. P. 289–302.

[Zh] *Zhitomirsky M.* Typical singularities of differential 1-forms and Pfaffian equations // Translations of Mathematical Monographs. V. 113. Providence, RI: American Mathematical Society; Moscow: Mir, 1992. P. 1–285.

Глава 4

Супермногообразия

Изучать супермногообразия, не пользуясь понятиями пучка и окольцованного пространства, практически невозможно: в них заключается суть дела. Тем не менее мы ухитрились даже не упомянуть пучки, когда рассматривали наиболее простые супермногообразия, т. е. суперобласти. Однако в общем случае без пучков не обойтись, хотя нам потребуются только самые первые понятия и определения теории пучков, см. гл. 2.

Супермногообразия, как и многообразия, можно определять тремя способами: в терминах окольцованных пространств; через карты и атласы; с помощью функтора точек, или, говоря попроще, с помощью семейств. Мы опишем все эти определения, а использовать в разных случаях будем то из них, которое больше подходит.

Отметим **важный факт**: множества объектов категорий гладких супермногообразий и гладких векторных расслоений на многообразиях находятся во взаимно однозначном соответствии. Объектов же категории аналитических (и алгебраических) супермногообразий больше за счет деформаций тех объектов, что соответствуют расслоениям, см. [МаКП].

§ 4.0. Пучки и (супер) окольцованные пространства

4.0.1. Примеры. 1) Пусть $\mathcal{W}$ — суперобласть размерности $m|n$, т. е. пара: открытая область W размерности m и супералгебра $C^\infty(\mathcal{W}) = C^\infty(W) \otimes E^\bullet(V)$ для какого-то n-мерного пространства V. Определим пучок $\mathcal{O}_\mathcal{W}$, положив $\mathcal{O}_\mathcal{W}(U) = C^\infty(\mathcal{U})$, где $\mathcal{U}$ — открытая суперобласть, отвечающая открытой области U. Ограничения $r^V_U\colon \mathcal{O}_\mathcal{W}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{O}_\mathcal{W}(\mathcal{U})$ суть просто ограничения функций. Пучок супералгебр $\mathcal{O}_\mathcal{W}$ над W называется *структурным пучком суперобласти* $\mathcal{W}$.

2) Определим пучок $\mathcal{V}ect_\mathcal{W}$ над $\mathcal{W}$, положив $\mathcal{V}ect_\mathcal{W} = \mathfrak{vect}(\mathcal{U})$, т. е. как супералгебру Ли векторных полей над открытой областью $\mathcal{U}$, отвечающую открытому множеству U. Ясно, что $\mathcal{V}ect_\mathcal{W}$ — пучок модулей над пучком супералгебр $\mathcal{O}_\mathcal{W}$.

3) Пучки $\mathcal{O}_\mathcal{W}$-модулей $\mathcal{C}ovect_\mathcal{W}$ и $\Omega^\bullet_\mathcal{W} = \bigoplus\limits_i \Omega^i_\mathcal{W}$ определяются аналогично. Заметим, что $\Omega_\mathcal{W}$ — пучок суперкоммутативных супералгебр, а внешний дифференциал $d\colon \Omega^\bullet_\mathcal{W} \longrightarrow \Omega^\bullet_\mathcal{W}$ является морфизмом пучков.

4) Пусть M — гладкое многообразие. Структурный пучок $\mathcal{O}_M$ задается формулой $\Gamma(U, \mathcal{O}_M) = C^\infty(U)$. Пара $(M, \mathcal{O}_M)$ является, очевидно, простейшим суперокольцованным пространством. Морфизм суперокольцованных пространств $\varphi\colon (M, \mathcal{O}_M) \longrightarrow (N, \mathcal{O}_N)$ полностью задается гладким отображением $\varphi\colon M \to N$. Если же нечетная компонента размерности отлична от 0, необходимо, чтобы задать морфизм, отдельно определить гомоморфизм структурных пучков.

4.0.2. Как склеивать пучки. Часто бывает удобно определять пучок не на всех открытых множествах, а только на какой-то их части. Семейство $\mathcal{B} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ открытых подмножеств топологического пространства X называется *базой топологии* пространства X, если

а) из того, что $U_\alpha, U_\beta \in \mathcal{B}$ следует, что $U_\alpha \bigcap V_\beta \in \mathcal{B}$;

б) любое открытое множество $U \subset X$ представимо в виде $U = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{B}_U} U_\alpha$, где $\mathcal{B}_U = \{U_\alpha \in \mathcal{B} \mid U_\alpha \subset U\}$.

Пусть $\mathcal{B}$ — база топологии пространства X. Предположим, что каждому множеству $U_\alpha \in \mathcal{B}$ мы сопоставили множество $\mathcal{F}(U_\alpha)$, а каждой паре $U_\alpha \subset U_\beta$, где $U_\alpha, U_\beta \in \mathcal{B}$, мы сопоставили отображение ограничения $r^{U_\beta}_{U_\alpha}\colon \mathcal{F}(U_\beta) \longrightarrow \mathcal{F}(U_\alpha)$. Такой набор $\{\mathcal{F}(U_\alpha), r^{U_\beta}_{U_\alpha}\}_{\alpha,\beta\in A}$ мы назовем $\mathcal{B}$-*пучком*, если удовлетворяются все аксиомы пучка, в которых участвуют только открытые множества из семейства $\mathcal{B}$.

Морфизмы $\mathcal{B}$-пучков определяются в точности так же, как и морфизмы пучков.

Лемма. *Пусть $\tilde{\mathcal{F}}$ — это $\mathcal{B}$-пучок. Тогда существует единственный, с точностью до канонического изоморфизма, пучок $\mathcal{F}$ над X, такой что $\mathcal{F}(U_\alpha) = \tilde{\mathcal{F}}(U_\alpha)$ и $r^{U_\beta}_{U_\alpha} = \tilde{r}^{U_\beta}_{U_\alpha}$ при всех $U_\alpha, U_\beta \in \mathcal{B}$. Для любого морфизма $\mathcal{B}$-пучков $\tilde{\varphi}\colon \tilde{\mathcal{F}} \to \tilde{\mathcal{G}}$ существует единственный морфизм пучков $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, который продолжает $\tilde{\varphi}$. Другими словами, пучки на X полностью определяются своими сечениями только над подмножествами $U_\alpha \in \mathcal{B}$.*

Доказательство. Пусть U — открытое подмножество в X. Определим сечение $s \in \mathcal{F}(U)$ как произвольный набор

$$\{s_\alpha \in \tilde{\mathcal{F}}(U_\alpha) \mid U_\alpha \subset U,\ U_\alpha \in \mathcal{B},\ s_\alpha|_{U_\alpha \bigcap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \bigcap U_\beta}\}.$$

Отображения ограничения определяются естественным образом.

Упражнение. Проверьте, что $\mathcal{F}$ — пучок, удовлетворяющий условиям леммы. ☐

4.0.3. Носитель сечения пучка. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок коммутативных групп над X, а $U \subset X$ — открытое подмножество. *Носителем* сечения $s \in \mathcal{F}(U)$ называется наименьшее замкнутое множество $\operatorname{supp} s \subset U$, такое что $s|_{U\setminus \operatorname{supp} s} = 0$. (Носитель любого сечения существует благодаря аксиомам пучка.) Группа сечений $s \in \mathcal{F}(U)$ с компактным носителем будет обозначаться $\mathcal{F}_c(U)$.

Говоря о гладких супермногообразиях (т. е. класса C^∞), мы будем рассматривать только хаусдорфовы пространства X. В этом случае для любого сечения $s \in \mathcal{F}_c(U)$ найдется, причем единственное, сечение $s' \subset \mathcal{F}(X)$, такое что $s'|_U = s$ и $s'_{X \setminus \operatorname{supp} s'} = 0$. Таким образом, имеется каноническое вложение $\mathcal{F}_c(U) \longrightarrow \mathcal{F}_c(X)$. Мы будем отождествлять $\mathcal{F}_c(U)$ с подгруппой в $\mathcal{F}_c(X)$ с помощью этого вложения. Для нехаусдорфовых пространств X, которые встречаются в алгебраической ситуации, такого вложения может и не существовать.

Упражнение. Если $\varphi\colon (X, \mathcal{F}) \longrightarrow (Y, \mathcal{G})$ — морфизм окольцованных пространств, $f \in \Gamma(U, \mathcal{G})$ и $\operatorname{supp} f$ не содержится в открытом множестве $\tilde{\varphi}(X)$, то $\varphi^*(f) = 0$.

§ 4.1. Определение супермногообразий

4.1.1. Супермногообразия. Вещественным *супермногообразием* $\mathcal{M}$ называется суперокольцованное пространство $(M, \mathcal{O}_\mathcal{M})$, где $\mathcal{O}_\mathcal{M}$ — пучок суперкоммутативных супералгебр над хаусдорфовым топологическим пространством M со счетной базой и у каждой точки $m \in M$ есть окрестность U, для которой суперокольцованное пространство $(U, \mathcal{O}_\mathcal{M}|_U)$ диффеоморфно некоторой суперобласти $\mathcal{U} = (U, \mathcal{O}_\mathcal{U})$.

Морфизмом супермногообразий $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ называется морфизм соответствующих суперокольцованных пространств, т. е. φ сохраняет четность супералгебр сечений. Множество морфизмов супермногообразий $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ будет обозначаться символом $\mathrm{Mor}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ [1]. Морфизм $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ называется *диффеоморфизмом*, если существует обратный морфизм ψ, т. е. такой морфизм, что $\varphi \cdot \psi = \mathrm{id}_\mathcal{N}$ и $\psi \cdot \varphi = \mathrm{id}_\mathcal{M}$.

Как и в случае суперобластей, сечения структурного пучка $\mathcal{O}_\mathcal{M}$ будут называться *функциями на супермногообразии* $\mathcal{M}$, а супералгебра таких функций над подсуперобластью $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ будет обозначаться символом $C^\infty(\mathcal{U})$. Окольцованное пространство $(M, \operatorname{cpr} \mathcal{O}_\mathcal{M})$, где $(\operatorname{cpr} \mathcal{O}_\mathcal{M})(U) = \operatorname{cpr}(\mathcal{O}_\mathcal{M}(U))$, является, очевидно, гладким многообразием $(M, \mathcal{O}_M)$. Оно будет называться *подстилающим многообразием* супермногообразия $\mathcal{M}$ и обозначаться просто M или $\mathcal{M}_{rd}$.

Если $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ — морфизм супермногообразий, то соответствующее отображение *подстилающих пространств* будет обозначаться символом $\tilde{\varphi}\colon M \to N$. Пусть $\varphi^*\colon \mathcal{O}_\mathcal{N} \to \mathcal{O}_\mathcal{M}$ — соответствующий морфизм пучков супералгебр.

---

[1] Позднее мы навесим на него дополнительную структуру, соответствующую нечетным координатам, превратив пару $\mathcal{M}or = (\mathrm{Mor}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}or})$ в супермногообразие (как правило, бесконечномерное).

Упражнение. Докажите, что для любого морфизма супермногообразий $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ подстилающее отображение $\tilde{\varphi}\colon M \to N$ является гладким.

Как и в главе про суперобласти, мы можем построить *каноническое вложение* подстилающего многообразия $\operatorname{cem}_M\colon M \to \mathcal{M}$, где M рассматривается как супермногообразие. Тогда для любого морфизма $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ выполняется равенство

$$\varphi \cdot \operatorname{cem}_M = \operatorname{cem}_N \cdot \tilde{\varphi}.$$

4.1.2. Супермногообразие $\mathcal{M}$ называется *связным*, или *односвязным*, или *компактным*, если таково подстилающее многообразие $\mathcal{M}_{rd}$.

Если $\mathcal{M}$ — супермногообразие, то каждому открытому подмножеству M' отвечает супермногообразие $\mathcal{M}' = (M', \mathcal{O}'_\mathcal{M} = \mathcal{O}_\mathcal{M}|M')$. Это супермногообразие называется *открытым подсупермногообразием* в $\mathcal{M}$. Естественным образом определяются *объединения* и *пересечения открытых подсупермногообразий*, так же как и *обратный образ* открытого подсупермногообразия относительно морфизма. *Окрестностью* подмножества $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ называется любое открытое подсупермногообразие $\mathcal{M}'$ в $\mathcal{M}$, такое что $\mathcal{M}_{rd} = M' \supset X$.

Морфизм супермногообразий $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ называется *открытым вложением*, если он задает диффеоморфизм супермногообразия $\mathcal{M}$ на открытое подсупермногообразие $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$. В этом случае мы обычно отождествляем $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}'$.

Открытое подсупермногообразие $\mathcal{U}$ в $\mathcal{M}$ называется *суперобластью* или *подсуперобластью*, если оно диффеоморфно некоторой суперобласти. Если $\mathcal{M}$ — связное супермногообразие, то все его подсуперобласти имеют одну и ту же размерность, которая называется *размерностью супермногообразия* $\mathcal{M}$.

4.1.3. Определение супермногообразий в терминах карт и атласов. Картой $(\mathcal{U}, c)$ на $\mathcal{M}$ называются суперобласть $\mathcal{U}$ вместе с координатным отображением $c\colon \mathcal{U} \to \mathcal{M}$, таким что $\tilde{c}\colon U \to M$ является диффеоморфизмом с открытым подмножеством. Обычно мы отождествляем $\mathcal{U}$ и $c(\mathcal{U})$.

Пусть $(\mathcal{U}_1, c_1)$ и $(\mathcal{U}_2, c_2)$ — две карты, $\tilde{c}_1(U_1), \tilde{c}_2(U_2) \subset M$ и $V = \tilde{c}_1(U_1) \cap \tilde{c}_2(U_2)$. Положим $U'_1 = \tilde{c}_1^{-1}(V) \subset U_1$ и $U'_2 = \tilde{c}_2^{-1}(V) \subset U_2$. Обозначим $\gamma_{U_1U_2}\colon U'_1 \to U'_2$ через $\tilde{c}_2^{-1}\tilde{c}_1$. Ясно, что $\gamma_{U_1U_2}$ — гомеоморфизм.

Координатным преобразованием или переходом от карты $(\mathcal{U}_1, c_1)$ к карте $(\mathcal{U}_2, c_2)$ называется морфизм суперобластей $\gamma_{\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2}\colon \mathcal{U}'_1 \to \mathcal{U}'_2$, такой что его подстилающее отображение совпадает с $\gamma_{\mathrm{U}_1\,\mathrm{U}_2}$.

Атласом называется множество, состоящее из карт $(\mathcal{U}_\alpha, c_\alpha)$, где α пробегает какое-то множество индексов, и семейства координатных преобразований $\gamma_{\alpha\beta} := \gamma_{\mathcal{U}_\alpha\mathcal{U}_\beta}\colon (\mathcal{U}_\alpha, c_\alpha) \longrightarrow (\mathcal{U}_\beta, c_\beta)$, такое что

а) множества $\tilde{c}_\alpha(U_\alpha)$ покрывают M;

б) отображение $\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\beta\delta}\gamma_{\delta\alpha}$ тождественно на каждой подсуперобласти суперобласти $\mathcal{U}_\alpha$, где оно определено;

в) $\gamma_{\alpha\alpha}$ является тождественным отображением при всех α, в частности, $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\beta\alpha}^{-1}$.

Определим *супермногообразие* $\mathcal{M}$ как многообразие M, оснащенное максимальным атласом $\{(\mathcal{U}_\alpha, c_\alpha), \gamma_{\alpha\beta}\}$. Если $\mathcal{M} = (M, \{(\mathcal{U}_a, c_\alpha)\}, \gamma_{\alpha\beta}\})$ и $\mathcal{M}' = (M', \{(\mathcal{U}_{\alpha'}, c_{\alpha'})\}, \gamma_{\alpha'\beta'})\}$ — супермногообразия, то *морфизмом супермногообразий* $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ назовем набор, состоящий из непрерывного отображения $\tilde{\varphi}\colon M \to M'$ и множества морфизмов суперобластей $\varphi_{\alpha\beta}\colon \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{U}_{\alpha'}$, таких что $\varphi_{\alpha\alpha'} \cdot \gamma_{\alpha'\beta'} = \varphi_{\beta\beta'} \cdot \gamma_{\alpha'\beta'}$ при всех α, β, α' и β'.

Упражнение. Докажите, что вышеприведенное определение супермногообразия эквивалентно тому, которое дано в п. 3.3.1.

4.1.4. Произведение супермногообразий. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — супермногообразия, M и N — их подстилающие многообразия. В $M \times N$ рассмотрим топологию, база которой $\mathcal{B}$ состоит из множеств вида $U \times V$, где U и V — подстилающие области суперобластей $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ и $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}$. Определим $\mathcal{B}$-пучок $\mathcal{O}$, положив $\mathcal{O}(U \times V) = C^\infty(\mathcal{U} \times \mathcal{V})$. Благодаря сказанному в п. 4.0.2 найдется пучок $\mathcal{O}_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}}$ суперкоммутативных супералгебр над $M \times N$, такой что $\mathcal{O}_{\mathcal{M}\times\mathcal{N}}|_{U\times V} = \mathcal{O}(U \times V)$, т. е. суперокольцованное пространство $(U \times V, \mathcal{O}_{\mathcal{M}\times\mathcal{N}}|_{U\times V})$ изоморфно суперобласти $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$. Следовательно, суперокольцованное пространство $(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}\times\mathcal{N}})$ — супермногообразие.

4.1.5. Разбиение единицы. Понятие *носителя функции*, или, более общо, *носителя сечения пучка* $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-модулей $\mathcal{F}$ над супермногообразием $\mathcal{M}$, и суперпространства $C^\infty_c(\mathcal{M})$, $\mathcal{F}_c(\mathcal{M})$ определяются естественным образом.

Теорема. *Пусть* $\{\mathcal{V}_\beta\}$ *— открытое покрытие супермногообразия* $\mathcal{M}$, *т. е.* $M = \bigcup\limits_\beta V_\beta$. *Тогда существует множество* $\{\varphi_\alpha\}$, *где* $\varphi_\alpha \in C^\infty(\mathcal{M})_{\bar{0}}$ *при каждом* α, *такое что*

1) $\operatorname{supp}\varphi_\alpha$ *— компакт и принадлежит одному из* V_β; *существует окрестность множества* $\operatorname{supp}\varphi_\alpha$, *являющаяся суперобластью*;

2) *любой компакт* $K \subset M$ *пересекается лишь с конечным числом носителей* $\operatorname{supp}\varphi_\alpha$;

3) $\tilde{\varphi}_\alpha \geqslant 0$ *при всех* α;

4) $\sum\varphi_\alpha = 1$.

Заметим, что сумма в п. 4 определена корректно благодаря условию 2.

Набор функций $\{\varphi_\alpha\}$ называется *разбиением единицы*, *вписанным в покрытие* $\{\mathcal{V}_\beta\}$.

Доказательство. Из теоремы о разбиении единицы на многообразиях [We] следует, что на подстилающем многообразии $\{\psi_\alpha\}$ найдется множество функций $\{\psi_\alpha\}$, удовлетворяющих условиям 1–3. Поскольку $\operatorname{supp}\psi_\alpha \subset V_\alpha$, функция $\varphi'_\alpha \in C^\infty(\mathcal{M})_{\bar{0}}$, такая что $\operatorname{supp}\varphi'_\alpha = \operatorname{supp}\psi_\alpha$ и $\tilde{\varphi}'_\alpha = \psi_\alpha$, существует. Теперь ясно, что функции φ'_α удовлетворяют условиям 1–3.

Положим $\varphi = \sum\varphi'$. Тогда $\tilde{\varphi} = \sum\psi_\alpha = 1$, т. е. φ — обратимая функция. Функции $\varphi_\alpha = \varphi^{-1}\varphi'_\alpha$ удовлетворяют условиям теоремы. □

4.1.6. Следствие (принцип локализации). *Пусть* $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$ *— супермногообразие,* $\mathcal{F}$ *— пучок* $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$*-модулей. Пусть* $K \subset M$ *— замкнутое подмножество,* $\mathcal{U}$ *— открытое подсупермногообразие в* $\mathcal{M}$, *содержащее* K, *и* $f \in \mathcal{F}(U)$. *Тогда существуют открытое подсупермногообразие* $\mathcal{V}$ *и* $h \in \mathcal{F}(M)$, *такие что* $K \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, $\operatorname{supp} h \subset \operatorname{supp} f$, $f|_{\mathcal{V}} = h|_{\mathcal{V}}$.

Более того, можно выбрать функцию h так, что если K — компакт, то и $\operatorname{supp} h$ — компакт.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_\alpha\}$ — разбиение единицы, вписанное в покрытие $\{U, M \setminus K\}$. Положим

$$h = \sum\varphi_\alpha f \in \mathcal{F}(M). \tag{4.1}$$

Ясно, что $h = f$ в окрестности множества K. Если K — компакт, то сумма в формуле (4.1) конечна, а следовательно, и $\operatorname{supp} h$ — компакт. □

В следующем пункте мы покажем, как работает принцип локализации.

4.1.7. Как определять подпучки с помощью глобальных сечений.

Теорема. *Пусть* $\mathcal{F}$ *— пучок* $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$*-модулей.*

1) *Если* $\mathcal{G}$ *— подпучок пучка* $\mathcal{F}$, *то выполняется следующее условие*:

$$\text{если } s = t \text{ при любых } s \in \mathcal{F}(\mathcal{M}) \text{ и } t \in \mathcal{G} \text{ в некоторой} \\ \text{окрестности } U_p \text{ каждой точки } p \in M, \text{ то } s \in \mathcal{G}. \tag{4.2}$$

2) *Для любого* $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}^{-}$*-подмодуля* $I \subset \mathcal{F}(\mathcal{M})$, *удовлетворяющего условию* (4.2), *существует, причем единственный, подпучок* $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$*-модулей* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, *такой что* $\mathcal{G}(\mathcal{M}) = I$.

Доказательство. 1) Пусть $s_p = s|_{U_p}$ для каждой точки $p \in M$. Тогда $s_p = t_p|_{U_p} \in \mathcal{G}(U_p)$. Пользуясь второй аксиомой пучка, мы видим, что $s \in \mathcal{G}(M)$.

2) Для каждого открытого подмножества $U \subset M$ положим

$$\mathcal{H}(U) = \{\, s \in \mathcal{F}(U) \mid s = t \in I \ \text{ для какого-то } t \\ \text{в окрестности каждой точки } p \in U\}.$$

Ясно, что набор множеств $\mathcal{H}(U)$ для всех U определяет пучок $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-модулей и $\mathcal{H}(M) = I$ в силу условия (4.2). Если I имеет вид $I = \mathcal{G}(M)$, то по принципу локализации $\mathcal{G}(U) = \mathcal{H}(U)$, другими словами, $\mathcal{H} = \mathcal{G}$. ☐

4.1.8. Пучки векторных (ковекторных) полей, (псевдо) дифференциальных форм и т. д. Определим $\mathcal{B}$-пучок $\mathit{Vect}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{M}}$ над M, положив $\mathit{Vect}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{M}}(U) = \mathrm{Vect}(\mathcal{U})$ для всех $U \in \mathcal{B}$. Обозначим через $\mathit{Vect}_{\mathcal{M}}$ соответствующий пучок над M. Это пучок $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-модулей. Его сечения $X \in \mathit{Vect}_{\mathcal{M}}(U)$ называются *векторными полями* на $\mathcal{U}$. Символом $\mathit{Vect}(\mathcal{M})$ мы обозначим $C^\infty(\mathcal{M})$-модуль векторных полей над $\mathcal{M}$. Из определений следует, что глобальное векторное поле — это согласованный набор векторных полей над суперобластями $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, где $U \subset \mathcal{B}$.

Аналогичным образом определяются $C^\infty(\mathcal{M})$-модули $\mathit{Covect}(\mathcal{M})$, $\Omega(\mathcal{M})$, $\mathit{Vol}(\mathcal{M})$ и т. д., задающие пучки $C^\infty(\mathcal{M})$-модулей $\mathit{Covect}_{\mathcal{M}}$, $\Omega_{\mathcal{M}}$, $\mathit{Vol}_{\mathcal{M}}$ и т. д.

Упражнение. Для любой открытой подсуперобласти $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ рассмотрим суперобласть $\widehat{\mathcal{U}}$, описанную в п. 3.5.2. Ясно, что если $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, то $\widehat{\mathcal{V}} \subset \widehat{\mathcal{U}}$. Докажите, что суперобласти $\widehat{\mathcal{U}}$ можно склеить в супермногообразие $\widehat{\mathcal{M}}$ и существует морфизм супермногообразий $\mathrm{pr}\colon \widehat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$, такой что $\mathrm{pr}^{-1}(\mathcal{U}) = \widehat{\mathcal{U}}$ для любой суперобласти $\mathcal{U}$. Докажите, что $\widehat{\Omega}(\mathcal{M}) := C^\infty(\widehat{\mathcal{M}})$ — супералгебра псевдодифференциальных форм на $\mathcal{M}$, т. е. супералгебра глобальных сечений пучка псевдодифференциальных форм.

4.1.9. Векторные поля и дифференцирование. Для каждой суперобласти $\mathcal{U}$ положим $\mathit{Vect}(\mathcal{U}) = \mathfrak{der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(\mathcal{U}))$. Определим *естественное отображение* (natural map)

$$\mathrm{nm}\colon \mathit{Vect}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathfrak{der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(\mathcal{M})),$$

положив $X(f)|_{\mathcal{U}} = X|_{\mathcal{U}}(f|_{\mathcal{U}})$ для любых $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$, $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, $X \in \mathit{Vect}(\mathcal{M})$.

Предложение. *Для любого супермногообразия* $\mathcal{M}$ *естественное отображение является изоморфизмом.*

Доказательство. 1) Пусть $X \subset \mathit{Vect}(\mathcal{M})$ и $X \neq 0$. Существуют суперобласть $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, точка $p \in \mathcal{U}$ и функция $f \in C^\infty(\mathcal{U})$, такие что $X(f) \neq 0$ в любой окрестности точки p. Возьмем функцию $h \in C^\infty(\mathcal{M})$, которая совпадает с f в некоторой окрестности точки p. Тогда $X(h) \neq 0$, т. е. $\mathrm{nm}(X) \neq$ $\neq 0$.

2) Пусть $D \in \mathfrak{der}(C^\infty(\mathcal{M}))$. Во-первых, докажем, что если функция $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ равна нулю в некоторой окрестности $\mathcal{U}'$ точки p, то функция $D(f)$ тоже равна нулю там же. По принципу локализации существует функция $\varphi \in C^\infty(\mathcal{M})_{\bar{0}}$, такая что $\varphi = 1$ в окрестности точки p и $\varphi f = 0$.

3) Докажем теперь, что для любой подсуперобласти $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ существует единственное векторное поле $X_{\mathcal{U}} \in \mathit{Vect}(\mathcal{U})$, такое что $D(f)|_{\mathcal{U}} = X_{\mathcal{U}}(f|_{\mathcal{U}})$ для любой $f \in C^\infty(\mathcal{M})$. Множество векторных полей $X_{\mathcal{U}}$ согласованно благодаря доказанному в п. 1 и тем самым задает векторное поле X на $\mathcal{M}$. Ясно, что $\mathrm{nm}(X) = D$.

Пусть $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ и $p \in \mathcal{U}$. Возьмем функцию $h \in C^\infty(\mathcal{M})$, которая совпадает с f в некоторой окрестности точки p. Функция $X_{\mathcal{U}}(f) = D(h)$ не зависит от выбора функции h в этой окрестности точки p. Поэтому в выбранной окрестности точки p функция $D(h)$ определена однозначно. Поскольку эти функции $X_{\mathcal{U}}(f)$ согласованы, мы получаем функцию $X(f) \in C^\infty(\mathcal{U})$. Итак, мы построили желаемый оператор $X_{\mathcal{U}}\colon C^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{U})$. Ясно, что $X_{\mathcal{U}}$ — дифференцирование, т. е. $X_{\mathcal{U}} \in \mathit{Vect}(\mathcal{U})$, что и требовалось. ☐

4.1.10. Касательное и кокасательное пространства. *Касательным пространством* $T_m(\mathcal{M})$ к $\mathcal{M}$ в точке m назовем суперпространство $T_m(\mathcal{U})$, где $\mathcal{U}$ — любая открытая подсуперобласть в $\mathcal{M}$, содержащая точку m. *Кокасательное пространство* $T^*_m(\mathcal{M})$ к $\mathcal{M}$ в точке m определяется как суперпространство, двойственное к $T_m(\mathcal{M})$. Каждому морфизму супермногообразий $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ отвечает его дифференциал — морфизм касательных пространств $D\varphi\colon T_n(\mathcal{N}) \longrightarrow T_{\varphi(n)}(\mathcal{M})$.

§ 4.2. Подсупермногообразия

4.2.1. Регулярные вложения. Морфизм $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ супермногообразий называется *регулярным вложением*, если выполняются следующие условия:

а) множество $\tilde{\varphi}(N) \subset M$ локально замкнуто, т. е. является пересечением открытого и замкнутого подмножеств в M, а $\tilde{\varphi}\colon N \longrightarrow \tilde{\varphi}(N)$ гомеоморфизм;

б) для каждой точки $n \in \mathcal{N}$ найдется окрестность $\mathcal{U}$ точки $\tilde{\varphi}(n)$, такая что и $\mathcal{U}$, и $\mathcal{V} = \varphi^{-1}(\mathcal{U})$ — суперобласти, а $\varphi|_{\mathcal{V}}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ — вложение замкнутой подсуперобласти.

Регулярное вложение называется *замкнутым регулярным вложением*, если множество $\tilde{\varphi}(N)$ замкнуто. Ясно, что регулярное вложение является замкнутым регулярным вложением в открытое подсупермногообразие $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$. Условие б) эквивалентно следующему условию:

б′) морфизм φ является иммерсией в каждой точке $n \in \mathcal{N}$.

Лемма. 1) *Пусть* $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ — *регулярное вложение, и пусть заданы два морфизма* $\psi_1, \psi_2\colon \mathcal{L} \to \mathcal{N}$, *такие что* $\varphi\psi_1 = \varphi\psi_2$. *Тогда* $\psi_1 = \psi_2$.

2) *Пусть* $\varphi_1\colon \mathcal{N} \to \mathcal{L}$ *и* $\varphi_2\colon \mathcal{N} \to \mathcal{L}$ — *морфизмы, такие что* $\varphi =$ $= \varphi_2\varphi_1\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ — *регулярное вложение. Тогда* φ_1 *тоже регулярное вложение. Если* φ — *замкнутое регулярное вложение, то* φ_1 *тоже замкнутое регулярное вложение.*

Доказательство. 1) Ясно, что $\tilde{\psi}_1 = \tilde{\psi}_2$. Поэтому достаточно доказать, что ψ_1 и ψ_2 совпадают локально, т. е. мы можем предположить, что и $\mathcal{L}$, и $\mathcal{M}$ — суперобласти, а $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ — вложение замкнутой суперобласти. Теперь, выбрав подходящие системы координат на $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$, мы можем легко восстановить координатную запись морфизма ψ по координатной записи морфизма φ.

2) Пусть $J(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ суть значения в точке x матриц Якоби морфизмов φ, φ_1, φ_2 соответственно. Тогда $J(x) = J_2(\tilde{\varphi}(x)) \cdot J_1(x)$ и $\operatorname{srk} J(x) \leqslant \operatorname{sdim} \mathcal{N}$ для любых $x \in N$. Условие б$'$) для φ показывает, что $\operatorname{rk} J(x) = \dim \mathcal{N}$ при всех x, так что φ_1 — иммерсия. Поскольку ясно, что морфизм φ_1 инъективен, $(\tilde{\varphi})^{-1} \circ \tilde{\varphi}_2\colon \tilde{\varphi}_1(N) \to N$ — гомеоморфизм. □

4.2.2. Продолжение функции. Покажем, что каждую функцию, заданную на замкнутом подсупермногообразии $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, можно продолжить до функции, заданной на всем супермногообразии $\mathcal{M}$.

Предложение. *Предположим, что* $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ *— замкнутое регулярное вложение. Тогда гомоморфизм* $\varphi^*\colon C^\infty(\mathcal{M}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{N})$ *является эпиморфизмом.*

Доказательство. Покроем $\varphi(\mathcal{N})$ семейством $\{\mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ открытых множеств, таких что $\varphi|_{\varphi^{-1}(\mathcal{V}_\alpha)}$ — вложение замкнутой подсуперобласти для каждого индекса α. Рассмотрим разбиение единицы $\{f_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ на $\mathcal{M}$, вписанное в покрытие $\{\mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \cup \{\mathcal{M}'\}$, где M' — открытое множество, не пересекающееся с $\tilde{\varphi}(N)$. Тогда $\{\varphi(f_\beta)\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ является разбиением единицы на $\mathcal{N}$, вписанным в покрытие $\{\varphi^{-1}(\mathcal{V}_\alpha)\}$, поскольку $\varphi^*(C^\infty(\mathcal{M}')) = 0$ согласно п. 4.0.3. Если $g \in C^\infty(\mathcal{N})$, то $g = \sum(\varphi^* f_\beta)g$ и каждая отличная от нуля функция $(\varphi^* f_\beta)g$ имеет вид $\varphi^*(h_\beta f_\beta)$ для подходящей функции h_β. Итак, $g = \varphi^*(\sum(h_\beta f_\beta))$. □

Упражнение. Если $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ — морфизм супермногообразий и гомоморфизм $\varphi^*\colon C^\infty(\mathcal{N}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ сюръективен, то φ — регулярное замкнутое вложение.

4.2.3. Подсупермногообразия. В этом подпункте мы построим по замкнутому регулярному вложению $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ пару (супермногообразие $\mathcal{K}$, его каноническое вложение i_φ в $\mathcal{M}$). Пару $(\mathcal{K}, i_\varphi)$ мы назовем *замкнутым подсупермногообразием* в $\mathcal{M}$, построенным по замкнутому регулярному вложению φ. Если $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, то мы обозначим $i_\varphi^*(f)$ через $f|_{\mathcal{K}}$ и назовем *ограничением* функции f на $\mathcal{K}$.

Пусть $K = \tilde{\varphi}(N)$ с топологией, индуцированной с M. Для любого открытого подмножества $U \subseteq M$ положим

$$\varphi_U = \varphi|_{\varphi^{-1}(U)}, \quad \mathcal{P}(U) = \{f \in C^\infty(U) | \varphi_U^*(f) = 0\} \text{ и } \mathcal{F}(U) = \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(U)/\mathcal{P}(U).$$

Ясно, что $\mathcal{P}$ — пучок идеалов в $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$, а $\mathcal{F}$ наследует структуру пучка от $\mathcal{P}$: если $\mathcal{W} \supseteq \mathcal{V}$, $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(\mathcal{M})$ и $f_1 \equiv f_2 \pmod{\mathcal{P}_{\mathcal{W}}}$, то $f_1 \equiv f_2 \pmod{\mathcal{P}_{\mathcal{V}}}$, так что канонические проекции $\pi_U\colon \mathcal{O}_{\mathcal{M}} \to \mathcal{F}$ задают пучок алгебр на $\mathcal{M}$. Множество $\mathcal{P}(U)$ содержит все функции, которые обращаются в нуль в некоторой окрестности множества $U \cap K$ (см. п. 4.0.3).

Покажем, что множество $\mathcal{P}(U)$ зависит только от $U \cap K$. Пусть W, V — открытые подмножества в M, такие что $V \subseteq W$ и $V \cap K = W \cap K$. Тогда r_V^W — изоморфизм. Действительно, $V \cap K$ есть замкнутое подмножество W, следовательно (см. п. 4.1.6), для любой функции $g \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(V)$ найдется функция $h \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(W)$, совпадающая с g в окрестности множества K, и любую функцию $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(W)$ можно разложить в сумму $f_1 + f_2$, где $\operatorname{supp} f_1 \subseteq V$, а f_2 обращается в нуль в окрестности множества $W \cap K$ и, следовательно, принадлежит множеству $\mathcal{P}(W)$.

Теперь для любого открытого в K подмножества $U \subseteq K$ положим $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}(U) := \mathcal{F}(V)$, где V — произвольное открытое подмножество в M, которое вырезает U из K. Ясно, что $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ — пучок супералгебр на K. Определим также морфизм пучков $i_\varphi = (\tilde{\imath}, \pi)$, где $\tilde{\imath}\colon K \to M$ — вложение замкнутого подмножества, а $\pi\colon \mathcal{O}_{\mathcal{M}} \to \mathcal{P} = \mathcal{O}_K$ — каноническая проекция.

Теорема. *Пусть* $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ *— замкнутое регулярное вложение. Тогда*

1) *построенное выше окольцованное пространство* $(K, \mathcal{O}_{\mathcal{K}})$ *является супермногообразием, т. е.* $i_\varphi = (\tilde{\imath}, \pi)$ *есть замкнутое регулярное вложение и существует однозначно определенный диффеоморфизм* $\varphi_\pi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{K}$, *такой что* $\varphi = i \circ \varphi_\pi$;

2) *если* $\psi\colon \mathcal{N}' \to \mathcal{N}$ *диффеоморфизм, то пара* $(\mathcal{K}', i'_{\varphi'})$, *определенная замкнутым регулярным вложением* $\varphi' = \varphi \circ \psi$, *совпадает с* $(\mathcal{K}, i_\varphi)$, *а* $\varphi'_\pi = \varphi_\pi \circ \psi$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\varphi}_\pi\colon N \to K$ — ограничение отображения $\tilde{\varphi}$ на K. Для любого открытого множества $U \subseteq K$ отображение

$$\varphi_\pi^*|_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{O}_{\mathcal{K}}(U) = \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(V)/\mathcal{P}(V) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{N}}(\varphi^{-1}(V)) = \mathcal{O}_{\mathcal{N}}(\tilde{\varphi}_\pi^{-1}(U))$$

уже определено. Более того, мы видим, что $\varphi_\pi^*|\mathcal{U}$ инъективно и не зависит от выбора открытого подмножества $V \subset M$, которое вырезает U из K. Согласно предложению 4.2.2 отображение φ_π^* сюръективно; следовательно, φ_π является изоморфизмом окольцованных пространств, а $\mathcal{K}$ — супермногообразие. Оставшаяся часть доказательства стандартна и оставляется читателю. □

Следствие (из теоремы 4.2.3 и предложения 4.2.2). *Если* $\mathcal{K}$ *— замкнутое подсупермногообразие в* $\mathcal{M}$, *а* $h \in C^\infty(\mathcal{K})$, *то существует продолжение* $g \in C^\infty(\mathcal{M})$ *функции* h *с* $\mathcal{K}$ *на все* $\mathcal{M}$, *такое что* $g|_{\mathcal{K}} = h$.

Предостережение. Никакое замкнутое подсупермногообразие в $\mathcal{M}$ никоим образом не определяется своим множеством точек, за исключением того случая, когда $\mathcal{M}$ — многообразие. Ситуация с открытыми подсупермногообразиями, как мы уже видели, полностью противоположна. Они всегда определяются своим подстилающим многообразием и суперразмерностью.

4.2.4. Как задавать замкнутые подсупермногообразия уравнениями.

Лемма. *Пусть* $\mathcal{N}$ — *замкнутое подсупермногообразие в* $\mathcal{M}$, *а* $\mathcal{P}_{\mathcal{N}} = \operatorname{Ker} i^*$ — *пучок идеалов в* $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$, *заданный каноническим вложением* $i\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$. *Тогда*

а) $N = \{m \in M \mid$ *все функции из* $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$ *обращаются в нуль в точке* $m\}$, *и пучок* $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$ *удовлетворяет следующему условию*:

> *для каждой точки* $m \in \mathcal{M}$ *существует локальная система координат* $(\mathcal{U}, x)$ *в окрестности точки* m, *такая что пучок* $\mathcal{J}_{\mathcal{N}}$ *порожден функциями* $\{x_i \mid i \in \Gamma\}$ *для некоторого множества индексов* Γ; (4.3)

б) *пусть* $\psi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ — *морфизм супермногообразий, такой что* $\psi^*(\mathcal{J}_{\mathcal{N}}) = 0$; *тогда существует, причем единственный, морфизм* $\psi_{\mathcal{N}}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{N}$, *такой что* ψ — *сквозное отображение* $\mathcal{L} \to \mathcal{N} \to \mathcal{M}$.

Доказательство. Утверждение а) является немедленным следствием определений.

Докажем утверждение б). Единственность морфизма $\psi_{\mathcal{N}}$ была доказана в гл. 3, так что достаточно проверить существование морфизма $\psi_{\mathcal{N}}$ локально относительно $\mathcal{L}$. Предположим, что $l \in \mathcal{L}$, тогда $0 = (\tilde{\psi}^* f)(l) = \tilde{f}(\tilde{\psi}(l))$ для каждой функции $f \in \mathcal{P}_{\mathcal{N}}$; следовательно, $\tilde{\psi}(l) \in N$ для каждой точки $l \in \mathcal{L}$. Пусть $\mathcal{V}$ — окрестность точки $\tilde{\psi}(l)$, такая что $\mathcal{V}$ и $\psi^{-1}(\mathcal{V})$ суть открытые подсуперобласти, а $\mathcal{V} \cap \mathcal{N}$ — замкнутая подсуперобласть в $\mathcal{V}$. По теореме о координатной записи морфизмов отображение $\psi_{\mathcal{V}}\colon \psi^{-1}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{N}$ существует. Ограничение $\psi|_{\psi^{-1}(\mathcal{V})}$ разлагается в композицию $i \circ \psi_{\mathcal{V}}$. □

Предложение. *Пусть* $\mathcal{J}$ — *пучок идеалов на* $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$, *удовлетворяющий условию* (4.3). *Тогда существует, причем единственное, замкнутое* (*возможно, не связное*) *подсупермногообразие* $\mathcal{N}$ *в* $\mathcal{M}$, *такое что* $\mathcal{J} = \mathcal{P}_{\mathcal{N}}$.

Доказательство. Положим

$$N = \{m \in M \mid f(m) = 0 \ \text{ при всех } f \in \mathcal{J}\}.$$

Ясно, что N — замкнутое подмножество в M. Мы назовем открытое подмножество V в N *регулярным*, если существует подсуперобласть $\mathcal{U}$ в $\mathcal{M}$ с координатами x, такая что $V = N \cap U$, а $\mathcal{J}|_{\mathcal{U}}$ порождается подмножеством координат $\{x_i\}_{i \in \Gamma}$. Благодаря условию (4.3) регулярные множества порождают базу открытых множеств в $\mathcal{N}$.

Над регулярным множеством V структура суперобласти $\mathcal{V}$ вводится естественным образом. Уменьшив при необходимости $\mathcal{U}$, мы можем предположить, что проекция $\mathrm{pr}\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ задается условиями

$$\mathrm{pr}^*(x_i) = x_i \quad \text{при } i \neq \Gamma.$$

Тогда $C^\infty(\mathcal{V}) = C^\infty(\mathcal{U})/\mathcal{J}(\mathcal{U})$ согласно п. 4.2.2. Ясно, что, когда мы уменьшили суперобласть $\mathcal{U}$, это никак не повлияло на $C^\infty(\mathcal{V})$. Так что $C^\infty(\mathcal{U})$ не зависит от выбора подсуперобласти $\mathcal{U}$.

Из п. 4.2.2 следует также, что на $\mathcal{N}$ определен пучок супералгебр $\mathcal{O}_{\mathcal{N}}$, такой что $\mathcal{O}_{\mathcal{N}}(V) = C^\infty(\mathcal{V})$ для любого регулярного множества V. Этот пучок определяет супермногообразие $\mathcal{N}$ с базой N и каноническое замкнутое регулярное вложение $\mathcal{N} \to \mathcal{M}$. Из конструкции следует, что $\mathcal{J}_{\mathcal{N}} = \mathcal{J}$. Единственность супермногообразия $\mathcal{N}$ вытекает из п. б) леммы. □

Примеры. 1) В $\mathcal{M} = \mathcal{R}^{2|2}$ с координатами u, v, ξ, η зададим подсупермногообразие $\mathcal{N}$ уравнениями

$$uv + \xi\eta = 1, \qquad u\xi + v\eta = 0.$$

Другими словами, мы рассматриваем в $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ пучок идеалов $\mathcal{J}_{\mathcal{N}}$, порожденный функциями $f = uv + \xi\eta - 1$ и $g = u\xi + v\eta$. Легко проверить, что пучок $\mathcal{J}_{\mathcal{N}}$ удовлетворяет условию (4.3).

Действительно, пусть $p = (u_0, v_0)$ — точка в $\mathbb{R}^2$, такая что $f(p) = u_0v_0 - 1 = 0$. Тогда $u_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$. В точке p дифференциалы df и dg имеют вид $df = du \cdot v_0 + u_0dv$ и $dg = u_0d\xi + v_0d\eta$, а следовательно, они линейно независимы.

2) Для того же самого суперпространства $\mathcal{M} = \mathcal{R}^{2|2}$ определим другой пучок идеалов в $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$, порожденный функциями

$$f_1 = uv + \xi\eta, \qquad g_1 = u\xi + v\eta.$$

Тогда в точке $p = (0, 0)$ условие (4.3) не выполняется. Поэтому функции f_1 и g_1 задают замкнутое подсупермногообразие только в проколотом суперпространстве $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M} \setminus \{p\}$.

В следующих двух подпунктах мы дадим два способа построения супермногообразий, основанных на предложении из п. 4.2.4.

4.2.5. Обратный образ трансверсального подсупермногообразия.

Если $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ — регулярное вложение, то соответствующий морфизм касательных пространств $D\varphi\colon T_n(\mathcal{N}) \longrightarrow T_{\varphi(n)}(\mathcal{M})$ является вложением и мы можем отождествить $T(\mathcal{N})$ с подсуперпространством $D\varphi(T_n(\mathcal{N}) \subset T_n(\mathcal{M})$.

Предположим, что $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ — замкнутое подсупермногообразие, и пусть задан морфизм супермногообразий $\psi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{M}$. Морфизм ψ называется *трансверсальным к подсупермногообразию* $\mathcal{N}$ в точке $l \in \mathcal{L}$, если либо $\tilde{\psi}(l) \notin N$, либо $D\psi(\mathcal{T}_l(\mathcal{L})) \oplus \mathcal{T}_{\psi(l)}(\mathcal{N}) = \mathcal{T}_{\psi(l)}(\mathcal{M})$.

Лемма. *Предположим, что морфизм* $\psi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ *трансверсален замкнутому подсупермногообразию* $\mathcal{N}$ *во всех точках* $l \in \mathcal{L}$. *Пусть* $\mathcal{I}_{\mathcal{N}}$ — *пучок идеалов в* $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$, *который выделяет подсупермногообразие* $\mathcal{N}$, *а* $\mathcal{I}$ — *пучок идеалов в* $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$, *порожденный образом* $\psi^*(\mathcal{I}_{\mathcal{N}})$. *Тогда* $\mathcal{I}$ *выделяет замкнутое подсупермногообразие* $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$.

Доказательство. Достаточно проверить, что $\mathcal{I}$ удовлетворяет условию (4.3). Как и в части б) леммы из п. 4.2.4, имеем

$$\psi^{-1}(N) = \{l \in L \mid \tilde{f}(l) = 0 \text{ для любого } f \in \mathcal{I}\}.$$

Для любой точки $n \in N$ рассмотрим карту $(\mathcal{U}, x)$, такую что идеал $\mathcal{I}_{\mathcal{N}}|_{\mathcal{U}}$ порожден функциями $\{x_i\}_{i\in\Gamma}$ для некоторого непустого множества Γ. Тогда функции $\{\varphi^*(x_i)\}_{i\in\Gamma}$ порождают $\mathcal{I}|_{\psi^{-1}(\mathcal{U})}$ и могут быть включены в локальную систему координат в окрестности любой точки $l \in \tilde{\psi}^{-1}(n)$. Это возможно благодаря трансверсальности морфизма ψ. ☐

Мы обозначим подсупермногообразие $\mathcal{L}'$ символом $\psi^{-1}(\mathcal{N})$. Легко проверить, что подстилающее многообразие этого супермногообразия совпадает с $\tilde{\psi}^{-1}(N)$.

4.2.6. Теорема о морфизмах постоянного ранга. Пусть $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ — морфизм суперобластей. Скажем, что *ранг морфизма* φ *постоянен*, если у подмодуля $D^{\perp} := C^{\infty}(\mathcal{U})\varphi^*(\Omega^1(\mathcal{V}))$ есть дополняемый базис (в терминах книги [МаКП]: если подмодуль прямой).

4.2.6а. Упражнение. 1) Ранг морфизма φ постоянен тогда и только тогда, когда матрицу частных производных J_{xy}, соответствующую системам координат x и y на $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ соответственно, можно представить в виде $J_{xy} = AIB$, где A и B — обратимые матрицы, а I — матрица с элементами из основного поля.

2) Ранг произведения матриц постоянного ранга не обязательно постоянен.

4.2.6б. Теорема (о морфизмах постоянного ранга). *Любой морфизм постоянного ранга* $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ *можно представить в виде композиции* $\varphi = i \circ \mathrm{pr}$, *где* $\mathrm{pr}\colon \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ — *субмерсия, а* $i\colon \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ — *иммерсия.*

Иначе говоря, на $\mathcal{U}$ *и* $\mathcal{V}$ *имеются системы координат* x *и* y, *такие что для любого индекса* j *либо* $\varphi^*(y_j) = 0$, *либо* $\varphi^*(y_j) = x_{\sigma(j)}$ *для некоторой перестановки индексов* σ, *причем все индексы* $\sigma(j)$ *различны.*

Доказательство. Ясно, что $dD^{\perp} \subset \Omega(\mathcal{U})D^{\perp}$, так что $D^{\perp}$ определяет инволютивное распределение на $\mathcal{U}$. Из теоремы Фробениуса для супермногообразий (см. п. 5.1.3), впервые доказанной В. Шандером в работе [Sha3], следует, что на $\mathcal{U}$ имеется система координат x и подмножество индексов Γ, такие что $\{dx_j \mid j \in \Gamma\}$ порождают $D^{\perp}$. Рассмотрим замкнутую подсуперобласть $\mathcal{U}_{\Gamma}$ в $\mathcal{U}$, выделяемую уравнениями $\{x_j = 0 \mid j \in \Gamma\}$. Пусть

$$\mathrm{pr}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}_{\Gamma}, \quad \text{где } \mathrm{pr}(x_j) = x_j \text{ при } j \notin \Gamma,$$

— естественная проекция, а $i := \varphi|_{\mathcal{U}_{\Gamma}} \to \mathcal{V}$.

Положим $\psi = i \circ \mathrm{pr}$. Так как формы $\{dx_j \mid j \in \Gamma\}$ порождают $D^{\perp}$, получаем, что i — иммерсия.

Докажем, что $\varphi = \psi = i \circ \mathrm{pr}$. Достаточно проверить, что

$$h := \varphi^*(f) - \psi^*(f) = 0 \text{ для любого элемента } f \in C^{\infty}(\mathcal{V}).$$

По определению $h|_{\mathcal{U}_{\Gamma}} = 0$, а поскольку $dh \in D^{\perp}$, мы получаем $\dfrac{\partial h}{\partial x_r} = 0$ при $r \in \Gamma$. Проводя индукцию по числу переменных, можно считать, что $|\Gamma| = 1$. Теперь $h = 0$ благодаря п. 4.2.6. ☐

4.2.7. Прообраз точки.

Лемма. *Пусть* $\psi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ — *морфизм супермногообразий и* $m \in \mathcal{M}$. *Пусть для любой точки* $l \in \mathcal{L}$, *такой что* $\psi(l) = m$, *морфизм* ψ *имеет постоянный ранг в окрестности точки* l. *Пусть* $\mathcal{I}$ — *пучок идеалов в* $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$, *порожденный образом* $\psi^*(\mathcal{I}_m)$. *Тогда* $\mathcal{I}$ *определяет замкнутое подсупермногообразие в* $\mathcal{L}$.

Это супермногообразие будет обозначаться символом $\psi^{-1}(m)$; очевидно, что его подстилающее многообразие — действительно прообраз точки $\tilde{\psi}^{-1}(m)$.

Доказательство. Используя теорему о морфизмах постоянного ранга из 4.2.6б, мы можем легко проверить, что пучок идеалов $\mathcal{I}$ удовлетворяет условию (4.3), а следовательно, определяет некоторое подсупермногообразие. ☐

§ 4.3. Семейства

4.3.1. В анализе на многообразиях семейства объектов какого-нибудь фиксированного типа часто играют важную роль. Эти семейства зависят (обычно гладко) от одного или нескольких параметров. Например, это может быть семейство гладких отображений $\varphi_t\colon N \to M$, семейство векторных полей X_t на M, семейство систем координат $\{x_t\}$, которые гладко зависят от t, и т. д.

В этом параграфе мы дадим несколько примеров, которые показывают, как определять семейство в суперслучае. Заметим, что семейства могут зависеть от нечетных параметров точно так же, как и от четных. Символом pt мы обозначим супермногообразие $\mathcal{R}^{0|0}$, состоящее из одной точки.

4.3.2. Семейства морфизмов. Пусть $\mathcal{T}$ — супермногообразие, которое мы будем называть супермногообразием параметров. Назовем $\mathcal{T}$-*семейством морфизмов* $\varphi_{\mathcal{T}}\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ произвольный морфизм супермногообразий $\varphi\colon \mathcal{T} \times \mathcal{N} \to \mathcal{M}$.

Пусть $\alpha\colon \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ — морфизм супермногообразий. Обозначим через φ^α $\mathcal{S}$-семейство морфизмов $\varphi^\alpha_{\mathcal{S}}\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$, определенное формулой

$$\varphi^\alpha = \varphi \circ (\alpha \times \mathrm{id})\colon \mathcal{S} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{T} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}.$$

Мы скажем, что семейство φ^α получается из семейства φ с помощью *замены параметра* (или *параметризации*) α.

Если $\alpha\colon\ \mathrm{pt} \to \mathcal{T}$ — вложение точки, то *значением морфизма* φ *в точке* pt называется морфизм $\varphi^\alpha_{\mathrm{pt}}\colon\ \mathrm{pt} \times \mathcal{N} = \mathcal{N} \to \mathcal{M}$.

Замечание. Семейство морфизмов супермногообразий никоим образом не определяется множеством своих значений в точках.

Мы будем также использовать эквивалентное, но более симметричное определение $\mathcal{T}$-семейства морфизмов из $\mathcal{N}$ в $\mathcal{M}$, в котором вместо морфизма $\varphi\colon \mathcal{T} \times \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ мы рассматриваем морфизм

$$\varphi'\colon \mathcal{T} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{T} \times \mathcal{M},$$

согласованный с проекциями на $\mathcal{T}$, т. е. такой, что $\mathrm{pr}^{\mathcal{T}\times\mathcal{N}}_{\mathcal{T}} = \mathrm{pr}^{\mathcal{T}\times\mathcal{M}}_{\mathcal{T}} \circ \varphi'$. Соответствие $\varphi \leftrightarrow \varphi'$, очевидно, взаимно однозначно. Действительно,

$$\varphi' = \mathrm{pr}^{\mathcal{T}\times\mathcal{N}}_{\mathcal{T}} \times \varphi, \qquad \varphi = \mathrm{pr}^{\mathcal{T}\times\mathcal{M}}_{\mathcal{M}} \circ \varphi'.$$

Если $\alpha\colon \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ морфизм (репараметризация), то морфизм $(\varphi^\alpha)'$ определяется как сквозное отображение

$$(\varphi^\alpha)'\colon \mathcal{S} \times \mathcal{N} \xrightarrow{(\mathrm{Id}_{\mathcal{S}} \times \alpha) \times \mathrm{Id}_{\mathcal{N}}} \mathcal{S} \times \mathcal{T} \times \mathcal{N} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathcal{S}} \times \varphi} \mathcal{S} \times \mathcal{T} \times \mathcal{M} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathcal{S}} \times \mathrm{pr}} \mathcal{S} \times \mathcal{M}.$$

Пусть $\varphi_{\mathcal{T}}\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ и $\psi_{\mathcal{T}}\colon \mathcal{M} \to \mathcal{L}$ — семейства морфизмов. Их композиция

$$(\psi \circ \varphi)'_{\mathcal{T}}\colon \mathcal{T} \times \mathcal{N} \xrightarrow{\varphi'} \mathcal{T} \times \mathcal{M} \xrightarrow{\psi'} \mathcal{T} \times \mathcal{L}$$

определена естественным образом.

$\mathcal{T}$-семейство морфизмов $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ называется $\mathcal{T}$-*семейством диффеоморфизмов*, если существует $\mathcal{T}$-семейство морфизмов $\psi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, такое что $\varphi\psi = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ и $\psi\varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{N}}$, т. е. если $\varphi'\colon \mathcal{T} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{T} \times \mathcal{M}$ — диффеоморфизм.

Ясно, что $(\varphi\psi)^\alpha = \varphi^\alpha \circ \psi^\alpha$ и морфизм $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ можно рассматривать как pt-семейство морфизмов.

Каждому супермногообразию $\mathcal{T}$ отвечает $\mathcal{T}$-семейство морфизмов φ^{vpt}, где $\mathrm{vpt}\colon \mathcal{T} \to \mathrm{pt}$ — сжатие в точку pt. Другими словами,

$$\varphi^{\mathrm{vpt}}_{\mathcal{T}} = \varphi \circ \mathrm{pr}_{\mathcal{N}}\colon \mathcal{T} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}.$$

Это семейство морфизмов будет называться *постоянным семейством*.

4.3.3. Семейства точек. $\mathcal{T}$-*семейством точек* супермногообразия $\mathcal{M}$ назовем $\mathcal{T}$-семейство морфизмов $p^{\mathcal{T}}\colon\ \mathrm{pt} \to \mathcal{M}$, т. е. морфизм

$$p\colon \mathcal{T} \times \mathrm{pt} \cong \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{M}.$$

Репараметризация в семействе точек определяется формулой $p^\alpha = p \circ \alpha$. Мы будем обычно кратко говорить «$\mathcal{T}$-точка супермногообразия $\mathcal{M}$» вместо «$\mathcal{T}$-семейство точек супермногообразия $\mathcal{M}$». Множество $\mathcal{T}$-точек супермногообразия $\mathcal{M}$ будет обозначаться символом $P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T})$.

Мы будем часто обозначать $\mathcal{T}$-точки супермногообразия $\mathcal{M}$ теми же буквами, что и обычные точки, например, если $m \in \mathcal{M}$, то постоянное $\mathcal{T}$-семейство точек m^{vpt}, так же как и семейство морфизмов, которое оно определяет, мы часто будем обозначать просто символом m. Мы надеемся, что это не приведет к недоразумениям.

Каждое $\mathcal{T}$-семейство морфизмов $\varphi_{\mathcal{T}}\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, очевидно, задает отображение точек $\psi\colon P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T}) \longrightarrow P_{\mathcal{N}}(\mathcal{T})$, т. е. композицию

$$\psi = \varphi \circ m^{\mathrm{vpt}}\colon \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}.$$

4.3.4. Семейства функций. Назовем $\mathcal{T}$-*семейством функций* на супермногообразии $\mathcal{M}$ любую функцию f на $\mathcal{T} \times \mathcal{M}$. Суперпространство $\mathcal{T}$-семейств функций на $\mathcal{M}$ будет обозначаться символом $C^\infty(\mathcal{M};\, \mathcal{T})$. Назовем $\mathcal{T}$-*семейством четных* (*нечетных*) *функций* на $\mathcal{M}$ четный (нечетный) элемент из $C^\infty(\mathcal{M};\, \mathcal{T})$.

Если $\alpha\colon \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ — репараметризация, $\beta = \alpha \times \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$ и $f \in C^\infty(\mathcal{M};\, \mathcal{T})$, то $f^\alpha = \beta^*(f) \in C^\infty(\mathcal{M};\, \mathcal{S})$.

Каждая $\mathcal{T}$-точка m определяет некий морфизм $m^*\colon C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{T}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{T})$. Функция $m^*(f)$ называется *значением* функции f в точке m.

Упражнение. 1) Выведите из теоремы о координатной записи морфизмов, что $\mathcal{T}$-семейства четных функций на $\mathcal{M}$ соответствуют семействам морфизмов $\mathcal{M} \to \mathcal{R}^{1|0}$.

2) Существует ли семейство морфизмов, которое описывает данное $\mathcal{T}$-семейство нечетных функций на $\mathcal{M}$?

4.3.5. Семейства векторных и ковекторных полей. Определим $\mathcal{T}$-*семейство векторных полей* $X_{\mathcal{T}}$ на $\mathcal{M}$ как векторное поле X на $\mathcal{T} \times \mathcal{M}$, такое что $X(f)=0$ для любой функции $f\in C^\infty(\mathcal{T})\subset C^\infty(\mathcal{M};\mathcal{T})$. Говоря неформально, X направлено вдоль слоев проекции $\mathcal{T}\times\mathcal{M}\to\mathcal{T}$.

Обозначим $C^\infty(\mathcal{M},\mathcal{T})$-модуль $\mathcal{T}$-семейства векторных полей на $\mathcal{M}$ символом $\mathfrak{vect}(\mathcal{M};\mathcal{T})$.

Упражнение. Пусть $\mathcal{M}^{p|q}$ — суперобласть с координатами x. Докажите, что векторные поля $\partial_i := \partial x_i$ образуют базис в $C^\infty(\mathcal{M};\mathcal{T})$-модуле $\mathfrak{vect}(\mathcal{M};\mathcal{T})$.

Лемма. *Пусть* $\alpha\colon\mathcal{S}\to\mathcal{T}$ *— репараметризация, а* $X\in\mathcal{V}ect(\mathcal{M},\mathcal{T})$. *Существует, причем единственное,* $\mathcal{S}$*-семейство векторных полей* X^α*, такое что* $X^\alpha(\alpha^*(f))=\alpha^*(X(f))$ *для любой открытой подсуперобласти* $\mathcal{N}\subset\mathcal{M}$ *и любой функции* $f\in C^\infty(\mathcal{N})\subset C^\infty(\mathcal{T}\times\mathcal{N})$.

Доказательство. Единственность семейства X^α очевидна, поскольку значения семейства X^α на $C^\infty(\mathcal{T})$ и $C^\infty(\mathcal{M})$ зафиксированы. Достаточно проверить существование семейства X^α в случае, когда $\mathcal{M}$ — суперобласть. Но для суперобластей оно немедленно следует из упражнения. Ясно, что $X^\alpha(\alpha^*(f))=\alpha^*(X(f))$ для любой функции $f\in C^\infty(\mathcal{M},\mathcal{T})$, т. е. дифференцирование $(X,f)\longrightarrow X(f)$ согласовано с репараметризацией α. □

Замечание. Легко отождествить $\mathcal{T}$-семейство векторных полей на $\mathcal{M}$ с дифференцированием $d\colon C^\infty(\mathcal{M})\longrightarrow C^\infty(\mathcal{T}\times\mathcal{M})$, так что для репараметризации у нас есть только одна возможность. Ее существование гарантировано леммой.

Суперпространство $\mathcal{T}$-*семейства ковекторных полей* на $\mathcal{M}$ определяется как фактормодуль

$$\mathrm{Covect}(\mathcal{M};\mathcal{T}) := \mathrm{Covect}(\mathcal{M}\times\mathcal{T})\ /\ C^\infty(\mathcal{T}\times\mathcal{M})(dC^\infty(\mathcal{M})).$$

Морфизм $C^\infty(\mathcal{T})$-модулей $d\colon C^\infty(\mathcal{M};\mathcal{T})\longrightarrow\mathrm{Covect}(\mathcal{M};\mathcal{T})$ — четный дифференциал — определяется формулой

$$\langle X, df\rangle = X(f) \text{ для любых } X\in\mathfrak{vect}(\mathcal{M};\mathcal{T}) \text{ и } f\in C^\infty(\mathcal{M};\mathcal{T}).$$

Ясно, что морфизм d согласован с репараметризациями.

Предложение. *Пусть* $\varphi\colon\mathcal{T}\times\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{N}$ *есть* $\mathcal{T}$*-семейство морфизмов. Тогда существует, причем единственный, морфизм* $C^\infty(\mathcal{T})$*-модулей* $\varphi^*\colon\mathrm{Covect}(\mathcal{N};\mathcal{T})\longrightarrow\mathrm{Covect}(\mathcal{M};\mathcal{T})$*, такой что*

а) $\varphi^*(f\alpha)=\varphi^*(f)\varphi^*(\alpha)$ *для любых* $f\in C^\infty(\mathcal{N};\mathcal{T})$ *и* $\alpha\in\mathrm{Covect}(\mathcal{N};\mathcal{T})$,

б) $\varphi^*(df)=d\varphi^*(f)$.

Если морфизм $\varphi\colon\mathcal{T}\times\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{T}\times N$ *является открытым вложением, т.е.* φ *— семейство открытых вложений, то существует, причем единственный, морфизм* $\varphi^*\colon\mathfrak{vect}(\mathcal{N};\mathcal{T})\longrightarrow\mathfrak{vect}(\mathcal{M};\mathcal{T})$*, такой что*

$$\varphi^*(Xf)=\varphi^*(X)(\varphi^*(f))\quad\text{для любых } f\in C^\infty(\mathcal{N};\mathcal{T}).$$

Доказательство очевидно в случае, когда $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — суперобласти, а общий случай сводится к этому с помощью клея. □

Упражнение. Дайте определение $\mathcal{T}$-семейства (псевдо)дифференциальных $\Omega^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathcal{M};\mathcal{T})$ и (псевдо)интегральных форм $\Sigma^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathcal{M};\mathcal{T})$ на $\mathcal{M}$ и опишите структуры $C^\infty(\mathcal{M};\mathcal{T})$-модулей в этих семействах.

4.3.6. Касательные и кокасательные векторы в $\mathcal{T}$-точках супермногообразия $\mathcal{M}$. Пусть $m\colon\mathcal{T}\to\mathcal{M}$ есть $\mathcal{T}$-точка супермногообразия $\mathcal{M}$. Определим $C^\infty(\mathcal{T})$-модуль $T_m(\mathcal{M})$ векторов, касательных к $\mathcal{M}$ в точке m. Неформально говоря, каждый элемент $X\in T_m(\mathcal{M})$ должен сопоставить каждой точке $p\in\mathcal{T}$ касательный вектор $X_p\in T_{m(p)}(\mathcal{M})$.

1) Предположим, что $\mathcal{M}$ — суперобласть. Рассмотрим $C^\infty(\mathcal{T})$ как $C^\infty(\mathcal{M})$-алгебру со структурой, заданной морфизмом $m^*\colon C^\infty(\mathcal{M})\to C^\infty(\mathcal{T})$. Положим

$$T_m(\mathcal{M}) = C^\infty(\mathcal{T})\otimes_{C^\infty(\mathcal{M})}\mathcal{V}ect(\mathcal{M})\quad\text{и}\quad T^*_m(\mathcal{M}) = C^\infty(\mathcal{T})\otimes_{C^\infty(\mathcal{M})}\mathrm{Covect}(\mathcal{M}).$$

Ясно, что $T_m(\mathcal{M})$ — свободный $C^\infty(\mathcal{T})$-модуль с тем же самым базисом $\{\partial_i\}$, что и $C^\infty(\mathcal{M})$-модуль $\mathfrak{vect}(\mathcal{M})$. В частности, если $\mathcal{M}'$ — открытая подсуперобласть в $\mathcal{M}$, содержащая $m(\mathcal{T})$, то $T_m(\mathcal{M})=T_m(\mathcal{M}')$.

2) Пусть m есть $\mathcal{T}$-точка, такая что $m(\mathcal{T})$ содержится в открытой подсуперобласти $\mathcal{U}\subset\mathcal{M}$. Положим $T_m(\mathcal{M})=T_m(\mathcal{U})$. Согласно аргументам в похожих случаях, приведенных выше $T_m(\mathcal{M})$ не зависит от выбора суперобласти $\mathcal{U}$.

3) Пусть m — произвольная $\mathcal{T}$-точка супермногообразия $\mathcal{M}$. На $\mathcal{T}$ рассмотрим пучок $T_{\mathcal{M}}$, такой что $T_{\mathcal{M}}(\mathcal{T}_0)=T_{m|\mathcal{T}_0}(\mathcal{M})$ для любой открытой подсуперобласти $\mathcal{T}_0\subset\mathcal{T}$, образ которой под действием морфизма m содержится в суперобласти $\mathcal{U}\subset\mathcal{M}$. Из п. 4.0.3 следует, что такой пучок существует и определен однозначно.

Теперь положим $T_m(\mathcal{M})=T_{\mathcal{M}}(\mathcal{T})$. Другими словами, любой касательный вектор $X\in T_m(\mathcal{M})$ представляет собой множество касательных векторов $X^{\mathcal{T}_0}\in T_{m|\mathcal{T}_0}(\mathcal{M})$, согласованных с пересечениями.

Аналогично определяется $C^\infty(\mathcal{T})$-модуль $T^*_m(\mathcal{M})$.

Канонические морфизмы взятия значения $\mathfrak{vect}(\mathcal{M};\mathcal{T})\longrightarrow T_m(\mathcal{M})$ и $\mathrm{Covect}(\mathcal{M};\mathcal{T})\longrightarrow T^*_m(\mathcal{M})$ определяются естественным образом.

Упражнение. Пусть $m'\colon\mathcal{T}\longrightarrow\mathcal{T}\times\mathcal{M}$ есть морфизм, соответствующий морфизму m, и пусть $I_m\subset C^\infty(\mathcal{T}\times\mathcal{M})$ — соответствующий идеал. Докажите, что

а) сквозной морфизм $C^\infty(\mathcal{M};\mathcal{T})\xrightarrow{\delta}\mathrm{Covect}(\mathcal{M};\mathcal{T})\longrightarrow T^*_m(\mathcal{M})$ задает изоморфизм $I_m/I_m^2\simeq T^*_m(\mathcal{M})$;

б) $T_m(\mathcal{M})=\{D\colon C^\infty(\mathcal{M};\mathcal{T})\longrightarrow C^\infty(\mathcal{T})\mid D(f)=0$ для любых $f\in C^\infty(\mathcal{T})\}$; $D(fg)=D(f)m^*(g)+(-1)^{p(f)p(D)}m^*(f)D(g)$ для любых $f,g\in C^\infty(\mathcal{M};\mathcal{T})\}$.

Указание. Воспользуйтесь принципом локализации.

Заметим, что $C^\infty(\mathcal{M})$-модуль $\mathfrak{vect}(\mathcal{M})$ совпадает с $T_{\mathrm{id}_\mathcal{M}}(\mathcal{M})$, где $\mathrm{id}_\mathcal{M}$ есть $\mathcal{M}$-точка супермногообразия $\mathcal{M}$, соответствующая тождественному отображению $\mathrm{id}_\mathcal{M}$. Другими словами, любое векторное поле на $\mathcal{M}$ является касательным вектором в точке $\mathrm{id}_\mathcal{M}$, т. е. семейством касательных векторов, зависящим от самого супермногообразия.

То же самое верно для элементов из $\mathrm{Covect}(\mathcal{M})$, $\Omega(\mathcal{M})$, $\mathrm{Vol}(\mathcal{M})$ и тензорных полей другого типа.

4.3.7. Дифференциал $\mathcal{T}$-семейства морфизмов. Пусть φ есть $\mathcal{T}$-семейство морфизмов, $n\colon \mathcal{T}\to\mathcal{N}$ есть $\mathcal{T}$-точка на $\mathcal{N}$ и $\varphi(n)$ — соответствующая $\mathcal{T}$-точка супермногообразия $\mathcal{M}$. Определим $C^\infty(\mathcal{T})$-модули морфизмов $D\varphi\colon T_n(\mathcal{N})\longrightarrow T_{\varphi(n)}\mathcal{M}$ и $D^*\varphi\colon T^*_{\varphi(n)}\mathcal{M}\longrightarrow T^*_n(\mathcal{N})$ формулами

$$D\varphi(X)(f)=X(\varphi^*(f)),$$

где $X\in T_n(\mathcal{N})$ рассматривается как оператор $X\colon C^\infty(\mathcal{N};\mathcal{T})\longrightarrow C^\infty(\mathcal{T})$ и

$$D^*\varphi(fdg)=\varphi^*(f)d\varphi^*(g),\quad \text{где } g,\, f\in C^\infty(\mathcal{M};\,\mathcal{T}).$$

Отображения $D\varphi$ и $D^*\varphi$ корректно определены, когда $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$ — суперобласти. Общий случай получается с помощью клея. Ясно, что отображения $D\varphi$ и $D^*\varphi$ двойственны друг другу, т. е.

$$\langle D\varphi(X),\,\alpha\rangle=\langle X,\,D^*\varphi(\alpha)\rangle,\quad \text{где } X\in T_n(\mathcal{N}) \text{ и } \alpha\in T^*_{\varphi(n)}(\mathcal{M}).$$

4.3.8. Семейства семейств. Пусть X есть $\mathcal{T}$-семейство каких-то объектов, тогда *$\mathcal{S}$-семейством $\mathcal{T}$-семейства* объектов X называется $\mathcal{T}\times\mathcal{S}$-семейство объектов X.

Мы можем стараться выбрать интерпретацию суперпространства параметров наиболее удобным для нас образом. Обычно точки проще воспринимать, чем какие бы то ни было другие объекты. Переход к точкам несложен. Например, $\mathcal{T}$-семейство *морфизмов* $\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ является $\mathcal{T}\times\mathcal{N}$-семейством *точек* на $\mathcal{M}$.

Приведем другой пример. Мы можем рассматривать векторное поле на $\mathcal{M}$ как семейство, например как касательный вектор в $\mathcal{M}$-точке $\mathrm{id}_\mathcal{M}$. Но мы также можем рассматривать и $\mathcal{T}$-семейство векторных полей на $\mathcal{M}$ как касательный вектор в $\mathcal{T}\times\mathcal{M}$-точке $\mathrm{pr}_\mathcal{M}\colon \mathcal{T}\times\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ супермногообразия $\mathcal{M}$.

4.3.9. Геометрическая интерпретация касательных векторов и векторных полей. Пусть $\mathcal{R}$ — линейное супермногообразие размерности 1 либо $\varepsilon=0|1$ с координатой t, соответственно четной или нечетной. Пусть $r\in\mathcal{R}$ — точка, заданная уравнением $t=0$, а $\varphi\colon \mathcal{R}\times\mathcal{T}\longrightarrow\mathcal{M}$ — морфизм супермногообразий. Мы будем рассматривать φ как $\mathcal{R}$-семейство *$\mathcal{T}$-точек* супермногообразия $\mathcal{M}$, т. е. как *$\mathcal{T}$-кривую* в $\mathcal{M}$. Значение этого семейства в точке r будет обозначаться символом m, т. е. m есть сквозное отображение $\mathcal{T}\cong r\times\mathcal{T}\longrightarrow\mathcal{R}\times\mathcal{T}\longrightarrow\mathcal{M}$.

Сопоставим $\mathcal{R}$-семейству φ касательный вектор $X_\varphi\in T_m(\mathcal{M})$. В $\mathcal{R}\times\mathcal{T}$ рассмотрим $\mathcal{T}$-точку

$$\bar r\colon \mathcal{T}\cong r\times\mathcal{T}\longrightarrow\mathcal{R}\times\mathcal{T}$$

и положим $X_\varphi=D\varphi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$, где $\frac{\partial}{\partial t}\in T_{\bar r}(\mathcal{R}\times\mathcal{T})$ — постоянный касательный вектор (поскольку $\varphi(\bar r)=m$, наше определение корректно).

А вот эквивалентное определение касательного вектора X_φ. Пусть I_t — идеал в $C^\infty(\mathcal{R}\times\mathcal{T})$, порожденный t. Тогда морфизм

$$\varphi^*\colon C^\infty(\mathcal{M})\longrightarrow C^\infty(\mathcal{R}\times\mathcal{T})$$

имеет вид $\varphi^*=(m^*+tX_\varphi)\pmod{I_t^2}$, где

$$m^*\colon C^\infty(\mathcal{M})\longrightarrow C^\infty(\mathcal{T})\subset C^\infty(\mathcal{R}\times T)$$

есть гомоморфизм, а X_φ рассматривается как сквозное отображение $X_\varphi\colon C^\infty(\mathcal{M})\longrightarrow C^\infty(\mathcal{T})\longrightarrow C^\infty(\mathcal{R}\times\mathcal{T})$.

Пусть $\varphi,\,\psi\colon \mathcal{R}\times\mathcal{T}\longrightarrow\mathcal{M}$ суть две $\mathcal{T}$-кривых в $\mathcal{M}$ с той же начальной точкой m. Кривые φ и ψ назовем *эквивалентными* (и будем писать $\varphi\sim\psi$), если $\varphi^*(f)\equiv\psi^*(f)\pmod{I_t^2}$ для любой функции $f\in C^\infty(\mathcal{M})$. Из определения следует, что

$$\varphi\sim\psi\iff X_\varphi=X_\psi.$$

Легко проверить, что каждый вектор $X\in T_m(\mathcal{M})$, такой что $p(X)=p(t)$, имеет вид X_φ для некоторой $\mathcal{T}$-кривой φ в $\mathcal{M}$.

Следовательно, $T_m(\mathcal{M})$ можно отождествить с пространством классов эквивалентности $\mathcal{T}$-кривых. Итак, $T_m(\mathcal{M})_{\bar 0}$ и $T_m(\mathcal{M})_{\bar 1}$ суть пространства классов эквивалентности $\mathcal{T}$-кривых размерности $1|0$ и $\varepsilon=0|1$ соответственно.

В специальном случае, когда $\mathcal{T}=\mathcal{M}$ и $m=\mathrm{id}_\mathcal{M}$, мы получаем следующую интерпретацию векторных полей из $\mathfrak{vect}(\mathcal{M})$. Каждому морфизму $\varphi\colon \mathcal{R}\times\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}$, т. е. однопараметрическому семейству диффеоморфизмов супермногообразия $\mathcal{M}$, мы сопоставляем векторное поле X_φ. Покажем, как выглядит скобка векторных полей в этих терминах. Пусть t и s — координаты в $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ соответственно. Пусть $\varphi\colon \mathcal{R}\times\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}$ и $\psi\colon \mathcal{R}'\times\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}$ суть $\mathcal{R}$- и $\mathcal{R}'$-семейства диффеоморфизмов супермногообразия $\mathcal{M}$, такие что $\varphi(r)=\psi(r')=m=\mathrm{id}_\mathcal{M}$. Положим $X=X_\varphi$ и $Y=X_\psi$.

Рассмотрим $\mathcal{R}\times\mathcal{R}'$-семейство $\chi=\psi^{-1}\varphi^{-1}\varphi\psi$ диффеоморфизмов супермногообразия $\mathcal{M}$.

Лемма. *Если* $f\in C^\infty(\mathcal{M})$, *то*

$$\chi^*(f)\equiv(f+(-1)^{p(X)p(Y)}[X,\,Y]f)\pmod{I^2},\qquad \textit{где } I^2=I_t^2+I_s^2.$$

Доказательство. Пусть $\varphi' \colon \mathcal{R} \times \mathcal{R}' \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{R} \times \mathcal{R}' \times \mathcal{M}$ — морфизм, соответствующий морфизму φ. Ясно, что

$$\varphi'^* f \equiv \left[f + t\left(\frac{\partial}{\partial t} f + Xf\right)\right] \quad (\operatorname{mod} I_t^2),$$

т. е.

$$\varphi'^* \equiv \left[1 + t\left(\frac{\partial}{\partial t} + X\right)\right] \quad (\operatorname{mod} I_t^2).$$

Аналогично

$$\psi'^* \equiv \left[1 + s\left(\frac{\partial}{\partial s} + Y\right)\right] \quad (\operatorname{mod} I_s^2).$$

Итак,

$$\chi'^* = \varphi'^*\psi'^*(\varphi'^*)^{-1}(\psi'^*)^{-1} = 1 + [\varphi'^*, \psi'^*](\varphi'^*)^{-1}(\psi'^*)^{-1} \equiv$$
$$\equiv \left[1 + t\left(\frac{\partial}{\partial t} + X\right), s\left(\frac{\partial}{\partial s} + Y\right)\right](\varphi'^*)^{-1}(\psi'^*)^{-1} \quad (\operatorname{mod} I^2).$$

Поскольку и X, и Y коммутируют с t, s, $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial s}$, мы получаем

$$\chi'^* \equiv (1 + [tX, sY](\varphi'^*)^{-1}(\psi'^*)^{-1}) \quad (\operatorname{mod} I) \equiv (1 + [tX, sY]) \quad (\operatorname{mod} I) \equiv$$
$$\equiv (1 + (-1)^{p(X)p(Y)} ts[X, Y]) \quad (\operatorname{mod} I).$$

Если $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, то

$$\chi^*(f) = x'^*(f) \equiv (f + (-1)^{p(X)p(Y)} ts[X, Y]f) \quad (\operatorname{mod} I). \qquad \square$$

§ 4.4. Язык точек

В анализе на многообразиях много понятий, которые мы сперва определяем поточечно, а потом проверяем, что они удовлетворяют некоторым условиям гладкости. Мы уже встречали несколько примеров, когда такой подход совсем не обязателен: большое число геометрических объектов можно прямо определить в терминах функций. Однако описание в терминах точек если не более компактно, то по крайней мере его легче себе представлять, в то время как алгебраический язык функций мало говорит нашей интуиции.

В этом параграфе мы введем язык точек, который для алгебраических многообразий был открыт в начале 50-х годов Андре Вейлем. Этот язык поможет нам рассмотреть некоторые объекты, касающиеся супермногообразий, в терминах точек, и, хотя никакое супермногообразие не определяется множеством своих точек, любое супермногообразие *полностью определяется множеством своих $\mathcal{T}$-точек для всех супермногообразий* $\mathcal{T}$. Другими словами, множества $P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T}) = \operatorname{Mor}(\mathcal{T}, \mathcal{M})$ для всех супермногообразий $\mathcal{T}$ полностью определяют $\mathcal{M}$.

Примеры из этого параграфа и глав, где встречаются супергруппы Ли, показывают, что такой подход очень нагляден. Однако тот, кто встречается с ним в первый раз, обычно с ужасом и отвращением смотрит на необходимость рассмотреть **все** супермногообразия $\mathcal{T}$. Мы покажем, что эта необходимость — не такая уж страшная задача, как может показаться.

4.4.1. Язык точек в анализе на многообразиях. Каждому многообразию M сопоставим множество его точек P_M, рассмотренное без какой бы то ни было структуры. Каждому морфизму многообразий $\varphi \colon M \to N$ отвечает отображение точек $\varphi^p \colon P_M \to P_N$. Морфизм $\varphi \colon M \to N$, собственно, и определяют обычно как отображение точек $\varphi^p \colon P_M \to P_N$, а потом проверяют выполнение разных условий гладкости. (Это возможно, поскольку морфизм φ полностью восстанавливается по отображению точек φ^p.)

Многообразие M часто определяют как некоторое множество P_M, на котором затем вводится гладкая структура. Например, подмногообразие $N \subset M$ обычно определяют как подмножество $P_N \subset P_M$, а затем проверяют, что условия, выделяющие подмножество P_N, гладкие. Как и выше, это возможно, поскольку подмногообразия N полностью восстанавливаются из множества своих точек P_N.

4.4.2. Описание супермногообразий и их морфизмов в терминах точек. Пусть $\mathcal{M}$ — какое-то фиксированное супермногообразие, а $\mathcal{T}$ — другое супермногообразие, которое мы будем варьировать. Положим $P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T}) = \operatorname{Mor}(\mathcal{T}, \mathcal{M})$. Элементы $m \in P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T})$ называются *$\mathcal{T}$-точками супермногообразия* $\mathcal{M}$. Множество $\mathcal{T}$-точек супермногообразия $\mathcal{M}$ для разных супермногообразий $\mathcal{M}$ связаны друг с другом: любому морфизму супермногообразий $\alpha \colon \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ отвечает отображение множеств точек $P_{\mathcal{M}}(\alpha) \colon P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T}) \longrightarrow P_{\mathcal{M}}(\mathcal{S})$, заданное формулой $P_{\mathcal{M}}(\alpha)(m) = m\alpha$ (репараметризация).

Каждый морфизм $\varphi \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ переводит $\mathcal{T}$-точки супермногообразия $\mathcal{M}$ в $\mathcal{T}$-точки супермногообразия $\mathcal{N}$, т. е. определяет отображение множеств

$$\varphi^{\mathcal{T}} \colon P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T}) \longrightarrow P_{\mathcal{N}}(\mathcal{T}), \quad \text{где } \varphi^{\mathcal{T}}(m) = \varphi \circ m.$$

Набор отображений $\varphi^{\mathcal{T}}$ для всех супермногообразий $\mathcal{T}$ обозначим символом $\varphi^{\mathrm{Point}} = \{\varphi^{\mathcal{T}} \mid \mathcal{T} \in \operatorname{Ob} \mathsf{SMan}\}$.

Если φ — регулярное вложение, то из п. 4.2.2 следует, что отображение множеств $\varphi^{\mathcal{T}}$ является вложением для любого $\mathcal{T}$. Поэтому мы можем рассматривать $P_{\mathcal{N}}(\mathcal{T})$ как подмножество в $P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T})$. Если $\psi \colon \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ — морфизм супермногообразий, то $(\varphi\psi)^{\mathrm{Point}} = \varphi^{\mathrm{Point}}\psi^{\mathrm{Point}}$, т. е. $(\varphi\psi)^{\mathcal{T}} = \varphi^{\mathcal{T}}\psi^{\mathcal{T}}$ для всех $\mathcal{T}$.

Теорема. 1) *Пусть* $\varphi, \psi\colon \mathcal{M}\to\mathcal{N}$ *— морфизмы супермногообразий, такие что* $\varphi^{\mathrm{Point}}=\psi^{\mathrm{Point}}$, *т. е.* $\varphi^{\mathcal{T}}=\psi^{\mathcal{T}}$ *для каждого* $\mathcal{T}$. *Тогда* $\varphi=\psi$.

2) *Пусть* $\mathcal{M}$ *и* $\mathcal{N}$ *— супермногообразия,*

$$\chi=\{\chi^{\mathcal{T}}\colon P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T})\longrightarrow P_{\mathcal{N}}(\mathcal{T})\mid \mathcal{T}\in\operatorname{Ob}\mathsf{SMan}\} \tag{4.4}$$

— множество отображений точек. Множество χ *отвечает морфизму супермногообразий* $\varphi\colon\mathcal{M}\to\mathcal{N}$, *т. е.* $\chi^{\mathcal{T}}=\varphi^{\mathcal{T}}$ *при всех* $\mathcal{T}$, *тогда и только тогда, когда*

$$P_{\mathcal{N}}(\alpha)\chi^{\mathcal{T}}=\chi^{\mathcal{S}}P_{\mathcal{M}}\alpha \ \text{ для любого морфизма } \alpha\colon\mathcal{S}\to\mathcal{T}. \tag{4.5}$$

Мы скажем, что набор отображений (4.4), удовлетворяющий условию (4.5), *согласован*.

Предположим, что каждому супермногообразию $\mathcal{T}$ мы сопоставили некоторое множество $P(\mathcal{T})$, а каждому морфизму $\alpha\colon\mathcal{S}\to\mathcal{T}$ — отображение множеств $P(\alpha)\colon P(\mathcal{T})\longrightarrow P(\mathcal{S})$. Такой набор морфизмов и отображений $\{P(\mathcal{T}),\, P(\alpha)\colon P(\mathcal{T})\longrightarrow P(\mathcal{S})\mid \mathcal{T},\,\mathcal{S}\in\operatorname{Ob}\mathsf{SMan}\}$ назовем *виртуальным супермногообразием*.

Скажем, что виртуальное супермногообразие

$$\{P(\mathcal{T}),\, P(\alpha)\colon P(\mathcal{T})\longrightarrow P(\mathcal{S})\mid \mathcal{T},\,\mathcal{S}\in\operatorname{Ob}\mathsf{SMan}\}$$

представимо супермногообразием $\mathcal{M}$, если существует множество взаимно однозначных соответствий $g=\{g^{\mathcal{T}}\colon P(\mathcal{T})\longrightarrow P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T})\mid \mathcal{T}\in\operatorname{Ob}\mathsf{SMan}\}$, такое что $g^{\mathcal{T}}\circ P(\alpha)=P_{\mathcal{M}}(\alpha)\circ g^{\mathcal{S}}$ для любого морфизма α.

Следствие. *Предположим, что виртуальное супермногообразие* $\{P(\mathcal{T}),\, P(\alpha)\colon P(\mathcal{T})\longrightarrow P(\mathcal{S})\mid \mathcal{T},\,\mathcal{S}\in\operatorname{Ob}\mathsf{SMan}\}$ *представимо. Тогда все супермногообразия, представляющие его, диффеоморфны.*

Пусть $\mathcal{M}$ — супермногообразие. *Виртуальным подсупермногообразием* в $\mathcal{M}$ назовем систему подмножеств $\{P(\mathcal{T})\subset P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T})\mid \mathcal{T}\in\operatorname{Ob}\mathsf{SMan}\}$, таких что $P_{\mathcal{M}}(\alpha)\colon P(\mathcal{T})\longrightarrow P(\mathcal{S})$ — включение для любого морфизма $\alpha\colon\mathcal{S}\to\to\mathcal{T}$. Мы будем отождествлять подсупермногообразие $\mathcal{N}\subset\mathcal{M}$ с виртуальным подсупермногообразием $\{P_{\mathcal{N}}(\mathcal{T})\subset P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T})\mid \mathcal{T}\in\operatorname{Ob}\mathsf{SMan}\}$. Теорема 4.4.2 утверждает, что такое отождествление возможно, поскольку подсупермногообразие $\mathcal{N}$ единственным образом восстанавливается по набору $\{P_{\mathcal{N}}(\mathcal{T})\subset P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T})\mid \mathcal{T}\in\operatorname{Ob}\mathsf{SMan}\}$.

Доказательство следствия. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — два супермногообразия, которые представляют виртуальное супермногообразие $\{P(\mathcal{T}),\, P(\alpha)\}$. Пусть

$$g_{\mathcal{M}}=\{g^{\mathcal{T}}_{\mathcal{M}}\colon P(\mathcal{T})\longrightarrow P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T})\}\mid \mathcal{T}\in\operatorname{Ob}\mathsf{SMan}\},$$
$$g_{\mathcal{N}}=\{g^{\mathcal{T}}_{\mathcal{N}}\colon P(\mathcal{T})\longrightarrow P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T})\}\mid \mathcal{T}\in\operatorname{Ob}\mathsf{SMan}\}.$$

Тогда согласованный набор биекций $g_{\mathcal{N}}g_{\mathcal{M}}^{-1}$ задает диффеоморфизм $\varphi\colon\mathcal{M}\to\mathcal{N}$. □

Доказательство теоремы. 1) Ясно, что

$$\varphi^{\mathcal{N}}(\mathrm{id}_{\mathcal{N}})=\varphi,\quad \psi^{\mathcal{N}}(\mathrm{id}_{\mathcal{N}})=\psi,\ \text{ где } \mathrm{id}_{\mathcal{N}}\in P_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}).$$

Поэтому из равенства $\varphi^{\mathcal{N}}=\psi^{\mathcal{N}}$ следует, что $\varphi=\psi$.

2) Утверждение «когда выполнено условие (4.5)» довольно очевидно. Докажем часть «только тогда». Положим

$$\varphi=\chi^{\mathcal{N}}(\mathrm{id}_{\mathcal{N}})\in P_{\mathcal{M}}(\mathcal{N})=\mathrm{Mor}(\mathcal{N},\,\mathcal{M}).$$

Покажем, что $\chi^{\mathcal{S}}=\varphi^{\mathcal{S}}$ для любого супермногообразия $\mathcal{S}$. Пусть $n\in P_{\mathcal{N}}(\mathcal{S})$. Тогда $n=P(\alpha)(\mathrm{id}_{\mathcal{N}})$, где $\alpha=n\colon\mathcal{S}\to\mathcal{N}$. Из условия (4.5) следует, что

$$\chi^{\mathcal{S}}(n)=\chi^{\mathcal{S}}P_{\mathcal{N}}(\alpha)(\mathrm{id}_{\mathcal{N}})=P_{\mathcal{M}}(\alpha)(\chi^{\mathcal{N}}(\mathrm{id}_{\mathcal{N}}))=P_{\mathcal{M}}(\alpha)(\varphi)=\varphi\circ\alpha=\varphi^{\mathcal{S}}(n).\quad\square$$

4.4.3. Теорема из п. 4.4.2 чисто категорная и совсем не использует специфику супермногообразий. Учтя эту специфику, мы можем существенно усилить теорему.

Предложение. 1) *Пусть* $\varphi,\psi\colon\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ *— морфизмы супермногообразий,* $\dim\mathcal{N}=n|m$ *и* $\mathcal{T}=\mathcal{R}^{0|q}$, *где* $q\geqslant m$. *Тогда из равенства* $\varphi^{\mathcal{T}}=\psi^{\mathcal{T}}$ *следует, что* $\varphi=\psi$.

2) *Предположим, что набор* χ *отображений* $\chi^{\mathcal{T}}\colon P_{\mathcal{N}}(\mathcal{T})\longrightarrow P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T})$ *задан только на суперобластях* $\mathcal{T}$, *таких что* $\dim\mathcal{T}=\dim\mathcal{N}$. *Если этот набор удовлетворяет условию* (4.5), *то существует морфизм* $\varphi\colon\mathcal{N}\to\mathcal{M}$, *который соответствует этому множеству.*

3) *Набор* $\{P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T}),\,P_{\mathcal{M}}(\alpha)$, *где* $\mathcal{T}$ *пробегает линейные супермногообразия размерности* $0|r\}$, *полностью определяет супермногообразие* $\mathcal{M}$. *Более того, чтобы определить супермногообразие размерности* $p|q$, *достаточно рассмотреть одно такое множество* $P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T})$, *где* $\dim\mathcal{T}=0|r$ *и* $r\geqslant q$.

Упражнение. 1) Докажите это предложение.

2) Приведите пример обычных многообразий M, N и согласованного набора морфизмов

$$\chi=\{\chi(\mathcal{T})\colon P_M(\mathcal{T})\longrightarrow P_N(\mathcal{T})\mid \mathcal{T}=\mathcal{R}^{0|q},\ q\in\mathbb{N}\},$$

которому не отвечает никакой морфизм многообразий $N\to M$.

4.4.4. Примеры. Мы будем постоянно использовать результаты п. 4.4.2.

А) *Линейные супермногообразия.* Пусть L — линейное (векторное) суперпространство. Определим виртуальное супермногообразие ${}^{s}L$, положив

$$P_{{}^{s}L}(\mathcal{T})=(C^{\infty}(\mathcal{T})\otimes L)_{\bar 0},\qquad P_{{}^{s}L}(\alpha)=\alpha^{*}\otimes\mathrm{id}_{L}\,.$$

Лемма. *Виртуальное супермногообразие* ${}^sL$ *представимо линейным супермногообразием* $\mathcal{R}^{\operatorname{sdim} L}$. *В частности, если* L *конечномерно, то* ${}^sL \cong (L_{\bar{0}}, \mathcal{O}_{L_{\bar{0}}} \otimes E^{\bullet}(L_{\bar{1}}))$.

Доказательство. Пусть $\{l_i\}_{i\in I}$ — базис в L, а x_i — координаты в $\mathcal{R}^{\dim L}$, такие что $p(x_i) = p(l_i)$. Определим отображение $\chi^{\mathcal{T}}\colon P_{{}^sL}(\mathcal{T}) \to \to P_{\mathcal{R}^{\dim L}}(\mathcal{T})$, положив $(\chi^{\mathcal{T}}(\sum f_i \otimes l_i))^*(x_i) = f_i$. Легко видеть, что $\chi^{\mathcal{T}}$ биективно для всех супермногообразий $\mathcal{T}$. □

Очевидно, что отображение χ не каноническое: оно зависит от базиса в L. Выбор этого базиса фиксирует систему координат на ${}^sL$, представленную как $\mathcal{R}^{\operatorname{sdim} L}$.

4.4.4а. Упражнение. 1) Существуют ли супермногообразия, представляющие следующие виртуальные супермногообразия

1а) $P(\mathcal{T}) = (C^\infty(\mathcal{T}) \otimes L)_{\bar{1}}$, $P(\alpha) = \alpha^* \otimes \mathrm{id}$;

1б) $P(\mathcal{T}) = C^\infty(\mathcal{T}) \otimes L$, $P(\alpha) = \alpha^* \otimes \mathrm{id}$?

2) Докажите, что

2а) существуют естественное вложение $L \longrightarrow \mathfrak{vect}({}^sL)$, такое что его образ — суперпространство, натянутое на частные производные, и естественное вложение $L^* \longrightarrow C^\infty({}^sL)$, такое что образ изоморфен суперпространству линейных функций на L;

2б) $\mathfrak{vect}({}^sL) \cong C^\infty({}^sL) \otimes L$, т. е. касательное пространство к каждой точке супермногообразия ${}^sL$ изоморфно суперпространству L.

Б) *Супералгебра как супермногообразие.* Пусть L — суперкольцо, т. е. задан четный морфизм $\mathrm{mult}\colon L \otimes L \longrightarrow L$. Тогда на $C^\infty(\mathcal{T}) \otimes L$ тоже задана структура суперкольца, поэтому определены отображения $\mathrm{mult}_{\mathcal{T}}\colon P_{{}^sL}(\mathcal{T}) \times P_{{}^sL}(\mathcal{T}) \longrightarrow P_{{}^sL}(\mathcal{T})$ для любого $\mathcal{T}$. Отождествим $P_{{}^sL\times{}^sL}(\mathcal{T})$ и $P_{{}^sL}(\mathcal{T}) \times P_{{}^sL}(\mathcal{T})$. Мы получили согласованное семейство отображений $\mathrm{mult}^{\mathcal{T}}\colon P_{{}^sL\times{}^sL}(\mathcal{T}) \longrightarrow P_{{}^sL}(\mathcal{T})$, т. е. морфизм $\varphi\colon {}^sL \times {}^sL \longrightarrow {}^sL$.

Таким образом, мы наделили линейное супермногообразие ${}^sL$ структурой суперкольца в категории супермногообразий.

4.4.4б. Упражнение. Что еще нужно задать, чтобы превратить суперкольцо ${}^sL$ в супералгебру?

§ 4.5. Супергруппы Ли, супералгебры Ли и однородные суперпространства

Этот параграф — подготовительный как для дифференциальной геометрии на супермногообразиях, так и для теории представлений в суперслучае, и поэтому помещен в этом (элементарном) томе. Доказательства опущенных утверждений повторяют стандартные рассуждения (ср. [OV, Хелг]) после перехода на уровень точек. Некоторые нетривиальные факты доказаны В. Молотковым в гораздо большей общности бесконечномерных супермногообразий (см. том 2).

Отметим нетривиальные и важные феномены, заслуживающие специального внимания:

— «новое» (по сравнению с наивным определением из гл. 1) определение супералгебры Ли как супермногообразия и наборов ее представлений как супермногообразий (с особенностями);

— орбиты под действием супергрупп не являются, как правило, супермногообразиями.

4.5.1. Супергруппы Ли. *Супергруппой Ли* называется группа в категории супермногообразий.

Другими словами, супермногообразие $\mathcal{G}$ наделено структурой супергруппы, если каждое множество $P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ снабжено структурой группы, причем все отображения $P_{\mathcal{G}}(\alpha)$, индуцированные репараметризациями $\alpha\colon \mathcal{G} \to \mathcal{T}$, являются морфизмами групп, то этот набор множеств и отображений задает структуру супергруппы на $\mathcal{G}$.

Начнем с умножения. Умножение в $P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ определяет семейство отображений

$$P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T}) \times P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T}) = P_{\mathcal{G}\times\mathcal{G}}(\mathcal{T}) \longrightarrow P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T}). \tag{4.6}$$

Поскольку эти семейства согласованы, по теореме из п. 4.4.2 ему соответствует морфизм супермногообразий $m\colon \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$.

Морфизмы u и i определяются аналогично. Достаточно проверить коммутативность диаграмм (4.7)–(4.9) на $\mathcal{T}$-точках, но там она следует из аксиом группы для $P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$.

Итак, задать структуру *супергруппы Ли* на супермногообразии $\mathcal{G}$ — значит задать групповые структуры на множествах $P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ его $\mathcal{T}$-точек.

Упражнение. 1) Морфизмы u и i для супергруппы Ли $\mathcal{G}$ однозначно определены морфизмом m.

2) Задание морфизма супергрупп Ли $\varphi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ эквивалентно заданию согласованного семейства гомоморфизмов групп $\varphi^{\mathcal{T}}\colon P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T}) \longrightarrow P_{\mathcal{G}'}(\mathcal{T})$.

3) Супергруппа Ли $\mathcal{G}$ коммутативна тогда и только тогда, когда все группы $P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ коммутативны. Запишите это условие в терминах морфизма m.

4) Множество $P_{\mathcal{G}}(\mathrm{pt})$ совпадает с подстилающим многообразием G супермногообразия $\mathcal{G}$. Докажите, что умножение в $\mathcal{G}$ задает не просто структуру группы на G, а структуру *группы Ли*, которая и называется *подстилающей группой* супергруппы Ли $\mathcal{G}$.

5) Пусть $\mathcal{H}$ — подсупермногообразие в $\mathcal{G}$, такое что $m(\mathcal{H} \times \mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ и $i(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$. Докажите, что на $\mathcal{H}$ индуцирована структура супергруппы Ли.

Эта супергруппа Ли называется *подсупергруппой Ли* в $\mathcal{G}$. Докажите, что подсупергруппа Ли всегда закмнута.

Указание. Воспользуйтесь аналогичными утверждениями для групп Ли (см. [OV]).

4.5.2. Действия супергрупп Ли. Пусть $\mathcal{G}$ — супергруппа Ли, а $\mathcal{M}$ — супермногообразие. *Левым $\mathcal{G}$-действием* на $\mathcal{M}$ называется морфизм супермногообразий $a\colon \mathcal{G}\times\mathcal{M}\to\mathcal{M}$, такой что следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}\times\mathcal{G}\times\mathcal{M} \arrow[r, "\mathrm{id}\times a"] \arrow[d, "m\times\mathrm{id}"'] & \mathcal{G}\times\mathcal{M} \arrow[d, "a"] \\
\mathcal{G}\times\mathcal{M} \arrow[r, "a"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{pt}\times\mathcal{M} \arrow[d, "\nu\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\simeq"] & \\
\mathcal{G}\times\mathcal{M} \arrow[r, "a"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}
\qquad (4.7)$$

Действие называется *тривиальным*, если $a=\mathrm{pr}_{\mathcal{M}}$.

Пусть a и a' — два левых $\mathcal{G}$-действия на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$. *Морфизмом $\mathcal{G}$-действий $a\mapsto a'$* называется морфизм супермногообразий $\psi\colon\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}\times\mathcal{M} \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times\varphi"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathcal{G}\times\mathcal{M}' \arrow[r, "a'"] & \mathcal{M}'
\end{tikzcd}
\qquad (4.8)$$

коммутативна. Мы скажем в этом случае, что морфизм φ согласован с *$\mathcal{G}$-действиями или $\mathcal{G}$-инвариантен.*

Чтобы задать левое $\mathcal{G}$-действие на $\mathcal{M}$, достаточно для всех $\mathcal{T}$ задать левое действие группы $P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ на множестве $P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T})$ так, чтобы эти действия были согласованы с отображениями $P_{\mathcal{G}}(\alpha)$ для любого морфизма $\alpha\colon\mathcal{G}\to\mathcal{T}$.

Чтобы определить морфизм $\varphi\colon\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$, согласованный с $\mathcal{G}$-действием, достаточно для всех $\mathcal{T}$ определить отображения $\varphi^{\mathcal{T}}\colon P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T})\longrightarrow P_{\mathcal{M}'}(\mathcal{T})$, согласованные как с $P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$-действием, так и с отображениями $P_{\mathcal{G}}(\alpha)$.

Если действие $a\colon\mathcal{G}\times\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}$ задано, то каждой $\mathcal{T}$-точке g из $P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ отвечает $\mathcal{T}$-семейство морфизмов $a(g)\colon\mathcal{M}\to\mathcal{M}$, заданное формулой

$$a(g):=a(g\times\mathrm{id}_{\mathcal{M}})\colon\mathcal{T}\times\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{G}\times\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}. \qquad (4.9)$$

Ясно, что действие этого семейства на $\mathcal{T}$-множестве $\mathcal{T}$-точек супермногообразия $\mathcal{M}$ совпадает с действием $a^{\mathcal{T}}$ элемента $g\in P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ на $P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T})$. Семейство $a(g)$ называется *семейством диффеоморфизмов. Обратное* к нему семейство – это семейство $a(g^{-1})$.

Аналогично любой $\mathcal{T}$-точке $\varphi\in\mathrm{Mor}(\mathcal{T},\mathcal{M})$ из $\mathcal{M}$ отвечает $\mathcal{T}$-семейство морфизмов $\mathcal{G}\times\mathcal{T}\longrightarrow\mathcal{M}$ — *левое действие*, — заданное формулой

$$a_l\colon\mathcal{G}\times\mathcal{T}\xrightarrow{\mathrm{id}\times\varphi}\mathcal{G}\times\mathcal{M}\xrightarrow{a}\mathcal{M}. \qquad (4.10)$$

Правое действие a_r определяется аналогично.

Пример. Зададим *левое* и *правое* действия супергруппы Ли $\mathcal{G}$ на себе, положив

$$L_g(h)=gh,\qquad R_g(h)=hg^{-1}, \qquad (4.11)$$

где g, h суть $\mathcal{T}$-точки супергруппы $\mathcal{G}$. Любой $\mathcal{T}$-точке $g\in P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ отвечают два $\mathcal{T}$-семейства диффеоморфизмов, а именно $\mathcal{T}$-семейство $L(g)$ *левых сдвигов* и $\mathcal{T}$-семейство $R(g)$ *правых сдвигов*.

4.5.3. Примеры супергрупп Ли и их действий. 1) Пусть L — конечномерное линейное суперпространство, ${}^{s}L$ — соответствующее линейное супермногообразие. На каждом множестве $P_L(\mathcal{T})=(C^\infty(\mathcal{T})\otimes L)_{\bar 0}$ имеется естественная групповая структура по отношению к сложению. Она индуцирует структуру коммутативной супергруппы Ли на L. Если x_i — координаты на ${}^{s}L$, а y_i, z_i — соответствующие координаты на ${}^{s}L\times{}^{s}L$, то умножение $m\colon{}^{s}L\times{}^{s}L\longrightarrow{}^{s}L$ задается формулой

$$m^*(x_i)=y_i+z_i. \qquad (4.12)$$

2) Определим супергруппу Ли $\mathcal{GL}(p|q)$, положив

$$P_{\mathcal{GL}(p|q)}(\mathcal{T})=\mathrm{GL}(p|q;\,C^\infty(\mathcal{T})). \qquad (4.13)$$

Каждое множество $P_{\mathcal{GL}(p|q)}(\mathcal{T})$ имеет естественную структуру группы, и совокупность этих структур задает на $\mathcal{GL}(p|q)$ структуру супергруппы Ли.

Нам надо только проверить, что это виртуальное супермногообразие — набор множеств $P_{\mathcal{GL}(p|q)}(\mathcal{T})$ при всех $\mathcal{T}$ и их отображений, индуцированных репараметризациями, — является настоящим супермногообразием. Подстилающее многообразие — это набор геометрических точек, когда $\mathcal{T}=*$, а расслоение над ним, дающее нечетные координаты, — это множество $\mathcal{T}$-точек, где $\mathcal{T}=\mathrm{Spec}\,\Lambda(1)$.

Итак, пусть $\mathcal{M}$ — супермногообразие, отвечающее линейному суперпространству $\mathrm{Mat}(p|q;\,\mathbb{R})$. Его подстилающее многообразие — $\mathrm{Mat}(p|q;\,\mathbb{R})_{\bar 0}$. Обозначим символом $\mathcal{GL}(p|q)$ открытую подсуперобласть в $\mathcal{M}$, подстилающая которой — это открытое множество $\mathrm{GL}(p|q;\,\mathbb{R})\subset\mathrm{Mat}(p|q;\,\mathbb{R})_{\bar 0}$.

Упражнение. Пусть t_{ij} — координаты в $\mathcal{G}=\mathcal{GL}(p|q)$, соответствующие матричным единицам в некотором фиксированном формате суперматриц размера $p|q$, а y_{ij}, z_{ij} — соответствующие координаты в $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$. Докажите, что умножение m в $\mathcal{G}$ определено формулой

$$m^*(t_{ij})=\sum_r y_{ir}z_{rj}. \qquad (4.14)$$

3) Пусть L — конечномерное суперпространство, а $\mathcal{L}$ — соответствующее линейное супермногообразие.

Как и в примере 2, определим супергруппу $\mathcal{G} = \mathcal{GL}(L)$, положив

$$P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T}) = \mathrm{GL}_{C^\infty(\mathcal{T})}((C^\infty(\mathcal{T}) \otimes L)_{\bar{0}}). \tag{4.15}$$

Группа $P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ естественным образом действует на множестве $P_{\mathcal{L}}(\mathcal{T}) = (C^\infty(\mathcal{T}) \otimes L)_{\bar{0}}$. Таким образом возникает левое $\mathcal{G}$-действие на $\mathcal{L}$. Морфизм супергрупп $\varphi\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{GL}(L)$ часто (хотя это совершенно неправильно) называют *представлением супергруппы $\mathcal{H}$ в суперпространстве L*. Правильно говорить об этом морфизме как о представлении в *линейном супермногообразии* $\mathcal{L}$ или о $\mathcal{H}$-действии на $\mathcal{L}$. Поскольку между L и $\mathcal{L}$ есть взаимно однозначное соответствие, часто говорят также, что L есть $\mathcal{H}$-модуль, хотя, конечно, это неверно, а верно, что $\mathcal{L}$ есть $\mathcal{H}$-модуль.

4) Пусть A — конечномерная ассоциативная супералгебра с единицей. Определим (по аналогии с виртуальными супермногообразиями) виртуальную супергруппу Ли $\mathcal{A}^\times$ обратимых элементов из $\mathcal{A}$, положив (для любого супермногообразия $\mathcal{T}$)

$$P_{\mathcal{A}^\times}(\mathcal{T}) = \text{группа четных обратимых элементов из } C^\infty(\mathcal{T}) \otimes A. \tag{4.16}$$

Упражнение. а) Докажите, что $\mathcal{A}^\times$ — супергруппа Ли. Пример: если $A = \operatorname{End} L$, то $\mathcal{A}^\times = \mathcal{GL}(L)$.

б) Является ли супергруппой Ли виртуальная супергруппа Ли $\widetilde{\mathcal{A}^\times}$, заданная функтором

$$P_{\widetilde{\mathcal{A}^\times}}(\mathcal{T}) = \text{группа всех обратимых элементов из } C^\infty(\mathcal{T}) \otimes A? \tag{4.17}$$

5) Пример морфизма супергрупп. Определим морфизм супергрупп $\mathrm{Ber}\colon \mathcal{GL}(p|q) \longrightarrow \mathcal{GL}(1|0)$, положив

$$g \longmapsto \operatorname{Ber} g, \quad \text{где } g \in GL(p|q;\, C^\infty(\mathcal{T})) = P_{\mathcal{GL}(p|q)}(\mathcal{T}). \tag{4.18}$$

Очевидно, что $\operatorname{Ber} g \in (C^\infty(\mathcal{T}))^\times_{\bar{0}} = P_{\mathcal{GL}(1|0)}(\mathcal{T})$. В координатах t_{ij} на $\mathcal{GL}(p|q)$ (отвечающих матричным единицам в стандартном формате суперматриц) и t на $\mathcal{GL}(1|0)$ соответственно морфизм Ber — березиниан — определен формулой

$$\mathrm{Ber}^*(t) = \mathrm{Ber}(t_{ij})_{ij=1}^{p+q}. \tag{4.19}$$

4.5.4. Центр супергруппы Ли. Пусть $\mathcal{G}$ — супергруппа Ли. Определим виртуальную подсупергруппу Ли $Z(\mathcal{G})$, которую назовем *центром супергруппы* $\mathcal{G}$, положив

$$P_{Z(\mathcal{G})}(\mathcal{T}) = \{g \in P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T}) \mid \mathcal{T}\text{-семейства морфизмов } L_g \text{ и } R_g \text{ совпадают}\}. \tag{4.20}$$

Утверждение. *Виртуальная подсупергруппа Ли $Z(\mathcal{G})$ — настоящая (а не виртуальная) подсупергруппа Ли в $\mathcal{G}$.*

Искушение определить центр группы Ли $\mathcal{G}$ по-другому, а именно положив

$$P_{\mathrm{cntr}(\mathcal{G})}(\mathcal{T}) = Z(P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})), \tag{4.21}$$

трудно преодолеть. Однако так определять центр ошибочно, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $\mathcal{G}$ — подсупергруппа Ли в $\mathcal{GL}(1|1)$, такая что ее $\mathcal{T}$-точки суть матрицы вида

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } a \in (C^\infty(\mathcal{T}))^\times_{\bar{0}} \text{ и } b \in (C^\infty(\mathcal{T}))_{\bar{1}}. \tag{4.22}$$

Легко проверить, что (пока виртуальная) супергруппа Ли $Z(\mathcal{G})$ тривиальна, т. е. совпадает с единичным элементом. Пусть $\mathcal{T} = \mathcal{R}^{0,2}$, а ξ_1, ξ_2 — координаты на $\mathcal{T}$. Тогда легко видеть, что $\mathcal{T}$-точка

$$g = \begin{pmatrix} 1 + \xi_1\xi_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

принадлежит центру группы $P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$.

Ниже мы установим аналог теоремы Ли о соответствии между подсупергруппами Ли в данной супергруппе Ли $\mathcal{G}$ и подсупералгебрами Ли в $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathcal{G})$, точнее подсупермногообразиями, отвечающими подсупералгебрам, в супермногообразии, отвечающем суперпространству $\mathfrak{g}$. Поэтому, поскольку центр супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, отвечающий супергруппе Ли $\mathcal{G}$, тривиален, центр супергруппы Ли $\mathcal{G}$ тоже должен быть тривиален (или по крайней мере иметь размерность 0).

Упражнение. Виртуальная супергруппа $\mathrm{cntr}(\mathcal{G})$ не является супергруппой Ли.

4.5.5. Представления супергруппы Ли. Пусть $\mathcal{G}$ — супергруппа Ли, а L — конечномерное суперпространство. *Представлением ρ супергруппы Ли $\mathcal{G}$ в суперпространстве L* называется *морфизм супергрупп Ли* $\rho\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{GL}(L)$.

Чтобы задать ρ, нам надо каждому супермногообразию $\mathcal{T}$ сопоставить гомоморфизм групп $\rho^{\mathcal{T}}\colon P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathrm{GL}_{C^\infty(\mathcal{T})}((C^\infty(\mathcal{T}) \otimes L)_{\bar{0}})$, согласованный с репараметризациями $\alpha\colon \mathcal{G} \to \mathcal{T}$. Каждый гомоморфизм $\rho^{\mathcal{T}}$ является представлением группы $P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ в $(C^\infty(\mathcal{T}))_{\bar{0}}$-модуле $(C^\infty(\mathcal{T}) \otimes L)_{\bar{0}}$.

Пусть теперь ρ_1 и ρ_2 — представления супергруппы Ли $\mathcal{G}$ в суперпространствах L_1 и L_2. Представления

$$\Pi(\rho_i), \quad \rho_i^*, \quad \rho_1 \otimes \rho_2, \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\rho_1, \rho_2), \quad S^j(\rho_i), \quad \mathrm{Vol}(\rho_i) \tag{4.24}$$

и т. д. в соответствующих суперпространствах

$$\Pi(L_i), \quad L_i^*, \quad L_1 \otimes L_2, \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(L_1, L_2), \quad S^j(L_i), \quad \mathrm{Vol}(L_i) \tag{4.25}$$

и т. д. определяются естественным образом.

Морфизмом представлений $\varphi\colon \rho_1 \to \rho_2$ или *морфизмом* соответствующих $\mathcal{G}$-*модулей* называется четное линейное отображение $\alpha\colon L_1 \to L_2$, такое что $\alpha\rho_1(g) = \rho_2(g)\alpha$ для любой $\mathcal{T}$-точки $g \in P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$.

4.5.6. Супералгебра Ли супергруппы Ли. Пусть $\mathcal{G}$ — супергруппа Ли, а $\mathfrak{g} = T_e(\mathcal{G})$ — касательное пространство в единице. Определим на $\mathfrak{g}$ линейную операцию

$$(X,\, Y) \longmapsto [X,\, Y] \tag{4.26}$$

и докажем, что $\mathfrak{g}$ — супералгебра Ли относительно этой скобки. Часто пишут $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathcal{G})$.

Каждый однородный вектор $X \in \mathfrak{g}$ можно рассмотреть как касательный вектор к *кривой* $\varphi\colon \mathcal{R} \to \mathcal{G}$, где $\mathcal{R}$ — одномерная суперобласть с координатой t той же четности, что и X, а I_t — главный идеал, порожденный элементом t. Другими словами,

$$\varphi^*(f) = f(e) + t\,X(f) \pmod{I_t^2} \quad \text{при } f \in C^\infty(\mathcal{G}). \tag{4.27}$$

Пусть $Y \in \mathfrak{g}$, а $\psi\colon \mathcal{R}' \to \mathcal{G}$ — кривая с параметром s на ней, такая что Y — касательный вектор к этой кривой, а I_s — главный идеал, порожденный элементом s.

Лемма. *Рассмотрим φ и ψ как $\mathcal{R} \times \mathcal{R}'$-точки супергруппы $\mathcal{G}$ и положим $\Phi = \varphi\psi\varphi^{-1}\psi^{-1}$. Существует единственный вектор $Z \in \mathfrak{g}$, такой что*

$$\begin{gathered} \Phi^*(f) = f(e) + (-1)^{p(X)p(Y)}ts\,Z(f) \pmod{I}, \\ \textit{где } I = I_t^2 + I_s^2, \textit{ для любой функции } f \in C^\infty(\mathcal{G}). \end{gathered} \tag{4.28}$$

Доказательство. Рассмотрим разложение функции $\Phi^*(f)$ в ряд Тейлора:

$$\Phi^*(f) = f_0 + tf_t + sf_s + (-1)^{p(X)p(Y)}ts\,f_{ts} \pmod{I}. \tag{4.29}$$

Пусть $\mathcal{U}_t$ — подсуперобласть в $\mathcal{R} \times \mathcal{R}'$, заданная уравнением $t = 0$. Тогда $\varphi(\mathcal{U}_t) \supset e$, откуда следует, что $\Phi(\mathcal{U}_t) \supset e$, т. е. $\Phi^*(f) = f(e) \pmod{t}$. Поэтому $f_0 = f(e)$ и $f_s = 0$. Мы аналогичным образом доказываем, что $f_t = 0$, так что

$$\Phi^*(f) = (f(e) + (-1)^{p(X)p(Y)}ts\,f_{ts}) \pmod{I}. \tag{4.30}$$

Поскольку Φ^* — морфизм супералгебр, оператор $f \mapsto f_{ts}$ удовлетворяет правилу Лейбница, т. е. $f_{ts} = Z(f)$ для некоторого $Z \in \mathfrak{g}$.

Итак, каждой паре однородных векторов $X,\, Y \in \mathfrak{g}$ мы сопоставили вектор Z, который обозначим символом $[X,\, Y]$.

Упражнение. 1) Вектор $[X,\, Y]$ корректно определен, т. е. не зависит от выбора кривых φ и ψ.

2) Пусть $D\alpha\colon \mathfrak{h} = T_e(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathfrak{g} = T_e(\mathcal{G})$ — дифференциал морфизма супергрупп Ли $\alpha\colon \mathcal{H} \to \mathcal{G}$. Тогда

$$D\alpha\bigl([X,\, Y]\bigr) = [D\alpha(X),\, D\alpha(Y)], \tag{4.31}$$

что оправдывает обозначение вектора $Z\colon = [X,\, Y]$. *Указание*: см. доказательство леммы из п. 4.5.7.

4.5.7. Касательное действие супералгебры Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ — супералгебра Ли супергруппы Ли $\mathcal{G}$. Сопоставим правому $\mathcal{G}$-действию $a\colon \mathcal{M} \times \mathcal{G} \to \mathcal{M}$ дифференциал этого действия, т. е. четный линейный оператор $Da\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Vect}(\mathcal{M})$. А именно, пусть $\tilde{e}$ есть $\mathcal{M}$-точка супермногообразия $\mathcal{M} \times \mathcal{G}$, заданная формулой

$$\mathcal{M} = \mathcal{M} \times \mathrm{pt} \xrightarrow{\mathrm{id} \times u} \mathcal{M} \times \mathcal{G}. \tag{4.32}$$

Рассмотрим любой элемент $X \in \mathfrak{g}$ как вектор $\widetilde{X} \in T_{\tilde{e}}(\mathcal{M} \times \mathcal{G})$ и положим

$$Da(X) = Da(\widetilde{X}) \subset T_{a(\tilde{e})}(\mathcal{M}) = T_{\mathrm{id}_{\mathcal{M}}}(\mathcal{M}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{M}). \tag{4.33}$$

Другими словами, если $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, то $Da(X)(f)|_{\tilde{e}} = \widetilde{X}\bigl(a^*(f)\bigr)$.

Если $\alpha\colon a \mapsto a'$ — морфизм, индуцированный морфизмом $\alpha\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, то $D\alpha$ отображает $Da(X)$ в $Da'(X)$, т. е.

$$Da(X)\alpha^*(f) = \alpha^*\bigl(Da'(X)(f)\bigr) \quad \text{при любых } f \in C^\infty(\mathcal{M}'). \tag{4.34}$$

Лемма. *Справедливо равенство $Da\bigl([X,\, Y]\bigr) = [Da(X),\, Da(Y)]$.*

Доказательство. Пусть $\varphi\colon \mathcal{R} \to \mathcal{G}$ и $\psi\colon \mathcal{R}' \to \mathcal{G}$ — кривые, которые определяют векторы X и Y. Тогда $\mathcal{R}$-точка φ в $\mathcal{G}$ определяет $\mathcal{R}$-семейство $\tilde{\varphi}$ диффеоморфизмов супермногообразия $\mathcal{M}$, т. е.

$$\tilde{\varphi}\colon \mathcal{M} \times \mathcal{R} \xrightarrow{\mathrm{id} \times \varphi} \mathcal{M} \times \mathcal{G} \xrightarrow{a} \mathcal{M}. \tag{4.35}$$

Из определения следует, что $Da(X)$ — векторное поле, касательное к этому семейству диффеоморфизмов.

Возьмем морфизмы φ и ψ и рассмотрим $\Phi = \varphi\psi\varphi^{-1}\psi^{-1}$ как $\mathcal{R} \times \mathcal{R}'$-точку супергруппы $\mathcal{G}$. Обозначим через $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ и $\widetilde{\Phi}$ соответствующие семейства диффеоморфизмов супермногообразия $\mathcal{M}$. Поскольку a является правым $\mathcal{G}$-действием, $\widetilde{\Phi} = \tilde{\psi}^{-1}\tilde{\varphi}^{-1}\tilde{\psi}\,\tilde{\varphi}$. Итак, мы получили, что

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}^*(f) = \Phi^*\bigl(a^*(f)\bigr) = a^*(f)|_{\mathcal{M}\times e} + (-1)^{p(X)p(Y)}ts\,Z\bigl(a^*(f)\bigr) = \\ = (f + (-1)^{p(X)p(Y)}Da(Z)(f) + \\ + (-1)^{p(X)p(Y)}ts\ [Da(X),\, Da(Y)]) \pmod{I}, \end{aligned} \tag{4.36}$$

где $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ и $I = I_t^2 + I_s^2$.

С другой стороны, если $Z=[X,\,Y]\in\mathfrak{g}$, то

$$\tilde{\Phi}^*(f)=\Phi^*(a^*(f))=a^*(f)|_{\mathcal{M}\times e}+(-1)^{p(X)p(Y)}ts\,Z(a^*(f))=$$
$$=(f+(-1)^{p(X)p(Y)}Da(Z)(f)+(-1)^{p(X)p(Y)}tsDa(Z)(f))\pmod{I}.\qquad(4.37)$$

Итак, $Da([X,\,Y])=[Da(X),\,Da(Y)]$, что и требовалось. □

Следствие. *Скобка* $[\cdot,\cdot]$ *задает на* $\mathfrak{g}$ *структуру супералгебры Ли.*

Доказательство. Пусть R — правое $\mathcal{G}$-действие на себе. Тогда значение векторного поля $DR(X)$ в точке e равно X и, следовательно, морфизм $DR\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathrm{Vect}(\mathcal{G})$ является вложением. Из формулы $DR([X,\,Y])=[DR(X),\,DR(Y)]$ следует, что $\mathfrak{g}$ — супералгебра Ли, а DR — морфизм супералгебр Ли. □

Пусть $a\colon\mathcal{G}\times\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ – левое $\mathcal{G}$-действие. Определим морфизм супералгебр Ли $Da\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{vect}(\mathcal{M})$ формулой $Da(X)=Da_r(X)$, где a_r — правое действие, соответствующее действию a. Ясно, что

$$Da(X)(f)=-X\big(a^*(f)\big)\quad\text{для любой функции } f\in C^\infty(\mathcal{M}).\qquad(4.38)$$

4.5.8. Левоинвариантные векторные поля на супергруппе Ли. Векторное поле X на супергруппе Ли $\mathcal{G}$ называется *левоинвариантным*, если для любой $\mathcal{T}$-точки $g\in P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ соответствующее семейство левых сдвигов $L(g)$ сохраняет поле X.

Если $X\in\mathfrak{g}$, то поле $DR(X)\in\mathfrak{vect}(\mathcal{G})$ левоинвариантно. Действительно, рассмотрим диффеоморфизм $L(g)\colon\mathcal{T}\times\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{T}\times\mathcal{G}$. Согласно аксиомам супергруппы Ли морфизмы $L(g)$ $\mathcal{G}$-инвариантны относительно правого $\mathcal{G}$-действия на $\mathcal{T}\times\mathcal{G}$, а значит, сохраняют поле $DR(X)$.

В дальнейшем мы отождествляем алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с ее образом в $\mathfrak{vect}(\mathcal{G})$ относительно морфизма $DR\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{vect}(\mathcal{G})$. Как мы видели, композиция $\mathfrak{g}\to T_e(\mathcal{G})$ этого морфизма с взятием значения поля в единице является изоморфизмом. Благодаря левоинвариантности полей для любой $\mathcal{T}$-точки $g\in P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ мы получаем, что $T_g(\mathcal{G})=C^\infty(\mathcal{T})\otimes\mathfrak{g}$. В частности, для $\mathcal{G}$-точки $\mathrm{id}_{\mathcal{G}}$ мы получаем, что $\mathrm{Vect}(\mathcal{G})=T_{\mathrm{id}}(\mathcal{G})=C^\infty(\mathcal{G})\otimes\mathfrak{g}$.

Упражнение. Любому левоинвариантному векторному полю на $\mathcal{G}$ отвечает ровно один элемент из супералгебры Ли $\mathfrak{g}$.

4.5.9. Супералгебра Ли супергруппы Ли. Пусть A — конечномерная ассоциативная супералгебра с единицей 1, а $\mathcal{A}$ — линейное супермногообразие, соответствующее суперпространству A. Пусть $\mathcal{G}=\mathcal{A}^\times$ — супергруппа Ли обратимых элементов из A, а $\mathfrak{g}$ — ее супералгебра Ли. Поскольку $\mathcal{G}$ — открытое подсупермногообразие в $\mathcal{A}$, такое что единицу $e\in\mathcal{G}$ можно отождествить с $1\in A$, мы заключаем, что

$$\mathfrak{g}:=T_e(\mathcal{G})\cong T_e(\mathcal{A})\cong A.\qquad(4.39)$$

Пусть $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ — скобка в $\mathfrak{g}$. Докажем, что $[X,\,Y]_{\mathfrak{g}}=[X,\,Y]$ для любых $X,\,Y\in A$. Пусть $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ суть 1-или ε-мерные суперобласти с координатами t и s той же четности, что X и Y соответственно. Определим $\mathcal{R}$-точку $g\in P_{\mathcal{A}}(\mathcal{R})$ формулой

$$g=1+tX.\qquad(4.40)$$

Мы видим, что $g\in P_{\mathcal{G}}(\mathcal{R})$ в окрестности начала координат в $\mathcal{R}$. Аналогично определим $\mathcal{R}'$-точку $h=1+s\,Y$. Рассмотрим $\mathcal{R}\times\mathcal{R}'$-точку $\Phi=ghg^{-1}h^{-1}$, определенную формулой

$$\Phi=(1+tX)(1+sY)(1+tX)^{-1}(1+sY)^{-1}=1+[tX,\,sY]\pmod{I}=$$
$$=1+(-1)^{p(X)p(Y)}ts[X,\,Y]\pmod{I},\qquad(4.41)$$

где I — идеал в $C^\infty(\mathcal{R}\times\mathcal{R}')$, порожденный t^2 и s^2, а Φ рассматривается как элемент из $C^\infty(\mathcal{R}\times\mathcal{R}')\otimes A$. Следовательно, $[X,\,Y]_{\mathfrak{g}}=[X,\,Y]$.

Пример. Супералгебра Ли супергруппы Ли $\mathcal{GL}(L)$ естественно изоморфна супералгебре Ли $\mathfrak{gl}(L)$. В частности, супералгебра Ли супергруппы Ли $\mathcal{GL}(p|q)$ изоморфна $\mathfrak{gl}(p|q;\,\mathbb{R})$.

Упражнение. Пусть a_l — стандартное (левое) $\mathcal{GL}(p|q)$-действие на $\mathcal{R}^{p,q}$. Если $E_{ij}\in\mathrm{Mat}(p|q;\,\mathbb{R})$ — матричная единица, то

$$Da_l(E_{ij})=x_j\partial_i\in\mathfrak{vect}(\mathcal{R}^{p,q}).$$

4.5.10. Соотношение между представлениями супергрупп Ли и супералгебр Ли. Пусть ρ — представление супергруппы Ли $\mathcal{G}$ в суперпространстве L, т. е. морфизм супергрупп Ли $\rho\colon\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{GL}(L)$. Дифференциал $D\rho$ задает морфизм супералгебр Ли $D\rho\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(L)$, т. е. представление супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ в суперпространстве L.

Упражнение. Пусть ρ, ρ_1 и ρ_2 — представления супергруппы Ли $\mathcal{G}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&D(\rho^{\Pi})(X)=(\mathcal{D}\rho)^{\Pi}(X),\\
&(D\rho^*)(X)=-\big((D\rho)(X)\big)^*,\\
&D(\rho_1\otimes\rho_2)(X)=(D\rho_1)(X)\otimes 1+1\otimes(D\rho_2)(X),\\
&D(\mathrm{Vol}(\rho))(X)=\mathrm{str}\big((D\rho)(X)\big).
\end{aligned}\qquad(4.42)$$

4.5.11. Присоединенное действие супергруппы Ли. Пусть $p\in\mathcal{M}$, а $a\colon\mathcal{G}\times\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ — левое $\mathcal{G}$-действие. Предположим, что точка p является $\mathcal{G}$-инвариантной, т. е. $a(\mathcal{G}\times p)\subset p$, или, что то же самое, $a^*(I_p)\subset\mathrm{pr}^*_{\mathcal{M}}(I_p)$. Тогда корректно определено представление ρ_a супергруппы $\mathcal{G}$ в касательном пространстве $T_\rho(\mathcal{M})$.

Пусть $\mathcal{T}$ — супермногообразие, а $p^{\mathcal{T}}\colon \mathcal{T}\to p\to\mathcal{M}$ есть $\mathcal{T}$-точка супермногообразия $\mathcal{M}$. Тогда

$$T_{p^{\mathcal{T}}}(\mathcal{M}) = C^{\infty}(\mathcal{T})\otimes T_p(\mathcal{M}). \tag{4.43}$$

Каждая $\mathcal{T}$-точка $g\in P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ задает $\mathcal{T}$-семейство $a(g)$ диффеоморфизмов супермногообразия $\mathcal{M}$, такое что $a(g)(p^{\mathcal{T}}) = p^{\mathcal{T}}$. В $\mathrm{GL}(C^{\infty}(\mathcal{T})\otimes T_p(\mathcal{M})) = \mathrm{GL}(T_{p^{\mathcal{T}}}(\mathcal{M}))$ рассмотрим оператор

$$\rho_a(g) = Da(g), \tag{4.44}$$

где $Da(g)$ — дифференциал $\mathcal{T}$-семейства диффеоморфизмов $a(g)$ в точке $p^{\mathcal{T}}$. Семейство операторов $\rho_a(g)$ задает требуемое представление ρ_a.

Пример. Символом Ad обозначим *присоединенное действие супергруппы Ли* $\mathcal{G}$ на себе, определенное в $\mathcal{T}$-точках формулой

$$\mathrm{Ad}\, g(h) = ghg^{-1}. \tag{4.45}$$

Точка $e\in\mathcal{G}$ инвариантна относительно этого действия, а значит, задано представление супергруппы Ли $\mathcal{G}$ в $T_e(\mathcal{G}) = \mathfrak{g}$. Это представление называется *присоединенным представлением* и обозначается тем же символом Ad.

Упражнение. Явный вид дифференциала $\mathrm{ad} = D\,\mathrm{Ad}\colon \mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ присоединенного представления таков: $\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y]$.

4.5.12. Теория Ли. Пусть $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ — суть супергруппы Ли, а $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — их супералгебры Ли. Каждому морфизму супергрупп Ли $\varphi\colon\mathcal{H}\to\mathcal{G}$ соответствует касательное отображение их супералгебр Ли $D\varphi\colon\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$.

Теорема. 1) *Пусть супергруппа $\mathcal{H}$ связна. Тогда для любого морфизма супералгебр Ли $\alpha\colon\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$ существует не более одного морфизма супергрупп Ли $\varphi\colon\mathcal{H}\to\mathcal{G}$, такого что $D\varphi=\alpha$. Если супергруппа $\mathcal{H}$ односвязна, то φ точно существует.*

2) *Для любой конечномерной супералгебры Ли $\mathfrak{h}$ найдется связная и односвязная супергруппа Ли $\mathcal{H}$, такая что ее супералгебра Ли изоморфна $\mathfrak{h}$. Если супералгебра $\mathfrak{h}$ коммутативна, то супергруппа $\mathcal{H}$ тоже коммутативна.*

Условием 1 связная и односвязная супергруппа Ли $\mathcal{H}$ с супералгеброй Ли $\mathfrak{h}$ определяется однозначно с точностью до изоморфизма.

4.5.13. Линейные супергруппы Ли (ср. [OV]).

Утверждение. *Пусть $\mathfrak{h}$ — конечномерная супералгебра Ли. Существуют конечномерное суперпространство L и подсупергруппа Ли $\mathcal{H}\subset\mathcal{GL}(L)$, такие что супералгебра Ли супергруппы $\mathcal{H}$ изоморфна $\mathfrak{h}$.*

4.5.14. Экспоненциальный морфизм. Пусть $\mathcal{G}$ — супергруппа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее супералгебра Ли, а $\mathcal{L} = {}^s\mathfrak{g}$ — супермногообразие, отвечающее суперпространству $\mathfrak{g}$, так что $T_0(\mathcal{L}) = \mathfrak{g}$. Как показано в примере 1 из п. 4.5.3, на $\mathcal{L}$ существует естественная структура коммутативной супергруппы Ли. Для обозначения умножения в $\mathcal{L}$ мы будем использовать аддитивную запись.

Утверждение. 1) *Существует и единствен морфизм супермногообразий* $\exp\colon {}^s\mathfrak{g}\to\mathcal{G}$, *такой что* $\exp(0)=e$, $D\exp(0)=\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ *и* $\exp(kg) = (\exp(g))^k$ *для любых* $g\in P_{\mathcal{L}}(\mathcal{T})$ *и* $k\in\mathbb{Z}$.

2) *Пусть* $\varphi\colon\mathcal{H}\to\mathcal{G}$ *— морфизм супергрупп Ли, а* $D\varphi\colon\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$ *— касательный морфизм и* $\hat{\varphi}\colon{}^s\mathfrak{h}\to{}^s\mathfrak{g}$ *— соответствующий морфизм супермногообразий. Тогда* $\exp\cdot\hat{\varphi} = \varphi\cdot\exp$.

Морфизм $\exp$ определяет диффеоморфизм некоторой окрестности $\mathcal{L}_0\subset{}^s\mathfrak{g}=\mathcal{L}$ начала координат 0 на окрестность $\mathcal{G}_0\subset\mathcal{G}$ точки $e\in\mathcal{G}$.

Обратный диффеоморфизм обозначается символом $\log\colon\mathcal{G}_0\to\mathcal{L}_0$.

Пример. Пусть A — конечномерная ассоциативная супералгебра с единицей 1, а $\mathcal{A}$ — соответствующее супермногообразие. Пусть $\mathcal{A}^{\times}\subset\mathcal{A}$ — супергруппа Ли обратимых элементов из $\mathcal{A}$, точнее сказать, супергруппа Ли, отвечающая обратимым элементам из A. Тогда морфизм $\exp\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}^{\times}$ задан на множестве $\mathcal{T}$-точек формулой

$$\exp(a) = 1 + a + \ldots + \frac{a^n}{n!} + \ldots, \tag{4.46}$$

где степенной ряд рассматривается в алгебре $(C^{\infty}(\mathcal{T})\otimes A)_{\bar{0}}$.

Аналогично

$$\log(a) = \sum\frac{(1-a)^k}{k!}, \quad \text{где } a\in P_{\mathcal{A}}(\mathcal{T}) = (C^{\infty}(\mathcal{T})\otimes A)_{\bar{0}}. \tag{4.47}$$

Рассмотрим морфизм $f\colon\mathcal{L}'_0\times\mathcal{L}'_0\longrightarrow\mathcal{L}'_0$, заданный формулой

$$f(a, b) = \log\bigl(\exp(a)\cdot\exp(b)\bigr), \tag{4.48}$$

где $\mathcal{L}'_0$ — некоторая окрестность начала координат 0, а a и b суть $\mathcal{T}$-точки супермногообразия $\mathcal{L}'_0$. Из предыдущего примера и теоремы о линейных группах легко следует, что на $\mathcal{T}$-точках морфизм f задан обычной формулой Кэмпбела—Хаусдорфа. Эта формула корректно определена, поскольку $\mathcal{T}$-точки супермногообразия ${}^s\mathfrak{g}$ суть элементы алгебры Ли $(C^{\infty}(\mathcal{T})\otimes\mathfrak{g})_{\bar{0}}$, а стало быть, ничего нечетного в них не осталось.

4.5.15. Существование подсупергрупп изотропии. В теории групп Ли иногда используется теорема, которая утверждает, что *замкнутая подгруппа группы Ли является группой Ли.* Поскольку аналогичное утверждение для супергрупп трудно сформулировать, мы нуждаемся в другом способе построения линейных подсупергрупп Ли. Один из них — это конструкция подгрупп изотропии, ср. [OV].

Пусть $N \subset \mathcal{M}$ — замкнутое подсупермногообразие. Мы скажем, что $\mathcal{T}$-семейство $\varphi\colon \mathcal{T} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ диффеоморфизмов супермногообразия $\mathcal{M}$ *сохраняет* $\mathcal{N}_q$, если $\varphi(\mathcal{T} \times \mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$, т. е. $\varphi^*(\mathcal{J}_{\mathcal{N}}) \subset \mathcal{J}_{\mathcal{T}\times\mathcal{N}}$, где $\mathcal{J}_{\mathcal{N}}$ есть пучок идеалов в $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$, который задает супермногообразие $\mathcal{N}$. Скажем, что *векторное поле* $X \in \operatorname{Vect}(\mathcal{M})$ *касательно* супермногообразию $\mathcal{N}$, если $X(\mathcal{J}_{\mathcal{N}}) \subset \mathcal{J}_{\mathcal{N}}$.

Утверждение. *Пусть* $a\colon \mathcal{G} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ *есть* $\mathcal{G}$*-действие, а* $\mathcal{N}$ *— замкнутое подсупермногообразие в* $\mathcal{M}$. *Существует подсупергруппа Ли* $\mathcal{H}$ *в* $\mathcal{G}$, *такая что*

$$P_{\mathcal{H}}(\mathcal{T}) = \{g \in P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T}) \mid a(g) \text{ сохраняет } \mathcal{N}\}, \tag{4.49}$$

где $a(g)$ *есть* $\mathcal{T}$*-семейство диффеоморфизмов супермногообразия* $\mathcal{M}$, *отвечающее* $\mathcal{T}$*-точке* g. *Супералгебра Ли супергруппы Ли* $\mathcal{H}$ *имеет вид*

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid (Da)(X) \ \text{ сохраняет } \mathcal{N}\}. \tag{4.50}$$

Построенная подсупергруппа Ли $\mathcal{H}$ называется *стабилизатором* супермногообразия $\mathcal{N}$ (или *подсупергруппой изотропии*) и обозначается символом $\mathcal{H} = \operatorname{St}_{\mathcal{G}}(\mathcal{N})$.

4.5.16. Примеры стабилизаторов. 1) Пусть a_1 и a_2 суть левые $\mathcal{G}$-действия на $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ соответственно, а $\varphi\colon \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ — произвольный морфизм супермногообразий.

Упражнение. Подсупергруппа Ли $\mathcal{H} = \operatorname{St}_{\mathcal{G}}(\varphi)$ в $\mathcal{G}$, такая что

$$P_{\mathcal{H}}(\mathcal{T}) = \{g \in P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T}) \mid \varphi a_1(g) = a_2(g)\varphi\}, \tag{4.51}$$

определена корректно, а ее супералгеброй Ли является

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid Da_1(X)\big(\varphi^*(f)\big) = \varphi^*\big(Da_2(X)(f)\big) \text{ для любых } f \in C^\infty(\mathcal{M}_2)\}. \tag{4.52}$$

Указание. Рассмотрите график $\mathcal{N}$ морфизма φ и положите $\mathcal{H} = \operatorname{St}_{\mathcal{G}}(\mathcal{N})$.

2) Пусть ρ — представление супергруппы Ли $\mathcal{G}$ в суперпространстве L, а $l \in L_{\bar{0}}$.

Упражнение. Существует подсупергруппа Ли $\mathcal{H} = \operatorname{St}_{\mathcal{G}}(l)$ в $\mathcal{G}$, такая что

$$P_{\mathcal{H}}(\mathcal{T}) = \{g \in P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T}) \mid \rho(g)l = l\}; \tag{4.53}$$

ее супералгеброй Ли является $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \rho(X)(l) = 0\}$.

Указание. Пусть $\mathcal{L}$ — супермногообразие, отвечающее суперпространству L, а a_ρ есть $\mathcal{G}$-действие на $\mathcal{L}$, ассоциированное с ρ. Положим $\mathcal{H} = \operatorname{St}_{\mathcal{G}}(l)$, где l рассматривается как одноточечное подсупермногообразие в $\mathcal{L}$.

3) Пусть ρ_1, ρ_2 и ρ_3 суть представления супергруппы $\mathcal{G}$ в суперпространствах L_1, L_2 и L_3. Пусть $l\colon L_1 \otimes L_2 \longrightarrow L_3$ — четное линейное отображение.

Упражнение. Стабилизатор $\mathcal{H}$ отображения l определяется формулой

$$P_{\mathcal{H}}(\mathcal{T}) = \{a \in P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T}) \mid l \circ (\rho_1(a) \otimes \rho_2(a)) = \rho_3(a) \circ l\}. \tag{4.54}$$

Указание. Возьмите представление $\rho = \operatorname{Hom}(\rho_1 \otimes \rho_2, \rho_3)$ и рассмотрите l как элемент суперпространства $\operatorname{Hom}(L_1 \otimes L_2, L_3)$.

Этот пример доказывает, в частности, существование супергруппы Ли $\mathcal{A}ut(A)$ автоморфизмов конечномерной супералгебры A.

4.5.17. Фактор супермногообразия по действию супергруппы Ли. Пусть $a\colon \mathcal{G} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ есть $\mathcal{G}$-действие. *Графиком действия* a называется морфизм

$$\gamma_a = a \times \mathrm{id}_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{G} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{M}. \tag{4.55}$$

Действие a называется *свободным*, если γ_a — замкнутое регулярное вложение. Действие a называется *транзитивным*, если морфизм γ_a эпиморфен в точках и субмерсивен всюду.

Упражнение. 1) Пусть $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ — морфизм действия a в действие a'. Если a' свободно, то и a свободно.

2) Пусть $p \in \mathcal{M}$, а $a_p\colon \mathcal{G} = \mathcal{G} \times p \longrightarrow \mathcal{G} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$. Действие a однородно, если морфизм a_p эпиморфен во всех точках и субмерсивен в точке $e \in \mathcal{G}$.

3) Пусть $a\colon \mathcal{G} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — свободное левое действие. Тогда существуют супермногообразие $\mathcal{N}$ и морфизм $\psi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, такие что

а) морфизм ψ инвариантен относительно $\mathcal{G}$-действия на $\mathcal{M}$, т. е.

$$\psi \circ pr_{\mathcal{M}} = \psi \circ a\colon \mathcal{G} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}; \tag{4.56}$$

б) для любого морфизма $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}'$ инвариантного относительно $\mathcal{G}$-действия на $\mathcal{M}$, существует, причем единственный, морфизм $\varphi'\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$, такой что $\varphi' \circ \psi = \varphi$.

Супермногообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет следующему условию локальной тривиальности:

в) для любой точки $q \in \mathcal{N}$ найдутся окрестность $\mathcal{U}$ и диффеоморфизм $\varphi_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{G} \times \mathcal{U} \longrightarrow \psi^{-1}(\mathcal{U})$, согласованный с $\mathcal{G}$-действием и с проекцией на $\mathcal{U}$, где $\mathcal{G}$-действие L на $\mathcal{G} \times \mathcal{U}$ задано на $\mathcal{T}$-точках формулой

$$L(g)(h, u) = (gh, u) \quad \text{для любых } g, h \in P_{\mathcal{T}}(\mathcal{G}) \text{ и } u \in P_{\mathcal{T}}(\mathcal{U}). \tag{4.57}$$

Из п. 3 следует, что и супермногообразие $\mathcal{N}$, и проекция ψ определены однозначно с точностью до изоморфизма.

Пара $(\mathcal{N}, \psi)$ называется *фактором супермногообразия* $\mathcal{M}$ *относительно левого* $\mathcal{G}$*-действия* и обозначается $\mathcal{G}\backslash\mathcal{M}$. Фактор супермногообразия $\mathcal{M}/\mathcal{G}$ относительно правого $\mathcal{G}$-действия определяется аналогично.

Заметим, что морфизм $\psi\colon \mathcal{M}\to\mathcal{N}=\mathcal{G}\backslash\mathcal{M}$ не сюръективен на $\mathcal{T}$-точках; следовательно, невозможно определить $\mathcal{N}$ формулой

$$P_{\mathcal{N}}(\mathcal{T}) = P_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})\backslash P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T}). \tag{4.58}$$

Пункт 2 упражнения означает, что морфизм ψ локально сюръективен. Другими словами, если $r\in P_{\mathcal{N}}(\mathcal{T})$, то у каждой точки $q\in\mathcal{T}$ есть окрестность $\mathcal{U}\subset\mathcal{T}$, такая что $\mathcal{U}$-точки $r|_{\mathcal{U}}\in P_{\mathcal{N}}(\mathcal{U})$ принадлежат $\psi(P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T}))$.

4.5.18. Однородные суперпространства.

Теорема. *Пусть* $\mathcal{H}$ *— подсупергруппа Ли в* $\mathcal{G}$. *Тогда существуют супермногообразие* $\mathcal{N}$, *точка* $q\in\mathcal{N}$ *и левое* $\mathcal{G}$*-действие* L *на* $\mathcal{N}$, *такие что*

1) *точка* q *является* $\mathcal{H}$*-инвариантной*;

2) *если* a *— это левое* $\mathcal{G}$*-действие на* $\mathcal{M}$, *а* $p\in P_{\mathcal{M}}(\mathcal{T})$ *есть* $\mathcal{H}$*-инвариантная точка, то существует единственное* $\mathcal{T}$*-семейство морфизмов* $\varphi\colon\mathcal{M}\to\mathcal{N}$, *согласованное с* $\mathcal{G}$*-действием и такое, что* $\varphi(\bar{q})=p$, *где* $\bar{q}\colon\mathcal{T}\to q\to\mathcal{N}$ *— постоянная* $\mathcal{T}$*-точка супермногообразия* $\mathcal{N}$.

Тройка $(\mathcal{N}, q, L)$, *где* L *является* $\mathcal{G}$*-действием левыми сдвигами, а* q *— это образ единицы* e *под действием проекции* $\mathrm{pr}\colon\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G}/\mathcal{H}$, *определена однозначно с точностью до изоморфизма, а* $\mathcal{N}\simeq\mathcal{G}/\mathcal{H}$ *относительно правого* $\mathcal{H}$*-действия.*

Это факторсупермногообразие $\mathcal{N}\simeq\mathcal{G}/\mathcal{H}$ будет называться *однородным суперпространством супергруппы* $\mathcal{G}$.

Упражнение. 1) Докажите, что $\mathcal{G}$-действие на $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ однородно.

2) Пусть a — транзитивное левое $\mathcal{G}$-действие на $\mathcal{N}$. Пусть $q\in\mathcal{N}$ и $\mathcal{H}=St_{\mathcal{G}}(q)$. Тогда a изоморфно $\mathcal{G}$-действию L на $\mathcal{G}/\mathcal{H}$.

Следствие. *Для любых подсупергрупп Ли* $\mathcal{H}_1$ *и* $\mathcal{H}_2$ *в* $\mathcal{G}$ *существует подсупергруппа Ли* $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2$ *в* $\mathcal{G}$, *заданная формулой*

$$P_{\mathcal{H}}(\mathcal{T}) = P_{\mathcal{H}_1}(\mathcal{T})\cap P_{\mathcal{H}_2}(\mathcal{T}). \tag{4.59}$$

Указание. Рассмотрите действие $\mathcal{H}_1$-супергруппы L на $\mathcal{N}=\mathcal{G}/\mathcal{H}_2$ и положите $\mathcal{H}=\mathrm{St}_{\mathcal{H}_1}(q)$, где q — это образ единицы e под действием проекции $pr\colon\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G}/\mathcal{H}$.

Подсупергруппа Ли $\mathcal{H}\subset\mathcal{G}$ называется *нормальной*, если она инвариантна относительно присоединенного действия супергруппы $\mathcal{G}$.

Упражнение. Если подсупергруппа $\mathcal{H}$ *нормальна*, то $\mathcal{G}/\mathcal{H}\cong\mathcal{H}\backslash\mathcal{G}$ и существует структура супергруппы Ли на $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, такая что естественный морфизм $\mathcal{G}\to\mathcal{G}/\mathcal{H}$ является морфизмом супергрупп Ли.

Литература

[ВО] *Винберг Э.Б., Онищик А.Л.* Семинар по группам группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.

Винберг Э.Б., Горбацевич В.В., Онищик А.Л. Основы теории групп Ли. Группы Ли преобразований // Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1988. (Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 20.)

[МаКП] *Манин Ю.И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984.

[Хелг] *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства. М.: Факториал, 2005.

[Sha3] *Shander V.* Analogues of the Frobenius and Darboux theorems for supermanifolds // C. R. Acad. Bulgare Sci. 1983. V. 36, № 3. P. 309–312.

[We] *Weil A.* Théorie des points proches sur les variétés différentiables // Géométrie différentielle (Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg, 1953). P. 111–117. Paris: CNRS, 1953.

Глава 5

Векторные поля и дифференциальные уравнения

В этой главе мы собрали основные конструкции, понятия и утверждения, касающиеся векторных полей и дифференциальных уравнений. Вот, вкратце, основное содержание главы.

В § 5.1 мы изучаем локальные нормальные формы векторных полей. Мы рассматриваем два варианта понятия невырожденности векторных полей. Векторное поле X называется *слабо невырожденным* в точке m, если не все его коэффициенты обращаются в точке m в нуль в некоторой координатной записи поля X, и *невырожденным*, если существует окрестность $\mathcal{V}$ точки X, такая что $X|_{\mathcal{V}}\colon C^\infty(\mathcal{V}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{V})$ эпиморфизм.

Для четных полей эти понятия совпадают, и невырожденное поле можно выпрямить обычным образом, как и на многообразиях.

С нечетными полями ситуация совершенно другая. Проблема локальной классификации слабоневырожденных векторных полей $\mathcal{R}^{n|m}$ содержит в качестве подзадачи локальную классификацию всех четных векторных полей на $\mathcal{R}^{n|m-1}$ (и стало быть, необозрима), в то время как невырожденность эквивалентна возможности привести векторное поле к каноническому виду $\dfrac{\partial}{\partial\xi_1} + \xi_1\dfrac{\partial}{\partial\varphi_1}$, где φ — четные, а ξ — нечетные координаты.

Имеются, очевидно, невырожденные векторные поля, неоднородные относительно четности, например $\dfrac{\partial}{\partial u_1} + \dfrac{\partial}{\partial\xi_1}$ или $(1+\xi_1)\dfrac{\partial}{\partial u_1}$. В этой главе мы не рассматриваем неоднородные векторные поля, и установить их канонические виды — **открытая Проблема**, хотя, возможно, это Вопрос.

Хотя получить разумную каноническую форму каждого слабо невырожденного векторного поля нет никакой надежды, понятие слабой невырожденности все-таки находит применение в нашем хозяйстве. В частности, именно слабая невырожденность используется в формулировке в теореме Фробениуса о критериях интегрируемости линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных (теорема из п. 5.1.3), в то время как нечетные векторные поля вида $\dfrac{\partial}{\partial\xi}$ можно характеризовать инвариантным образом тем их свойством, что, вдобавок к слабой невырожденности, они удовлетворяют условию $[X, X] = 2X^2 = 0$ (теорема из п. 5.1.2).

Нечетные векторные поля X, такие что $X^2 = 0$, называются *гомологическими*. Некоторые гомологические поля исключительно важны, например внешний дифференциал в пространстве дифференциальных форм, дифференциал и кодифференциал в гомологиях и когомологиях каких бы то ни было комплексов. Отметим, что в BRST-квантовании важную роль играет нечетный лапласиан, который является Фурье-образом внешнего дифференциала. Вопрос о том, как характеризовать «нужные» гомологические поля, тоже **открытая Проблема**, частично решенная Вайнтробом; см. [Va].

Параграф 5.2 посвящен построению теории дифференциальных уравнений. Результаты § 5.1 указывают на то, что четным векторным полям на супермногообразии мы должны сопоставить семейство диффеоморфизмов, зависящее от одного четного параметра, а нечетным векторным полям — семейство, которое зависит от одного четного и одного нечетного параметра. Другими словами, для четных векторных полей роль времени $\mathcal{T}$ играет $\mathcal{R}^{1|0}$, в то время как для нечетных полей время параметризовано супермногообразием $\mathcal{R}^{1|1}$, а роль производной по времени исполняется векторным полем $\dfrac{\partial}{\partial\mathcal{T}}$ на $\mathcal{T}$, которое равно ∂_t или $\dfrac{\partial}{\partial\tau} + \tau\dfrac{\partial}{\partial t}$ соответственно. По аналогии с классическим случаем мы строим теорию дифференциальных уравнений так, чтобы обеспечить взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{T}$-семействами векторных полей на $\mathcal{M}$ (той же четности, что и $\partial_{\mathcal{T}}$) и $\mathcal{T}$-семействами диффеоморфизмов супермногообразия $\mathcal{M}$.

В § 5.3 мы обсудим, как решать дифференциальные уравнения на супермногообразиях. Мы увидим (теорема 5.3.1), что разрешимость дифференциального уравнения на супермногообразии $\mathcal{M}$ сводится к разрешимости следующей пары: а) подстилающего дифференциального уравнения на подстилающем многообразии M и б) системы линейных дифференциальных уравнений, зависящих от параметров, пробегающих M.

В том же параграфе мы получим инфинитезимальную форму для решений дифференциальных уравнений

$$\varphi^* \equiv 1 + \begin{cases} tX \pmod{t^2}, & \text{если } X \text{ четно},\\ \tau X + t(X^2 + [\partial_\tau, X]) \pmod{t^2, t\tau}, & \text{если } X \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Для решений, не зависящих от времени, композиция сдвигов вдоль интегральных траекторий снабжает супермногообразия $\mathcal{R}^{1|1}$ структурой супергруппы, а именно, супермногообразия времени $\mathcal{T}$ становятся некоммутативной супергруппой (теорема из п. 5.3.2).

Системы линейных дифференциальных уравнений появляются на пересечении анализа и линейной алгебры, и имеется два типа выражений вида $\partial_{\mathcal{T}}(\bar{f}) = K\bar{f}$, поскольку элементы матрицы K и координаты вектора $\bar{f}$ могут быть как согласованными с четностью векторного поля $\partial_{\mathcal{T}}$, так и произвольными в общем случае неоднородными элементами супералгебры функций.

Для обеих возможностей возникает свой собственный аналог теоремы о существовании фундаментальной матрицы и ее детерминанта [1]. В первом случае фундаментальная матрица принадлежит супергруппе GL, а ее детерминант — это березиниан. Во втором случае фундаментальную матрицу можно рассматривать как элемент из супергруппы GQ, а роль детерминанта играет qet. Как следствие, мы получаем явную формулу для решений уравнения $\partial_{\mathcal{T}} f = kf$ с неоднородной относительно четности функцией k.

В конце § 5.4 в общую мелодию вплетаются две дополнительные темы: в п. 5.4.1 мы покажем, как определить производную Ли вдоль векторного поля для довольно широкого класса тензорных полей, а в п. 5.4.2 введем понятие *первообразной* для функции g как решение уравнения $\partial_{\mathcal{T}} f = g$ на $\mathcal{R}^{1|0}$ или $\mathcal{R}^{1|1}$. Для $\mathcal{R}^{1|0}$ наши определения соответствуют классической формуле Ньютона—Лейбница, а для $\mathcal{R}^{1|1}$ мы получаем специфический вариант теории интегрирования, связанный с контактной геометрией в размерности $1|1$.

Несколько технических замечаний и обозначений, которые будут использоваться на протяжении главы. Если $X \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U})$, а $x_1, \ldots$ $\ldots, x_{n+m}$ — координаты на $\mathcal{U}$, то X можно представить в виде $X = \sum X(x_k)\dfrac{\partial}{\partial x_k}$. В частности, если $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ — однородная относительно четности функция, такая что $X(f)|_{pt} \neq 0$, то ее можно включить в локальную систему координат в окрестности точки pt вместо координаты x_k, такой что $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\Big|_{pt} \neq 0$.

Если $X \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U})_{\bar 0}$, то $\widetilde{X} \in \mathrm{Vect}(U)$ однозначно восстанавливается из условия

$$\widetilde{X}(\mathrm{cem}^* f) = \mathrm{cem}^*(Xf),$$

где $\mathrm{cem}\colon U \to \mathcal{U}$ каноническое вложение. Если (u, ξ) — координаты на $\mathcal{U}$, а $X = \sum a_i \dfrac{\partial}{\partial u_i} + \sum b_j \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$, то $\tilde{u} = \mathrm{cem}^* u$ — координаты на подстилающей области U и $\widetilde{X} = \sum \mathrm{cem}^*(a_i)\dfrac{\partial}{\partial \tilde{u}_i}$.

Пусть J — идеал в $C^\infty(\mathcal{M})$. Для любых $X_1, X_2 \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M})$ мы пишем $X_1 \equiv X_2 \pmod J$, если $(X_1 - X_2)(f) \in J$ для любой функции $f \in C^\infty(\mathcal{M})$.

Всюду в этой главе мы обозначаем символом I идеал в $C^\infty(\mathcal{M})$, порожденный множеством $C^\infty(\mathcal{M})_{\bar 1}$, или идеал в $C^\infty(\mathcal{M} \times \mathcal{S})$, порожденный множеством $C^\infty(\mathcal{M} \times \mathcal{S})_{\bar 1}$, где $\mathcal{S}$ — супермногообразие параметров.

---

[1] Напомним, что если $K \in \mathrm{Mat}(r|s;\, F)_{\boldsymbol{\varepsilon}}$, где $\boldsymbol{\varepsilon} = p(\partial_{\mathcal{T}})$, то матрица $M \in \mathrm{GL}(r|s;\, F)$, такая что $\partial_{\mathcal{T}} M = KM$, называется *фундаментальной для K*.

Любое векторное поле $X \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M})$ можно однозначно поднять до векторного поля ${}^\circ X$ на $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$, такого что

$$ {}^\circ X \circ \pi^*_{\mathcal{M}} = \pi^*_{\mathcal{M}} \circ X \quad \text{и} \quad {}^\circ X \circ \pi^*_{\mathcal{N}} = 0.$$

Аналогично любое поле $Y \in \mathrm{Vect}(\mathcal{N})$ можно однозначно поднять до векторного поля Y°) на $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$, такого что

$$Y^\circ \circ \pi^*_{\mathcal{N}} = \pi^*_{\mathcal{N}} \circ Y \quad \text{и} \quad Y^\circ \circ \pi^*_{\mathcal{M}} = 0.$$

В тех случаях, когда это не должно привести к недоразумению, мы пишем просто X вместо ${}^\circ X$ и Y вместо Y°.

Замечание. Результаты главы основаны в основном на работах [Ша1], [Sha2], [Sha3], [RSha], хотя некоторые фрагменты публикуются впервые. Первый суперaналог теоремы Фробениуса был дан в 1971 году Г. И. Кацем и А. И. Коронкевичем (см. [КК]) в терминах дифференциальных форм и систем Пфаффа. Ниже мы докажем теорему Фробениуса в терминах векторных полей.

§ 5.1. Нормальные формы векторных полей

5.1.1. Невырожденные векторные поля. В этом пункте мы рассмотрим локальные вопросы, и поэтому всюду ниже мы ведем речь о векторных полях на суперобласти $\mathcal{U}$ с координатами $x = (u, \xi)$.

На области с координатами $(u_1, \ldots, u_n)$ любое векторное поле, которое не обращается в нуль в данной точке, можно привести к виду $\dfrac{\partial}{\partial u_1}$. Давайте посмотрим, что происходит на суперобластях. Рассмотрим следующие примеры векторных полей на $\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial u_1}, & X_4 &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_1 u_1 \frac{\partial}{\partial u_1},\\
X_2 &= \frac{\partial}{\partial \xi_1}, & X_5 &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial u_1},\\
X_3 &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial u_1}, & X_6 &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_1 u_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь X_1 — четное векторное поле, X_2, X_3, X_4 — нечетные векторные поля, а X_5, X_6 — неоднородные векторные поля. Из соотношений

$$\begin{aligned}
&[X_2, X_2] = 0, && [X_3, X_3] = 2\frac{\partial}{\partial u_1}, && [X_4, X_4] = 2u_1 \frac{\partial}{\partial u_1},\\
&[X_5, X_5] = 0, && [X_6, X_6] = 2u_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

ясно, что все эти векторные поля попарно неэквивалентны. Таким образом, в отличие от чисто четного случая, невозможно утверждать, что два не обращающихся в нуль ростка векторных полей можно перевести друг в друга ростком диффеоморфизма.

Другое важное свойство канонического поля $\frac{\partial}{\partial u_1}$ — это существование неопределенного интеграла, т. е. локальная разрешимость относительно f уравнения

$$\frac{\partial}{\partial u} f(u) = g(u).$$

Эта разрешимость часто используется в теории дифференциальных уравнений.

Начав с этих замечаний, давайте рассмотрим два типа понятия невырожденности. Из простой невырожденности поля X в точке pt следует его слабую невырожденность в точке pt. Обратная импликация, вообще говоря, неверна.

Теорема (о выпрямлении векторного поля). *Пусть* $X \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U})$ — *однородное векторное поле, невырожденное в точке* $\mathrm{pt} \in \mathcal{U}$. *Тогда*

1) *если* X — *четное поле, то в окрестности точки* pt *существует система координат* $x = (u, \xi)$, *в которой* X *имеет вид* $\frac{\partial}{\partial u_1}$;

2) *если* X — *нечетное поле, то в окрестности точки т существует система координат* $x = (u, \xi)$, *в которой* X *имеет вид*

$$X = \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial u_1}.$$

Замечание. 1) Теорема дает характеризацию поля $\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial u_1}$, которая впервые появилась в физических работах: «Квадратный корень из оператора сдвига, канонический в некотором смысле», — а именно в вышеуказанном.

2) На $\mathcal{R}^{0|q}$ невырожденных полей нет, поскольку пространство $C^\infty(\mathcal{R}^{0|q})$ конечномерно над $\mathbb{R}$.

Предложение. *Пусть* $X \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U})$ — *слабо невырожденное в точке т поле. Тогда*

1) *если* X *четно, то* X *невырожденно в точке* pt;

2) *если* X *нечетно, то в некоторой окрестности* $\mathcal{V}$ *точки* pt *существуют системы координат* $x = (u, \xi)$, *в которых* X *имеет вид* $\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_1 Y$, *где* Y — *некоторое четное векторное поле на* $\mathcal{V}$.

Следствие. *Нечетное слабо невырожденное в точке* pt *векторное поле* X *невырожденно в точке* pt *тогда и только тогда, когда* $X^2 = \frac{1}{2}[X, X]$ *слабо невырожденно в точке* pt.

Итак, для четных векторных полей понятие невырожденности и слабой невырожденности эквивалентны, а для нечетных — нет. Более того, проблема локальной классификации всех слабо невырожденных нечетных полей на суперобласти $\mathcal{U}$ размерности $r|s$, где $s > 0$, включает в себя в качестве подзадачи классификацию всех четных векторных полей на подсуперобласти $\mathcal{U}'$ размерности $r|(s-1)$, а это так называемая «дикая» задача, т. е. задача, которую невозможно описать в обозримых терминах при $r > 0$.

Для того чтобы описать, как одна из задач сводится к другой, достаточно сопоставить полю $X \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U}')_{\bar{0}}$ поле

$$Y_X = \frac{\partial}{\partial \tau} + \tau X \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U}' \times \mathcal{R}^{0|1})_{\bar{1}},$$

где τ — координата на $\mathcal{R}^{0|1}$. Действительно, тогда $[Y_X, Y_X] = 2X$.

Доказательство теоремы и предложения. Пусть X — четное и слабо невырожденное в точке pt векторное поле, а $x = (u, \xi)$ — локальные координаты. Тогда

$$X \equiv \sum f_i \frac{\partial}{\partial u_i} \pmod{I}, \quad \text{где } X|_{\mathrm{pt}} = \sum f_i(\mathrm{pt}) \frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Поэтому подстилающее поле πX на U, выраженное в координатах $\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_r$ в виде $\sum \tilde{f}_i \frac{\partial}{\partial \tilde{u}_i}$, невырожденно. Из теоремы о выпрямлении векторного поля на многообразиях (см. [Ar1]) следует, что мы можем предположить, что $X \equiv \frac{\partial}{\partial u_1} \mod I$. Всюду ниже, если в процессе доказательства нам потребуется уменьшить суперобласть $\mathcal{U}$, мы будем рассматривать меньшую суперобласть, не оговаривая этого явно.

Докажем по индукции, что при любом $k > 0$ существует локальная система координат, такая что $X \equiv \frac{\partial}{\partial u_1} \pmod{I^{2k-1}}$. Для $k = 1$ это установлено. Пусть $k \geqslant 1$ и $X \equiv \frac{\partial}{\partial u_1} \pmod{I^{2k-1}}$, т. е. $X = \frac{\partial}{\partial u_1} + \sum\limits_{i=1}^{s} \eta_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} + X'$, где $X' \equiv 0 \pmod{I^{2k}}$ и $\eta \in I^{2k-1}$.

Любую нечетную функцию ζ можно представить в виде $\sum\limits_{p(\alpha)=\bar{1}} f_\alpha(u)\xi^\alpha$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ есть мультииндекс, такой что $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $p(\alpha) \equiv \alpha_1 + \ldots + \alpha_s \pmod{2}$, а $\xi^\alpha = \xi^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \xi^{\alpha_s}$. Тогда

$$(X - X')\zeta = \sum_{p(\alpha)=\bar{1}} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial u_1} \xi^\alpha + \sum_{i=1}^{s} f_\alpha \eta_\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \xi_i} \right) = \sum_{p(\alpha)=\bar{1}} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial u_1} + L_\alpha(\bar{f}) \right) \xi^\alpha,$$

где $\bar{f} = \{f_\alpha \mid p(\alpha) = \bar{1}\}$, а L_α — какие-то линейные операторы.

Поэтому условие $(X - X')\zeta = 0$ эквивалентно линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с временем u_1 и параметрами $u_2, \ldots, u_r$. Таким образом, существует решение $\zeta_1, \ldots, \zeta_s$ этой системы с начальными условиями $\zeta_i(0, u_2, \ldots, u_r) = \xi_i$, гладкое относительно всех параметров. По теореме об обратной функции набор (u, ζ) может служить локальной системой координат.

В координатах (u, ζ) имеем $X - X' = \dfrac{\partial}{\partial u_1}$, т. е. $X \equiv \dfrac{\partial}{\partial u_1} \pmod{I^{2k}}$, откуда получаем, что

$$X \equiv \frac{\partial}{\partial u_1} + \sum_{i=1}^{r} g_i \frac{\partial}{\partial u_i} \pmod{I^{2k+1}}, \quad \text{где } g_i \in I^{2k}.$$

Положим

$$u_i' = u_i - \int_0^{u_1} g_i(t, u_2, \ldots, u_r, \zeta_1, \ldots, \zeta_s)dt, \quad i = s, \ldots, r.$$

Набор (u', ζ) тоже локальная система координат, в которой $X \equiv \dfrac{\partial}{\partial u_1'}$ $\pmod{I^{2k+1}}$, что можно проверить непосредственно, вычислив $X(u_i')$.

Поскольку $I^{s+1} = 0$, после конечного числа шагов мы построим координатную систему в окрестности точки m, в которой $X = \dfrac{\partial}{\partial u_1}$. Отсюда следуют первые утверждения как теоремы, так и предложения.

Пусть теперь $X \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U})_{\bar 1}$ — слабо невырожденное в точке m поле. Мы можем предположить, что $X(\xi_1)|_m \neq 0$, поскольку $X(u_i) \in C^\infty(\mathcal{U})_{\bar 1}$, а значит, обратная функция $g = (X(\xi_1))^{-1} \in C^\infty(\mathcal{V})_{\bar 0}$ существует в окрестности $\mathcal{V} \ni m$.

Положим $y_i = x_i - \xi_1 X(x_i)g$ при $i \neq n+1$ и $y_{n+1} = \eta_1 = \xi_1 g$. Тогда $X(y_{n+1}) - 1 \in \xi_1 C^\infty(\mathcal{V})$ и $X(y_i) \in \xi_1 C^\infty(\mathcal{V})$ при $i \neq n+1$, и поэтому $X = \dfrac{\partial}{\partial \eta_1} + \eta_1 X'$, где $X' \in \mathrm{Vect}(\mathcal{V})_{\bar 0}$. Предложение доказано.

Если поле $X \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U})_{\bar 1}$ невырожденно, то поле $X^2 \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U})_{\bar 0}$ тоже невырожденно, а значит, существует локальная система координат $y = (v, \eta)$, в которой $X^2 = \dfrac{\partial}{\partial y_1}$. Положим $\zeta = X(y_1)$. Поскольку $X(\zeta) = 1$, функцию ζ можно использовать в качестве нечетной координаты вместо одного из η_j и $X^2(\zeta) = 0$. Можно предположить, что ζ — это просто η_1, а тогда $X = \dfrac{\partial}{\partial \eta_1} + \eta_1 \dfrac{\partial}{\partial y_1} + X'$, где $X'(y_1) = X'(\eta_1) = 0$.

Пусть $x_1 = y_1$, $x_{n+1} = \eta_1$ и $x_i = y_i - \eta_1 X(y_i)$ при $i \neq 1, n+1$. Тогда X принимает требуемый вид $\dfrac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_1 \dfrac{\partial}{\partial u_1}$. ☐

Из доказательства теоремы и предложения легко вывести следующие слегка более сильные утверждения, которые нам потребуются в § 5.2.

Лемма. *Пусть* X *— векторное поле на* $\mathcal{U}^{r|s}$*, однородное относительно четности.*

1) *Если система координат* x *такова, что* $X(x_j) = 0$ *при всех* $j \in \Gamma \subseteq \{1, \ldots, r+s\}$*, а* X *невырожденно в точке* m*, то в некоторой окрестности* $\mathcal{W} \ni m$ *найдется система координат* $y = (y_1, \ldots, y_{r+s})$*, в которой* X *имеет канонический вид* $\left(\dfrac{\partial}{\partial y_1}\right.$ *или* $\dfrac{\partial}{\partial y_{r+1}} + y_{r+1}\dfrac{\partial}{\partial y_1}$ *в зависимости от четности поля* $\left.X\right)$*, а* $x_j|_{\mathcal{W}} = y_{k(j)}$ *при всех* $j \in \Gamma$.

2) *Если* X *— четное поле, а* f *— четная функция, такая что* $X(f) = 1$*, то для любой точки* $m \in U$ *существует локальная система координат* f *в окрестности* $\mathcal{W} \ni m$*, такая что* $X = \dfrac{\partial}{\partial y_1}$ *и* $y_1 = f|_{\mathcal{W}}$.

3) *Если* X *— нечетное поле, а* f *— четная функция, такая что* $X^2(f) = 1$*, то для любой точки* $m \in U$ *существует локальная система координат в окрестности* $\mathcal{W} \ni m$*, такая что* $X = \dfrac{\partial}{\partial y_{r+1}} + y_{r+1}\dfrac{\partial}{\partial y_1}$ *и* $y_1 = f|_{\mathcal{W}}$, $y_{r+1} = X(f)|_{\mathcal{W}}$.

Упражнение. Сформулируйте и докажите аналоги теоремы и предложения для семейств векторных полей.

5.1.2. Гомологические векторные поля. Нечетное векторное поле X на супермногообразии $\mathcal{M}$ назовем *гомологическим*, если оно суперкоммутирует с собой, т. е. если $[X, X] = 0$.

Термин происходит из того факта, что $X^2 = \dfrac{1}{2}[X, X] = 0$, а стало быть, с помощью производной Ли вдоль векторного поля X на пространстве $T(V)$ тензорных полей любого типа V, где V — $\mathfrak{gl}(\dim \mathcal{M})$-модуль, можно определить гомологии $H_X(V) := \mathrm{Ker}\, L_X / \mathrm{Im}\, L_X$: например, если $V = \mathbb{R}_\lambda$ — это 1-мерный $\mathfrak{gl}(\dim \mathcal{M})$-модуль, заданный суперследом, умноженным на λ, то $T(V)$ — это пространство λ-плотностей (функций при $\lambda = 0$), или $T(\mathrm{id}) \simeq \mathrm{Covect}(\mathcal{M})$, $T(\mathrm{id}^*) \simeq \mathrm{Vect}(\mathcal{M})$.

Примеры гомологических векторных полей:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \xi\frac{\partial}{\partial u}; \quad u\frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \xi u\frac{\partial}{\partial u}; \quad \ldots$$

Наиболее важным примером представляется внешний дифференциал на супермногообразии $\mathcal{M}$, рассматриваемый как векторное поле на супермногообразии $\widehat{\mathcal{M}}$.

Теорема. *Пусть* X *— гомологическое векторное поле на (односвязной) суперобласти* $\mathcal{U}$*. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *X слабо невырожденно в каждой точке суперобласти* $\mathcal{U}$;
2) $H_X(\mathbb{R}_0) = \{0\}$;
3) *существует система координат* (u, ξ) *на* $\mathcal{U}$*, в которой* $X = \dfrac{\partial}{\partial \xi_1}$.

Лемма. *Пусть X — гомологическое векторное поле на суперобласти $\mathcal{U}^{r|s}$, а x — система координат на $\mathcal{U}$, такая что $X(x_{r+1}) = 1$. Тогда $X = \frac{\partial}{\partial y_{r+1}}$ в некоторой системе координат y на $\mathcal{U}$, такой что*

$$y_{r+1} = x_{r+1} \quad \textit{и} \quad y_k = x_k - x_{r+1}X(x_k) \quad \textit{при } k \neq r+1.$$

Доказательство леммы следует из того, что $X(y_k) = 0$ при $k \neq r+1$. □

Доказательство теоремы. Импликации $3 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 1$ очевидны, поэтому достаточно доказать, что $1 \Longrightarrow 3$.

В произвольной системе координат $x = (u, \xi)$ на $\mathcal{U}$ представим X в виде $X \equiv \sum k_i(u)\frac{\partial}{\partial \xi_i} \pmod{I}$. Поскольку X слабо невырожденно во всех точках суперобласти $\mathcal{U}$, вектор-функция $\bar{l}(u) := (k_1(u), \ldots, k_s(u))$ на U не обращается в нуль. Любое векторное расслоение на U тривиализуемо, а следовательно, функцию $\eta_1 = \sum k_i(u)\xi_i$ можно дополнить до (глобальной) координатной системы на $\mathcal{U}$, так что $X(\eta_1) = \sum (k_i(u))^2 \pmod{I}$ не обращается в нуль на U. Положим $\xi_1 = \eta_1\,(X(\eta_1))^{-1}$. Поскольку

$$0 = X\left(X(\eta_1) \cdot (X(\eta_1))^{-1}\right) = X(\eta_1) \cdot X\left((X(\eta_1))^{-1}\right),$$

мы получаем $X(\xi_1) = 1$, и осталось применить лемму. □

Вопрос. Как охарактеризовать гомологические векторные поля? (А. Вайнтроб в работах [Va, Va1, Va2] описал одно из разумных ограничений: в терминах сингулярностей гомологического векторного поля. В частности, ему удалось охарактеризовать внешний дифференциал.)

5.1.3. Теорема Фробениуса. Основную часть теоремы Фробениуса о критериях интегрируемости системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных составляет утверждение о локальной нормальной форме дифференциальной $k|l$-системы, замкнутой относительно скобки Ли. Напомним, что подпучок $\mathcal{D}$ пучка $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-модулей $\mathrm{Vect}_{\mathcal{M}}$ на супермногообразии $\mathcal{M}$ называется *дифференциальной $k|l$-системой* или *распределением*, если в каждой точке $m \in \mathcal{M}$ существуют окрестность $\mathcal{U} \ni m$ и набор из k четных и l нечетных слабо невырожденных векторных полей на $\mathcal{U}$, который составляет базис $C^\infty(\mathcal{U})$-модуля $\mathcal{D}$.

Дифференциальная $k|l$-система $\mathcal{D}$ называется *интегрируемой*, если для любой точки m существует карта $(\mathcal{U}, x = (u, \xi))$, содержащая m и такая, что система $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ натянута на векторные поля $\frac{\partial}{\partial u_k}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_k}, \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_l}$.

Теорема Фробениуса. *Дифференциальная $k|l$-система $\mathcal{D}$ на супермногообразии $\mathcal{M}$ интегрируема тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ — подсуперагебра Ли в* $\mathrm{Vect}(\mathcal{M})$.

Лемма. *Если у $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-модуля $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ есть базис $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$, состоящий из суперкоммутирующих векторных полей, то дифференциальная $k|l$-система $\mathcal{D}$ интегрируема.*

Доказательство леммы. По предположению все векторные поля X_α слабо невырожденны. Фиксируем одно из них, скажем X_γ. Тогда существует локальная система координат x, в которой $X_\gamma = \frac{\partial}{\partial x_\gamma}$, где x_γ — одна из координатных функций.

Действительно, если X_γ — четное поле, то такая возможность следует из теоремы и предложения, доказанных в п. 5.1.1; если же X_γ — нечетное поле, то оно слабоневырожденное и гомологическое, а значит, по теореме из п. 5.1.2 приводится к виду $\frac{\partial}{\partial \xi_1}$.

Поскольку $[X_\gamma, X_\alpha] = 0$ при всех $\alpha \in \Gamma$, коэффициенты $c_i^{(\alpha)}$ координатной записи $X_\alpha = \sum c_i^{(\alpha)}\frac{\partial}{\partial x_i}$ не зависят от x_j. При $\alpha \neq \gamma$ положим $Y_\alpha = X_\alpha - X_\alpha(x_\gamma)X_\gamma$.

В координатную запись поля Y_α координата x_γ и частная производная $\frac{\partial}{\partial x_\gamma}$ не входят. Достаточно проверить тождество $[Y_\alpha, Y_\beta] = 0$ для любых $\alpha, \beta \in \Gamma \setminus \{\gamma\}$ с координатными функциями $x_1, \ldots, x_{r+s}$ в качестве пробных функций. Это очевидно.

Мы завершим доказательство леммы индукцией по $k + l$ и по размерности супермногообразия $\mathcal{M}$, поскольку $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma \setminus \{\gamma\}}$ — базис новой $k'|l'$-системы, удовлетворяющей условию леммы и такой, что $k' + l' = k + l - 1$. □

Доказательство теоремы. Во-первых, давайте докажем аналогично тому, как сделано в книге [God], что если дифференциальная система $\mathcal{D}$ интегрируема, то $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ — супералгебра Ли.

Действительно, покроем каждую точку $m \in M$ картой $\mathcal{U}_m \subseteq \mathcal{M}$, такой что $\mathcal{D}(\mathcal{U}_m)$ — супералгебра Ли. Пусть $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — разбиение единицы, вписанное в покрытие $\{\mathcal{U}_m,\ m \in \mathcal{M}\}$. Тогда для любых $X_1, X_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ имеем $[X_1, X_2] = \sum\limits_{\alpha,\beta \in I} [f_\alpha X_1, f_\beta X_2]$, где сумма локально конечна, а каждое слагаемое принадлежит модулю $\mathcal{D}(\mathcal{M})$.

Пусть $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ — дифференциальная $k|l$-система на $\mathcal{M}$, а $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ — подсупералгебра Ли в $\mathrm{Vect}(\mathcal{M})$. Тогда $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ тоже подсупералгебра Ли в $\mathrm{Vect}(\mathcal{U})$ для любой открытой подсуперобласти $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$. Действительно, если $Y_i = f_i X_i'$, где $f_i \in C^\infty(\mathcal{U})$, то $X_i = X_i|_{\mathcal{U}}$, где $X_i \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ при $i = 1, 2$;

причем

$$[Y_1,\, Y_2] = f_1 X_1'(f_2) X_2' + (-1)^{p(f_2)p(X_1)} f_1 f_2 [X_1',\, X_2'] + \\ + (-1)^{1+p(f_1X_1)p(f_2X_2)} f_2 X_2'(f_1) X_1' \in \mathcal{D}(\mathcal{U}),$$

поскольку $[X_1',\, X_2'] = [X_1,\, X_2]|_{\mathcal{U}} \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$.

В окрестности $\mathcal{U}$ произвольной точки $m \in \mathcal{M}$ выберем координаты x, а у $C^\infty(\mathcal{U})$-модуля $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ выберем базис $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$, где $\Gamma = \{1, \ldots \ldots, k, n+1, \ldots, n+l\}$ и $p(X_\alpha) = p(x_\alpha)$. Рассмотрим выражение для полей X_α в координатах:

$$X_\alpha = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r+s} c_i^{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Из определения $k|l$-системы следует, что матрица $(c_i^{(\alpha)})$ в точке m имеет максимальный ранг $r|s$.

Уменьшая при необходимости окрестность $\mathcal{U}$ точки m, производя $C^\infty(\mathcal{U})$-линейную замену базиса и перенумеровывая координатные функции, мы видим, что X_α приобретает следующий вид:

$$X_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \sum_{i \notin \Gamma} {c'}_i^{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Поскольку $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ — подсуперaлгебра Ли в $\mathrm{Vect}(\mathcal{U})$, при любых $\alpha, \beta \in \Gamma$ имеем

$$[X_\alpha,\, X_\beta] = \sum_{\varepsilon \in \Gamma} g_{\alpha\beta}^\varepsilon X_\alpha, \quad \text{где } g_{\alpha\beta}^\varepsilon \in C^\infty(\mathcal{U}).$$

Поскольку $0 = [X_\alpha,\, X_\beta] x_\varepsilon = g_{\alpha\beta}^\varepsilon$ при любых $\alpha, \beta, \varepsilon \in \Gamma$, мы получаем $[X_\alpha,\, X_\beta] = 0$, и осталось применить лемму. □

§ 5.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения

5.2.1. Мотивировки и определения. Для того чтобы построить теорию обыкновенных дифференциальных уравнений (для простоты в дальнейшем мы будем опускать прилагательное «обыкновенные») на супермногообразиях, давайте вспомним, как описывать дифференциальные уравнения на многообразиях в терминах векторных полей. А именно, *дифференциальным уравнением* на многообразии M называется векторное поле $X(t)$ на M, зависящее от *времени* t — параметра. Этот параметр пробегает одномерное многообразие T, на котором фиксировано векторное поле $\partial_T = \frac{d}{dt}$. *Решением* такого уравнения называется T-семейство диффеоморфизмов многообразия M, а именно сдвиги вдоль M со скоростью, которая определена полем $X(t)$.

Существование решения и гладкая зависимость решения от начальных данных обоснованы теоремой о выпрямлении векторного поля. *Единственность* же решения имеет место благодаря тому, что для любых двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ из условия $\partial_T f_1 = \partial_T f_2$ следует, что разность $f_1 - f_2$ — константа.

Из результатов § 5.1 следует, что только $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial \tau} + \tau \frac{\partial}{\partial t}$ могут претендовать на роль канонического векторного поля, которое служит заменой поля $\partial_T = \frac{d}{dt}$ на многообразии.

Другими словами, аналог ОДУ на супермногообразии — это уравнение в частных производных относительно квадратного корня из производной[1] по t.

Рассмотрим проблему под другим углом зрения. Пусть $\mathcal{T}$ — супермногообразие-*время*, а $\partial_{\mathcal{T}}$ — векторное поле на $\mathcal{T}$ (дифференцирование по времени). Рассмотрим наивную постановку задачи: найдем векторнозначную функцию $\bar{f}(t, \lambda)$ с r четными и s нечетными компонентами-векторами, удовлетворяющую следующему соотношению (*задача Коши*):

$$\partial_{\mathcal{T}} \bar{f} = \bar{F}(t,\, f;\, \lambda), \qquad \bar{f}|_0 = \bar{f}_0(\lambda), \tag{5.3}$$

где λ — параметр, пробегающий супермногообразие Λ.

Более геометрически задачу Коши можно сформулировать следующим образом: функция $\bar{f}(t, \lambda)$ определяет морфизм $\psi\colon \mathcal{T} \times \Lambda \longrightarrow \mathcal{R}^{r|s}$, а функция $\bar{F}(t, f, \lambda)$ определяет $\mathcal{T} \times \Lambda$-семейство $X = \sum F_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ векторных полей на $\mathcal{R}^{r|s}$. Уравнение (5.3), таким образом, записывается как условие

$$\psi^* \circ X = \partial_T \circ \psi^* \ \text{ в суперпространстве } C^\infty(\mathcal{R}^{r|s})$$

или как

$$\psi^* \circ (X + \partial_T) = \partial_T \circ \psi^* \ \text{ в суперпространстве } C^\infty(\mathcal{R}^{r|s} \times \mathcal{T}).$$

Вышеприведенные аргументы обосновывают следующее определение. Пусть $\mathcal{T}$ — открытая подсуперобласть в $\mathcal{T}_0$, а $x_{\mathcal{T}}$ и $\partial_{\mathcal{T}}$ — координаты и векторное поле на $\mathcal{T}_0$ соответственно. Пусть $(\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_0, x_{\mathcal{T}}, \partial_{\mathcal{T}})$ — одно из семейств $\left(\mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}^{1|1}, (t, \tau), \frac{\partial}{\partial \tau} + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right)$ или $\left(I \subseteq \mathbb{R}^{1|0}, t, \frac{d}{dt}\right)$, а I и $\mathcal{I}_{rd}$ — какие-то интервалы, содержащие начало координат. Назовем супермногообразие $\mathcal{T}$ *временем*, а $\partial_{\mathcal{T}}$ — *дифференцированием по времени*.

Упражнение. Докажите лемму.

---

[1] Иногда можно и нужно рассматривать несколько таких корней одновременно с разными нечетными параметрами. Этим возможностям соответствуют простые супералгебры Ли струнных теорий, см. [GLS1] и [Бер].

Лемма. *Если* $\mathcal{T}$ *— время, а* $\mathcal{U}$ *— суперобласть, то условие* ${}^\circ\partial_{\mathcal{T}}(f) = 0$ *для какой-то функции* $f \in C^\infty(\mathcal{U} \times \mathcal{T})$ *означает, что функция* f *является* $\mathcal{U}$*-семейством констант на* $\mathcal{T}$*, т. е.* $f \in \pi_{\mathcal{U}}(C^\infty(\mathcal{U}))$*, где* $\pi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \times \mathcal{T} \to \mathcal{U}$ *— проекция на первый сомножитель.*

В частности, если $\partial_{\mathcal{T}}(f) = 0$*, где* $f \in C^\infty(\mathcal{T})$*, то* f *— константа.*

Доказательство оставляется читателю. ☐

Пусть $\mathcal{M}$ — супермногообразие, а $\mathcal{T}$ — время. Произведение $\mathcal{U} \times \mathcal{T}$, где $\mathcal{U}$ — открытая подсуперобласть в $\mathcal{M}$, а $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ — подсупермногообразие, назовем *столбом над* $\mathcal{M}$. Открытое подсупермногообразие в $\mathcal{M} \times \mathcal{T}$, содержащее $M \times \{0\}$, будет называться (*супер*)*областью над* $\mathcal{M}$, а область над $\mathcal{M}$, представимая в виде объединения столбов, будет называться *столбчатой областью над* $\mathcal{M}$. Другими словами, столбчатая область над $\mathcal{M}$ есть окрестность множества $M \times \{0\}$ в $\mathcal{M} \times \mathcal{T}$, содержащая вместе с любой точкой (m, t) все точки вида $(m, \lambda t)$, где $\lambda \in [0, 1]$.

Если M — компакт, то всюду ниже мы ограничимся рассмотрением столбчатых областей вида $\mathcal{M} \times \mathcal{T}$.

Обозначим проекции супермногообразия $\mathcal{M} \times \mathcal{T}$ на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{T}$ символами $\pi_{\mathcal{M}}$ и $\pi_{\mathcal{T}}$ соответственно. Для любой точки $s \in T$ обозначим через $i_s :\ \mathrm{pt} \to \mathcal{T}$ вложение точки s, а символом $i_{\mathcal{M}}^{(s)} = \mathrm{id}_{\mathcal{M}} \times i_s$ — отвечающее ей вложение супермногообразия $\mathcal{M}$ в $\mathcal{M} \times \mathcal{T}$.

Дифференциальным уравнением на $\mathcal{M}$ *с временем* $\mathcal{T}$ назовем векторное поле D четности $p(\partial_{\mathcal{T}})$ на суперобласти $\mathcal{W}$ над $\mathcal{M}$, такое что

$$D \circ \pi_{\mathcal{T}}^* = \pi_{\mathcal{T}}^* \circ {}^\circ\partial_{\mathcal{T}}.$$

Итак, мы можем теперь интерпретировать сумму $D = {}^\circ\partial_{\mathcal{T}} + X$, где X есть $\mathcal{T}$ семейство векторных полей на $\mathcal{M}$, а $p(X) = p(\partial_{\mathcal{T}})$, как дифференциальное уравнение.

Назовем $\mathcal{T}$*-семейством диффеоморфизмов супермногообразия* $\mathcal{M}$ диффеоморфизм φ суперобластей над $\mathcal{M}$, такой что $\pi_{\mathcal{T}} \circ \varphi = \pi_{\mathcal{T}}$.

Решением дифференциального уравнения D, заданного на столбчатой суперобласти $\mathcal{W}$ над $\mathcal{M}$, называется $\mathcal{T}$-семейство диффеоморфизмов $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$, где $V' \subseteq W$, такое что (напомним, что $i_{\mathcal{M}}^{(s)} = \mathrm{id}_{\mathcal{M}} \times i_s$ при всех s, в частности при $s = 0$)

$${}^\circ\partial_{\mathcal{T}} \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \widetilde{D}; \tag{5.4}$$

$$\varphi \circ i_{\mathcal{M}}^{(0)} = i_{\mathcal{M}}^{(0)}, \tag{5.5}$$

а $\widetilde{D}$ — поле на $\mathcal{M} \times \mathcal{T}$, определенное условиями

$$\pi_{\mathcal{T}} \circ \partial_{\mathcal{T}} = \widetilde{D} \circ \pi_{\mathcal{T}}^*; \qquad \widetilde{D} \circ \pi_{\mathcal{M}}^* = 0. \tag{5.6}$$

На многообразиях приведенное выше определение дифференциального уравнения эквивалентно обычному (см. [Ar1]), а приведенное выше определение решения дифференциального уравнения превращается в привычных терминах в определение (5.3) всех решений данного уравнения, откуда условие (5.5) выделяет то решение, которое удовлетворяет стандартным начальным условиям $\varphi(m, 0) = m$.

Оказывается, *каждое* дифференциальное уравнение D на $\mathcal{M}$ с временем $\mathcal{T}$ можно рассмотреть как суперизацию некоторого вполне канонически определенного дифференциального уравнения $\mathrm{pr}\, D$ на M. А именно, для дифференциального уравнения D с временем $\mathcal{T}$, заданного на суперобласти $\mathcal{W}$ над $\mathcal{M}$, скажем, что

$$\mathrm{pr}\, D = \begin{cases} \widetilde{D} := \pi_W(D), & \text{если } D \text{ четно,} \\ \widetilde{D^2} := \pi_W(D^2), & \text{если } D \text{ нечетно,} \end{cases}$$

— дифференциальное уравнение с временем T, заданное на области W над M. Назовем $\mathrm{pr}\, D$ *подстилающим дифференциальным уравнением* уравнения D.

Проверка того, что $\mathrm{pr}\, D$ действительно дифференциальное уравнение, сводится к проверке тождества $\left(\dfrac{\partial}{\partial\tau} + \tau\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^2 = \dfrac{\partial}{\partial t}$, которое очевидно.

Предложение. *Если* $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ *— решение дифференциального уравнения* D*, то* $\widetilde{\varphi}\colon V \to V'$ *— решение дифференциального уравнения* $\mathrm{pr}\, D$.

Доказательство. Условие (5.5) следует из очевидного тождества $\widetilde{i_{\mathcal{M}}^{(s)}} = i_M^{(s)}$. Если D четно, то для любой функции $f \in C^\infty(\mathcal{V}')$ имеем

$$\widetilde{\varphi}^* \circ (\mathrm{pr}\, D)(\widetilde{f}) = \widetilde{\varphi}^* \circ \widetilde{D(f)} = \widetilde{\varphi^* \circ D}(f) = \widetilde{{}^\circ\partial_{\mathcal{T}} \circ \varphi^*}(f) = \frac{{}^\circ\partial}{\partial t} \circ \widetilde{\varphi}^*(\widetilde{f}).$$

Если же D нечетно, то

$$\widetilde{\varphi}^* \circ \mathrm{pr}\, D(\widetilde{f}) = \widetilde{\varphi^* \circ D^2}(f) = \widetilde{\partial_T^2 \circ \varphi^*}(f) = \frac{{}^\circ\partial}{\partial t} \circ \widetilde{\varphi}^*(\widetilde{f}). \qquad ☐$$

5.2.2. Теорема о существовании и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема. *Пусть* D *— дифференциальное уравнение с временем* $\mathcal{T}$ *на супермногообразии* $\mathcal{W}$*, заданное в суперобласти над* $\mathcal{M}$*. Тогда*

1) *существует решение* $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ *уравнения* D *для некоторой столбчатой суперобласти над* $\mathcal{M}$;

2) *если* $\varphi_i\colon \mathcal{V}_i \to \mathcal{V}_i'$, $i = 1, 2,$ *— два решения уравнения* D*, а* $\mathcal{V}_i$ *— соответствующие столбчатые суперобласти, то* $\varphi_1|_{\mathcal{V}} = \varphi_2|_{\mathcal{V}}$*, где* $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$;

3) *решение уравнения* D*, заданное в столбчатой суперобласти* $\mathcal{V}$*, существует тогда и только тогда, когда существует решение подстилающего уравнения* $\mathrm{pr}\, D$*, заданного в* V.

Следствие. *Если дифференциальное уравнение D с временем $\mathcal{T}$ на компактном супермногообразии $\mathcal{M}$ задано на всем произведении $\mathcal{M}\times\mathcal{T}$, то у этого уравнения существует глобальное решение* $\varphi\colon \mathcal{M}\times\mathcal{T}\longrightarrow\mathcal{M}\times\mathcal{T}$.

Замечания. 1) Любая суперобласть над $\mathcal{M}$ содержит столбчатую суперобласть над $\mathcal{M}$.

2) Если область определения решения не является столбчатой, то решение необязательно единственно даже и в чисто четном случае.

3) Даже если $\varphi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{V}'$ — решение, определенное в столбчатой суперобласти $\mathcal{V}$, то суперобласть $\mathcal{V}'$ не обязательно столбчатая.

Лемма. *Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — супермногообразия, $\mathcal{S}$ — открытое связное подсупермногообразие в $\mathcal{T}$, а $\varphi\colon \mathcal{N}\times\mathcal{S}\longrightarrow\mathcal{M}\times\mathcal{S}$ — какое-то $\mathcal{S}$-семейство морфизмов, удовлетворяющее условию*

$$^\circ\partial_{\mathcal{T}}\circ\varphi^* = \varphi^*\circ\ ^\circ\partial_{\mathcal{T}}. \tag{5.7}$$

Тогда $\varphi=\psi\times\mathrm{id}_{\mathcal{S}}$, где $\psi=\pi_{\mathcal{M}}\circ\varphi\circ i_{\mathcal{M}}^{(s)}$ для любой точки $s\in\mathcal{S}$.

Другими словами, если выполнено условие (5.7), то φ есть постоянное $\mathcal{S}$-семейство морфизмов $\mathcal{N}\to\mathcal{M}$.

Доказательство леммы. Поскольку равенство $^\circ\partial_{\mathcal{T}}\circ\varphi^*\circ\pi_{\mathcal{M}}^*=0$ очевидно,

$$\varphi^*(\pi_{\mathcal{M}}^*(C^\infty(\mathcal{M})))\subseteq\pi_{\mathcal{N}}^*(C^\infty(\mathcal{N})),$$

т. е. $\varphi=\psi\times\mathrm{id}_{\mathcal{S}}$. Это позволяет нам единственным образом восстановить ψ. □

Доказательство теоремы. Чтобы доказать единственность, покроем $\mathcal{V}$ столбами вида $\mathcal{U}_\alpha\times\mathcal{T}_\alpha$. Аналогично предложению из п. 5.2.1 имеем

$$\varphi_i^*\circ\mathrm{pr}\,D=\frac{^\circ\partial}{\partial t}\circ\tilde{\varphi}_i^*.$$

Благодаря единственности решения дифференциального уравнения в четном случае получаем $\tilde{\varphi}_1=\tilde{\varphi}_2$, а следовательно, $\varphi_1(\mathcal{U}_\alpha\times\mathcal{T}_\alpha)=\varphi_2(\mathcal{U}_\alpha\times\mathcal{T}_\alpha)$. Поэтому композиция $\varphi=\varphi_2^{-1}\varphi_1\colon\ \mathcal{U}_\alpha\times\mathcal{T}_\alpha\longrightarrow\mathcal{U}_\alpha\times\mathcal{T}_\alpha$ корректно определена. Приняв во внимание начальное условие (5.5), мы видим, что из леммы следует, что φ — тождественный морфизм. Теперь положим

$$V=\{(m,\,t)\in M\times T\mid \begin{array}{l}\text{решение } \tilde{\varphi}_m(s) \text{ подстилающего дифференциального}\\ \text{уравнения } \mathrm{pr}\,D \text{ на } M \text{ с начальными условиями}\\ \varphi_m(0)=m \text{ может быть продолжено на время } t\}.\end{array}$$

Ясно, что V — открытое множество, и оно определяет столбчатую суперобласть $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{M}\times\mathcal{T}$ (более того, V — максимальная столбчатая область над M, для которой решение уравнения $\mathrm{pr}\,D$ определено).

Для каждой точки $(m,\,t)$ из V множество точек вида $\tilde{\varphi}(m,\,\lambda t)$, где $\lambda\in[0,\,1]$, является компактом в W. Покроем каждую точку этого множества областью, в которой (по лемме из п. 5.2.1) поле D может быть приведено к каноническому виду без необходимости в замене координат на $\mathcal{T}$.

Выбрав подходящее подпокрытие и уменьшив при необходимости его элементы, мы можем считать, что покрытие состоит из суперобластей $\mathcal{V}_i$, таких что $(V_i)=\tilde{\varphi}[(U\times T_i)]$, где $i=0,\,\ldots,\,k$, а $\mathcal{U}$ — карта в $\mathcal{M}$, в то время как $\mathcal{T}_i$ — открытые подсуперобласти в $\mathcal{T}$, а $\mathcal{T}_0$ содержит начало координат 0.

Пусть $y^{(i)}=(y_1^{(i)},\,\ldots,\,y_{r+s}^{(i)})$, где $i=0,\,\ldots,\,k$, есть $\mathcal{T}$-семейство систем координат на $\mathcal{V}_i$, такое что $D(y_j^{(i)})=0$. Тогда $z^{(0)}=(i_{\mathcal{U}}^{(0)})^*y^{(0)}$ суть координаты на $\mathcal{U}$, поскольку $\tilde{\varphi}(m,\,0)=(m,\,0)$. Полагая $\varphi_0^*(y_i^{(0)})=z_i^{(0)}$, мы получаем $\mathcal{T}$-семейство диффеоморфизмов $\varphi_0\colon\mathcal{U}\times\mathcal{T}_0\to\mathcal{V}_0$, такое что

$$\varphi_0\circ i_{\mathcal{U}}^{(0)}=i_{\mathcal{U}}^{(0)},\qquad \varphi_0^*\circ D=\partial_{\mathcal{T}}\circ\varphi_0^*.$$

Пусть $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_0$ пересекаются. Положим $y'^{(1)}=y^{(1)}|_{\mathcal{V}_0\cap\mathcal{V}_1}$. Набор $y'^{(1)}$ является $\mathcal{T}$-семейством систем координат на $\mathcal{V}_0\cap\mathcal{V}_1$, а значит, $\varphi_0^*(y'^{(1)})$ есть $\mathcal{T}$-семейство систем координат на $\mathcal{U}\times(\mathcal{T}_0\times\mathcal{T}_1)$. Поскольку

$$^\circ\partial_{\mathcal{T}}\circ\varphi_0^*(y'^{(1)}_i)=\varphi_0^*\circ D(y'^{(1)}_i)=0,$$

по лемме из п. 5.2.1 мы получаем $\varphi_0^*(y'^{(1)}_i)=\pi_{\mathcal{U}}^*(z_i^{(1)})$, где $z^{(1)}=(z_1^{(1)},\,\ldots$ $\ldots,\,z_{r+s}^{(1)})$ — набор функций из $C^\infty(\mathcal{U})$, который, очевидно, может выполнять роль координат на $\mathcal{U}$.

Положив $\varphi_1^*(y_i^{(1)})=z_i^{(1)}$, мы получаем $\mathcal{T}$-семейство диффеоморфизмов

$$\varphi_1\colon\mathcal{U}\times\mathcal{T}_1\longrightarrow\mathcal{V}_1,\ \text{ такое что } \varphi_1^*\circ D={}^\circ\partial_{\mathcal{T}}\circ\varphi_1^*,$$

которое совпадает с φ_0 на $\mathcal{U}\times(\mathcal{T}_0\cap\mathcal{T}_1)$.

Далее, мы должны выбрать $\mathcal{T}_l$ так, чтобы пересечение $\mathcal{T}_l\cap(\mathcal{T}_0\cup\mathcal{T}_1)$ было непусто. Повторим с $\mathcal{T}_l$ процедуру, произведенную над $\mathcal{T}_1$, и будем продолжать таким образом до тех пор, пока мы не получим объединенного семейства $\mathcal{T}$-диффеоморфизмов $\varphi_{m,t}\colon\mathcal{U}\times J_m\to\mathcal{V}_m$, где $\mathcal{V}_m=\bigcup\limits_j\mathcal{V}_j$ и $J_m=\bigcup\limits_j J_j$, такого что

$$\varphi_m\circ i_{\mathcal{U}}^{(0)}=i_{\mathcal{U}}^{(0)}\quad\text{ и }\quad\varphi_m^*\circ D={}^\circ\partial_{\mathcal{T}}\circ\varphi_m^*.$$

Пусть ψ_1 и ψ_2 — два отображения вида φ_m, построенные для разных точек m, и $\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2\neq\varnothing$. Тогда ψ_1 и ψ_2 совпадают на пересечении $\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$ благодаря лемме. Поэтому $\mathcal{T}$-семейства морфизмов $\varphi\colon\mathcal{U}_m\to\mathcal{W}$, построенные для разных точек из V, можно склеить в объединенное $\mathcal{T}$-семейство морфизмов $\varphi\colon\mathcal{V}\to\mathcal{W}$.

Благодаря теореме об обратной функции φ является диффеоморфизмом. ☐

5.2.3. Задача Коши. Пусть дифференциальное уравнение D с временем $\mathcal{T}$ на супермногообразии $\mathcal{M}$ задано в области $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{T}$. *Задачей Коши* для дифференциального уравнения D назовем пару $(\mathcal{N}, \psi_{in})$, где $\mathcal{N}$ является супермногообразием, а $\psi_{in}\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ — морфизмом супермногообразий. *Решением* задачи Коши $(\mathcal{N}, \psi_{in})$ для D называется $\mathcal{T}$-семейство морфизмов $\psi\colon \mathcal{N}^+ \longrightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{T}$, заданное в суперобласти $\mathcal{N}^+$ над $\mathcal{N}$ и такое, что

1) ${}^\circ\partial_{\mathcal{T}} \circ \psi^* = \psi^* \circ D$;

2) $\psi \circ i^{(0)}_{\mathcal{N}} = i^{(0)}_{\mathcal{M}} \circ \psi_{in}$;

3) $\psi(\mathcal{N}^+) \subset \mathcal{W}$.

Теорема. *Пусть $(\mathcal{N}, \psi_{in})$ — задача Коши для уравнения D. Тогда*

1) *существует решение ψ задачи Коши, определенное в столбчатой суперобласти $\mathcal{N}^+$ над $\mathcal{N}$;*

2) *если два решения задачи Коши определены в столбчатой суперобласти, то они в ней совпадают;*

3) *если $\mathcal{X}$ — замкнутое подсупермногообразие в $\mathcal{N}$, а $\mathcal{X}^+ \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{T}$ — столбчатая (над $\mathcal{X}$) суперобласть, такая что существует решение $\chi\colon \mathcal{X}^+ \to \mathcal{W}$ задачи Коши $(\mathcal{X}, \psi_{in}|_{\mathcal{X}})$, то существует некоторое решение $\varphi\colon \mathcal{N}^+ \to \mathcal{W}$ задачи Коши $(\mathcal{N}, \psi_{in})$, определенное в столбчатой суперобласти $\mathcal{N}^+$, которая содержит $\mathcal{X}^+$, и такое, что $\varphi|_{\mathcal{X}^+} = \chi$.*

Доказательство. 1) Пусть $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ — *максимальное* 1) решение дифференциального уравнения D, определенное в столбчатой области $\mathcal{V}$ над $\mathcal{M}$. Положим

$$\mathcal{N}^+ = (\psi_{in} \times \mathrm{id}_{\mathcal{T}})^{-1}\mathcal{V}, \qquad \psi = \varphi \circ (\psi_{in} \times \mathrm{id}_{\mathcal{T}}).$$

Тогда ψ — решение задачи Коши $(\mathcal{N}, \psi_{in})$, а $\mathcal{N}^+$ — столбчатая область над $\mathcal{N}$, поскольку область $\mathcal{V}$ столбчатая.

2) Пусть ψ — решение задачи Коши, определенной в столбчатой суперобласти $\mathcal{N}^+$ над $\mathcal{N}$. Тогда $\tilde{\psi}(N^+) \subseteq \tilde{\varphi}(V)$ (вспомним, что $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ является решением дифференциального уравнения D с максимальной областью) и морфизм

$$\psi' = \varphi^{-1} \circ \psi\colon \mathcal{N}^+ \longrightarrow \mathcal{V} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{T}$$

определен. Ограничение морфизма ψ' на любой столб $\mathcal{N}_\alpha \times \mathcal{T}_\alpha \subseteq \mathcal{N}^+$ совпадает (по теореме 4.2.3) с $\psi_{in}|_{\mathcal{N}_\alpha} \times \mathrm{id}_{\mathcal{T}}$, а значит, морфизм ψ' определен однозначно. Следовательно, однозначно определен и морфизм $\psi = \varphi \circ \psi'$.

---

1) Т. е. решение с максимальной областью определения.

3) Аналогично предложению из п. 5.2.1 если $\psi\colon \mathcal{N}^+ \to \mathcal{W}$ — решение задачи Коши $(\mathcal{N}, \psi_{in})$ для уравнения D, то $\tilde{\psi}\colon N \to W$ — решение задачи Коши $(N, \tilde{\psi}_{in})$ для уравнения πD. Если $\mathcal{N}^+$ — столбчатая суперобласть и $(n, s) \in N$, то существует решение $g(t)$ уравнения πD, удовлетворяющее начальным условиям $g(0) = \tilde{\psi}_{in}(n)$, которое можно продолжить на время s, и поэтому $(\tilde{\psi}_{in} \times \mathrm{id}_T)N^+ \subseteq V$. Поскольку $\mathcal{X}^+ \subseteq (\psi_{in} \times \mathrm{id}_{\mathcal{T}})^{-1}\mathcal{V}$, все доказано. ☐

Замечание. Решение дифференциального уравнения D является одновременно решением универсальной задачи Коши $(\mathcal{M}, \mathrm{id}_{\mathcal{M}})$ для D. Лемма из п. 5.2.2 утверждает, что единственное решение задачи Коши для тривиального уравнения $D = \partial_T$ — это константа.

5.2.4. Соответствия между векторными полями и семействами диффеоморфизмов. Теория (обыкновенных) дифференциальных уравнений, построенная выше, устанавливает соответствие между $\mathcal{T}$-семействами диффеоморфизмов супермногообразия $\mathcal{M}$ и $\mathcal{T}$-семействами векторных полей на $\mathcal{M}$ (т. е. неавтономных векторных полей на $\mathcal{M}$) той же четности, что и $\partial_{\mathcal{T}}$). Действительно, сопоставим $\mathcal{T}$-семейству векторных полей X на $\mathcal{M}$ уравнение ${}^\circ\partial_{\mathcal{T}} + X$.

Итак, мы описали $1|1$-мерные и $1|0$-мерные семейства диффеоморфизмов супермногообразия $\mathcal{M}$. Опишем теперь $0|1$-мерные семейства диффеоморфизмов.

Всюду ниже τ означает координату на $\mathcal{R}^{0|1}$, а $i_{\mathcal{M}}$ — вложение,

$$\mathrm{id}_{\mathcal{M}} \times \mathrm{pt}\colon \mathcal{M} = \mathcal{M} \times \mathrm{pt} \longrightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{R}^{0|1}.$$

Лемма. *Пусть $\varphi\colon \mathcal{M} \times \mathcal{R}^{0|1} \longrightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{R}^{0|1}$ есть $\mathcal{R}^{0|1}$-семейство диффеоморфизмов супермногообразия $\mathcal{M}$, такое что $\varphi \circ i_{\mathcal{M}} = i_{\mathcal{M}}$. Тогда существует единственное нечетное векторное поле X на $\mathcal{M}$, такое что $\varphi^* = \exp(\tau X) = 1 + \tau X$.*

Доказательство. Поскольку $\varphi \circ i_{\mathcal{M}} = i_{\mathcal{M}}$, мы получаем $\varphi^*(f) = f + \tau X(f)$, где $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, а $X\colon C^\infty(\mathcal{M}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ — нечетный оператор. Для любых $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ имеем

$$X(fg) = \frac{\partial}{\partial\tau}\varphi^*(fg) = \frac{\partial}{\partial\tau}(fg + \tau X(f)g + f\tau X(g)) = X(f)g + (-1)^{p(f)}fX(g),$$

т. е. $X \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M})_{\bar{1}}$ и $\varphi^* = \exp(\tau X)$. ☐

Итак, мы установили соответствие между $\mathcal{R}^{0|1}$-семействами диффеоморфизмов и автономными нечетными векторными полями на $\mathcal{M}$. Покажем, что это соответствие можно установить также с помощью очень специфической теории обыкновенных дифференциальных уравнений с временем $\mathcal{R}^{0|1}$, подобно тому как мы это сделали в предыдущих пунктах.

Дифференциальным уравнением с временем $\mathcal{R}^{0|1}$ на супермногообразии $\mathcal{M}$ назовем нечетное векторное поле D на $\mathcal{M} \times \mathcal{R}^{0|1}$, такое что

$$D \circ \pi^*_{\mathcal{R}^{0|1}} = \pi^*_{\mathcal{R}^{0|1}} \circ \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Решением дифференциального уравнения D с временем $\mathcal{R}^{0|1}$ назовем $\mathcal{R}^{0|1}$-семейство $\varphi\colon \mathcal{M} \times \mathcal{R}^{0|1} \longrightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{R}^{0|1}$ диффеоморфизмов супермногообразия $\mathcal{M}$, такое что

$$\varphi \circ i_{\mathcal{M}} = i_{\mathcal{M}}, \qquad \varphi^* \circ D = \frac{\partial}{\partial \tau} \circ \varphi^*.$$

Ясно, что дифференциальное уравнение D с временем $\mathcal{R}^{0|1}$ можно единственным образом записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau} + X_{\bar 1} + \tau X_{\bar 0}, \qquad \text{где } X_i \in \operatorname{Vect}_i(\mathcal{M}).$$

Теорема. *Дифференциальное уравнение D с временем $\mathcal{R}^{0|1}$ на $\mathcal{M}$ имеет решение тогда и только тогда, когда $D^2 = 0$. В этом случае $X_0 = -X_1^2$; решение $\varphi\colon \mathcal{M} \times \mathcal{R}^{0|1} \longrightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{R}^{0|1}$ единственно и задается формулой*

$$\varphi^* = \exp(\tau X_{\bar 1}) = 1 + \tau X_1.$$

Доказательство. Если φ — решение уравнения D, то

$$\varphi^* \circ D = \frac{\partial}{\partial \tau} \circ \varphi^*, \tag{5.8}$$

откуда следует, что $\varphi^* \circ D^2 = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^2 \circ \varphi^* = 0$. Поскольку

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + X_1 + \tau X_0\right)^2 = X_0 + X_1^2 + \tau[X_0, X_1],$$

условие $D^2 = 0$ эквивалентно условию $X_0 = -X_1^2$. Пусть теперь φ — решение уравнения $\frac{\partial}{\partial \tau} + X_1 - \tau X_1^2$. Тогда по лемме $\varphi^* = 1 + \tau X$, где $X \in \operatorname{Vect}(\mathcal{M})_{\bar 1}$. Условие (5.8) эквивалентно тождеству

$$D = (\varphi^*)^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial \tau} \circ \varphi^* = \frac{\partial}{\partial \tau} + X - \tau X^2. \qquad \square$$

Следовательно, теория дифференциальных уравнений с временем $\mathcal{R}^{0|1}$ позволяет интегрировать нечетные векторные поля только на $\mathcal{M}$. Произвольная зависимость уравнения D от τ не разрешена. Другими словами, аналогия с неавтономными уравнениями неполна. Таким образом, построенную выше теорию дифференциальных уравнений с временем $\mathcal{R}^{0|1}$ нельзя рассматривать как альтернативу теории дифференциальных уравнений с временем $\mathcal{T}$, где $\operatorname{sdim} \mathcal{T} = 1|1$. Более того, как можно было предвидеть, первую из этих теорий можно вложить во вторую.

Опишем условия, при которых $1|1$-мерное семейство диффеоморфизмов супермногообразия $\mathcal{M}$ можно редуцировать к $1|0$-или $0|1$-мерному семейству. Пусть (t, τ) — координаты на $\mathcal{T}$. Скажем, что *$\mathcal{T}$-семейство морфизмов $\varphi\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{T}$ не зависит от* τ (соответственно от t), если

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \circ \varphi^* \circ \pi^*_{\mathcal{M}}(C^\infty(\mathcal{M})) = 0 \quad \left(\text{соответственно } \frac{\partial}{\partial t} \circ \varphi^* \circ \pi^*_{\mathcal{M}}(C^\infty(\mathcal{M})\right) = 0).$$

Предложение. *Пусть $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ — решение дифференциального уравнения D с временем $\mathcal{T}$, $\operatorname{sdim} \mathcal{T} = 1|1$, на супермногообразии $\mathcal{M}$.*

1) *Морфизм φ не зависит от τ тогда и только тогда, когда $D = \partial_{\mathcal{T}} + \tau X$, где Y есть четное T-семейство векторных полей на $\mathcal{M}$. В этом случае $D = \frac{\partial}{\partial \tau} + \tau D'$, где D' — дифференциальное уравнение на $\mathcal{M}$ с временем T, а $\varphi = \psi \times \mathrm{id}_{\mathcal{R}^{0|1}} |_{\mathcal{V}}$, где ψ — максимальное решение.*

2) *Морфизм φ не зависит от t тогда и только тогда, когда*

$$D = \partial_{\mathcal{T}} + X - \tau X^2.$$

В этом случае $\varphi^* = 1 + \tau X$.

Доказательство. Явная форма решений уравнений $\partial_{\mathcal{T}} + \tau Y$ и $\partial_{\mathcal{T}} + X - \tau X^2$ содержится в формулировке теоремы, поэтому нам осталось только проверить, что уравнение, решения которого не зависят от t (или τ), имеет указанную специфическую форму.

Если $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ — решение уравнения $D = \partial_\tau + Z$, то $\mathcal{T}$-семейство векторных полей Z можно восстановить из условия

$$Z(f) = (\varphi^*)^{-1} \partial_{\mathcal{T}} \varphi^*(f) \quad \text{при } f \in \pi^*_{\mathcal{M}}(C^\infty(\mathcal{M})).$$

Поэтому если φ не зависит от τ, то

$$Z(f) = (\varphi^*)^{-1} \tau \frac{\partial}{\partial t} \varphi^*(f) = \tau (\varphi^*)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \varphi^*(f),$$

а если φ не зависит от t, то

$$\varphi^*(f) = f + \tau X(f),$$

где X — векторное поле на $\mathcal{M}$, а $Z(f) = (\varphi^*)^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi^*(f) = (X - \tau X^2) f$. $\square$

5.2.5. Семейства дифференциальных уравнений и репараметризации.

Обобщение результатов предыдущих подпунктов на семейства — самое прямолинейное. В дальнейшем любое открытое подсупермногообразие $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{M}$ будет рассматриваться как $\mathcal{S}$-семейство открытых подсупермногообразий $\mathcal{M}$. Мы будем также предполагать, что $\pi_{\mathcal{M}}(\mathcal{W}) = \mathcal{M}$.

Назовем $\mathcal{S}$-*семейством дифференциальных уравнений на* $\mathcal{M}$ обыкновенное дифференциальное уравнение D на открытом супермногообразии $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{M}$, такое что $D \circ \pi_{\mathcal{S}}^* = 0$. Другими словами, D должно быть $\mathcal{S}$-семейством векторных полей на $\mathcal{M} \times \mathcal{T}$.

Назовем $\mathcal{S}$-*семейством задач Коши для* $\mathcal{S}$-*семейства дифференциальных уравнений* D *на* $\mathcal{M}$ пару $(\mathcal{N}, \psi_{in}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W})$, где ψ_{in} является $\mathcal{S}$-семейством морфизмов $\mathcal{N} \to \mathcal{M}$. Итак, $\mathcal{S}$-*семейство задач Коши* — это задача Коши $(\mathcal{V}, \psi_{in}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W})$ для уравнения D на $\mathcal{W}$, причем $\pi_{\mathcal{S}} = \pi_{\mathcal{S}} \circ \psi_{in}$.

Решением $\mathcal{S}$-*семейства задач Коши* $(\mathcal{N}, \psi_{in}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W})$ *для* $\mathcal{S}$-*семейства дифференциальных уравнений* назовем решение $\psi\colon \mathcal{V}^+ \to \mathcal{W}^+$ задач Коши $(\mathcal{V}, \psi_{in}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W})$ для D, такое что $\pi_{\mathcal{S}} = \pi_{\mathcal{S}} \circ \psi$.

5.2.5а. Упражнение. Дайте определение *семейства решений для семейства дифференциальных уравнений* и докажите соответствующее утверждение о существовании, единственности и области определения решения.

Отметим только, что для решения $\psi\colon \mathcal{V}^+ \to \mathcal{W}^+$ задач Коши выполняются соотношения

$$\partial_\tau \circ \psi^* \circ \pi_{\mathcal{S}}^* = \psi^* \circ D \circ \pi_{\mathcal{S}}^* = 0,$$

а следовательно, локально функции из $\psi^* \circ \pi_{\mathcal{S}}^*(C^\infty(\mathcal{S}))$ не зависят от времени. Поэтому если $\mathcal{V}^+$ — столбчатая суперобласть на $\mathcal{V}$, то ψ — решение $\mathcal{S}$-семейства задач Коши, в то время как в общем случае оно таковым решением не является.

Напомним, как производить замену параметров в семействах открытых подсупермногообразий, морфизмов и векторных полей. Пусть $\chi\colon \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ — морфизм супермногообразий. Если $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}_2 \times \mathcal{M}$ — семейство открытых подсупермногообразий, то $\mathcal{V}^\chi$ определяется своим подстилающим многообразием $V^\chi = (\tilde{\xi} \times \mathrm{id}_{\mathcal{M}})^{-1} V$.

Семейство морфизмов $\psi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, где $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}_2 \times \mathcal{N}$ и $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{S}_2 \times \mathcal{M}$, можно восстановить по морфизму $\pi_{\mathcal{M}} \circ \psi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{M}$, поскольку $\pi_{\mathcal{S}_2} \circ \psi = \pi_{\mathcal{S}_2}$. Положим

$$\pi_{\mathcal{M}} \circ \psi^\chi := \pi_{\mathcal{M}} \circ \psi \circ (\chi \times \mathrm{id}_{\mathcal{M}})\colon \mathcal{V}^\chi \longrightarrow \mathcal{M}.$$

Семейство векторных полей $D \subseteq \mathrm{Vect}(\mathcal{V})$ можно восстановить по данному дифференцированию $D \circ \pi_{\mathcal{M}}^*\colon C^\infty(\mathcal{M}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{V})$, положив

$$D^\chi \circ \pi_{\mathcal{M}}^* := (\chi \times \mathrm{id}_{\mathcal{M}})^* \circ D \circ \pi_{\mathcal{M}}^*\colon C^\infty(\mathcal{M}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{V}^\chi).$$

Предложение. *Пусть* ψ *есть* $\mathcal{S}_2$-*семейство решений* $\mathcal{S}_2$-*семейства задач Коши* $(\mathcal{N}, \psi_{in})$ *для* $\mathcal{S}_2$-*семейства дифференциальных уравнений* D, *а* $\chi\colon \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ — *репараметризация. Тогда* ψ^χ *есть* $\mathcal{S}_1$-*семейство решений* $\mathcal{S}_1$-*семейства задач Коши* $(\mathcal{N}, \psi_{in}^\chi)$ *для* $\mathcal{S}_1$-*семейства дифференциальных уравнений* D^χ.

Следствие. *Пусть* φ *есть* $\mathcal{S}_2$-*семейство решений* $\mathcal{S}_2$-*семейства дифференциальных уравнений* D, *а* $\chi\colon \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ — *репараметризация. Тогда* φ^χ *есть* $\mathcal{S}_1$-*семейство решений* $\mathcal{S}_1$-*семейства дифференциальных уравнений* D^χ.

5.2.5б. Упражнение. Докажите предложение и следствие.

Отметим, что время не является параметром, и мы сейчас не обсуждаем, как сделать замену переменных по времени в уравнениях. Тем не менее, мы можем перейти от времени $\mathcal{T}$, где $\operatorname{sdim}\mathcal{T} = 1|1$, к времени T, где $\operatorname{sdim} T = 1$, следующим образом. Пусть D — дифференциальное уравнение на $\mathcal{M}$ с временем $\mathcal{T}$. Тогда можно рассматривать D^2 как $\mathcal{R}^{0|1}$-семейство дифференциальных уравнений на $\mathcal{M}$ с временем T. В самом деле,

$$\Big(\frac{\partial}{\partial\tau} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \tau X_0 + X_1\Big)^2 = \frac{\partial}{\partial t} + X_1^2 + X_0 + \tau\Big([X_0, X_1] + \Big[\frac{\partial}{\partial t}, X_1\Big]\Big).$$

Если $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ — решение уравнения D, то $\varphi^* \circ D^2 = \dfrac{\partial}{\partial t} \circ \varphi^*$, и поэтому φ является решением $\mathcal{R}^{0|1}$-семейства задач Коши $(\mathcal{M}, \varphi_{in})$ для D, где

$$\varphi_{in} = \pi_{\mathcal{M}\times\mathcal{R}^{0|1}} \circ \varphi \circ i^{(0)}_{\mathcal{M}\times\mathcal{R}^{0|1}}\colon \mathcal{M} \times \mathcal{R}^{0|1} \longrightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{R}^{0|1}.$$

Для репараметризации $\chi\colon \mathrm{pt} \to \mathcal{R}^{0|1}$, где $\chi^*(\tau) = 0$, имеем $(D^2)^\chi = \dfrac{\partial}{\partial\tau} \circ \tau \circ D^2$. Тогда $\varphi_{in}^\chi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ является тождественным морфизмом (поскольку $\varphi \circ i_{\mathcal{M}}^{(0)} = i_{\mathcal{M}}^{(0)}$) и φ^χ есть решение уравнения $\dfrac{\partial}{\partial\tau} \circ \tau \circ D^2$.

5.2.5в. Упражнение. Пусть $D = \dfrac{\partial}{\partial\tau} + \tau\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial\xi}$ — векторное поле на супермногообразии $\mathcal{M} = \mathcal{R}^{0|1}$ с координатой ξ. Тогда $\varphi^*(\xi) = \xi + \tau$, причем $D^2 = \dfrac{\partial}{\partial t}$, а $\varphi^{(\chi)}$ есть тождественный морфизм. Хотя D^2 не зависит от τ, тем не менее φ не дает решения уравнения D^2 как семейства дифференциальных уравнений, а является решением $\mathcal{R}^{0|1}$-семейства задач Коши для D^2 с начальным условием $\varphi_{in}^*(\xi) = \xi + \tau$.

В то же время $\varphi^{(\chi)}$ является решением уравнения $\dfrac{\partial}{\partial\tau} \circ \tau \circ D^2$ на $\mathcal{M}$.

В следующем параграфе мы воспользуемся уравнением $\dfrac{\partial}{\partial\tau} \circ \tau \circ D^2$ как «аппроксимацией» для D. Ясно, что уравнение $\dfrac{\partial}{\partial\tau} \circ \tau \circ D^2$, будучи определенным на $\mathcal{M}$, несет больше информации о поле D, чем подстилающее уравнение $\operatorname{pr} D$, определенное на M (уравнение $\operatorname{pr} D$ служит также подстилающим уравнением для уравнения $\dfrac{\partial}{\partial\tau} \circ \tau \circ D^2$).

Наиболее осмысленными и продуманными суперизациями классических уравнений математической физики являются работа [MaRa] (которую — это *открытая задача* — нужно обязательно обобщить на случай нескольких квадратных корней из производной по времени с помощью разных нечетных параметров, см. работу [GLS1]) и работы Е. Иванова и С. Кривоноса (с соавторами) по супергравитации и «супермеханике».

§ 5.3. Как решать дифференциальные уравнения

5.3.1. Интегрируемость обыкновенных дифференциальных уравнений. Существует два естественных подхода к решению супераналогов разных классических задач:

1) построить супераналог(и) классических методов для решения этих задач;

2) сопоставить «суперной» задаче классическую и рассмотреть решение классической задачи как первое приближение к решению суперной задачи.

Ниже мы будем следовать второму пути и разовьем процедуру аппроксимации, которая сходится за конечное число шагов благодаря нильпотентности исходной ошибки.

В анализе на супермногообразиях давно разработаны оба эти подхода. Они также применимы, как мы увидим, и к дифференциальным уравнениям. Пример первого подхода дается супераналогами теорем Фробениуса и Лиувилля о полной интегрируемости гамильтоновых систем при наличии половинного набора первых интегралов инволюции.

Второй подход позволяет нам свести проблему интегрируемости дифференциальных уравнений, т. е. возможность получить решение в достаточном явном виде, к аналогичной проблеме для подстилающего уравнения. А именно, в дальнейшем мы покажем, что для того, чтобы построить решение дифференциального уравнения на $r|s$-мерном супермногообразии, достаточно решить подстилающее уравнение и систему из s линейных дифференциальных уравнений. Аппроксимативная процедура, которую мы используем ниже, не является, впрочем, оптимальной: для конкретных классов уравнений можно иногда построить более эффективные специальные алгоритмы.

Пусть D_1, D_2 — два дифференциальных уравнения с временем $\mathcal{T}$ на супермногообразии $\mathcal{M}$, заданные в столбчатой окрестности $\mathcal{M}^+ \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{T}$, и $\dim \mathcal{T} = 1|0$.

Предложение. *Если* $D_1 \cong D_2 \pmod{I^2}$, *то по решению* φ_1 *уравнения* D_1 *можно построить решение* φ_2 *уравнения* D_2, *выполнив конечное число алгебраических операций, замен переменных, интегрирований и взятия частных производных.*

Доказательство. Можно предположить, что решение φ_1 уравнения D_1 определено в столбчатой суперобласти $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{T}$. Пусть $\varphi_1(\mathcal{V}) = \mathcal{W}$. Поскольку подстилающие уравнения $\operatorname{pr} D_1$ и $\operatorname{pr} D_2$ совпадают, существует единственное решение $\varphi_2\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, такое что $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2$. Процесс восстановления решения φ_2 по φ_1 сводится к построению морфизма $\psi = \varphi_1^{-1}\varphi_2\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. По уравнению D_2 мы строим уравнение

$$\partial_{\mathcal{T}} \circ \psi^* = \psi^* \circ \varphi_1^* \circ D_2(\varphi_1^*)^{-1} = \psi^* \circ (\partial_{\mathcal{T}} + \varphi_1^*(D_2 - D_1)(\varphi_1^*)^{-1}).$$

Заметим, что $\tilde{\psi} = \tilde{\varphi}_1^{-1}\tilde{\varphi}_2$ — тождественный морфизм, а следовательно, морфизм ψ может быть построен локально. Пусть $\mathcal{U} \times \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{V}$, где $\mathcal{U}$ — карта на $\mathcal{M}$ с координатами $x = (x_1, \ldots, x_{r+s}) = (u, \xi)$, а $\mathcal{T}'$ — время, $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.

Назовем $\mathbb{R}$-линейное отображение $A\colon C^\infty(\mathcal{U} \times \mathcal{T}') \longrightarrow C^\infty(\mathcal{U} \times \mathcal{T}')$ *поднятием степени* (*нильпотентности*) на $l > 0$, если $A(I^k) \subseteq I^{k+l}$ для любого $k \in \mathbb{Z}_+$. В частности, $X = \varphi_1^*(D_2 - D_1)(\varphi_1^*)^{-1}$ поднимает степень на единицу, поскольку

$$X(I^k) \subseteq X(I) \cdot I^{k-1} \subseteq I^2 \cdot I^{k-1} = I^{k+1}.$$

Здесь, как всегда, выражение вида $L \cdot M$ означает линейное пространство, натянутое на всевозможные произведения вида $l \cdot m$, где $l \in L$ и $m \in M$.

Достаточно доказать, что задачу с полем X, которая поднимает степень на $l > 0$, можно свести к задаче с полем X', которая поднимает степень на $2l$.

5.3.1а. Лемма. *Если* $X \in \operatorname{Vect}(\mathcal{U}; \mathcal{T}')$ *поднимает степень на* $l > 0$, *то с помощью конечного числа алгебраических операций, замены параметров, интегрирований и взятия частных производных мы можем построить* $\mathcal{T}'$*-семейство морфизмов* $\psi_X\colon \mathcal{U} \times \mathcal{T}' \longrightarrow \mathcal{U} \times \mathcal{T}'$, *такое что* $\psi_X^* - 1$ *является отображением, которое поднимает степень на* l, *а* $[{}^\circ\partial_{\mathcal{T}}, \psi_X^*] - X$ *поднимает степень на* $2l$.

Доказательство. Поскольку $X = \sum g_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, где $g_i = X(x_i)$, мы заключаем, что $g_1, \ldots, g_r \in I^l$, а $g_{r+1}, \ldots, g_{r+s} \in I^{l+1}$. Положим

$$Y = \sum \left(\int\limits_0^t g_i dt \right) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где $g_i = g_i(x_1, \ldots, x_{r+s}, t)$. Тогда $Y \in \operatorname{Vect}(\mathcal{U}, \mathcal{T}')_{\bar{0}}$ и $[\partial_{\mathcal{T}}, Y] = X$, где Y поднимает степень на $l > 0$. Поэтому ряд $\psi_X^* = \exp(Y) = \sum \dfrac{1}{i!} Y^i$ содержит лишь конечное число членов и определяет морфизм $\psi_X\colon \mathcal{U} \times \mathcal{T}' \longrightarrow \mathcal{U} \times \mathcal{T}'$. Поскольку

$$\psi_X^*(t) = t, \quad \psi_X^*(u_i) \equiv u_i \pmod{I^l} \quad \text{и} \quad \psi_X^*(\xi_j) \equiv \xi_j \pmod{I^{l+1}},$$

морфизм ψ_X сохраняет точки, морфизм $\psi_X^* - 1 = \sum\limits_{i\geqslant 1} \frac{1}{i!} Y^i$ поднимает степень на l, а отображение

$$[\partial_{\mathcal{T}}, \psi_X^*] = [\partial_{\mathcal{T}}, Y] + \sum_{i\geqslant 2} \frac{1}{i!} [\partial_{\mathcal{T}}, Y^i] = X + \sum_{i\geqslant 2} \frac{1}{i!} [\partial_{\mathcal{T}}, Y^i]$$

отличается от X на отображение, которое поднимает степень на $2l$. ☐

В соответствии с леммой 5.3.1а построим морфизм ψ_X и положим

$$X' = \psi_X^* \circ (\partial_{\mathcal{T}} + X) \circ (\psi_X^*)^{-1} - \partial_{\mathcal{T}} = \{(X - [\partial_{\mathcal{T}}, \psi_X^*]) + (\psi^* - 1)X\}(\psi_X^*)^{-1}.$$

Тогда замена $\psi = \psi_X \circ \psi'$ превращает уравнение

$$\psi^* \circ (\partial_{\mathcal{T}} + X) = \partial_{\mathcal{T}} \circ \psi^*$$

в уравнение вида

$$(\psi')^* \circ (\partial_{\mathcal{T}} + X') = \partial_{\mathcal{T}} \circ (\psi')^*,$$

где $X' \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U}, \mathcal{T}')$ поднимает степень на $2l$. ☐

Скажем, что интегрирование дифференциального уравнения D_1 на $\mathcal{M}$ с временем $\mathcal{T}_1$ *можно свести* к интегрированию дифференциального уравнения D_2 с временем $\mathcal{T}_2$ (тоже на $\mathcal{M}$), если по решению уравнения D_2 мы можем построить решение уравнения D_1 с помощью конечного числа алгебраических операций, замен переменных, взятия частных производных и интегрирований.

5.3.1б. Теорема. *Интегрирование дифференциального уравнения D с временем $\mathcal{T}$ на супермногообразии $\mathcal{M}$ размерности $r|s$ сводится к интегрированию подстилающего уравнения $\mathrm{pr}\,D$ на подстилающем многообразии M и системе линейных (вообще говоря, неавтономных) дифференциальных уравнений на $\mathbb{R}^s$.*

Следствие. *Решение любого дифференциального уравнения на $\mathcal{R}^{0|s}$ сводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений на $\mathbb{R}^s$.*

5.3.1в. Лемма. *Решение нечетного дифференциального уравнения D с временем $\mathcal{T}$ на супермногообразии $\mathcal{M}$ можно построить с помощью конечного числа замен переменных, алгебраических операций и взятия частных производных по решению уравнения $\frac{\partial}{\partial\tau} \circ \tau \circ D^2$ (см. п. 5.2.5) с временем T на $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Положим $D' := \frac{\partial}{\partial\tau} \circ \tau \circ D^2$. Оба уравнения D и D' имеют одно и то же подстилающее уравнение, а именно $\widetilde{D^2}$ на $M \times T$, и, следовательно, если максимальное решение уравнения D' определено в столбчатой суперобласти $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{M} \times T$, то максимальное решение уравнения D определено на $\mathcal{V} := \mathcal{V}' \times \mathcal{R}^{0|1} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{T}$. Представим уравнение D в виде

$$\frac{\partial}{\partial\tau} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \tau D_{\bar 0} + D_{\bar 1}, \quad \text{где } D_i \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M}, T)_i.$$

Тогда $D' = \frac{\partial}{\partial t} + D_{\bar 0} + D_{\bar 1}^2$.

Пусть $\psi\colon \mathcal{V}' \to \mathcal{W}'$ решение уравнения D'. Положим

$$\varphi^* = \psi_0^* \circ (1 + \tau D_{\bar 1}), \quad \text{где } \psi_0 = \psi \times \mathrm{id}_{\mathcal{R}^{0|1}} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W} = \mathcal{W}' \times \mathcal{R}^{0|1}.$$ ☐

Упражнение. Проверьте, что φ^* задает решение уравнения D.

Чтобы получить выражение для φ в координатах, мы должны не только сделать замены переменных, но и несколько раз продифференцировать.

Доказательство теоремы 5.3.1. Мы можем предположить, что поле D четно, а $\mathcal{M} = \mathcal{U}$ — суперобласть. Фиксировав координаты $x = (u, \xi)$ на $\mathcal{U}$ и диффеоморфизм $\mathcal{U} \cong U \times \mathcal{R}^{0|s}$, который они задают, поднимем поле $\mathrm{pr}\,D$ на $\mathcal{U} \times \mathcal{T}$. Тогда

$$D \equiv \mathrm{pr}\,D + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant s} a_j^i(u, t)\xi_i \frac{\partial}{\partial\xi_j} \pmod{I^2}.$$

Пусть $\tilde\varphi\colon U^+ \to V$ — решение уравнения $\mathrm{pr}\,D$, а $K = (k_j^i(u, t))$ — фундаментальная матрица для (зависящей от параметра $u \in U$) линейной системы

$$\frac{d}{dt}\bar z = B(u, t)\bar z, \quad \text{где } b_j^i = \tilde\varphi^*(a_j^i(u, t)).$$

Положив

$$\psi^*(u_i) = \tilde\varphi^*(u_i), \quad i = 1, \ldots, r, \quad \text{и} \quad \psi^*(\xi_j) = \sum k_j^i(u, \xi)\xi_i,$$

мы получаем решение уравнения

$$\mathrm{pr}\,D = \sum a_j^i(u, t)\xi_i \frac{\partial}{\partial\xi_j}.$$

Предложение из п. 5.3.1 позволяет нам восстановить решение уравнения D по морфизмам ψ. ☐

5.3.2. Основные свойства решений дифференциальных уравнений.

Предложение. *Пусть $X \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M}; \mathcal{T})$, а φ — решение дифференциального уравнения $\partial_{\mathcal{T}} + X$. Тогда*

$$\varphi^* = \begin{cases} 1 + tX \pmod{t^2}, & \text{если } p(X) = \bar 0, \\ 1 + \tau X + t(X^2 + [\frac{\partial}{\partial\tau}, X]) \pmod{t^2, t\tau}, & \text{если } p(X) = \bar 1. \end{cases}$$

Если $X \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M})$, *т. е. уравнение* $\partial_\tau + X$ *не зависит от времени*, *то*

$$\varphi^* = \begin{cases} \exp(tX) = \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} \dfrac{t^k X^k}{k!} \pmod{t^{n+1}}, & \text{если } p(X) = \bar{0}, \\ \exp(1 + \tau X + tX^2) = \\ = (1 + \tau X) \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} \dfrac{t^k X^{2k}}{k!} \pmod{t^{n+1},\ t^n\tau}, & \text{если } p(X) = \bar{1}. \end{cases}$$

Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения. □

Замечание. Представим нечетное векторное поле X в виде $X_1 + \tau X_0$. Тогда

$$1 + \tau X + t\Big(X^2 + \Big[\frac{\partial}{\partial\tau},\ X\Big]\Big) \equiv 1 + \tau X_1 + t(X_1^2 + X_0) \pmod{t^2,\ t\tau}.$$

В частности, если $X = Y - \tau Y^2$, то из предложения 5.2.1 следует, что

$$\varphi^* \equiv 1 + \tau Y \pmod{t^2,\ t\tau}.$$

В действительности, благодаря предложению из п. 5.2.4 мы имеем на самом деле не сравнение, а точное равенство $\varphi^* = 1 + \tau Y$.

Всюду ниже мы будем предполагать, что решения дифференциальных уравнений определены на всем $\mathcal{M} \times \mathcal{T}$, и оставлять читателю в качестве упражнения необходимые уточнения формулировок утверждений.

Лемма. *Если* φ — *решение дифференциального уравнения* D *на супермногообразии* $\mathcal{M}$, *то векторное поле* $X \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M})$ *суперкоммутирует с* D *тогда и только тогда*, *когда*

$$\varphi^* \circ\ {}^\circ X =\ {}^\circ X \circ \varphi^*.$$

Доказательство. Если $[D,\ {}^\circ X] = 0$, то

$$[\partial_\mathcal{T},\ \varphi^{*\circ} X(\varphi^*)^{-1}] = \varphi^*[D,\ {}^\circ X](\varphi^*)^{-1} = 0;$$

следовательно, $\varphi^{*\circ} X(\varphi^*)^{-1}$ есть постоянное $\mathcal{T}$-семейство векторных полей на $\mathcal{M}$, и, поскольку $\varphi \circ i^{(0)}_\mathcal{M} = i^{(0)}_\mathcal{M}$, это семейство совпадает с ${}^\circ X$.

Обратное утверждение достаточно очевидно. □

Замечание. Из доказательства следует, что непостоянные векторные поля $X \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M};\ \mathcal{T})$, суперкоммутирующие с D, превращаются в постоянные поля $\varphi^* X(\varphi^*)^{-1}$, равные ${}^\circ Y$, где $Y \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M})$ есть начальное значение поля X. В частности, четное поле $X \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M};\ \mathcal{T})$ суперкоммутирует с решением уравнения $\partial_\tau + X$ тогда и только тогда, когда X не зависит от времени (т. е. поднято с $\mathrm{Vect}(\mathcal{M})$), а нечетные поля X суперкоммутируют тогда и только тогда, когда X не зависит от времени, а $X^2 = \dfrac{1}{2}[X,\ X] = 0$.

Следствие. *Если* φ_i — *решения дифференциальных уравнений* $\partial_{\mathcal{T}_i} + X_i$ *с временами* $\mathcal{T}_i$, $i = 1,\ 2$, *на супермногообразии* $\mathcal{M}$ *и* $[X_1,\ X_2] = 0$, *то*

$$(\varphi_1 \times \mathrm{id}_{\mathcal{T}_2}) \circ (\varphi_2 \times \mathrm{id}_{\mathcal{T}_1}) = (\varphi_2 \times \mathrm{id}_{\mathcal{T}_1}) \circ (\varphi_1 \times \mathrm{id}_{\mathcal{T}_2}).$$

Доказательство. Действительно, X_2 не зависит от времени $\mathcal{T}_1$, и, следовательно,

$$(\varphi_1 \times \mathrm{id}_{\mathcal{T}_2})^{-1}(\varphi_2 \times \mathrm{id}_{\mathcal{T}_1})(\varphi_1 \times \mathrm{id}_{\mathcal{T}_2})$$

есть решение $\mathcal{T}_1$ семейства дифференциальных уравнений ${}^\circ D_2$ с временем $\mathcal{T}_2$ и совпадает с $\varphi_2 \times \mathrm{id}_{\mathcal{T}_1}$. □

Перейдем теперь к свойствам уравнений, не зависящих от времени. Определим $\partial_\mathcal{T}^- \in \mathrm{Vect}(\mathcal{T})$ и $\Delta\colon \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, положив

$$\begin{aligned} &\partial_\mathcal{T}^- = -\frac{\partial}{\partial t} = -\partial_\mathcal{T} \quad \text{и} \quad \Delta^*(t) = t_1 + t_2 && \text{при } \mathcal{T} = \mathcal{R}^{1|0}, \\ &\partial_\mathcal{T}^- = -\frac{\partial}{\partial \tau} + \tau\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{и} \quad \Delta^*(\tau) = \tau_1 + \tau_2, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \Delta^*(t) = t_1 + t_2 + \tau_1\tau_2 && \text{при } \mathcal{T} = \mathcal{R}^{1|1}; \end{aligned}$$

$\partial_\mathcal{T}^-$ отличается от $\partial_\mathcal{T}$ изменением ориентации времени, и Δ задает структуру супергруппы Ли на $\mathcal{T}$. Когда $\mathcal{T} = \mathcal{R}^{1|1}$, мы получаем некоммутативную супергруппу $\mathrm{GQ}(1)$.

Теорема. *Если* $D = \partial_\mathcal{T} + {}^\circ X$ — *решение*, *не зависящее от времени*, $\varphi\colon \mathcal{M} \times \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{T}$ — *его решение и* $\psi = \pi_\mathcal{M} \circ \varphi\colon \mathcal{M} \times \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{M}$, *то*

1) $(\varphi^{-1})^* \circ (\partial_\mathcal{T}^- + {}^\circ X) = \partial_\mathcal{T}^- \circ (\varphi^{-1})^*$;

2) $\psi \circ (\psi \circ \mathrm{id}_{\mathcal{T}_2}) = \psi \circ (\mathrm{id}_\mathcal{M} \times \Delta)\colon \mathcal{M} \times \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \longrightarrow \mathcal{M}$, *где* $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}$.

Доказательство. 1) Пусть $\mathcal{T} = \mathcal{R}^{1|0}$. Тогда ${}^\circ X$ коммутирует с $\partial_\mathcal{T} + {}^\circ X$ и с φ^* (по лемме). Поэтому первое утверждение теоремы эквивалентно тому, что равенство

$$\varphi^* \circ (\partial_\mathcal{T} + {}^\circ X) = \partial_\mathcal{T} \circ \varphi^*$$

можно представить в виде

$$(\varphi^*)^{-1}(\partial_\mathcal{T} - {}^\circ X) = \partial_\mathcal{T} \circ (\varphi^*)^{-1}.$$

Поскольку $\mathcal{T} = \mathcal{R}^{1|0}$, мы заключаем, что $\mathcal{T}$-семейство морфизмов $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ можно восстановить по его значениям в точках многообразия $\mathcal{T}$, т. е. по морфизму

$$\varphi_s := \pi_\mathcal{M} \circ \varphi \circ i^{(s)}_\mathcal{M}\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}, \quad \text{где } s \in \mathcal{T}_0.$$

Таким образом, мы получаем $\dfrac{\partial}{\partial s}(\varphi_s^*) = \varphi_s^* \circ X$, и поэтому

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial s}(\varphi_{t-s}^* \circ \varphi_s^*) = -\varphi_{t-s}^* \circ X \circ \varphi_s^* + \varphi_{t-s}^* \circ X \circ \varphi_s^* = 0,\\ &\varphi_{t-s}^* \circ \varphi_s^* = \varphi_t^*.\end{aligned}$$

Итак, для $\mathcal{T} = \mathcal{R}^{1|0}$ теорема доказана.

2) Для $\mathcal{R}^{1|1}$ воспользуемся формулой из предложения 5.3.2:

$$\varphi^* = \psi_0^* \circ (1 + \tau^\circ X),$$

где ψ — решение уравнения $\dfrac{\partial}{\partial t} + X^2$, а $\psi_0 = \psi \times \mathrm{id}_{\mathcal{R}^{0|1}}$. В частности, $\psi_0^* \circ {}^\circ X = {}^\circ X \circ \psi_0^*$, поскольку $[{}^\circ X, {}^\circ X^2] = 0$. Получаем

$$\begin{aligned}&(\varphi^*)^{-1} = (1 - \tau^\circ X)(\psi_0^*)^{-1},\\ &\Bigl(-\frac{\partial}{\partial\tau} + \tau\frac{\partial}{\partial t}\Bigr) \circ (1 - \tau^\circ X) \circ (\psi_0^*)^{-1} =\\ &= \Bigl(\frac{\partial}{\partial\tau} \circ \tau\Bigr) \circ {}^\circ X \circ (\psi_0^*)^{-1} + (\psi_0^*)^{-1}\Bigl(-\frac{\partial}{\partial\tau} + \tau\frac{\partial}{\partial t} - \tau^\circ X^2\Bigr) =\\ &= (\psi_0^*)^{-1}(1 - \tau^\circ X)\Bigl(-\frac{\partial}{\partial\tau} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + {}^\circ X\Bigr)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(\varphi(t,\tau) \circ \varphi(s,\sigma))^* &= \varphi^*(s,\sigma) \circ \varphi^*(t,\tau) =\\ &= \psi_0^*(t+s)(1 + \sigma X)(1 + \tau X) =\\ &= \psi_0^*(t+s)(1 + (\tau+\sigma)X + \tau\sigma X^2) =\\ &= \varphi^*(t + s + \tau\sigma, \tau + \sigma). \qquad \square\end{aligned}$$

5.3.3. Системы линейных дифференциальных уравнений. Положим: $\mathcal{N}$ — супермногообразие параметров, $\mathcal{T}$ — время, $A := C^\infty(\mathcal{N})$, $F := C^\infty(\mathcal{N} \times \mathcal{T})$, $\mathrm{pr} := \bigl(i_{\mathcal{N}}^{(0)}\bigr)^*\colon F \to A$, $p(\mathcal{T}) := p(\partial_{\mathcal{T}})$. Займемся следующей системой уравнений:

$$\partial_{\mathcal{T}} f_i = \sum_j k_{ij} f_j, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{5.9}$$

где $f_i \in F$ — неизвестные функции, а $k_{ij} \in F$ — известные коэффициенты, а также задачей Коши, заданной начальным условием

$$\pi(f_i) = f_i^0, \quad \text{где } f_i^0 \in A \ \text{ при } i = 1, \ldots, m.$$

Никаких априорных ограничений на четности функций f_i мы не накладываем.

Если же мы будем искать такие решения, что все функции f_i однородны относительно четности, т. е. $p(f_i) = p_i$, то естественно потребовать, чтобы

выполнялись условия

$$p(f_i^0) = p_i \quad \text{и} \quad p(k_{ij}) = p_i + p_j + p(\mathcal{T}). \tag{5.10}$$

Пусть r функций f_i четны, а s функций нечетны. Тогда систему (5.9) можно записать в матричном виде как

$$(\bar\partial_{\mathcal{T}})\bar f = K\bar f, \tag{5.11}$$

где $\bar f$ — (четный) вектор-столбец, $\bar f_i = (-1)^{p_i} f_i$, $K \in \mathrm{Mat}(r|s, F)_{p(\mathcal{T})}$, где

$$K_{ij} = k_{ij}(-1)^{p_i + p_j + p_i p(\mathcal{T})}, \ \text{ а } (\bar\partial_{\mathcal{T}}) = \mathrm{diag}((-1)^{p_1}\partial_{\mathcal{T}}, \ldots, (-1)^{p_{r+s}}\partial_{\mathcal{T}}). \tag{5.12}$$

Если $\bar f$ — вектор стандартного формата, то $(\bar\partial_{\mathcal{T}}) = \mathrm{scalar}_{r|s}(\partial_{\mathcal{T}})$ и матричные коэффициенты k_{ij} образуют блочную суперматрицу $\begin{pmatrix} K_{00} & K_{01}\\ K_{10} & K_{11}\end{pmatrix}$, где элементы в блоках K_{00} и K_{11} имеют ту же четность, что и $\partial_{\mathcal{T}}$, а уравнение (5.11) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} \partial_{\mathcal{T}} 1_r & 0\\ 0 & (-1)^{p(\mathcal{T})}\partial_{\mathcal{T}} 1_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_r\\ -f_{r+1}\\ \vdots\\ -f_{r+s}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{00} & -K_{01}\\ -(-1)^{p(\mathcal{T})}K_{10} & (-1)^{p(\mathcal{T})}K_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_r\\ -f_{r+1}\\ \vdots\\ -f_{r+s}\end{pmatrix} \tag{5.13}$$

Используя условия (5.10), мы переписали систему (5.9) в матричном виде, где обе части уравнения (5.11) однородны относительно четности. Это позволит нам в дальнейшем выразить свойства решений на языке линейной супералгебры.

Начальное условие $\mathrm{pr}(f_i) = f_i^0$ принимает вид

$$\mathrm{pr}(\bar f) = \bar f^0, \quad \text{где } \bar f_i^0 = (-1)^{p_i} f_i^0.$$

Перейдем теперь к общему случаю. Перевести систему (5.9) на язык линейной супералгебры можно двумя способами:

1) вычленить в каждом из уравнений его однородные компоненты;

2) интерпретировать $f_1, \ldots, f_n$ как координаты четного элемента на $n|n$-мерном F-модуле F^n с Π-симметрией, а матрицу $K = (k_{ij})$ — как матрицу оператора из $Q(n; F)_{p(\mathcal{T})}$.

Ниже мы увидим, что эти методы согласованы друг с другом и дополняют друг друга. Положим

$$f_i = x_i + \xi_i, \quad K = C + \gamma, \quad \text{где } x_i, c_{ij} \in F_{\bar 0} \text{ и } \xi_i, \gamma_{ij} \in F_{\bar 1}.$$

Тогда каждое уравнение системы (5.9) эквивалентно паре уравнений

$$\begin{cases} \partial_{\mathcal{T}} x_i = \sum\limits_j (c_{ij}x_j + \gamma_{ij}\xi_j), \\ \partial_{\mathcal{T}}\xi_i = \sum\limits_j (\gamma_{ij}x_j + c_{ij}\xi_j), \end{cases} \quad \text{если } p(\partial_{\mathcal{T}}) = \bar 0,$$

и

$$\begin{cases} \partial_{\mathcal{T}} x_i = \sum\limits_j (\gamma_{ij}x_j + c_{ij}\xi_j), \\ \partial_{\mathcal{T}}\xi_i = \sum\limits_j (c_{ij}x_j + \gamma_{ij}\xi_j), \end{cases} \quad \text{если } p(\partial_{\mathcal{T}}) = \bar 1.$$

Полученной системе уравнений на n четных и n нечетных функций соответствует матричное уравнение вида (5.11):

$$\bar\partial_{\mathcal{T}} \bar f^q = K^{q,\varepsilon}\bar f, \tag{5.14}$$

где

$$\varepsilon = p(\mathcal{T}), \quad f^q = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ -\xi_n \\ \vdots \\ -\xi_n \end{pmatrix}, \quad K^{q,\bar 0} = \begin{pmatrix} C & -\gamma \\ -\gamma & C \end{pmatrix}, \quad K^{q,\bar 1} = \begin{pmatrix} \gamma & -C \\ C & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Напомним, что $Q(n;\,F)_{\bar 0}$ и $Q(n;\,F)_{\bar 1}$ изоморфны, как F_0-модули, пространству $\mathrm{Mat}(n;\,F)$, рассматриваемому без какой бы то ни было суперструктуры. Напомним также, что существует много способов вложить $Q(n;\,F)$ в $\mathrm{Mat}(n|n;\,F)$. Один из таких способов посылает элемент $K^{\varepsilon} \in Q(n;\,F)_{\varepsilon}$, где $\varepsilon \in \mathbb{Z}/2$, заданный матрицей $K \in \mathrm{Mat}(n;\,F)$, в суперматрицу $K^{q,\varepsilon} \in \mathrm{Mat}(n|n;\,F)_{\varepsilon}$.

Поэтому второй подход — интерпретация соотношений (5.9) как уравнения в $Q(n;\,F)$-модуле, после того как пространство $Q(n;\,F)$ вложено в $\mathrm{Mat}(n|n;\,F)$ по формулам (5.14), — задает то же самое уравнение (5.14), которое мы уже получили выше.

5.3.3а. Теорема. *Для любой матрицы* $K \in \mathrm{Mat}(r|s;\,F)_{\varepsilon}$, *где* $\varepsilon = p(\partial_{\mathcal{T}})$, *выполняются следующие утверждения.*

1) *Существует матрица* $M \in \mathrm{GL}(r|s;\,F)$, *такая что* $\partial_{\mathcal{T}}M = KM$. *Фундаментальная матрица единственна с точностью до умножения справа на элемент из* $\mathrm{GL}(r|s;\,A)$, *и*

$$\partial_{\mathcal{T}}(\mathrm{Ber}\,M) = (\mathrm{str}\,K)\cdot \mathrm{Ber}\,M.$$

2) *Множество решений уравнения* (5.11) *составляет свободный A-модуль ранга $r|s$. Решение задачи Коши для уравнения* (5.11) *с начальным значением $\bar f^0$ дается формулой*

$$\bar f = M\cdot(\mathrm{pr}(M))^{-1}\bar f^0,$$

где $\pi(M) \in \mathrm{GL}(r|s;\,A)$ — *начальное значение для M, а M — произвольная фундаментальная для K матрица.*

Доказательство. Системе (5.9) мы сопоставим $\mathcal{N}$-семейство дифференциальных уравнений на $\mathcal{R}^{r|s}$, заданное семейством векторных полей $X = \sum\limits_{i,j} k_{ij}z_j\dfrac{\partial}{\partial z_i}$. Пусть φ — решение этой системы уравнений; отделим от φ линейную (в $\mathcal{R}^{r|s}$) часть

$$\varphi^*(z_i) = \sum_j c_{ij}z_j + \Delta_i,$$

где $c_{ij} \in F$, а Δ_i принадлежит идеалу, порожденному множеством $\{z_kz_l \mid 1 \leqslant k,\ l \leqslant r+s\}$. Приравнивая линейные части выражений $\partial_{\mathcal{T}}\varphi^*(z_i)$ и $\varphi^*(X(z_i))$, получаем

$$\partial_{\mathcal{T}}(c_{ij}) = \sum_l k_{il}c_{lj},$$

т. е. матрица $C = ((-1)^{p_i+p_j}c_{ij})$ является фундаментальной для K (она обратима, поскольку φ — диффеоморфизм). □

5.3.3б. Для того чтобы избежать недоразумений, подчеркнем, что в формулировке приведенной ниже теоремы мы встретим, наряду с «суперными» понятиями, понятия, которые относятся к общей ассоциативной алгебре со стертой суперструктурой на A и F, а именно $\mathrm{Mat}(n;\,F)$, $\mathrm{GL}(n;\,A)$, $\mathrm{GL}(n;\,F)$ и свободные правые A-модули ранга (не суперранга) n.

Теорема. *Для любой матрицы* $K \in \mathrm{Mat}(n;\,F)$ *выполняются следующие утверждения.*

1) *Существует фундаментальная для K матрица* $M \in \mathrm{GL}(n;\,F)$, *такая что* $\partial_{\mathcal{T}}M = KM$. *Фундаментальная матрица единственна с точностью до умножения справа на элемент из* $\mathrm{GL}(n;\,A)$. *Если M — фундаментальная матрица для K, то* $M^{q,\bar 0} \in \mathrm{GL}(n|n;\,F)$ *является фундаментальной матрицей для* $K^{q,\varepsilon} \in \mathrm{Mat}(n|n;\,F)_{\varepsilon}$, *где* $\varepsilon = p(\partial_{\mathcal{T}})$ *и*

$$\partial_{\mathcal{T}}(\mathrm{qet}(M^{q,\bar 0})) = \mathrm{qtr}(K^{q,\varepsilon}).$$

2) *Множество решений системы* (5.9) *составляет свободный правый A-модуль ранга n. Решение задачи Коши для уравнения* (5.9) *с начальным условием* $\mathrm{pr}(\bar f) = \bar f_i^0$ *задается формулой*

$$\bar f = M\cdot(\mathrm{pr}(M))^{-1}\bar f^0,$$

где M — произвольная фундаментальная матрица для K.

Доказательство. Пусть M^q — фундаментальная матрица для $K^{q,\varepsilon}$. Тогда M^q имеет следующий блочный вид: $M^q = \begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} \\ M_{10} & M_{11} \end{pmatrix}$, и из равенства

$$(\bar{\partial}_{\mathcal{T}})M^q = K^{q,\varepsilon} \cdot M^q$$

немедленно следует, что $M_{00} - M_{10}$ и $M_{11} - M_{01}$ суть фундаментальные матрицы для K.

После того как существование фундаментальных матриц доказано, оставшаяся часть доказательства теоремы чисто алгебраическая. Соответствующие утверждения верны в случае, когда F — произвольная суперкоммутативная супералгебра, $\partial_{\mathcal{T}}$ — дифференцирование четности $p(\mathcal{T})$ супералгебры F, а $A = \operatorname{Ker}(\partial_{\mathcal{T}})$ — подалгебра констант в F. Равенства

$$\partial_{\mathcal{T}}(\operatorname{Ber}(M)) = (\operatorname{str} K) \cdot \operatorname{Ber} M$$

и

$$\partial_{\mathcal{T}}(\operatorname{qet}(M^{q,0})) = \operatorname{qtr}(K^{q,\varepsilon})$$

немедленно следуют из тождеств, доказанных в гл. 1, а именно

$$D(\operatorname{Ber}(G)) = \operatorname{str}((\operatorname{scalar}_{r|s}(D)G)G^{-1}) \operatorname{Ber} G$$

и

$$D(\operatorname{qet}(G_q)) = \operatorname{qtr}(\operatorname{scalar}(D)G_q^{-1}),$$

где $G \in \operatorname{GL}(r|s;\, F)$, $G_q \in \operatorname{GQ}(n;\, F)$, а D — произвольное супердифференцирование супералгебры F.

Замена переменных с помощью произвольной матрицы $G \in \operatorname{GL}(r|s;\, F)$ соответствует отображению $K \mapsto G^{-1}(KG - (\bar{\partial}_{\mathcal{T}})G)$, и поэтому, подставив $G = M$, мы приходим к уравнению с $K = 0$, для которого все оставшиеся пока недоказанными утверждения теоремы очевидны. □

Упражнение. Пусть $p(\partial_{\mathcal{T}}) = \bar{1}$, $K = K_1 + \operatorname{scalar}_{r,s}(\tau)K_0 \in \operatorname{Mat}(r|s;\, F)_{\bar{1}}$, а G — фундаментальная матрица для $K_0 - K_1^2$. Тогда $(1 + \operatorname{scalar}_{r|s}(\tau)K_1)G$ — фундаментальная матрица для K.

Если $K = K' + \tau K'' \in \operatorname{Mat}(n;\, F)$ и $K' = K'_{\bar{0}} + K'_{\bar{1}}$, $K'_i \in \operatorname{Mat}(n;\, F_i)$, то матрица $(1 + \tau K'')G$, где G — фундаментальная матрица для

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{T}}(K'\tau K') = (K'_{\bar{0}} - K'_{\bar{1}})(K'_{\bar{0}} + K'_{\bar{1}}) = (K'_0)^2 + [K'_0,\, K''_1] - (K'_1)^2,$$

является фундаментальной для K.

5.3.4. Пример. Решим уравнение (5.9) для случая, когда $m = 1$ и $p(\partial_{\mathcal{T}}) = \bar{0}$, т. е. решим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} f = kf, \quad \text{где } k = k_{\bar{0}} + k_{\bar{1}}, \text{ а } k_i \in F_i. \tag{5.15}$$

Обозначим через g решение уравнения (5.15), удовлетворяющее начальному условию $\operatorname{pr}(g) = 1$. Ясно, что g является в то же время фундаментальной матрицей для уравнения (5.15) и, следовательно, $g = (1 + \varkappa)h$, где $h \in F_{\bar{0}}$, а $\varkappa \in F_{\bar{1}}$, причем матрица h обратима, а

$$-\frac{d}{dt}\varkappa = \operatorname{qtr} k^{q,\bar{0}} = -k_{\bar{1}}.$$

Отсюда следует, что

$$\varkappa = \gamma + \int\limits_0^t k_{\bar{1}}(t)dt, \quad \text{где } \gamma \in A_{\bar{1}}.$$

Мы можем предположить, что $\gamma = 0$, поскольку

$$(1 + \varkappa) = (1 + \varkappa\gamma)\left(1 + \int\limits_0^t k_{\bar{1}}(t)dt\right)(1 + \gamma),$$

где $1 + \gamma \in \operatorname{GL}(1;\, A)$, а первый сомножитель в правой части можно отнести к h. Подставив значение $\varkappa$, мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} h = \left(k_0 + k_{\bar{1}} \int\limits_0^t k_1(s)ds\right)h,$$

откуда следует, что

$$g = \left(1 + \int\limits_0^t k_{\bar{1}}(s)ds\right) \exp\left(\int\limits_0^t k_{\bar{0}}(s)ds - \int\limits_{0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant t} k_{\bar{1}}(s_1)k_1(s_2)ds_1ds_2\right).$$

Упражнения. 1) Докажите, что если $k_1 g = gk_1$, то

$$g = \left(1 + \int\limits_0^t k_{\bar{1}}(s)ds\right) \exp\left(\int\limits_0^t k_{\bar{0}}(s)ds\right)$$

вне зависимости от того, что в общем случае

$$\int\limits_{0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant t} k_{\bar{1}}(s)k_{\bar{1}}(s_2)ds_1ds_2 \neq 0.$$

2) Найдите общее решение уравнения $\left(\dfrac{\partial}{\partial \tau} + \tau\dfrac{\partial}{\partial t}\right)f = k(\tau,\, t)f$.

Чтобы завершить эту тему, отметим, что по аналогии с классическим случаем можно построить теорию линейных уравнений n-го порядка

$$P(\partial_{\mathcal{T}}) \cdot f = 0,$$

где P — многочлен со старшим коэффициентом 1.

5.3.5. Примеры. Чтобы проиллюстрировать приведенные выше методы, рассмотрим несколько примеров дифференциальных уравнений на супермногообразии, которые можно встретить в литературе по математической физике. Все примеры, данные ниже, являются стационарными уравнениями на $\mathcal{R}^{0|q}$. Из предложения следует, что решение такого уравнения сводится к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений на $\mathbb{R}^q$ с постоянной матрицей, а ее решение уже не представляет сложности.

1) Ф. А. Березин и М. С. Маринов (см. [Бер]) рассмотрели гамильтонову систему на $\mathcal{R}^{0|3}$ как модель волчка со спином. В этом случае четный гамильтониан автоматически квадратичный (поскольку в $C^\infty(\mathcal{R}^{0|3})$ нет никаких элементов степени больше 3: ни четного, ни нечетного), и уравнения движений получились, естественно, линейными.

Задача. Обобщить уравнения Березина—Маринова, учтя $1|1$-мерность времени.

2) В статье [El] в качестве классического предела двух взаимодействующих фермионных осцилляторов рассматривается система для нечетных комплексных функций θ_j, η_j, где $j = 1, 2, 3$:

$$\frac{1}{i}\dot{\theta}_j = \omega_1\theta_j + g\eta_j^*\sum\theta_l\eta_l,$$
$$\frac{1}{i}\dot{\eta}_j = \omega_2\eta_j + g\theta_j^*\sum\theta_l\eta_l;$$

здесь и ниже $*$ — комплексное сопряжение, а ω_1, ω_2, g — известные вещественные константы. После разложения неизвестных на вещественную и мнимую части мы получаем дифференциальное уравнение на $\mathcal{R}^{0|12}$ с очень простой сопутствующей системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на $\mathbb{R}^{12}$.

Системы такого же типа, что и рассмотренные выше, получаются также из массивной модели Тирринга, представляющей собой систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial x}\Phi_1 = m\Phi_2 + g\Phi_2^*\Phi_2\Phi_1, \\ i\dfrac{\partial}{\partial s}\Phi_2 = m\Phi_1 + g\Phi_1^*\Phi_1\Phi_2, \end{cases}$$

в которой мы ищем только решения, зависящие от $t = \lambda x - \lambda^{-1}s$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Здесь Φ_1, Φ_2 являются нечетными комплексными функциями, зависящими от вещественных переменных x, s, а m и g суть вещественные константы.

§ 5.4. Производная Ли. Первообразная функции

5.4.1. Естественные расслоения и производная Ли. В анализе на многообразиях широкий класс объектов можно описать в терминах пучков локальных свободных $\mathcal{O}_X$-модулей конечного ранга, на которых группа диффеоморфизмов многообразия X действует так, что это действие зависит только от струй конечного порядка этих диффеоморфизмов. Такие объекты называются *геометрическими объектами*, см. [KMS].

Основные примеры геометрических объектов: функции, векторные и ковекторные поля, дифференциальные формы, метрики, связности. *Естественное расслоение* — это расслоение геометрических объектов.

Для любого геометрического объекта фиксированного типа производная Ли L_X вдоль векторного поля $X \in \mathrm{Vect}(U)$ от данного объекта определена естественным образом как дифференцирование $C^\infty(U)$-модуля сечений соответствующего пучка. На супермногообразиях $\mathcal{M}$ мы совершенно естественным образом приходим к необходимости рассматривать пучки $\mathcal{O}_\mathcal{M}$-модулей **бесконечного ранга**, например модулей псевдодифференциальных форм, см. [GLS2]. Ниже мы построим производную Ли для достаточно широкого класса геометрических объектов на супермногообразиях. Этот класс содержит все, что мы встретим в этой книге и что соответствует нашему интуитивному представлению о геометрическом объекте.

Наша ближайшая цель — определить понятие естественного пучка. Мы скажем, что задано *естественное соответствие* $\mathcal{A}$, если для каждого супермногообразия $\mathcal{M}$ задан пучок $\mathcal{O}_\mathcal{M}$-модулей $\mathcal{A}_\mathcal{M}$ и каждому открытому вложению $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ отвечает морфизм линейных суперпространств $\varphi^*_\mathcal{A}\colon \mathcal{A}(\mathcal{M}) \to \mathcal{A}(\mathcal{M})$, такой что

1) для любого открытого подсупермногообразия $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ выполняется равенство $\mathcal{A}_\mathcal{M}(\mathcal{U}) = \mathcal{A}_\mathcal{U}(\mathcal{U})$, а следовательно, всюду ниже мы будем писать просто $\mathcal{A}(\mathcal{U})$;

2) если $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ — открытое вложение, то $\varphi^*_\mathcal{A}(fm) = \varphi^*(f)\varphi^*_\mathcal{A}(m)$ для любых $f \in C^\infty(\mathcal{N})$ и $m \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$, а если $\psi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ — открытое вложение, то

$$(\varphi \circ \psi)^*_\mathcal{A} = \psi^*_\mathcal{A} \circ \varphi^*_\mathcal{A};$$

3) если $\mathcal{M}$ — открытое подсупермногообразие в $\mathcal{N}$, а $i\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ — каноническое вложение, то $i^*_\mathcal{A}\colon \mathcal{A}(\mathcal{N}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{M})$ — это ограничение сечений пучка на соответствующее открытое подмножество;

4) если $\mathcal{M} = \mathcal{R}^{m|n}$ и $x_1, \ldots, x_{m+n}$ — координаты на $\mathcal{M}$, то для любой открытой суперобласти $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ выполняется равенство

$$\mathcal{A}(\mathcal{U}) = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} L^{p_\alpha|q_\alpha}(\mathcal{U}, \mathcal{W}_\alpha),$$

где $|\Lambda| < \infty$, $L^{p|q}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ — свободный $C^\infty(\mathcal{U} \times \mathcal{W})$-модуль ранга $p|q$, а $\mathcal{W}_\alpha$ — открытое подсупермногообразие в $\mathcal{R}^{r_\alpha|s_\alpha}$;

5) существует $N \in \mathbb{N}$, такое что преобразования $\varphi^*_\mathcal{A}$ зависят только от N-струи открытого вложения φ.

Пусть $|\Lambda| = 1$, т. е. $\mathcal{A}(\mathcal{U}) = L^{p|q}(\mathcal{U},\ \mathcal{W})$, где $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{R}^{r|s}$, а $L^{p|q}(\mathcal{U},\ \mathcal{W})$ — свободный $C^\infty(\mathcal{U} \times \mathcal{W})$-модуль с базисом $e_1, \ldots, e_{p+q}$. Дадим в этом случае более явное описание множества $\mathcal{A}(\mathcal{U})$.

Пусть $\mathcal{V}$ — открытое подсупермногообразие в $\mathcal{R}^{n|m}$ с координатами $y_1, \ldots, y_{n+m}$, а $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ — открытое вложение. Набор функций $\left\{ \dfrac{\partial^k \varphi^*(x_i)}{\partial y_{l_1} \ldots \partial y_{l_k}} \,\middle|\, 0 \leqslant k \leqslant N \right\}$ задает морфизм $\varphi^{[N]}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{R}^{d(N)}$, где суперразмерность $d(N)$ пространства струй для нас не существенна.

Пусть $e'_1, \ldots, e'_{p+q}$ — базис в модуле $L^{p|q}(\mathcal{V},\ \mathcal{W})$. Под зависимостью отображения $\varphi^*_{\mathcal{A}}$ от N-струи морфизма φ мы имеем в виду наличие $\mathcal{R}^{d(N)}$-семейства $\psi\colon \mathcal{R}^{d(N)} \times \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{R}^{d(N)} \times \mathcal{W}$ диффеоморфизмов суперобласти $\mathcal{W}$ и суперматрицы $g \in \mathrm{GL}(p|q;\ C^\infty(\mathcal{R}^{d(N)}))$, таких что репараметризация $\varphi^{[N]}$ определяет $\mathcal{V}$-семейство морфизмов $\psi^{(\varphi)}\colon \mathcal{V} \times \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ и суперматрицу $g^{(\varphi)} \in \mathrm{GL}(p|q;\ C^\infty(\mathcal{V}))$, которые и задают отображение $\varphi^*_{\mathcal{A}}$ по формуле

$$\varphi^*_{\mathcal{A}}\Big(\sum c_k e_k\Big) = \sum (\psi^\varphi \circ (\varphi \times \mathrm{id}_{\mathcal{W}}))^*(c_k) g^{(\varphi)}_{kl} l''_l. \tag{5.16}$$

Как легко видеть, условия 1–3 означают, что естественное соответствие является функтором из категорий супермногообразий с открытыми вложениями в качестве морфизмов в категорию пар (супермногообразие $\mathcal{M}$, пучок $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-модулей на $\mathcal{M}$) с естественным образом определенными морфизмами.

Если $\mathcal{A}$ — естественное соответствие, то $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ будет называться *естественным пучком*.

Представление в виде $\mathcal{A}(\mathcal{U}) = \bigoplus\limits_\alpha L^{p_\alpha|q_\alpha}(\mathcal{U} \times \mathcal{W}_\alpha)$, которое входит в определение естественного соответствия, будет называться *локальной моделью* соответствия $\mathcal{A}$. Любое естественное соответствие однозначно восстанавливается по своей локальной модели и набору данных ψ, g, который задает отображения $\varphi^*_{\mathcal{A}}$ для открытых вложений карт. Для того чтобы можно было построить естественное соответствие $\mathcal{A}$ по данной локальной модели и отображениям, заданным с помощью ψ, g, необходимо и достаточно, чтобы для любых диффеоморфизмов карт φ', φ'' выполнялось равенство

$$(\varphi'')^*_{\mathcal{A}} \circ (\varphi')^*_{\mathcal{A}} = (\varphi' \circ \varphi'')^*_{\mathcal{A}}.$$

Наше определение таково, что если $\dim \mathcal{U} \neq \dim \mathcal{U}'$, то между $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $\mathcal{A}(\mathcal{U}')$ нет абсолютно никакой связи, а локальная модель соответствия $\mathcal{A}$ может зависеть от суперразмерности суперобласти $\mathcal{U}$.

Примеры естественных соответствий: $\mathcal{O}$, $\mathcal{V}ect$, $\mathcal{V}ol$, $\mathcal{C}ovect$, Ω^i, $\widehat{\Omega}^i$, Σ_i, $\widehat{\Sigma}_i$, см. [GLS2].

Упражнение. Дайте определение (прямой) суммы и тензорного произведения (над $\mathcal{O}$) естественных соответствий.

Сравнение пар Vect–$\mathcal{C}ovect$ и $\widehat{\Omega}$–$\widehat{\Sigma}$ показывает, что в рамках нашего определения сформулировать, что такое естественное соответствие, двойственное данному, непросто. Мы дадим более адекватное определение, когда будем изучать представления супералгебр Ли векторных полей.

Покажем, что естественное соответствие позволяет вводить параметры. Пусть $\mathcal{S}$ — супермногообразие параметров, а $\mathcal{A}$ — естественное соответствие с локальной моделью $\mathcal{A}(\mathcal{U}) = \bigoplus\limits_\alpha L^{p_\alpha|q_\alpha}(\mathcal{U} \times \mathcal{W}_\alpha)$. Тогда положим $\mathcal{A}(\mathcal{U};\ S) := \bigoplus\limits_\alpha L^{p_\alpha|q_\alpha}(\mathcal{U} \times \mathcal{W}_\alpha \times \mathcal{S})$ и для любого $\mathcal{S}$-семейства открытых вложений $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ определим $\varphi^*_{\mathcal{A}}$ той же формулой (5.16), которая восстанавливает $\varphi^*_{\mathcal{A}}$ по данным ψ, g, где $\varphi^{[N]}$, ψ^φ и g^φ суть $\mathcal{S}$-семейства.

Лемма. *Если A является естественным соответствием, а $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ — атлас на супермногообразии $\mathcal{M}$, то модель $\mathcal{A}(\mathcal{U};\ \mathcal{S})$ вместе с отображениями $\varphi_{\mathcal{A}}$ определяет некоторый пучок $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-модулей на $\mathcal{M}$.*

Определим производную Ли естественного соответствия вдоль векторного поля следующим образом. Однородное относительно четности векторное поле X задает $\mathcal{T}$-семейство диффеоморфизмов $\varphi\colon \mathcal{T} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{T} \times \mathcal{M}$, и, следовательно, $\varphi^*_{\mathcal{A}}$ является $\mathcal{T}$-семейством автоморфизмов модуля $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$.

Для любого $\rho \in \mathcal{A}(\mathcal{M})$ положим

$$L^{\mathcal{A}}_X(\rho) = (\partial_{\mathcal{T}}(\varphi^*_{\mathcal{A}}(\rho)))|_0\,,$$

где $|_0$ означает репараметризацию с помощью морфизма $i^{(0)}\colon \mathrm{pt} \to \mathcal{T}$, $\tilde{\imath}^{(0)}(\mathrm{pt}) = \{0\}$.

Теорема. *Производная Ли отображает модуль $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ в себя и обладает следующими свойствами:*

1) *$L^{\mathcal{A}}_X$ является дифференцированием $C^\infty(\mathcal{M})$-модуля $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ в себя и $p(L^{\mathcal{A}}_X) = p(X)$, т. е.*

$$L^{\mathcal{A}}_X(f\rho) = X(f)\rho + (-1)^{p(X)p(f)} f L^{\mathcal{A}}_X(\rho),$$

а если $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ — супералгебра над $C^\infty(\mathcal{M})$, то L_X является супердифференцированием этой супералгебры;

2) *$L^{\mathcal{A}}_{cX} = cL^{\mathcal{A}}_X$ для любого семейства констант c, а также $L^{\mathcal{A}}_{[X_1, X_2]} = [L^{\mathcal{A}}_{X_1}, L^{\mathcal{A}}_{X_2}]$ для любых X_1 и X_2; а если $p(X_1) = p(X_2)$, то $L^{\mathcal{A}}_{X_1+X_2} = L^{\mathcal{A}}_{X_1} + L^{\mathcal{A}}_{X_2}$;*

3) *$L^{\mathcal{A}}_X(f)|_{\mathcal{U}} = L_{X|_{\mathcal{U}}}(f|_{\mathcal{U}})$ для любого открытого подсупермногообразия $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$.*

Отметим, что эта теорема позволяет нам определить производную Ли для любого, необязательно однородного относительно четности векторного поля и получить представление супералгебры Ли $\mathfrak{vect}(\mathcal{M})$.

Доказательство (набросок). Пользуясь формулами из предложения из п. 5.3.2, мы видим, что вне зависимости от четности однородного поля X всегда можно предположить, что $\varphi^* = 1 + tX$, где $t^2 = 0$. В частности, для нечетного поля мы получаем

$$L_X^{\mathcal{A}} = \frac{\partial}{\partial\tau}\varphi^*_{\mathcal{A}}, \quad \text{где } \varphi^* = 1+\tau X.$$

Благодаря тому что $\varphi^*_{\mathcal{A}}$ зависит только от конечной струи диффеоморфизма φ, мы можем производить вычисления в формальных рядах по параметру t или $(t,\ \tau)$ и принимать во внимание, что мы сначала применяем ∂_τ, а потом подставляем $t = 0$ или $t = \tau = 0$, т. е. в ответе мы сохраняем только константный член.

Записав явные формулы для данных ψ, g, мы получаем выражение вида

$$\varphi^*_{\mathcal{A}} = 1 + \sum (tX_i)\Delta_i + \sum \frac{\partial}{\partial x_j}(tX_i)\Delta_{ij} + \ldots,$$

в которое tX_i входит всегда только в первой степени, поскольку $t^2 = 0$. Это доказывает линейность производной $L_X^{\mathcal{A}}$ по X. Теперь пусть φ, ψ и χ — семейства диффеоморфизмов супермногообразия $\mathcal{M}$ с параметрами t_1, t_2 и t_3 соответственно, отвечающее векторным полям X, Y и $[X,\ Y]$. Тогда

$$\varphi^* \equiv 1 + t_1X \pmod{t_1^2}, \qquad \psi^* \equiv 1 + t_2Y \pmod{t_2^2},$$
$$\chi^* \equiv 1 + t_3[X,\ Y] \pmod{t_3^2}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$(\varphi^*)^{-1}(\psi^*)^{-1}\varphi^*\psi^* \equiv 1 + t_2t_1[X,\ Y] \equiv \chi^*(t_2t_1) \pmod{t_1^2,\ t_2^2}.$$

Этим $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$-семействам соответствуют отображения

$$\chi^*_{\mathcal{A}}(t_2t_1) = 1 + t_2t_1L^{\mathcal{A}}_{[X,Y]} \pmod{t_1^2,\ t_2^2}$$

и

$$(\varphi^*_{\mathcal{A}})^{-1}(\psi^*_{\mathcal{A}})^{-1}\varphi^*_{\mathcal{A}}\psi^*_{\mathcal{A}} \equiv (1 + t_2t_1[L_X^{\mathcal{A}},\ L_Y^{\mathcal{A}}]) \pmod{t_1^2,\ t_2^2},$$

откуда следует, что $L^{\mathcal{A}}_{[X,Y]} = [L_X^{\mathcal{A}},\ L_Y^{\mathcal{A}}]$. Оставшаяся часть доказательства предоставляется читателю. □

Вопрос. Если X — гомологическое векторное поле, то тождество $(L_X^{\mathcal{A}})^2 = 0$ выполняется для любого $\mathcal{A}$. Как связаны гомологии, отвечающие одному и тому же полю X в пространствах сечений разных естественных расслоений?

Замечание. Как мы уже отметили выше, среди разумных геометрических объектов мы встречаем такие, что их сечения заполняют не все пространство сечений естественного расслоения $\mathcal{A}(\mathcal{M})$, а только некоторое подпространство $\mathcal{B}(\mathcal{M})$. Если $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ является $C^\infty(\mathcal{M})$-подмодулем в $\mathcal{A}(\mathcal{M})$, тогда, конечно, $L_X(\mathcal{B}(\mathcal{M})) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{M})$, но в общем случае производная Ли от элементов из $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ лежит в большем множестве $\mathcal{A}(\mathcal{M})$.

5.4.2. Первообразная функция. Пусть $\mathcal{T}$ — время. *Первообразной* для $f \in C^\infty(\mathcal{T})$ назовем функцию $g \in C^\infty(\mathcal{T})$, такую что

$$\partial_{\mathcal{T}}g = f.$$

Мы будем обозначать первообразную для f символом неопределенного интеграла $\int f\,\mathrm{vol}(\partial_{\mathcal{T}})$. Как и для многообразий, нетрудно доказать, что первообразная существует для любой гладкой функции $f \in C^\infty(\mathcal{T})$ и любые две первообразные одной и той же функции отличаются на константу.

Предложение. *Если суперобласть $\mathcal{U}$ и поле $D \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U})_\varepsilon$, где $\varepsilon \in \mathbb{Z}/2$, таковы, что для любой функции $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ множество решений уравнения $D(g) = f$ непусто, а любые два решения отличаются на константу, то существует глобальная система координат на $\mathcal{U}$, такая что супермногообразие $\mathcal{U}$ можно интерпретировать как время, а D — как производную по времени.*

Решения уравнения $D(g) = f$ мы будем называть *первообразными для f.*

Доказательство. Поскольку $D \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U})_\varepsilon$, для любой функции $f \in C^\infty(\mathcal{U})_\lambda$ существует первообразная четности $\lambda + \varepsilon$. Из существования первообразных следует также, что векторное поле D невырожденно во всех точках суперобласти $\mathcal{U}$. Пусть сначала $\varepsilon = \bar{0}$, а $t \in C^\infty(\mathcal{U})_{\bar{0}}$ — первообразная для функции, тождественно равной 1. Тогда в окрестности любой точки $m \in U$ найдется система координат, в которой $x_1 = t$ и $D = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Если точка $t_0 \in \mathbb{R}$ такова, что $\{m \in \mathcal{U} \mid t(m) = t_0\} \neq \varnothing$, то уравнение $t = t_0$ задает в $\mathcal{U}$ замкнутое подсупермногообразие $\mathcal{Z}$ и любая функция на $\mathcal{Z}$ может быть поднята до функции на $\mathcal{U}$, удовлетворяющей уравнению $Dh = 0$ (нетрудно видеть, что $\mathcal{U}$ является открытым подсупермногообразием в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}$). Но такие функции — это только константы. Поэтому $\dim \mathcal{Z} = 0|0$, а $\mathcal{U}$ — интервал в $\mathbb{R}$ и t — координата на $\mathcal{U}$.

Если $\varepsilon = \bar{1}$, то обозначим через τ произвольную нечетную первообразную для 1, а символом t — произвольную четную первообразную для τ. Все остальное доказывается так же, как в случае $\varepsilon = \bar{0}$. □

Упражнение. Обобщите предложение на семейства. Для любого $\mathcal{N}$-семейства времен нужно брать открытое подсупермногообразие $\mathcal{W} \subset \mathcal{N} \times \mathcal{T}$, такое что для любых $(n,\ s) \in W$ множество $(n \times \mathbb{R}) \cap W$ связно: в частности, подойдет $\mathcal{W} = \mathcal{N} \times \mathcal{T}$.

С каждой системой координат x на $\mathcal{T}$ мы ассоциируем векторное поле $\partial_{\mathcal{T}}^{(x)}$, которое в координатах x имеет стандартную форму. Пусть x и y — две системы координат на $\mathcal{T}$. Дифференциальный оператор $D\left(\frac{y}{x}\right)$ единственным образом восстанавливается из условия

$$D\left(\frac{y}{x}\right) \circ \partial_{\mathcal{T}}^{(x)} = \partial_{\mathcal{T}}^{(y)} \tag{5.17}$$

и называется *обобщенным якобианом*, ассоциированным с заменой координат. Если $p(\partial_{\mathcal{T}}) = \bar{0}$, то порядок оператора $D\left(\frac{y}{x}\right)$ равен нулю и он совпадает с обычным якобианом, а если $p(\partial_{\mathcal{T}}) = \bar{1}$, то

$$D\left(\frac{y}{x}\right) = \partial_{\mathcal{T}}^{(y)}(\tau^1),$$

где $x = (t, \tau)$ и $y = (t^1, \tau^1)$. Действительно, в первой системе координат задано векторное поле $X = \partial_\tau + \tau\partial_t$ и аннулирующая его 1-форма $\alpha = dt - \tau d\tau$. Аналогичные поле и форма заданы и во второй системе координат: $X^1 = \partial_{\tau^1} + \tau^1\partial_{t^1}$ и $\alpha^1 = dt^1 - \tau^1 d\tau^1$.

Пусть F — диффеоморфизм, действующий из пространства с координатами $x = (t, \tau)$ в пространство с координатами $y = (t^1, \tau^1)$ по формулам:

$$\begin{cases} t^1 = f(t, \tau), \\ \tau^1 = g(t, \tau). \end{cases}$$

Тогда

$$F^*(\alpha^1) = F^*(dt^1 - \tau^1 d\tau^1) = \partial_f f t dt + \partial_f f \tau d\tau - g(\partial_f g t dt + \partial_f g \tau d\tau) = \\ = (\partial_f f t - g\partial_f g t)dt + (\partial_f f \tau - g\partial_f g\tau)d\tau.$$

Значит, $F^*(\alpha^1) = \varphi \cdot \alpha$ (т. е. F — контакоморфизм) тогда и только тогда, когда

$$\partial_f f\tau - g\partial_f g\tau = -\tau(\partial_f f t - g\partial_f g t) \Longleftrightarrow (\partial_f f\tau + \tau\partial_f f t) = \\ = g(\partial_f g\tau + \tau\partial_f g t) \Longleftrightarrow X(f) = gX(g), \tag{5.18}$$

причем

$$\varphi = \partial_f f t - g\partial_f g t.$$

Теперь посмотрим, как контактоморфизм F действует на векторные поля:

$$\partial_t = \partial_f f t\partial_{t^1} + \partial_f g t\partial_{\tau^1}; \quad \partial_\tau = \partial_f f\tau\partial_{t^1} + \partial_f g\tau\partial_{\tau^1}.$$

Конечно, в этих формулах нужно еще сделать обратную замену, так как коэффициенты являются функциями от (t, τ), а не от (t^1, τ^1), но нас это пока не заботит. Мы получаем:

$$F_*(X) = (\partial_f f\tau + \tau\partial_f f t)\partial_{t^1} + (\partial_f g\tau + \tau\partial_f g t)\partial_{\tau^1} = X(f)\partial_{t^1} + X(g)\partial_{\tau^1}.$$

С учетом условий (5.18) получаем (в последнем переходе мы учли, что $\tau^1 = g$):

$$F_*(X) = gX(g)\partial_{t^1} + X(g)\partial_{\tau^1} = X(f)(\partial_{\tau^1} + g\partial_{t^1}) = X(g)X^1.$$

5.4.2а. Упражнение. Каков явный вид оператора $D\left(\frac{y}{x}\right)$, если $p(\partial_{\mathcal{T}}) = \bar{1}$?

5.4.3. Теорема. *Пусть x и y — две системы координат на $\mathcal{T}$. Тогда для любой функции $f \in C^\infty(\mathcal{T})$ выполняются следующие тождества (формулы замены координат)*:

$$\int f(x)\,\mathrm{vol}(\partial_{\mathcal{T}}^{(x)}) = \int D\left(\frac{x}{y}\right) f(x(y))) \cdot \mathrm{vol}\left(\partial_{\mathcal{T}}^{(y)}\right). \tag{5.19}$$

Доказательство. Поскольку $\partial_{\mathcal{T}}^{(y)} = D\left(\frac{y}{x}\right) \circ \partial_{\mathcal{T}}^{(x)}$, мы получаем

$$\partial_{\mathcal{T}}^{(y)} \cdot \left(\int f\,\mathrm{vol}(\partial_{\mathcal{T}}^{(x)})\right) = D\left(\frac{y}{x}\right)\left(\partial_{\mathcal{T}}^{(x)} \int f\,\mathrm{vol}\left(\partial_{\mathcal{T}}^{(x)}\right)\right) = D\left(\frac{y}{x}\right) f. \qquad \square$$

Определим интеграл вдоль отрезка классической формулой

$$\int\limits_a^b f dt = g(b) - g(a), \quad \text{где } g \text{ — первообразная для } f.$$

Гораздо более удобно работать с нашим определением семейств с самого начала. Напомним, что $\mathcal{N}$-*семейством точек времен* $\mathcal{T}$ называется морфизм $\mathcal{N} = \mathcal{N} \times \mathrm{pt} \to \mathcal{T}$. Упорядоченную пару $[\varphi_l, \varphi_r]$ $\mathcal{N}$-семейств точек в $\mathcal{T}$ мы назовем $\mathcal{N}$-*семейством отрезков* в супермногообразии $\mathcal{T}$.

5.4.3а. Упражнение. Пусть $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{R}^{1|k}$ — морфизм супермногообразий. Каждому $\mathcal{N}$-семейству координат $x = (u, \xi_1, \ldots, \xi_k)$ на $\mathcal{R}^{1|k}$ сопоставим $\mathcal{N}$-семейство $\mathcal{W}_x$, состоящее из $0|k$-мерных подсупермногообразий в $\mathcal{R}^{1|k}$, заданных уравнением $u - \varphi^*(u) = 0$.

Докажите, что $\mathcal{W}_x$ не зависит от системы координат x тогда и только тогда, когда либо $k = 1$, либо $\mathcal{N} = N$ (т. е. N является многообразием).

Определенным интегралом $\mathcal{N}$-семейства функций f в системе координат x вдоль $\mathcal{N}$-семейства отрезков $[\varphi_l, \varphi_r]$ назовем

$$\int\limits_{[\varphi_l;\varphi_r]} f\,\mathrm{vol}(\partial_{\mathcal{T}}^{(x)}) := (\varphi_r^* - \varphi_l^*)\left(\int \mathrm{vol}(\partial_{\mathcal{T}}^{(x)}) f\right). \tag{5.20}$$

Ясно, что определенный интеграл не зависит от выбора первообразной функции.

Сравним приведенное выше определение определенного интеграла с интегралом Березина. В координатах нетрудно проверить, что если φ_r, φ_l и f таковы, что $\tilde{\varphi}_l < \tilde{\varphi}_r$ и

$$(\mathrm{supp}\, f) \cap (\{m\} \times T) \subseteq \{m\} \times [\tilde{\varphi}_l(m), \tilde{\varphi}_r(m)],$$

то

$$\int\limits_{[\varphi_l,\varphi_r]} \mathrm{vol}(\partial_{\mathcal{T}}^{(x)})f = \int \mathrm{vol}_x f,$$

где слева стоит интеграл по $\mathcal{N}$-семейству форм объема с компактным носителем.

Перейдем на более инвариантный язык: определим $\mathcal{T}$-*формы* как классы эквивалентности выражений $\mathrm{vol}(\partial_{\mathcal{T}}^{(x)})f$ по модулю замен координат вида (5.19). Тогда ясно, что если $\dim\mathcal{T} = 1|0$, то $\mathcal{T}$-формы совпадают с элементами модуля $\mathcal{V}ol(\mathcal{T})$.

Если же $\dim\mathcal{T} = 1|1$, то отождествить $\mathcal{T}$-формы с элементами из $\mathcal{V}\mathrm{ol}(\mathcal{T})$ невозможно. Их законы преобразований совершенно разные. Более того, при $\dim\mathcal{T} = 1|1$ на пространстве $\mathcal{T}$-форм нет никакой естественной структуры $C^\infty(\mathcal{T})$ -модуля, поскольку операторы $D\left(\dfrac{y}{x}\right)$ являются дифференциальными операторами порядка 1.

Заметим, что если бы нам все-таки удалось зафиксировать класс координатных систем на $\mathcal{R}^{1|1}$ так, чтобы можно было рассматривать операторы $D\left(\dfrac{y}{x}\right)$ как скалярные, то это бы означало, что мы в модуле векторных полей выделили подмодуль $\mathcal{D} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{T})$ ранга 1, такой что $\mathcal{D} \oplus [\mathcal{D}, \mathcal{D}] = \mathrm{Vect}(\mathcal{T})$. Выделить такой подмодуль — это то же самое, что задать контактную структуру.

Итак, на $\mathcal{R}^{1|1}$ мы построили специфическую теорию интегрирования, которая хотя и выражается через интеграл Березина, но представляет собой совсем другое интегрирование, существующее наряду с березинским, см. разъяснения в п. 5.4.4а.

В настоящий момент на этой конструкции (см. [Lev]) основана теория Левина эллиптических функций на супермногообразиях и ее изложение в [MaT].

5.4.4. Комментарии редактора.

5.4.4а. Пояснения. Пусть на $\mathcal{R}^{1|1}$ с координатами t, τ задана контактная форма $\alpha := dt + \tau d\tau$; пусть $\mathfrak{k}(1|1)$ — супералгебра Ли контактных векторных полей, сохраняющая распределение, заданное формой α. Все тензорные расслоения, на пространстве сечений которых действует $\mathfrak{k}(1|1)$, склеены из простейших — линейных (с 1-мерным или $0|1$-мерным слоем), различающихся (конформным, как выражаются физики) «весом» — собственным значением под действием поля $2t\partial_t - \tau\partial_\tau$ на образующий элемент (тот, при котором коэффициент — константа). В частности, вес элемента объема $\mathrm{vol}(t, \tau)$ равен $2 - 1 = 1$.

Посмотрим теперь на суперпространство 1-форм. У него нет $\mathfrak{k}(1|1)$-инвариантного базиса над $\mathcal{F} := C^\infty(\mathcal{R}^{1|1})$, а есть лишь инвариантное подпространство, натянутое на форму α, и фактор по нему. В качестве представителя фактора можно взять форму $d\tau$, вес которой равен 1, а значит, с точки зрения супералгебры $\mathfrak{k}(1|1)$ между $d\tau$ и элементом объема $\mathrm{vol} = [dt\,\partial_\tau]$ нет никакой разницы.

Поэтому мы можем интегрировать не только (финитные, т. е. с компактным носителем) элементы объема, но и (финитные) 1-формы (профакторизовав их по $\mathcal{F}$-подмодулю, натянутому на α):

$$\int(fdt + gd\tau) := \int(g - f\tau)d\tau = \int(g - f\tau)\,\mathrm{vol}(t, \tau). \tag{5.21}$$

5.4.4б. Вопросы. 1) Обобщение вышеописанной конструкции контактного интегрирования на произведение n суперокружностей $\mathcal{S}^{1,1}$ очевидно: надо по частям интегрировать дифференциальную n-форму сперва по модулю дифференциального идеала $\alpha_1 := dt_1 + \tau_1 d\tau_1$ и т. д. и, наконец, по модулю дифференциального идеала $\alpha_n := dt_n + \tau_n d\tau_n$, где t_i, τ_i — координаты на i-й суперокружности. (Нетрудно видеть, что от порядка интегрирования ответ не зависит, так что определение корректно.)

Возможно ли обобщение такого интегрирования на $n|n$-мерные супермногообразия, отличные от произведения суперокружностей?

2) Можно ли описать аналог теории интегрирования на суперокружности $\mathcal{SM}^{1,1}$, ассоциированной с внешней алгеброй расслоения М■биуса? В этом случае с точки зрения супералгебры Ли [1], сохраняющей распределение, заданное поднятием $\alpha^M := dt + \tau t d\tau$ формы α на $\mathcal{SM}^{1,1}$, форма α^M не отличается от элемента объема.

5.4.4в. Задача. В книге [НСУ] дана внятная классификация важного в приложениях класса обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Суперизации этих уравнений описывают, вероятно, те же процессы, что и подстилающие их ОДУ, но с внутренними степенями свободы. На эту тему имеется несколько невразумительных текстов в физических журналах, ни в одном из которых не понятно даже, как правильно поставить в супер ситуации аналог классификационной задачи, изложенной в [НСУ]. Например, сколько нечетных переменных можно (или нужно) добавить, чтобы «извлечь квадратный корень» из производной по четной переменной (надо рассматривать лишь «выделенные» случаи контактных структур, см. [GLS1], или можно не ограничивать себя числом нечетных переменных)?

Возможно, при решении этой задачи окажутся полезными идеи статьи [ЛеС], результаты которой для этого необходимо сперва суперизовать хотя бы на случай одного «квадратного корня» из производной по четной переменной. По крайней мере, при таком подходе необходимость рассматривать семейства «заметается под ковер», и можно (как мне сейчас кажется) оставаться в рамках линейной алгебры.

Литература

[Ар1] *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: РХД, 2000.

---

[1] Физики называют эту супералгебру Ли фактором супералгебры Рамона по центру, см. [GLS1].

[Бер] *Березин Ф. А.* Введение в суперанализ. 2-е изд., испр. и доп. / Под ред. Д. А. Лейтеса. М.: МЦНМО, готовится к печати.

[Вай] *Вайнтроб А. Ю.* Алгеброиды Ли и гомологические векторные поля // Успехи матем. наук. 1997. Т. 52, № 2 (314). С. 161–162.

[Год] *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1978.

[ККФр] *Кац Г. И.*, *Коронкевич А. И.* Теорема Фробениуса для функций от коммутирующих и антикоммутирующих аргументов // Функц. анализ и его прил. 1971. Т. 5, № 1. С. 78–80.

[Лев] *Левин А. М.* Интегрирование на 1|1-мерных супермногообразиях // Успехи матем. наук. 1986. Т. 41, вып. 3 (249). С. 189–190.

[ЛеС] *Лейтес Д.*, *Сергеев А.* Ортогональные многочлены дискретной переменной и алгебры Ли матриц комплексного размера // Теор. и матем. физика. 2000. Т. 123, № 2. С. 205–236; `arXiv:math.RT/0509528`

[НСУ] *Никифоров А.*, *Суслов С.*, *Уваров В.* Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. М.: Наука, 1985.

[Ша1] *Шандер В. Н.* Векторные поля и дифференциальные уравнения на супермногообразиях // Функц. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 91–92.

[Ша2] *Шандер В. Н.* О полной интегрируемости обыкновенных дифференциальных уравнений на супермногообразиях // Функц. анализ и его прил. 1983. Т. 17, вып. 1. С. 89–90.

[El] *Elphic C.* Classes of exactly solvable nonlinear evolution equations for Grassmann variables: the normal form method // J. Math. Phys. 1987. V. 28, № 6. P. 1243–1249.

[GLS1] *Grozman P.*, *Leites D.*, *Shchepochkina I.* Lie superalgebras of string theories // Acta Mathematica Vietnamica. 2001. V. 26, № 1. P. 27–63; `arXiv:hep-th/9702120`

[GLS2] *Grozman P.*, *Leites D.*, *Shchepochkina I.* Invariant differential operators on supermanifolds and The Standard Model // Multiple facets of quantization and supersymmetry. Michael Marinov Memorial Volume / M. Olshanetsky, A. Vainstein (eds.) River Edge, NJ: World Sci. Publishing, 2002. P. 508–555; `arXiv:math.RT/0202193`

[KMS] *Kolář I.*, *Michor P.*, *Slovák J.* Natural operations in differential geometry. Berlin: Springer, 1993.

[MaT] *Manin Yu.* Topics in noncommutative geometry. Princeton Univ. Press, 1991.

[MaRa] *Manin Yu. I.*, *Radul A. O.* A supersymmetric extension of the Kadomtsev—Petviashvili hierarchy // Comm. Math. Phys. 1985. V. 98, № 1. P. 65–77.

[RSha] *Retakh V.*, *Shander V.* The Schwarz derivative for noncommutative differential algebras // Unconventional Lie algebras / Fuchs D. (ed.). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. P. 139–154. (Adv. Soviet Math. V. 17.)

[Sha3] *Shander V.* Analogues of the Frobenius and Darboux theorems for supermanifolds // C. R. Acad. Bulgare Sci. 1983. V. 36, № 3. P. 309–312.

[Va1] *Vaintrob A.* Normal forms of homological vector fields. // J. Math. Sci. 1996. V. 82, № 6. P. 3865–3868.

[Va2] *Vaintrob A.* Darboux theorem and equivariant Morse lemma // J. Geom. Phys. 1996. V. 18, № 1. P 59–75.

Глава 6

Интегрирование (В. Н. Шандер)

Введение

Что требуется для того, чтобы теорию интегрирования можно было бы назвать разумной и достаточно полной? Прежде всего мы должны иметь запас объектов, которые собственно и будем интегрировать (назовем их *формами*), и запас объектов, по которым мы будем производить интегрирование (назовем их *цепями*).

Цепи должны быть компактными подмножествами многообразия, оснащенного какой-то дополнительной структурой (в классической ситуации эта структура — *ориентация*); каждому компактному подмножеству должна соответствовать хотя бы одна цепь. Пространство форм хотелось бы видеть модулем над алгеброй функций, в то время как множество цепей должно составлять модуль над $\mathbb{Z}$ и оба пространства (как форм, так и цепей) должны быть *комплексами*[1]. Спаривание между цепями и формами должно быть *невырожденным*. Наконец, хотелось бы иметь теорему, описывающую дифференцируемость интеграла как функции от цепей, т. е. *аналог формулы Стокса*.

Все эти естественные требования выполнены (или почти выполнены) в конструкциях, предлагаемых ниже.

Содержание этой главы следующее.

В § 6.1 обсуждаются ориентации. Замены ориентации на супермногообразии управляются группой $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$, так что ситуация слегка более замысловатая, чем в классическом случае: для супермногообразий имеется четыре аналога ориентации и пять типов ориентируемости.

В § 6.2 изучается главный объект нашей теории — модуль форм объема. Мы опишем здесь березинское интегрирование форм объема с компактными носителями по супермногообразиям, сформулируем формулу замены координат и теорему Фубини (о том, как интегрировать по произведению супермногообразий).

В § 6.3 вводятся цепи. Мы детально исследуем возможности определить интегрирование произвольной формы объема по компакту полной размерности; решение этой задачи долгое время оставалось неизвест-

---

[1] См. [ГМ].

ным, и препятствием служил так называемый «пример Рудакова». Этот пример показывает, что интегрирование формы объема по компактному подмножеству в суперобласти исключительно неинвариантно (см. также § 6.7). Попытки дать инвариантное определение и привели к понятию цепи как замкнутого подсупермногообразия с границей — это определение дано И. Н. Бернштейном и Д. А. Лейтесом в 1975 г.

Теперь мы в состоянии построить несколько комплексов цепей. Мы докажем, что спаривание между цепями и формами невырожденно; здесь семейство цепей, зависящих от нечетных параметров, может оказаться необходимым).

В § 6.4 мы, следуя М. А. Баранову и А. С. Шварцу, строим плотности — наиболее общий класс объектов, которые можно интегрировать по подсупермногообразиям. Это понятие используется в «обычном» анализе для интегрирования чего-то несколько более общего, чем то, что предоставляют дифференциальные формы. На множестве плотностей определить дифференциал невозможно (класс плотностей слишком широк), а хотелось бы, поэтому в § 6.6 мы выделяем плотности некоторого специального вида. Они служат супераналогом плотностей, которые получаются из дифференциальных форм на многообразиях, и на них можно определить дифференциал.

В § 6.5 мы имеем дело с супераналогами дифференциальных форм. Таких аналогов не один, а несколько, причем, честно говоря, мы совсем не уверены, что выделили все разумные аналоги. Дело в том, что дифференциальные формы на супермногообразии $\mathcal{M}$ являются функциями на $\widehat{\mathcal{M}} = \Pi T^*\mathcal{M}$ — супермногообразии, ассоциированном с кокасательным расслоением с послойно сдвинутой четностью[1] на $\mathcal{M}$ (так что дифференциал любой четной переменной нечетен и наоборот), а внешний дифференциал на $\mathcal{M}$ — это некоторое специальное гомологическое векторное поле на $\widehat{\mathcal{M}}$. В классической ситуации (когда $\mathcal{M} = M$ — многообразие) слои расслоения ΠT^*M чисто нечетны, поэтому все функции на $\widehat{\mathcal{M}}$ являются многочленами от дифференциалов координат (т. е. многочленами от координат в слое). В суперслучае имеется широкий спектр возможностей. Можно взять функции на $\widehat{\mathcal{M}}$, полиномиальные по дифференциалам, и получить дифференциальные формы. Можно взять произвольные функции и получить псевдодифференциальные формы; можно взять однородные функции и получить то, что мы назвали суперформами, и т. д.

Мы изучим функториальное поведение разных типов форм и объясним, как некоторые из этих форм можно (с определенными предосторожностями) интегрировать по цепям.

---

[1] Точнее, с внешней алгеброй этого расслоения, если $\mathcal{M}$ — многообразие; обобщение на случай, когда $\mathcal{M}$ — супермногообразие, очевидно.

В § 6.6 мы сформулируем подходящую версию теоремы Стокса для разных типов форм и установим соответствие между формами и плотностями. Это соответствие выглядит так. Если форму можно проинтегрировать по подсупермногообразиям, то такая форма задает некоторую плотность. Теорема утверждает, что плотности, получаемые таким образом, являются в точности плотностями Воронова—Зорича и все структуры на этих плотностях перенесены из пространства форм.

В § 6.7 содержатся некоторые дополнительные замечания, среди них некоторые очень важные, например определение обобщенных функций и преобразование Фурье.

Содержание главы, таким образом, довольно просто и стандартно. Однако простоту можно и не заметить в той туче пыли, которую мы подняли, борясь с техническими проблемами, одна из которых — необходимость работы с семействами. Некоторые стандартные вещи становятся отчетливо нестандартными после суперизации, например формула Стокса, связанная с супермногообразиями[1].

Ниже, если обратное не оговорено, $\mathcal{M}^{n|m}$ означает супермногообразие размерности $n|m$, а $\mathcal{U}$ — суперобласть той же размерности с координатами

$$x = (x_1, \ldots, x_{n+m}) = (u, \xi) = (u_1, \ldots, u_n, \xi_1, \ldots, \xi_m). \tag{6.1}$$

§ 6.1. Ориентации на супермногообразиях

6.1.1. Пусть $\mathcal{U}^{n|m}$ — суперобласть, а $x = (u, \xi)$ и $y = (v, \eta)$ — две системы координат на $\mathcal{U}$. Мы скажем, что системы x и y *одинаково ориентированы*, если

$$\mathrm{cpr}\left(\det\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right) > 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{cpr}\left(\det\left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\right)\right) > 0,$$

где $\mathrm{cpr}\colon C^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow C^\infty(U)$ — каноническая проекция (всюду ниже детерминант матрицы размера 0×0 предполагается равным единице). *Ориентацией суперобласти* является класс одинаково ориентированных систем координат.

Таким образом, если $n \cdot m \neq 0$, то имеется четыре ориентации на $\mathcal{U}$, а если одна из размерностей n или m обращается в нуль, то имеется всего две ориентации. Если не оговорено противное, мы предполагаем, что $n \cdot m \neq 0$.

---

[1] Результаты В. Н. Шандера, изложенные в этой главе и препринтированные в 1987 г. в трудах семинара [SoS], подводят нас к тому же, что через 10 лет после Шандера кратко сформулировал В. П. Паламодов (см. [Pa]), а именно к гипотезе о том, что существует аналог формулы Стокса, симметричный формуле из статьи [BL1], но с «надсупермногообразиями» коразмерности (0, −1). Сомнений в том, что такая формула существует, у меня нет, но, как ни совестно, эту формулу до сих пор никто не выписал.

Задача. Выписать аналог формулы Стокса, симметричный формуле из статьи [BL1]: с «надсупермногообразиями» коразмерности (0, −1). — *Прим. ред.*

На системах координат на $\mathcal{M}$ аддитивная группа $\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2$ действует следующим образом. Обозначим через e_1 (соответственно e_2) образующую первого (соответственно второго) экземпляра группы $\mathbb{Z}/2$. Тогда e_1 умножает первую четную координатную функцию на -1, оставляя прочие координаты на месте, а e_2 умножает на -1 первую нечетную координатную функцию, оставляя прочие координаты на месте.

Лемма. *Действие группы $\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2$ переводит одинаково ориентированные системы координат в одинаково ориентированные. Действие группы $\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2$ на ориентациях транзитивно.*

Упражнение. Докажите лемму.

6.1.2. Всюду ниже $\mathcal{M}$ предполагается связным супермногообразием (обобщение на несвязные супермногообразия очевидно). *Ориентирующим накрытием* супермногообразия $\mathcal{M}$ назовем супермногообразие $\widetilde{\mathcal{M}}$, склеенное из карт $(\mathcal{U}, \varepsilon)$, где $\mathcal{U}$ — карта на $\mathcal{M}$, а ε — ориентация на $\mathcal{U}$. Ориентация на $\mathcal{U}$, заданная системой координат на $\mathcal{M}$, не обязана совпадать с ε.

Скажем, что карты $(\mathcal{U}_1, \varepsilon_1)$ и $(\mathcal{U}_2, \varepsilon_2)$ *пересекаются*, если $U_1\cap U_2\neq\varnothing$ и их ориентации совпадают на открытой суперобласти $\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$, отвечающей непустому пересечению $U_1\cap U_2$. На $\widetilde{\mathcal{M}}$ имеется естественное действие группы $\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2$, а именно, $(a, b)\in\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2$ переводит $(\mathcal{U}, \varepsilon)$ в $(\mathcal{U}, (a, b)\varepsilon)$. Проекция $\widetilde{\mathcal{M}}\to\mathcal{M}$ определена естественным образом: она стирает ориентацию.

6.1.3. Пусть $m\in M$ — произвольная точка. Построим гомоморфизм фундаментальной группы

$$\chi\colon \pi_1(M)\longrightarrow\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2$$

следующим образом. Каждую петлю $\varphi\colon[0, 1]\to M$, где $\varphi(0)=\varphi(1)=m$, накроем конечным числом карт $\mathcal{U}_0, \ldots, \mathcal{U}_t$, так что $\mathcal{U}_0=\mathcal{U}_t=\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}_{k-1}\cap\mathcal{U}_k\neq\varnothing$ при $k=1, \ldots, t$, и определим ориентацию на карте $\mathcal{U}_k$ так, чтобы она совпадала с ориентацией на $\mathcal{U}_{k-1}\cap\mathcal{U}_k$. Тогда ориентация на $\mathcal{U}_t$ является результатом действия некоторого элемента $\chi(\varphi)\in\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2$ на ориентацию карты $\mathcal{U}_0$.

Упражнение. Проверьте, что $\chi(\varphi)$ не зависит ни от накрытия петли φ картами, ни от представителя класса $[\varphi]\in\pi_1(M)$, так что гомоморфизм $\chi\colon\pi_1(M)\longrightarrow\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2$ корректно определен.

Типом ориентируемости (связного) супермногообразия $\mathcal{M}$ называется пара

$$\begin{matrix}\text{(число связных компонент супермногообразия } \widetilde{\mathcal{M}},\\ \text{действие группы } \mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2 \text{ на этих компонентах).}\end{matrix}\tag{6.2}$$

Для $a, b\in\mathbb{Z}/2$, где $(a, b)\neq(0, 0)$, обозначим через $K(a, b)$ подгруппу, порожденную элементом (b, a), т. е.

$$K(a, b)=\{(x, y)\in\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2 \mid ax+by=0\}.\tag{6.3}$$

Основанием для такого обозначения является то, что естественный гомоморфизм

$$\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2\longrightarrow\mathbb{Z}/2=(\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2)/K(a, b)\tag{6.4}$$

отправляет элемент (x, y) в $ax+by$. Хорошо известно, что в группе $\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2$ имеется пять подгрупп, поэтому типов ориентированности супермногообразий тоже ровно пять; а именно следующие:

1) $\widetilde{\mathcal{M}}$ состоит из четырех компонент связности, и действие $\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2$ транзитивно на них;

2)–4) $\widetilde{\mathcal{M}}$ состоит из двух компонент связности, и ядром $\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2$-действия является группа $K(a, b)$, где $a, b\in\mathbb{Z}/2$, причем $(a, b)\neq(0, 0)$;

5) $\widetilde{\mathcal{M}}$ связно, и действие группы $\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2$ тривиально.

Мы скажем, что связное супермногообразие $\mathcal{M}$ (полностью) *ориентируемо*, если супермногообразие $\widetilde{\mathcal{M}}$ имеет четыре компоненты связности; (a, b)-*полуориентируемо*, если $\widetilde{\mathcal{M}}$ имеет две компоненты связности и ядром $\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2$-действия является группа $K(a, b)$, и *неориентируемо*, если $\widetilde{\mathcal{M}}$ связно.

Ориентацией полностью ориентируемого связного супермногообразия $\mathcal{M}$ называется компонента связности супермногообразия $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Замечание. Супермногообразие $\widetilde{\mathcal{M}}$ всегда полностью ориентировано для любого $\mathcal{M}$.

Примеры. Вот несколько примеров каждого типа ориентируемости.

Любая $n|m$-мерная суперобласть, для которой $n\cdot m\neq 0$, ориентируема.

Чтобы получить примеры других типов, давайте воспользуемся соответствием между супермногообразиями и векторными расслоениями. А именно, напомним, что каждому $n|m$-мерному супермногообразию $\mathcal{M}$ отвечает векторное расслоение $E\to M^n$ с m-мерными слоями, сечения внешней алгебры которого образуют структурный пучок на $\mathcal{M}$, и легко видеть, что ориентация карты $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ — это пара: (ориентация подстилающей области U, ориентация слоя над U). Мы приходим, таким образом, к таблице 6.1.

Лента Мёбиуса (нетривиальное векторное расслоение ранга 1 под окружностью S^1) дает пример $(1, 0)$-полуориентируемого супермногообразия.

Та же самая лента Мёбиуса в качестве базы тривиального линейного расслоения дает пример $(0, 1)$-полуориентируемого супермногообразия.

Взяв сумму Уитни двух расслоений Мёбиуса и рассмотрев ее как линейное векторное расслоение над лентой Мёбиуса, получим пример $(1, 1)$-полуориентируемого супермногообразия.

Таблица 6.1

Число компонент связности у $\widetilde{\mathcal M}$	Ядро	Как этот тип ориентируемости будет называться	Ориентируемая часть векторного расслоения, ассоциированного с $\widetilde{\mathcal M}$
4	0	Полностью ориентируемое	Слой и база
2	(1, 0)	(1, 0)-полуориентируемое	Только база
2	(0, 1)	(0, 1)-полуориентируемое	Только слой
2	(1, 1)	(1, 1)-полуориентируемое	Тотальное пространство
1	$\mathbb Z/2\oplus\mathbb Z/2$	неориентируемое	Ни слой, ни база, ни тотальное пространство

Умножив (1, 0)-полуориентируемое супермногообразие на (0, 1)-полуориентируемое супермногообразие, получим неориентируемое супермногообразие.

6.1.4. Теорема. *Действие группы $\mathbb Z/2\oplus\mathbb Z/2$ на связных компонентах супермногообразия $\widetilde{\mathcal M}$ транзитивно, и ядро этого действия совпадает с $\chi(\pi_1(M))$. Соответствие между ядрами $\mathbb Z/2\oplus\mathbb Z/2$-действия и типами ориентируемости взаимно однозначно.*

Доказательство. Группа $\mathbb Z/2\oplus\mathbb Z/2$ транзитивно действует на ориентациях карт; следовательно, она транзитивно действует и на компонентах связности супермногообразия $\widetilde{\mathcal M}$. Пусть K — ядро этого действия и $g\in K$. Тогда любые две карты вида $(\mathcal U,\,\varepsilon)$ и $(\mathcal U,\,g(\varepsilon))$ принадлежат одной и той же компоненте связности супермногообразия $\widetilde{\mathcal M}$. Если ψ — путь в $\widetilde{\mathcal M}$, который соединяет прообразы точки $m\in U$ в $(\mathcal U,\,\varepsilon)$ и $(\mathcal U,\,g(\varepsilon))$, то проекция пути ψ на M является петлей φ в M и $X(\varphi)=g$.

С другой стороны, если $g\in\chi(\pi_1(M))$ и φ — петля в M, такая что $\chi(\varphi)=g$, то рассмотрим карту $\mathcal U$ в $\mathcal M$, пересекающуюся с петлей φ. Для любой ориентации ε на $\mathcal U$ поднятие петли φ в $\widetilde{\mathcal M}$ задает путь, соединяющий $(\mathcal U,\,\varepsilon)$ и $(\mathcal U,\,g(\varepsilon))$.

Чтобы закончить доказательство, необходимо для любой подгруппы $K\subseteq\mathbb Z/2\oplus\mathbb Z/2$ построить супермногообразие $\mathcal M$, такое что $\chi(\pi_1(M))=K$. Это сделано в примерах из п. 6.1.3.

Доказательство теоремы полностью завершено. ☐

6.1.5. Мы скажем, что две системы координат x и y на суперобласти $\mathcal U$ *подобным образом $(a,\,b)$-полуориентированы*, если

$$\operatorname{cpr}\left(\det\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^{a}\cdot\det\left(\frac{\partial\xi}{\partial\eta}\right)^{b}\right)>0\quad\text{для любых } \{a,\,b\}\in\mathbb Z/2\times\mathbb Z/2. \tag{6.5}$$

Определение *полуориентирующего накрытия*, которое мы обозначим символом $\widetilde{\mathcal M}(a,\,b)$, полностью аналогично ориентирующему накрытию. Каждое полуориентирующее накрытие является двулистным накрытием супермногообразия $\mathcal M$ и, в свою очередь, дважды накрыто супермногообразием $\widetilde{\mathcal M}$. Все это можно изобразить следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{\mathcal M} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\widetilde{\mathcal M}(1,\,0) \arrow[dr] & \widetilde{\mathcal M}(1,\,1) \arrow[d] & \widetilde{\mathcal M}(0,\,1) \arrow[dl] \\
 & \mathcal M &
\end{tikzcd} \tag{6.6}$$

На $\widetilde{\mathcal M}(a,\,b)$ группа $\mathbb Z/2\simeq(\mathbb Z/2\oplus\mathbb Z/2)/K(a,\,b)$ действует естественным образом.

Предложение. 1) *Действие группы $\mathbb Z/2$ на компонентах связности супермногообразия $\widetilde{\mathcal M}(a,\,b)$ транзитивно, и ядро этого действия совпадает с фундаментальной группой $\pi_1(M)$ многообразия M.*

2) *Если $\mathcal M$ неориентируемо, то все его полуориентирующие накрытия связны.*

3) *Если $\mathcal M$ является $(a,\,b)$-полуориентируемым, то $\widetilde{\mathcal M}(a,\,b)$ состоит из двух компонент, в то время как другие два полуориентирующих накрытия связны и диффеоморфны друг другу.*

4) *Если $\mathcal M$ ориентируемо, то все его полуориентирующие накрытия диффеоморфны друг другу и каждое содержит две компоненты.*

Доказательство. Утверждение 1 доказывается аналогично тому, как мы доказали теорему 6.1.4.

Образ группы $\pi_1(M)$ в $\mathbb Z/2$ равен $\{0\}$ тогда и только тогда, когда $\chi(\pi_1(M))\subset K(a,\,b)$, т. е. когда $\mathcal M$ ориентируемо или $(a,\,b)$-полуориентируемо.

Если $\sigma\colon\mathcal N\to\mathcal M$ является двулистным накрытием и супермногообразие $\mathcal N$ не является связным, в то время как $\mathcal M$ связно, то $\mathcal N$ содержит две компоненты, каждая из которых диффеоморфна супермногообразию $\mathcal M$. Применяя это рассуждение, мы получаем утверждения 2–4. ☐

Назовем *$(a,\,b)$-полуориентацией* полностью ориентируемого или $(a,\,b)$-полуориентируемого (связного) супермногообразия $\mathcal M$ компоненту связности супермногообразия $\widetilde{\mathcal M}(a,\,b)$. Мы скажем, что $\mathcal M$ *допускает $(a,\,b)$-полуориентацию*, если оно либо полностью ориентируемо, либо $(a,\,b)$-полуориентируемо. Ясно, что если $\mathcal M$ допускает как $(a,\,b)$-, так и $(c,\,d)$-полуориентации и $(a,\,b)\neq(c,\,d)$, то $\chi(\pi_1(M))\subset K(a,\,b)\cap K(c,\,d)=0$ и, значит, супермногообразие $\mathcal M$ полностью ориентируемо.

6.1.6. Опишем также типы ориентации, вернувшись к языку карт и атласов. Пусть $\mathcal{U}=(U, x)$ и $\mathcal{V}=(V, y)$ — пересекающиеся карты на $\mathcal{M}$ (здесь x и y — системы координат стандартных форматов). Значением матрицы Якоби $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)$ в любой точке $m\in U\cap V$ является блочно-диагональная матрица. Пусть

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)(m)=\mathrm{diag}(S, T). \tag{6.7}$$

Если $\det S>0$, то (1, 0)-полуориентации на $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ совпадают;
если $\det T>0$, то (0, 1)-полуориентации на $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ совпадают;
если же $\det S\cdot\det T>0$, то (1, 1)-полуориентации на $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ совпадают.

Следовательно полуориентируемость супермногообразия $\mathcal{M}$ эквивалентна возможности выбрать специальный атлас $\{\mathcal{U}_\alpha=(U_\alpha, x_\alpha)\mid\alpha\in A\}$ на $\mathcal{M}$. Для любых пересекающихся карт $\mathcal{U}_\alpha$, $\mathcal{U}_\beta$ и произвольной точки $m\in U_\alpha\cap U_\beta$ должно выполняться условие

$$(\det S)^a\cdot(\det T)^b>0,\qquad \text{где } \mathrm{diag}(S, T):=\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}\right)(m). \tag{6.8}$$

Предложение. *Пусть $\mathcal{M}$ — супермногообразие размерности $n|m$.*

1) *Если $\mathcal{M}$ допускает* (1, 0)*-полуориентацию, то такую же полуориентацию допускает и любое его подсупермногообразие размерности $n|s$, т. е. четной коразмерности* 0, *причем* (1, 0)*-полуориентация на супермногообразии $\mathcal{M}$ определяет* (1, 0)*-полуориентацию на подсупермногообразии и наоборот.*

2) *Если $\mathcal{M}$ допускает* (0, 1)*-полуориентацию, то такую же полуориентацию допускают и все его подсупермногообразия размерности $r|m$, т. е. нечетной коразмерности* 0, *причем* (0, 1)*-полуориентация на $\mathcal{M}$ задает* (0, 1)*-полуориентацию на любом подсупермногообразии и наоборот.*

Следствие. (1, 0)*-полуориентация на $\mathcal{M}$ — это в точности ориентация на подстилающем многообразии в обычном смысле.*

Доказательство. Если четная (нечетная) коразмерность многообразия $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{M}$ равна нулю, то база (слой) расслоения, соответствующего супермногообразию $\mathcal{W}$, совпадает с базой (слоем) расслоения, отвечающего многообразию $\mathcal{M}$. □

6.1.7. Скажем, что супермногообразие $\mathcal{M}$ снабжено *$\mathcal{G}$-структурой*, если можно выбрать функции перехода от карты к карте так, чтобы их значения в каждой C-точке супермногообразия $\mathcal{M}$ лежали бы в C-точках супергруппы Ли $\mathcal{G}$. Возможность оснастить супермногообразие $\mathcal{M}$ какой-нибудь $\mathcal{G}$-структурой может содержать некоторую информацию об ориентируемости супермногообразия $\mathcal{M}$. Скажем, что $\mathcal{M}$ снабжено *почти Q-структурой*, если на $\mathcal{M}$ задана почти комплексная структура с нечетным оператором J, таким что $J^2=-\mathrm{id}$, или *почти Π-структурой*, если $J^2=\mathrm{id}$.

В следующем предложении использован термин «почти». Он применяется в тех случаях, когда в каждом касательном пространстве задана (невырожденная) билинейная форма. Из линейной алгебры (гл. 1) мы знаем, что такую форму можно привести к каноническому виду. Если это можно сделать не только в данной точке, но и локально или на всем многообразии, то структура называется интегрируемой, а слово «почти» отбрасывают. Критерии интегрируемости $\mathcal{G}$-структуры несложно описать в терминах когомологий (супер)алгебры Ли (супер)группы Ли $\mathcal{G}$, см. [ГроЛе], где показано, что такой подход эквивалентен принятому пока подходу, в котором используют менее удобные для вычислений и обобщений *когомологии Спенсера*.

Метрикой мы называем поле *невырожденных* симметрических билинейных форм. Таким образом, с нашей точки зрения, симплектическая форма тоже метрика.

Предложение. 1) *Если супермногообразие $\mathcal{M}$ допускает* четную почти комплексную структуру, *то оно ориентируемо.*

2) *Если $\mathcal{M}$ допускает Q-*структуру (*нечетную почти комплексную структуру*), *то оно* (1, 1)*-полуориентируемо.*

3) *Если $\mathcal{M}$ допускает* почти симплектическую структуру, *т. е.* $\mathrm{OSp}^a(m|2n)$*-структуру, в частности* $\dim M=2n|m$, *то оно* (1, 1)*-полуориентируемо.*

4) *Если $\mathcal{M}$ допускает* почти периплектическую структуру, *т. е.* $\mathrm{Pe}^a(n)$*-структуру, в частности* $\dim M=n|n$, *то оно* (1, 0)*-полуориентируемо.*

5) *Если $\mathcal{M}$ допускает* риманову структуру (= *четную метрику*) ,*т. е.* $\mathrm{OSp}(m|2n)$*-структуру, в частности* $\dim M=m|2n$, *то оно* (1, 1)*-полуориентируемо.*

6) *Если $\mathcal{M}$ допускает* нечетную метрику, *т. е.* $\mathrm{Pe}(n)$*-структуру, в частности* $\dim M=n|n$, *то оно* (0, 1)*-полуориентируемо.*

Доказательство. Каждая из упомянутых структур дает возможность выбрать специальный атлас на $\mathcal{M}$, а именно если (U, x) и (V, y) — пересекающиеся карты на $\mathcal{M}$, то значения (6.7) матриц Якоби в каждой точке $m\in U\cap V$ принадлежат некоторой группе.

Если $\mathcal{M}$ допускает четную почти комплексную структуру, то

$$\begin{gathered} n=2k,\quad m=2l,\\ S\in\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})\subseteq\mathrm{GL}(2k, \mathbb{R}),\quad T\in\mathrm{GL}(l, \mathbb{C})\subseteq\mathrm{GL}(2l, \mathbb{R}), \end{gathered} \tag{6.9}$$

так что $\det S>0$, $\det T>0$.

Если $\mathcal{M}$ допускает Q-структуру, то

$$S = T \quad \text{и} \quad \det S \cdot \det T > 0. \tag{6.10}$$

Если $\mathcal{M}$ допускает почти симплектическую структуру, то

$$n = 2k, \quad S \in \mathrm{Sp}(2k, \mathbb{R})) \quad \text{и} \quad T \in O(m, \mathbb{R}), \tag{6.11}$$

так что $\det S > 0$.

Если $\mathcal{M}$ допускает почти периплектическую структуру или нечетную риманову метрику, то

$$ST = 1 \quad \text{и} \quad \det S \cdot \det T > 0. \tag{6.12}$$

Если $\mathcal{M}$ допускает риманову структуру, то

$$m = 2l, \quad S \in O(n, \mathbb{R}) \quad \text{и} \quad T \in \mathrm{Sp}(2L, \mathbb{R})), \tag{6.13}$$

так что $\det T > 0$. □

6.1.8. Накрытия (6.6) определяют поднятия элементов из $C^\infty(\mathcal{M})$, $\mathrm{Vol}(\mathcal{M})$, $\Omega(\mathcal{M})$ и других тензорных полей[1] с $\mathcal{M}$ на $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Группа $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ действует на $C^\infty(\widetilde{\mathcal{M}})$, $\mathrm{Vol}(\widetilde{\mathcal{M}})$, $\Omega(\widetilde{\mathcal{M}})$ и других пространствах тензорных полей на $\widetilde{\mathcal{M}}$. Пусть L — одно из пространств тензорных полей, связанных с супермногообразием $\mathcal{M}$, а $\widetilde{L}$ — его поднятие на $\widetilde{\mathcal{M}}$. Для любых a, $b \in \mathbb{Z}/2$ обозначим через $L_{[a,b]}$ суперпространство, состоящее из всех тех $l \in \widetilde{L}$, которые под действием элемента $(x, y) \in \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ умножаются на $(-1)^{ax+by}$. Очевидно (а также известно из теории представлений), что

$$\widetilde{L} = L_{[0,0]} \oplus L_{[0,1]} \oplus L_{[1,1]} \oplus L_{[1,0]}, \quad \text{где } L_{[0,0]} \cong L. \tag{6.14}$$

Элементы пространства $L_{[a,b]}$ будут называться *тензорными полями* (функциями, формами и т. д.) *типа* (a, b) на $\mathcal{M}$. В терминах карт и атласов на $\mathcal{M}$ определение пространства $L_{[a,b]}$ читается следующим образом: элементы из $L_{[a,b]}$ выражаются в каждой карте с помощью элементов из L, но под действием замены координат $(u, \xi) \longrightarrow (v, \eta)$ они умножаются на

$$\operatorname{sign}\left(\operatorname{cpr}\left(\left(\det\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right)^{a}\left(\det\left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\right)\right)^{b}\right)\right). \tag{6.15}$$

Пусть $\mathcal{L}$ — пучок $\mathcal{O}$-модулей. Очевидно, что

$$\mathcal{L}_{[a,b]} = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_{[a,b]}. \tag{6.16}$$

Предложение. 1) *Если $\mathcal{M}$ ориентируемо, то все подпространства $L_{[a,b]}$* (неканонически) *изоморфны друг другу. Изоморфизмы задаются выбором ориентации на $\mathcal{M}$.*

---

[1] Определение (пространств) тензорных полей на супермногообразии см. в [GLS].

2) *Если является $\mathcal{M}$ (a, b)-полуориентируемым, то подпространства $L_{[c,d]}$ распадаются на пары* (неканонически) *изоморфных*: $L_{[c,d]} \cong L_{[c+a,b+d]}$. *Изоморфизмы задаются выбором (a, b)-полуориентации на $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Любой элемент из $L_{[a,b]}$ восстанавливается по своим ограничениям на произвольную компоненту связности супермногообразия $\mathcal{M}$, так что мы можем воспользоваться предложением из п. 6.1.5. □

6.1.9. Если $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ — открытое вложение в (полу)ориентируемое супермногообразие, то (полу)ориентация переносится с супермногообразия $\mathcal{M}$ на $\mathcal{N}$ с помощью φ. Если $\mathcal{N} = \mathcal{M}$, то для любой ориентации ε на $\mathcal{M}$ ориентация $\varphi(\varepsilon)$, перенесенная с помощью φ, отличается от ε на действие элемента группы $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$, который от ε не зависит. Назовем этот элемент из $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ *ориентацией диффеоморфизма* φ и обозначим $\operatorname{orient}(\varphi)$.

Пример. Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{R}^{n|m}$, а φ соответствует линейному отображению координатных функций с блочной суперматрицей $\operatorname{diag}(A, B)$. Тогда

$$\operatorname{orient}(\varphi) = (\operatorname{sgn}(\det A), \operatorname{sgn}(\det B)). \tag{6.17}$$

6.1.10. Пусть $\varphi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ — локально-тривиальное расслоение, причем φ является погружением. Пусть

$$\operatorname{sdim} \mathcal{L} - \operatorname{sdim} \mathcal{M} > 0|0\,[1],$$

и пусть у каждой точки $m \in \mathcal{M}$ найдется окрестность $\mathcal{U}_m$, такая что $\varphi^{-1}(\mathcal{U}_m) \simeq \mathcal{U}_m \times \mathcal{N}_m$, где $\mathcal{N}_m$ — слой над m, является супермногообразием. Мы скажем, что слой морфизма φ *ориентируем* (*полуориентируем* типа (a, b)), если существует набор ориентаций ((a, b)-полуориентаций) на $\mathcal{N}_m$ согласованный в следующем смысле.

Если $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \varnothing$, то фиксируем ориентацию (полуориентацию того же типа (a, b)) на $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ и потребуем совпадения ориентаций на суперобластях $\varphi^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha\beta})$, перенесенных с $\mathcal{U}_n \times \mathcal{N}_n$ и $\mathcal{U}_m \times \mathcal{N}_m$.

Такой набор будет называться *ориентацией слоя*.

Предложение. *Пусть $\varphi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ — локально тривиальное расслоение со слоем $\mathcal{N}$.*

1) *Если два объекта из тройки* $(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N})$ *ориентируемы* (полуориентируемы того же типа), *то третий тоже ориентируем* (*полуориентируем того же типа*) *и его ориентация* (полуориентация) *однозначно устанавливается по ориентациям* (*полуориентациям*) *двух других объектов.*

---

[1] В дальнейшем запись $a|b \geqslant c|d$ означает, что $a \geqslant c$ и $b \geqslant d$.

2) *Если два объекта из тройки* ($\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$) *полуориентируемы разных типов, то третий объект может быть как полуориентируемым третьего типа, так и неориентируемым.*

Если один объект из тройки ($\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$) *полностью ориентируем, то ориентируемости двух других совпадают друг с другом.*

3) *Если* $\mathcal{L} = \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, *то* (a, b)*-полуориентируемость супермногообразия* $\mathcal{L}$ *эквивалентна* (a, b)*-полуориентируемости как* $\mathcal{M}$, *так и* $\mathcal{N}$.

Доказательство. 1) Покроем супермногообразие $\mathcal{L}$ картами вида $\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{V}_\beta$, где $\mathcal{M} = \cup\,\mathcal{U}_\alpha$, а $\varphi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}}$ — проекция на первый сомножитель. Из (a, b)-полуориентаций $\varepsilon_{\mathcal{U}}$, $\varepsilon_{\mathcal{V}}$, $\varepsilon_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}}$ на $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ соответственно любые две определяют третью из того условия, что ориентация $\varepsilon_{\mathcal{U}} \times \varepsilon_{\mathcal{V}}$ на $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ совпадает с $\varepsilon_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}}$.

Полуориентируемость супермногообразия $\mathcal{L}$ — это возможность выбрать согласованные полуориентации на всех произведениях $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$, полуориентируемость слоя — это то же самое, что полуориентируемость на $\mathcal{V}$, а полуориентируемость базы — это то же самое, что полуориентируемость на всех супермногообразиях $\mathcal{U}$.

2) Пусть полуориентации базы, или слоя, или тотального пространства фиксированы. Тогда из (a, b)-полуориентаций $\varepsilon_{\mathcal{U}}$, $\varepsilon_{\mathcal{V}}$ и $\varepsilon_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}}$ одна фиксирована в каждой карте $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$, а две другие определяют друг друга.

3) Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ полуориентируемы, то $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ можно покрыть картами $\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{V}_\beta$, где $\mathcal{U}_\alpha$ — карты на $\mathcal{M}$, а $\mathcal{V}_\beta$ — карты на $\mathcal{N}$, такие что все карты $\mathcal{U}_\alpha$ одинаково полуориентированы и все карты $\mathcal{V}_\beta$ одинаково полуориентированы. Тогда все карты $\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{V}_\beta$ тоже одинаково полуориентированы.

Если $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ полуориентируемо, то и все произведения $\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{N}$, где $\mathcal{U}_\alpha$ — карты на $\mathcal{M}$, полуориентируемы, следовательно, и $\mathcal{N}$, и $\mathcal{M}$ полуориентируемы. □

6.1.11. Покажем, что группу $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ можно рассмотреть как фактор группы всех диффеоморфизмов суперобласти по модулю связной компоненты единицы. Для этого определим изотопию двух вложений супермногообразий (супермногообразий с границей и т. д.) аналогично тому, как это сделано для многообразий, см. [Хирш].

Морфизмы суперобластей $\psi_i\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$, $i = 1, 2$, назовем *изотопными*, если существует морфизм $\psi'\colon \mathcal{N} \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{M}$, такой что его ограничения на крайней точке отрезка совпадают с ψ_1 и ψ_2 соответственно.

Вложения $\varphi_i\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ назовем *изотопными вложениями*, если существует вложение $\tilde{\varphi}\colon \mathcal{N} \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{M} \times [0, 1]$, такое что

$$pr_{\mathcal{M}} \circ \psi\colon \widetilde{\mathcal{N}} \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{M}$$

— изотопия морфизма φ_1 в φ_2.

Символом $\mathcal{D}^{r|s}$ обозначим *супердиск*, т. е. $r|s$-мерное подсупермногообразие в $\mathcal{R}^{r|s}$, базой которого является r-мерный диск D^r.

Предложение. *Пусть* $r|s \leqslant n|m$, φ_1, $\varphi_2\colon \mathcal{D}^{r|s} \longrightarrow \mathcal{R}^{n|m}$ *— два вложения, а ориентация суперпространства* $\mathcal{R}^{n|m}$ *фиксирована.*

1) *Если* $r < n$ *и* $s < m$, *то* φ_1 *и* φ_2 *изотопны.*

2) *Если* $r = n$ *и* $s = m$, *то* φ_1 *и* φ_2 *изотопны тогда и только тогда, когда ориентации супердисков* $\mathcal{D}^{r|s}$, *перенесенные с* $\mathcal{R}^{n|m}$ *с помощью* φ_1 *и* φ_2, *совпадают.*

3) *Если* $r = n$ *и* $s < m$, *то* φ_1 *и* φ_2 *изотопны тогда и только тогда, когда* $(1, 0)$*-полуориентации на* $\mathcal{D}^{r|s}$, *перенесенные с* $\mathcal{R}^{n|m}$ *с помощью* φ_1 *и* φ_2, *совпадают.*

4) *Если* $r < n$ *и* $s = m$, *то* φ_1 *и* φ_2 *изотопны тогда и только тогда, когда* $(0, 1)$*-полуориентации на* $\mathcal{D}^{r|s}$, *перенесенные с* $\mathcal{R}^{n|m}$ *с помощью* φ_1 *и* φ_2, *совпадают.*

Здесь любое из чисел n, m, r, s может обратиться в нуль, поэтому мы напоминаем наше соглашение о детерминантах матриц размера 0×0.

Доказательство аналогично доказательству из [Хирш]. Вложение, сохраняющее начало координат, изотопно линейному (а именно линейному вложению, заданному матрицей частных производных морфизма φ в начале координат). А дальше все очевидно. □

6.1.12. Частные случаи: $n \cdot m = 0$. Если $m = 0$, то супермногообразие $\mathcal{M}^{n|0} = M$ следовало бы называть $(0, 1)$-полуориентируемым, имея в виду то, что $\widetilde{\mathcal{M}}$ содержит две компоненты связности и соответствующая $(0, 1)$-полуориентация единственна. Поэтому изоморфизмы, связанные с этой полуориентацией, превращаются в тождества, а число компонент связности уменьшается в два раза.

Если $n = 0$, то $\mathcal{M} = \mathcal{R}^{0|m}$, а это супермногообразие, конечно же, ориентируемо.

Замечание. Анализ понятия ориентируемости развит в этом параграфе до той степени, которая нужна в теории интегрирования. В частности, мы рассматриваем пространства $L_{[a,b]}$, потому что вопросы интегрирования на супермногообразии естественным образом приводят к отображениям, которые меняют тип ориентируемости тензоров (точнее, тензорных полей).

§ 6.2. Березинское интегрирование форм объема с компактным носителем

6.2.1. Модуль Vol($\mathcal{M}$) и производная Ли.

6.2.1a. Каждой системе координат x на суперобласти $\mathcal{U}^{n|m}$ сопоставим символ v_x, и *формой объема* на $\mathcal{U}$ назовем класс эквивалентности пар

$(f,\, v_x)$, где $f \in C^\infty(\mathcal{U})$, по модулю соотношений

$$(f,\, v_y) \sim \Big(f \cdot \mathrm{Ber}\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big),\, v_x\Big). \tag{6.18}$$

Пространство форм объема на $\mathcal{U}$ обозначим символом $\mathrm{Vol}(\mathcal{U})$.

Четность образующей $(1,\, v_x)$ модуля $\mathrm{Vol}(\mathcal{U})$ можно определить любым из следующих двух естественных способов:

а) положить $p(1,\, v_x) = m \pmod 2$, тогда интегрирование форм объема является четным отображением;

б) положить $p(1,\, v_x) = n - m \pmod 2$, тогда интегрирование имеет четность, сравнимую с $n \pmod 2$, и формы объема на обычных n-мерных многообразиях можно естественным образом отождествить с дифференциальными формами максимальной степени.

Таким образом,

> *каждый из вышеуказанных способов* а) *и* б) *задать четность на пространстве форм объема не сохраняет четность при взаимно однозначном соответствии* $f \mapsto (f,\, v_x)$ *и, следовательно не может быть изоморфизмом двухсторонних* $C^\infty(\mathcal{U})$*-модулей. Поэтому* $\mathrm{Vol}(\mathcal{U})$ *может наследовать у* $C^\infty(\mathcal{U})$ *только одну из структур* $C^\infty(\mathcal{U})$*-модуля: левую или правую.* (6.19)

Всюду ниже мы сохраняем левое действие.

Итак, обозначив пару $(1,\, v_x)$ символом v_x, мы полагаем

$$(f,\, v_x) = f v_x, \tag{6.20}$$

и, следовательно,

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{U}) \cong C^\infty(\mathcal{U})\Pi^m \quad \text{как } C^\infty(\mathcal{U})\text{-модули}. \tag{6.21}$$

Другой выбор (так же как любой другой произвол подобного типа) повлияет только на знаки в некоторых из нижеследующих определений и утверждений.

Пусть $\mathcal{S}$ — супермногообразие параметров. Определение $\mathcal{S}$*-семейства форм объема* на $\mathcal{U}$, зависящее от параметров из $\mathcal{S}$, получается из вышеприведенного определения форм объема заменой слов «система координат на $\mathcal{U}$» словами «$\mathcal{S}$-семейство систем координат на $\mathcal{U}$», а также выражения «$f \in C^\infty(\mathcal{U})$» на «$f \in C^\infty(\mathcal{U} \times \mathcal{S})$». В результате вместо $C^\infty(\mathcal{U})$-модуля $\mathrm{Vol}(\mathcal{U})$ мы получаем $C^\infty(\mathcal{U} \times \mathcal{S})$-модуль $\mathrm{Vol}(\mathcal{U};\, \mathcal{S})$. Очевидно, что

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{U};\, \mathcal{S}) = C^\infty(\mathcal{U} \times \mathcal{S}) \otimes_{C^\infty(\mathcal{U})} \mathrm{Vol}(\mathcal{U}).$$

6.2.1б. Пусть $\mathcal{V}$ и $\mathcal{U}$ — суперобласти, а $i\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ — открытое вложение. Тогда $i^*(x)$ является системой координат на $\mathcal{V}$ для любой системы координат x на $\mathcal{U}$. Полагая $i^*(f v_x) := i^*(f) v_{i^*(x)}$, мы получаем четное отображение $i^*\colon\ \mathrm{Vol}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathrm{Vol}(\mathcal{V})$.

Лемма. *Отображение* i^* *не зависит от системы координат* x, *и* $i^*(f\rho) = i^*(f) i^*(\rho)$ *для любых* $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ *и* $\rho \in \mathrm{Vol}(\mathcal{U})$.

Доказательство. Для любой другой системы координат y на $\mathcal{U}$ имеем $i^*\Big(\dfrac{\partial y}{\partial x}\Big) = \dfrac{\partial(i^* y)}{\partial(i^* x)}$. □

Пусть теперь $\mathcal{M}$ — супермногообразие. Склеивая $C^\infty(\mathcal{U}_\alpha)$-модули $\mathrm{Vol}(\mathcal{U}_\alpha)$, где $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ — база открытых областей для $\mathcal{M}$, мы определяем пучок модулей $\mathcal{V}ol_{\mathcal{M}}$ над структурным пучком $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$, и глобальные сечения пучка $\mathcal{V}ol_{\mathcal{M}}$ составляют $C^\infty(\mathcal{M})$-модуль $\mathrm{Vol}(\mathcal{M})$.

Для супермногообразия параметров $\mathcal{S}$ пучок $\mathcal{O}_{(\mathcal{M}\times\mathcal{S})}$-модулей $\mathcal{V}ol_{(\mathcal{M},\mathcal{S})}$ на $M \times S$ и $C^\infty(\mathcal{M} \times \mathcal{S})$-модуль $\mathrm{Vol}(\mathcal{M},\, \mathcal{S})$ определяются аналогично.

Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — супермногообразия, а $i\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ — открытое вложение, то определено отображение ограничения $i^*\colon\ \mathrm{Vol}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Vol}(\mathcal{N})$, склеенное из соответствующих отображений в картах.

Предложение. *Отображение ограничения* i^* *определено корректно, и* $i^*(f\rho) = i^*(f) i^*(\rho)$ *для любых* $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, $\rho \in \mathrm{Vol}(\mathcal{M})$.

Упражнение. Докажите как это предложение, так и его обобщение на семейства форм и открытых отображений.

6.2.1в. Пусть $\mathcal{U}$ — суперобласть, а $D \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U})$ — векторное поле на $\mathcal{U}$. *Дивергенцией* поля D в координатах x называется функция $\mathrm{div}_x D$, заданная формулой

$$\mathrm{div}_x D = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n+m} (-1)^{p(x_i)(p(D)+p(x_i))} \frac{\partial(D(x_i))}{\partial x_i}. \tag{6.22}$$

Лемма. *Отображение* $\mathrm{div}_x\colon\ \mathrm{Vect}(\mathcal{U}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{U})$ *является четным,* $\mathbb{R}$*-линейным и для любых* $D \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U})$, $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ *удовлетворяет условию*

$$\mathrm{div}_x fD = f\, \mathrm{div}_x D + (-1)^{p(f)p(D)} D(f). \tag{6.23}$$

Предложение. *В координатах* x *для любых* $f \in C^\infty(\mathcal{U})$, $D \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U})$ *и* $\rho \in \mathrm{Vol}(\mathcal{U})$ *выполняются соотношения*

1) $L_D(f v_x) = \big(D(f) + (-1)^{p(f)p(D)} f\, \mathrm{div}_x D\big)\, v_x$;
2) $L_{gD}(\rho) = g L_D(\rho) + (-1)^{p(g)p(D)} D(g)\rho$;
3) $L_D(g\rho) = D(g)\rho + (-1)^{p(g)p(D)} g L_D \rho$;
4) $L_{\partial_i}(v_x) = 0$.

Следствие. *Бездивергентные векторные поля, т. е. поля* D, *такие что* $\mathrm{div}_x D = 0$, *— это в точности те поля, которые сохраняют элемент объема* v_x.

Доказательство. Достаточно вычислить производную Ли элемента объема v_x. Пусть $D \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U})$, а t — дополнительная переменная, такая что $p(t) = p(D)$. Тогда отвечающее полю D инфинитезимальное семейство диффеоморфизмов φ_t суперобласти $\mathcal{U}$ имеет вид

$$y_i(t) := \varphi_t^*(x_i) = x_i + tD(x_i) \pmod{t^2}. \tag{6.24}$$

Для любого дифференцирования X суперкоммутативной супералгебры A и $M \in \mathrm{GL}(n|m;\, A)$ верна, как мы помним, формула

$$\mathrm{Ber}(M)^{-1} \cdot X(\mathrm{Ber}(M)) = \mathrm{str}\left(\left(\mathrm{scalar}_{n|m}(X)M\right) M^{-1}\right). \tag{6.25}$$

Применяя эту формулу к $M = \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)$ и $X = \dfrac{\partial}{\partial t}$, получаем, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{Ber}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right)\Big|_{t=0} &= \sum (-1)^{p(x_i)(p(D)+1)} \left((-1)^{p(x_i)p(D)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\right)\right)\Big|_{t=0} = \\ &= \sum (-1)^{p(x_i)(p(D)+1)} \frac{\partial D(x_i)}{\partial x_i} = \mathrm{div}_x\, D.\end{aligned} \tag{6.26}$$

Остальное очевидно. ☐

6.2.2. Интеграл Березина от форм с компактным носителем.

6.2.2a. Пусть $\mathcal{U}$ — суперобласть, $x = (u,\, \xi)$ — система координат на $\mathcal{U}$, а $\rho = fv_x \in \mathrm{Vol}_c(\mathcal{U})$ — форма объема с компактным носителем на U. Определим интеграл от формы ρ по суперобласти $\mathcal{U}$ в координатах x (это и есть *интеграл Березина*) формулой

$$\int\limits_{\mathcal{U},x} fv_x = (-1)^{m(m-1)/2 + p(f)p(v_x)} \int\limits_U f_{1\ldots1}(u)du, \tag{6.27}$$

где справа берется риманов интеграл от функции $f_{1\ldots1}(u)$, т. е. от коэффициента старшей степени в выражении $f = \sum f_\alpha \xi^\alpha$.

Формулу (6.27) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\mathcal{U},x} v_x f = \int\limits_U \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \ldots \frac{\partial}{\partial \xi_m} f\right) du = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \ldots \frac{\partial}{\partial \xi_m} \int\limits_U f du. \tag{6.28}$$

Очевидно, что интеграл $\int\limits_{\mathcal{U},x}$ является четным $\mathbb{R}$-линейным отображением из пространства форм объема в $\mathbb{R}$.

Теорема. *Пусть* $\rho \in \mathrm{Vol}_c(\mathcal{U})$, *а* $x = (u,\, \xi)$ *и* $y = (w,\, \eta)$ — *две системы координат на* $\mathcal{U}$. *Пусть*

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & \textit{если } x \textit{ и } y \textit{ задают одну и ту же} \\ & (1,\, 0)\textit{-полуориентацию на } \mathcal{U}; \\ 1 & \textit{в противном случае.} \end{cases} \tag{6.29}$$

Другими словами, $(-1)^\varepsilon = \mathrm{sign}\left(\left(\det \dfrac{\partial u}{\partial w}\right)(m)\right)$ *для любой точки* $m \in U$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathcal{U},x} \rho = (-1)^\varepsilon \int\limits_{\mathcal{U},y} \rho. \tag{6.30}$$

Доказательство основано на простом, но очень полезном утверждении, которое немедленно следует из теоремы о координатной записи морфизмов.

Лемма. *Любая замена координат* ψ *может быть представлена в виде произведения конечного числа* элементарных *преобразований* $\psi = \psi_1^d \cdot \ldots \cdot \psi_n^d \psi_1^c \cdot \ldots \cdot \psi_m^c \psi^b \psi^a$, *где*

а) ψ^a — *замена координат на подстилающей области, т. е.*

$$v_j = v_j(u_1,\, \ldots,\, u_n), \quad \textit{где } j \in \{1, \ldots n\}; \tag{6.31}$$

б) ψ^b — *линейная замена нечетных координат*

$$\eta_i = \sum_i a_j^i(u)\xi_i, \quad \textit{где } i,\, j \in \{1, \ldots m\}; \tag{6.32}$$

в) ψ_j^c — *(нелинейная) замена одной нечетной координаты*

$$\eta_j = k(u,\, \xi)\xi_j + \varkappa(u,\, \xi), \quad \textit{где } \frac{\partial}{\partial \xi_j}k = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\varkappa = 0; \tag{6.33}$$

г) ψ_i^d — *«сдвиг одной четной координаты в нечетном направлении»*

$$v_i = u_i + \Delta(u,\, \xi), \tag{6.34}$$

где $\Delta(u,\, \xi)$ *принадлежит идеалу* $\mathcal{I}$, *порожденному нечетными переменными.*

Во всех перечисленных случаях мы предполагаем, что неперечисленные координаты сохраняются.

Теперь достаточно доказывать теорему для элементарных замен координат. Для замен типов а) и б) утверждение очевидно. Под действием замен типа в) мы можем предположить, что координатная система $x' = (u_1,\, \ldots,\, u_n,\, \eta_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_m)$ переходит в $x = (u_1,\, \ldots,\, u_n,\, \xi_1,\, \ldots,\, \xi_m)$. Если $\rho \in \mathrm{Vol}_c(\mathcal{U})$ имеет в координатах x' вид $(g(u,\, \xi) + \eta_1 f(u,\, \xi))v_{x'}$, то

$$\rho = ((g + \varkappa f)k^{-1} + \xi_1 f(u,\, \xi))v_x. \tag{6.35}$$

Тогда $\dfrac{\partial g}{\partial \eta_1} = 0$, а следовательно, $\int\limits_{\mathcal{U},x'} gv_x = 0$. Аналогично

$$\int\limits_{\mathcal{U},x} (g + \varkappa f k^{-1})v_x = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{\mathcal{U},x'} \rho = \int\limits_{\mathcal{U},x} \rho.$$

Под действием замен типа г) мы можем предположить, что $x = (u,\, \xi)$ и

$$x' = (v_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_n,\, \xi_1,\, \ldots,\, \xi_m), \qquad \text{где } v_1 = u_1 + \Delta. \tag{6.36}$$

Если $\rho = f(x')v_{x'}$, то $\rho = f(u_1 + \Delta,\, u_2,\, \ldots,\, \xi_m)\left(1 + \dfrac{\partial \Delta}{\partial u_1}\right)v_x$. Поскольку

$$f(u_1 + \Delta,\, u_2,\, \ldots,\, \xi_m) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)^i f(u,\, \xi)\frac{\Delta^i}{i!}, \tag{6.37}$$

где не больше чем m первых членов отлично от нуля, мы получаем

$$\begin{aligned} f(u_1 + \Delta,\, u_2,\, \ldots,\, \xi_m)\left(1 + \frac{\partial \Delta}{\partial u_1}\right) &= \\ = f(u,\, \xi) + \frac{\partial}{\partial u_1}&\left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)^i f(u,\, \xi)\frac{\Delta^{i+1}}{(i+1)!}\right), \end{aligned} \tag{6.38}$$

откуда следует, что $\int\limits_{\mathcal{U},x} \rho = \int\limits_{\mathcal{U},x'} \rho$. □

Замечание. Из этой теоремы ясно, что практически всегда мы интегрируем отнюдь не формы объема, т. е. элементы $\mathrm{Vol}_c(\mathcal{U}) = \mathrm{Vol}_c(\mathcal{U})_{[0,0]}$, а элементы модуля $\mathrm{Vol}_c(\mathcal{U})_{[1,0]}$, поскольку интеграл форм $\mathrm{Vol}_c(\mathcal{U})$ меняет знак относительно замены $(1,\, 0)$-полуориентации. Таким образом, чтобы проинтегрировать форму из $\mathrm{Vol}_c(\mathcal{U})_{[a,b]}$, необходимо выбрать $(a+1,\, b)$-полуориентацию на суперобласти $\mathcal{U}$, для того чтобы превратить $\mathrm{Vol}_c(\mathcal{U})_{[a,b]}$ в $\mathrm{Vol}_c(\mathcal{U})_{[1,0]}$. Даже в чисто четном случае мы тоже всегда интегрируем *абсолютные формы*, т. е. элементы пространства $\mathrm{Vol}_c(\mathcal{U})_{[1,0]}$, поскольку в формуле замены переменных в интеграле Римана по $\mathbb{R}^n$ участвует не $\det\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)$, а $\left|\det\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)\right|$.

6.2.2б. Теперь пусть $\mathcal{M}$ — супермногообразие с данной $(1,\, 0)$-полуориентацией, $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ — атлас на $\mathcal{M}$, а f_α — разбиение единицы, вписанное в покрытие $\{\mathcal{U}_\alpha\}$. Для любого $\rho \in \mathrm{Vol}_c(\mathcal{M})$ положим

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \rho := \sum_{\alpha} \int\limits_{\mathcal{U}_\alpha} f_\alpha \rho, \tag{6.39}$$

где полуориентации карт $\mathcal{U}_\alpha$ определены полуориентацией супермногообразия $\mathcal{M}$ (в сумме по α только конечное число слагаемых отлично от нуля).

Теорема. 1) *Интеграл от формы из* $\mathrm{Vol}_c(\mathcal{M})$ *не зависит от выбора атласа и вписанного в него разбиения единицы.*

2) *Пусть* $\psi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — *диффеоморфизм. Тогда*

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \rho = \varepsilon(\psi) \int\limits_{\mathcal{M}} \varphi^*(\rho) \tag{6.40}$$

для любой формы $\rho \in \mathrm{Vol}_c(\mathcal{M})$, *где*

$$\varepsilon(\psi) = \begin{cases} 1, & \text{*если* } \psi \text{ *сохраняет* } (1,\, 0)\text{-*полуориентацию*;} \\ -1 & \text{*в противном случае.*} \end{cases}$$

Доказательство. Достаточно размельчить покрытие и воспользоваться теоремой из п. 6.2.2а, аддитивностью интеграла и компактностью носителя $\operatorname{supp}\, \rho$. □

Замечание. Мы фактически определили интеграл от форм из $\mathrm{Vol}(\mathcal{M})_{[1,0]}$ по любому супермногообразию, так что нужды в $(1,\, 0)$-полуориентируемости нет. В дальнейшем мы по традиции имеем дело исключительно с формами объема типа $(0,\, 0)$ и должны предполагать, что все супермногообразия $(1,\, 0)$-полуориентируемы. Хотя с тем же успехом мы могли бы иметь дело с $(1,\, 0)$-формами и не требовать никакой полуориентируемости супермногообразий.

6.2.3. Как интегрировать семейство форм. Пусть снова $\mathcal{S}$ — супермногообразие параметров. Семейство форм объема с компактным носителем на $\mathcal{M}$ не обязано иметь компактный носитель на $\mathcal{S}$, так что мы полагаем

$$\mathrm{Vol}_c(\mathcal{M};\, \mathcal{S}) = C^\infty(\mathcal{M} \times \mathcal{S}) \otimes_{C^\infty(\mathcal{M})} \mathrm{Vol}_c(\mathcal{M}). \tag{6.41}$$

На случай семейств все определения и утверждения п. 6.2.2 обобщаются заменой слов «система координат» на «$\mathcal{S}$-семейство систем координат», за исключением леммы из п. 6.2.2а, где нужно сделать очередные изменения.

Предложение. *Отображение* $\int\limits_{\mathcal{M}}\colon\ \mathrm{Vol}_c(\mathcal{M};\, \mathcal{S}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{S})$ *является морфизмом (двусторонних)* $C^\infty(\mathcal{S})$-*модулей.*

Теорема. *Пусть* $\mathcal{M}$ *допускает* $(1,\, 0)$-*полуориентацию, а* ψ *есть* $\mathcal{S}$-*семейство диффеоморфизмов супермногообразия* $\mathcal{M}$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \rho = \varepsilon(\psi) \int\limits_{\mathcal{M}} \psi^*(\rho) \quad \text{*для любых форм* } \rho \in \mathrm{Vol}_c(\mathcal{M};\, \mathcal{S}), \tag{6.42}$$

где

$$\varepsilon(\psi) = \begin{cases} 1, & \text{*если* } \psi \text{ *сохраняет* } (1,\, 0)\text{-*полуориентацию*;} \\ -1 & \text{*в противном случае.*} \end{cases}$$

Следствие. *Пусть* D *есть* $\mathcal{S}$-*семейство векторных полей на* $\mathcal{M}$ *и* $\rho \in \mathrm{Vol}_c(\mathcal{M};\, \mathcal{S})$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathcal{M}} L_D \rho = 0. \tag{6.43}$$

В частности, это верно для $\rho \in \mathrm{Vol}_c(\mathcal{M})$.

Важное замечание. Пусть $\mathcal{U}^{n|m}$ — суперобласть, x — система координат на $\mathcal{U}$. Согласно предложению из п. 6.2.1в имеем $L_{\partial_i}(fv_x) = \partial_i(f)v_x$. Легко показать, что любая форма ρ, такая что $\int\limits_{\mathcal{U}} \rho = 0$ может быть представлена в виде суммы конечного числа (не большего чем $n+m$) слагаемых вида $L_{\partial_i}\rho_i$. Это означает, что подпространство в $\mathrm{Vol}_c(\mathcal{U})$, порожденное формами вида $L_{D_i}\rho_i$ имеет коразмерность $1|0$. Поскольку любое $\mathbb{R}$-линейное отображение из $\mathrm{Vol}_c(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$, инвариантное относительно любого семейства диффеоморфизмов, сохраняющих ориентации, должно иметь в ядре формы вида $L_D\rho$, интеграл Березина однозначно определен на $\mathrm{Vol}_c(\mathcal{U})$ с точностью до числового множителя только в силу своей инвариантности.

6.2.4. Теорема Фубини. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — супермногообразия. Имеется канонический изоморфизм

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{M}\times\mathcal{N}) \cong \mathrm{Vol}(\mathcal{M}) \otimes_{C^\infty(\mathcal{M})} C^\infty(\mathcal{M}\times\mathcal{N}) \otimes_{C^\infty(\mathcal{N})} \mathrm{Vol}(\mathcal{N}), \tag{6.44}$$

откуда следует, что

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{M}) \otimes_{C^\infty(\mathcal{M})} \mathrm{Vol}(\mathcal{N};\, \mathcal{M}) \cong \mathrm{Vol}(\mathcal{M}\times\mathcal{N}) \cong \mathrm{Vol}(\mathcal{M};\, \mathcal{N}) \otimes_{C^\infty(\mathcal{N})} \mathrm{Vol}(\mathcal{N}). \tag{6.45}$$

Изоморфизм (6.44) строится следующим образом. Пусть $(\mathcal{U},\, x)$ и $(\mathcal{V},\, y)$ — карты в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответственно, а $x=(u,\, \xi)$, $y=(w,\, \eta)$ и $z=(u,\, w,\, \xi,\, \eta)$ — системы координат на $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{U}\times\mathcal{V}$ соответственно. Определим отображение

$$\begin{gathered}\mathrm{Vol}(\mathcal{U}) \otimes_{C^\infty(\mathcal{U})} C^\infty(\mathcal{U}\times\mathcal{V}) \otimes_{C^\infty(\mathcal{V})} \mathrm{Vol}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathrm{Vol}(\mathcal{U}\times\mathcal{V}),\\ v_x\otimes f\otimes v_y \longmapsto fv_z(-1)^{p(v_x)p(f)} = v_zf(-1)^{p(v_y)p(f)}.\end{gathered} \tag{6.46}$$

Итак, мы определили изоморфизм линейных пространств, согласованный со структурами левых $C^\infty(\mathcal{U})$-модулей и правых $C^\infty(\mathcal{V})$-модулей. Он инвариантен относительно замен переменных как на $\mathcal{U}$, так и на $\mathcal{V}$, поэтому такие локальные изоморфизмы можно склеить в желаемый изоморфизм. Теперь мы можем сформулировать аналог теоремы Фубини.

Предложение (теорема Фубини). *Пусть* $\rho\in\mathrm{Vol}_c(\mathcal{M}\times\mathcal{N})$, *где* $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{n|m}$ *и* $\mathcal{N}=\mathcal{N}^{r|s}$ — *супермногообразия. Тогда*

$$\int\limits_{\mathcal{M}}\Big(\int\limits_{\mathcal{N}}\rho\Big) = \int\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{N}}\rho = (-1)^{nr}\int\limits_{\mathcal{N}}\Big(\int\limits_{\mathcal{M}}\rho\Big), \tag{6.47}$$

где справа ρ *трактуется как элемент из* $\mathrm{Vol}(\mathcal{M}) \otimes_{C^\infty(\mathcal{M})} \mathrm{Vol}(\mathcal{N};\, \mathcal{M})$, *а слева — как элемент из* $\mathrm{Vol}(\mathcal{M};\, \mathcal{N}) \otimes_{C^\infty(\mathcal{N})} \mathrm{Vol}(\mathcal{N})$.

Всякая $(1,\, 0)$-*полуориентация на* $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ *определяется* $(1,\, 0)$-*полуориентациями на* $\mathcal{M}$ *и* $\mathcal{N}$.

Доказательство. Пусть $(\mathcal{U},\, x)$ и $(\mathcal{V},\, y)$ — карты на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответственно, $x=(u,\, \xi)$, $y=(w,\, \eta)$ и $\operatorname{supp}\rho\subseteq\mathcal{U}\times\mathcal{V}$. Тогда элементу

$$\rho = v_{(u,\xi)}\otimes v_{(w,\eta)}f(u,\, w,\, \xi,\, \eta)\in\mathrm{Vol}(\mathcal{U})\otimes_{C^\infty(\mathcal{U})}\mathrm{Vol}(\mathcal{V};\, \mathcal{U}) \tag{6.48}$$

отвечает форма объема

$$\rho = v_{(u,w,\xi,\eta)}f(u,\, w,\, \xi,\, \eta)\in\mathrm{Vol}(\mathcal{M}\times\mathcal{N}). \tag{6.49}$$

Используя уравнения (6.44) из п. 6.2.2а, мы получаем, что

$$\int\limits_{\mathcal{V},y} v_yf = \int\limits_{V}\Big(\frac{\partial}{\partial\eta_1}\ldots\frac{\partial}{\partial\eta_s}f\Big)dw \tag{6.50}$$

и

$$\int\limits_{\mathcal{U},x} v_x \int\limits_{\mathcal{V},y} v_yf = \int\limits_{U}\bigg(\int\limits_{V}\Big(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\ldots\frac{\partial}{\partial\xi_m}\frac{\partial}{\partial\eta_1}\ldots\frac{\partial}{\partial\eta_s}f\Big)dw\bigg)dv, \tag{6.51}$$

в то время как

$$\int\limits_{\mathcal{U}\times\mathcal{V},z} v_zf = \int\limits_{U\times V}\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\ldots\frac{\partial}{\partial\xi_m}\frac{\partial}{\partial\eta_1}\ldots\frac{\partial}{\partial\eta_s}f\Big)dw\Big)dv. \tag{6.52}$$

Остальное предоставляется читателю. □

Замечание. Диффеоморфизм $\psi\colon \mathcal{M}\times\mathcal{N} = \mathcal{N}\times\mathcal{M}$ определяет изоморфизм

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{M}\times\mathcal{N})\simeq\mathrm{Vol}(\mathcal{N}\times\mathcal{M}). \tag{6.53}$$

Если $(\mathcal{U},\, x)$ и $(\mathcal{V},\, y)$ — карты на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответственно, то очевидно, что $(1,\, 0)$-ориентация на $\mathcal{M}\times\mathcal{N}=\mathcal{N}\times\mathcal{M}$ умножается под действием ψ на $(-1)^{nr}$.

§ 6.3. Интегрирование по компактам. Цепи

6.3.1. Продолжения интеграла Березина. Пример Рудакова. Как и в «чисто четном случае», т. е. при интегрировании по многообразиям, необходимо уметь интегрировать формы из $\mathrm{Vol}(\mathcal{M})$ по любому компакту. Для начала пусть $\mathcal{M}$ — это суперобласть $\mathcal{U}$.

Продолжением интеграла Березина, связанным с системой координат $x=(u,\, \xi)$ на $\mathcal{U}$, назовем отображение $\int\limits_{c,x}\colon\ \mathrm{Vol}(\mathcal{U})\longrightarrow\mathbb{R}$, заданное аналогично п. 6.2.2 формулой

$$\int\limits_{c,x} v_xf = \int\limits_{c}\Big(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\ldots\frac{\partial}{\partial\xi_m}\Big)fdu_1\ldots du_n \tag{6.54}$$

для любого компакта $c\subseteq U$.

Продолжение интеграла Березина существенно зависит от координатной системы, как показывает следующий простой пример: пусть $\mathcal{U}=\mathcal{R}^{1|2}$,

$c = [0, 1]$, и пусть есть две координатные системы $x = (u, \xi_1, \xi_2)$ и $y = (w, \eta_1, \eta_2)$, где

$$w = u + \xi_1\xi_2, \qquad \eta_1 = \xi_1, \qquad \eta_2 = \xi_2. \tag{6.55}$$

Если $\rho = v_y f(w)$, то $\dfrac{\partial f}{\partial \eta_1} = \dfrac{\partial f}{\partial \eta_2} = 0$ и

$$\int\limits_{c,y} \rho = 0, \tag{6.56}$$

в то время как

$$\int\limits_{c,x} \rho = \int\limits_{c,x} v_x(f(u) + \xi_1\xi_2 f'(u)) = -f(1) + f(0). \tag{6.57}$$

Это и есть прославленный *пример Рудакова*. Как одно из среднего размера несчастий на пути развития теория супермногообразий, оно вызвало к жизни в 1980-х гг. некоторое количество статей, содержащих попытки преодолеть трудность, которую этот пример описывает. Этих статей могло бы быть и поменьше, если бы рецепт, известный И. Н. Бернштейну и Д. А. Лейтесу в 1975 г. и опубликованный, например, в работе [BL1] (см. также [BL2]), был бы прочитан авторами этих статей. Мне думается, что этот рецепт является лучшим способом решения проблемы (см. также замечания в § 6.7); в частности, он ведет к наиболее общей форме теоремы Стокса. Я надеюсь, что удобство подхода Бернштейна—Лейтеса и его естественный характер будет ясен из нижеследующего изложения.

Пример Рудакова означает, что *для того чтобы корректно определить интеграл любой формы объема, необходимо к паре* (ρ, c) *добавить некоторую информацию, которая обеспечивает единственность интеграла. Ясно также, что все проблемы возникают на границе области интегрирования.* Давайте сначала рассмотрим модельный пример.

Зафиксируем систему координат $x = (u, \xi)$ на $\mathcal{R}^{n|m}$ и обозначим символом $\mathbb{R}^n_-$ подмножество $\mathbb{R}^n$, заданное условием $u_1 \leqslant 0$, а символом $V_c^-(\mathcal{R}^{n|m})$ — подпространство в $\mathrm{Vol}(\mathcal{R}^{n|m})$, состоящее из ρ, таких что $\operatorname{supp}\rho \cap \mathbb{R}^n_-$ — компакт. Любой координатной системе $y = (w, \eta)$ на $\mathcal{R}^{n|m}$ сопоставим отображение

$$\int\limits_{y} \colon V_c^-(\mathcal{R}^{n|m}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

по стандартной формуле

$$\int\limits_{y} v_y f = \int\limits_{W} \Big(\frac{\partial}{\partial \eta_1} \dots \frac{\partial}{\partial \eta_m} f\Big) dw_1 \dots dw_n, \tag{6.58}$$

где $W \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество значений вектора $\bar{w} = (w_1(u), \dots, w_n(u))$ при всех $u \in \mathbb{R}^n_-$.

Любая система координат y на $\mathcal{R}^{n|m}$ задает диффеоморфизм

$$\psi \colon \mathcal{R}^{n|m} \longrightarrow \mathcal{R}^{n|0} \times \mathcal{R}^{0|m}.$$

Сопоставим системе координат y супермногообразие

$$\mathcal{U}_y = \psi^{-1}(\partial W \times \mathcal{R}^{0|m}). \tag{6.59}$$

Оно является подсупермногообразием в $\mathcal{R}^{n|m}$ коразмерности $1|0$, и его подстилающим служит как раз $\partial\mathbb{R}^n_- = \{u \in R^n \mid u_1 = 0\}$.

Теорема. *Соответствие* $\int\limits_{y} \longleftrightarrow \mathcal{U}_y$ *между множеством отображений* $\int\limits_{y}$ *и множеством* $(n-1)|m$*-мерных подсупермногообразий в* $\mathcal{R}^{n|m}$ *с подстилающим* $\partial\mathbb{R}^n_-$ *является взаимно однозначным.*

Доказательство. Группа обратимых замен координат на супермногообразии $\mathcal{R}^{n|m}$ транзитивно действует как на множестве отображений $\int\limits_{y}$, так и на множестве подсупермногообразий $\mathcal{U}_y$. Легко проверить, что любое $(n-1)|m$-мерное подсупермногообразие $\mathcal{U}$ в $\mathcal{R}^{n|m}$, для которого с $U = \partial\mathbb{R}^n_-$, имеет вид $\mathcal{U}_y$ на некоторой системе координат y (см. также лемму ниже). Поэтому достаточно рассмотреть стабилизаторы как отображения $\int\limits_{x}$, так и суперобласти $\mathcal{U}_x$ и убедиться, что они совпадают. Мы воспользуемся разложением диффеоморфизмов из леммы из п. 6.2.2а:

$$\psi = \psi_1^d \dots \psi_n^d \psi_1^c \dots \psi_m^c \psi^b \psi^a, \tag{6.60}$$

где верхний индекс указывает на тип диффеоморфизма, т. е. ψ_i^d и ψ_j^c затрагивают только w_i и η_j, соответственно. Из определения отображения $\int\limits_{y}$ немедленно следует, что замены координат типов а), б) и в) сохраняют интеграл. Рассмотрим замену координат типа г):

$$w_i = u_i + \Delta_i, \quad \text{где } i \in I \subset \{1, \dots, n\}. \tag{6.61}$$

Как показано в п. 6.2.2, замена координат типа г) действует так:

$$v_{x'} f(w, \eta) \mapsto v_x \left(f(u, \xi) + \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \Big(\frac{\partial}{\partial u_i}\Big)^j f(u, \xi) \cdot \frac{\Delta^{j+1}}{(j+1)!} \right)\right). \tag{6.62}$$

Отсюда следует, что $\int\limits_y = \int\limits_x$ при $i \neq 1$, а при $i = 1$ мы получаем

$$\int\limits_y v_y f(y) = \int\limits_x v_x f(x) + \int\limits_{-\infty}^{0} du_1 \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \ldots \frac{\partial}{\partial \xi_m} g du_2 \ldots du_n,$$
$$\text{где} \quad g = \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \right)^j f(x) \frac{\Delta^{j+1}}{(j+1)!} \right). \tag{6.63}$$

Поэтому $\int\limits_y = \int\limits_x$ тогда и только тогда, когда

$$S(\Delta, f) := \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} du_2 \ldots du_n \frac{\partial}{\partial \xi_1} \ldots \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \right)^j f(u, \xi) \cdot \frac{\Delta^{j+1}}{(j+1)!} \right) \Bigg|_{u_1=0} = 0 \tag{6.64}$$

для любой функции $f \in C^\infty(\mathcal{R}^{n|m})$. Это условие эквивалентно тому, что

$$\Delta \in u_1 C^\infty(\mathcal{R}^{n|m}). \tag{6.65}$$

Действительно, если $\Delta = \Delta'(u_2, \ldots, \xi_m) + u_1 \Delta''$, то $S(\Delta, f) = S(\Delta', f)$. Если $\Delta' \neq 0$, то пусть $\Delta'_\beta \xi^\beta$ — лексиграфически самый младший член в выражении $\Delta' = \sum_\alpha \Delta'_\alpha \xi^\alpha$. Полагая

$$f = f_0(u) \xi_1^{1-\beta_i} \ldots \xi_m^{1-\beta_i}, \tag{6.66}$$

где f_0 — такая функция, что $\operatorname{supp} f_0 \cap \mathbb{R}^n_-$ — компакт, а

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} (f_0 \Delta_\beta du_2 \ldots du_n)|_{u_1=0} \neq 0, \tag{6.67}$$

мы видим, что $S(\Delta', f) \neq 0$.

Поскольку подсупермногообразие в $\mathcal{R}^{n|m}$, отвечающее системе координат x, задается идеалом $u_1 C^\infty(\mathcal{R}^{n|m})$, нетрудно видеть, что замены типа а), б), в) сохраняют это подсупермногообразие, а замена типа г) сохраняет его при $i \neq 1$ или при $i = 1$ и $\Delta \in u_1 C^\infty(\mathcal{R}^{n|m})$. ☐

Упражнение. Сформулируйте и докажите аналог теоремы для семейства форм.

Теперь мы видим, что

> *дополнительная информация, необходимая для того чтобы обеспечить инвариантность интегрирования, — это* **структура подсупермногообразия на границе** *области интегрирования.*

Для любого множества $X \subseteq M$ обозначим через $\bar{X}$ его замыкание в M, а символом ∂X обозначим множество граничных точек множества X, т. е. $\partial X = \bar{X} \setminus \{$внутренность множества $X\}$.

Подсупермногообразием с границей в супермногообразии $\mathcal{M}$ назовем пару $(\mathcal{N}, \partial\mathcal{N})$, где $\mathcal{N}$ — открытое подсупермногообразие в $\mathcal{M}$, такое что множество граничных точек ∂N множества N является подмногообразием в M коразмерности 1, а $\partial\mathcal{N}$ есть некоторое подсупермногообразие в $\mathcal{M}$ коразмерности $1|0$, такое что подстилающее его многообразие — это ∂N. Пара $(\mathcal{N}, \varnothing)$, где N не имеет граничных точек, будет также рассматриваться как супермногообразие с границей.

Для наших целей необходимо слегка более общее понятие, чем подсупермногообразие с границей. Снова фиксируем систему координат $x = (u, \xi)$ на $\mathcal{R}^{n|m}$, и пусть $s \in \mathbb{N}$. Назовем *s-краем* в $\mathcal{R}^{n|m}$ набор

$$\mathcal{K} = \{A(s), \partial\mathcal{A}_1, \ldots, \partial\mathcal{A}_s\}, \tag{6.68}$$

где $A(s) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u_i < 0, \ i = 1, \ldots s\}$ и каждая грань $\partial\mathcal{A}_i$ является классом эквивалентности $(n-1)|m$-мерных подсупермногообразий в $\mathcal{R}^{n|m}$, подстилающие которых содержат $\partial A_i = \{u \in \bar{A}(s) \mid u_i = 0\}$.

Два подсупермногообразия назовем *эквивалентными*, если они совпадают в некоторой окрестности множества $A(s)$.

Назовем систему координат $y = (w, \xi)$ *стандартной для данного s-края*, если $\operatorname{cpr} y = \operatorname{cpr} x$, а каждая грань $\partial\mathcal{A}_i$ задается уравнением $w_i = 0$.

Мы будем иногда рассматривать $\mathcal{R}^{n|m}$ как 0-край, а любую координатную систему на $\mathcal{R}^{n|m}$ в таком случае рассматривать как стандартную (для 0-края).

Замечание. 1-край в $\mathcal{R}^{m|n}$ — это в точности подсупермногообразие с границей в $\mathcal{R}^{m|n}$, подстилающее многообразие которых есть $A(1)$, а $\bar{A}(1) = \mathbb{R}^n_-$, так что 1-края в $\mathcal{R}^{m|n}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с $m-1|n$-мерными подсупермногообразиями, подстилающими многообразиями которых является одно и то же $\partial\mathbb{R}^n_-$.

Лемма. *Для каждого данного s-края $\mathcal{K}$ существует система координат, стандартная для $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ есть представитель класса $\partial\mathcal{A}_1$ в некоторой открытой области $\mathcal{U} \supseteq \bar{A}$. Согласно определению подсупермногообразия для любой точки $z \in F$ существует четная функция Δ_z, определенная в окрестности $\mathcal{U}_z$ точки z, такая что пересечение $\mathcal{U}_z \cap \mathcal{F}$ задается уравнением $u_1 + \Delta_z = 0$ и $\operatorname{cpr} \Delta_z = 0$.

Функция Δ_z не единственна. Ее можно заменить на некоторую функцию Δ'_z, тогда и только тогда, когда

$$u_1 + \Delta'_z = k(u_1 + \Delta_z), \tag{6.69}$$

где $k \in C^\infty(\mathcal{U}_z)^\times_{\bar 0}$ — обратимый множитель, но дополнительное условие $\dfrac{\partial}{\partial u_1}(\Delta_z) = 0$ возвращает единственность. Следовательно, функции Δ_z и Δ_t совпадают на $\mathcal{U}_z \cap \mathcal{U}_t$ для любых $z,\ t \in F$, и мы получаем некоторую функцию $\Delta \in C^\infty(\mathcal{U})_{\bar 0}$, такую что $\operatorname{cpr} \Delta = 0$ и уравнение $u_1 + \Delta = 0$ определяет грань ∂A_1. Другие грани рассматриваются таким же образом. □

Предложение. *Для любых граней* $\mathcal{K}$ *и* $\rho \in \mathrm{Vol}(\mathcal{R}^{n|m})$, *таких что* $\operatorname{supp} \rho \cap \mathcal{A}$ — *компакт, интеграл* $\int\limits_{A,y} \rho$ *не зависит от выбора стандартной системы координат* y *на* $\mathcal{R}^{n|m}$.

Доказательство абсолютно аналогично доказательству теоремы из этого пункта. □

Набор, состоящий из конечного множества подсупермногообразий с границей $\{(\mathcal{N}_i, \partial\mathcal{N}_i) \mid i \in I\}$ в супермногообразии $\mathcal{M}$, будет называться *хорошим*, если

1) $\mathcal{N} = \cap \mathcal{N}_i$ является непустым открытым подсупермногообразием в $\mathcal{M}$;

2) для любой граничной точки $t \in \partial N$ и набора $I_t = \{i_1, \ldots, i_k\}$ индексов i, таких что $t \in \partial N_i$, существует координатная окрестность $\mathcal{U}$ точки t, такая что $\partial\mathcal{N}_{i_e} \cap U$ задается уравнением $u_e = 0$ для $e \in \{i_1, \ldots, i_k\}$.

Два хороших набора $\{(\mathcal{N}'_i, \partial\mathcal{N}'_i) \mid i \in I\}$ и $\{(\mathcal{N}''_j, \partial\mathcal{N}''_j) \mid j \in J\}$ будут считаться *эквивалентными*, если $\cap \mathcal{N}'_i = \cap \mathcal{N}''_j$ (обозначим эти пересечения через $\mathcal{N}$) и для любой граничной точки $t \in \partial N$ существуют координатная окрестность $\mathcal{U}_t$ точки t и взаимно однозначное соответствие между наборами индексов $I_t = I'_t$ и $J_t = I''_t$, такие что $\mathcal{N}'_{i_k} \cap \mathcal{U}_t$ и $\mathcal{N}''_{j_k} \cap \mathcal{U}_t$ совпадают как подсупермногообразия в $\mathcal{U}_t$.

Класс эквивалентности хороших множеств будет называться $n|m$-мерным *подсупермногообразием в* $\mathcal{M}$ *с кусочно-гладкой границей.*

Другими словами, подсупермногообразие с кусочно-гладкой границей является пересечением элементов хорошего набора подсупермногообразий с границей $\{(\mathcal{N}_i, \partial\mathcal{N}_i) \mid i \in I\}$. Для хорошего набора $\{(\mathcal{N}_i, \partial\mathcal{N}_i) \mid i \in I\}$ мы обозначим соответствующее подсупермногообразие в $\mathcal{M}$ с кусочно-гладкой границей символом $\bigcap\limits_i(\mathcal{N}_i, \partial\mathcal{N}_i)$.

Если $\mathcal{K} = \bigcap\limits_i(\mathcal{N}_i, \partial\mathcal{N}_i)$ — подсупермногообразие в $\mathcal{M}$ с кусочно-гладкой границей, то открытое подсупермногообразие $\bigcap\limits_i \mathcal{N}_i$ называется *внутренностью* супермногообразия $\mathcal{K}$ и обозначается $\mathrm{Int}(\mathcal{K})$, а $\bar{\mathcal{K}} := \bigcap\limits_i \bar{\mathcal{N}}_i$ называется *замыканием* супермногообразия $\mathcal{K}$. *Ориентаций* (*полуориентаций*) на подсупермногообразии с кусочно-гладкой границей $\mathcal{K}$ называется ориентация (полуориентация) на $\mathrm{Int}(\mathcal{K})$.

Примеры. 1) Пусть $\mathcal{M}$ — супермногообразие, f — четная 1) функция на $\mathcal{M}$, такая что и f, и ее четный дифференциал не обращаются в нуль одновременно. Тогда уравнение $f = 0$ выделяет подсупермногообразие $\partial\mathcal{N}$ коразмерности $1|0$ в $\mathcal{M}$, а пара

$$(\{u \in M \mid f(u) < 0\},\ \partial\mathcal{N}) \tag{6.70}$$

является подсупермногообразием с границей в $\mathcal{M}$.

Действительно, пусть $f(x) = 0$ для некоторой точки $x \in \mathcal{M}$. Тогда существует окрестность $\mathcal{U} \ni x$, где f можно рассматривать в качестве одной из координат.

2) Пусть на $\mathcal{M}$ имеется конечное множество $F = \{f_1, \ldots, f_k\}$ четных функций, таких что

а) $N = \{m \in M \mid f_i(m) < 0$ при любых $i = 1, \ldots, k\} \neq \varnothing$;

б) если $f_{i_1}, \ldots, f_{i_e}$ обращаются в нуль в точке $x \in M$, то их дифференциалы линейно независимы в x.

Тогда множество F вырезает в $\mathcal{M}$ подсупермногообразие $\mathcal{N}$ с кусочно-гладкой границей, а именно, пересечение подсупермногообразий с границей, заданных функциями f_i, как в примере 1.

В дальнейшем в ситуации примера 1 (соответственно 2) мы скажем, что супермногообразие с границей *выделено в* $\mathcal{M}$ *неравенством* $f \leqslant 0$ (соответствующим набором неравенств).

Пусть $\mathcal{U}$ — открытое подсупермногообразие в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{U} \cap \mathrm{Int}(\mathcal{K}) \neq \varnothing$. Тогда $\mathcal{U} \cap \mathcal{K}$ является супермногообразием с кусочно-гладкой границей в $\mathcal{U}$. Из определения подсупермногообразия с кусочно-гладкой границей следует, что для любого $m \in \bar{\mathcal{K}}$ существует карта $\mathcal{U}$ на $\mathcal{M}$, такая что $\mathcal{U} \cap \mathcal{K}$ является s-краем для некоторого $s \in \mathbb{N}$, а соответствующая система координат стандартна. Такие карты в $\mathcal{U}$ будут называться *стандартными* для $\mathcal{K}$.

6.3.2. Теперь мы можем проинтегрировать формы из $\mathrm{Vol}(\mathcal{M})$ следующим естественным образом. Пусть $\mathcal{K}$ является супермногообразием (с кусочно-гладкой) границей в $\mathcal{M}$, таким что $\bar{\mathcal{K}}$ — компакт. Для любой граничной точки $x \in \partial\bar{\mathcal{K}}$ выберем стандартную карту $\mathcal{U}_x$. Тогда компакт $\bar{\mathcal{K}}$ покрыт набором $\mathrm{Int}(\mathcal{K}) \bigcup\limits_{x \in \partial\bar{\mathcal{K}}} \mathcal{U}_x$. Для любой формы $\rho \in \mathrm{Vol}(\mathcal{M})$, используя соответствующее разбиение единицы, мы получаем конечное разложение $\rho = \rho_0 + \sum \rho_\alpha$, $\operatorname{supp} \rho_0 \subseteq \mathrm{Int}(\mathcal{K})$ и $\operatorname{supp} \rho_\alpha \subseteq U_\alpha$, где $\mathcal{U}_\alpha$ — какие-то из стандартных карт $\mathcal{U}_x$ при $x \in \partial K$. Затем мы интегрируем форму ρ_0 как форму с компактным носителем на $\mathcal{M}$. Интегрируем все полученные формы ρ_α в соответствующих системах координат и складываем результат. Таким же образом мы можем проинтегрировать любую форму $\rho \in \mathrm{Vol}(\mathcal{M})$ по

---

1) В смысле супералгебры, конечно, а не $f(x) = f(-x)$.

произвольному подсупермногообразию $\mathcal{K}$ с кусочно-гладкой границей в $\mathcal{M}$, если $\operatorname{supp}\rho\cap\bar{\mathcal{K}}$ — компакт.

Предложение. *Результат вышеописанной процедуры не зависит ни от разбиения единицы, ни от систем координат в картах.*

Доказательство. Независимость от систем координат в картах обеспечивается предложением из п. 6.3.1, а независимость от разбиения единицы доказывается размельчением покрытия. □

6.3.3. Лемма. *Пусть* $\mathcal{K}=\cap(\mathcal{V}_i,\,\partial\mathcal{V}_i)$ *и* $\mathcal{L}=\cap(\mathcal{W}_j,\,\partial\mathcal{W}_j)$ *— подсупермногообразия с кусочно-гладкими границами в супермногообразиях* $\mathcal{M}$ *и* $\mathcal{N}$ *соответственно. Тогда набор*

$$\{(\mathcal{V}_i\times\mathcal{N},\,\partial\mathcal{V}_i\times\mathcal{N})\mid i\in I\}\cup\{(\mathcal{M}\times\mathcal{W}_j,\,\mathcal{M}\times\partial\mathcal{W}_j)\mid j\in J\} \tag{6.71}$$

хороший и, таким образом, определяет в $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ *подсупермногообразие* $\mathcal{K}\times\mathcal{L}$ *с кусочно-гладкой границей. Внутренностью супермногообразия* $\mathcal{K}\times\mathcal{L}$ *является* $\operatorname{Int}(\mathcal{K})\times\operatorname{Int}(\mathcal{L})$.

Доказательство. Положим $\mathcal{V}=\cap\mathcal{V}_i\subseteq\mathcal{M}$ и $\mathcal{W}=\cap\mathcal{W}_i\subseteq\mathcal{N}$. Тогда

$$\Big(\bigcap_i(\mathcal{V}_i\times\mathcal{N})\Big)\cap\Big(\bigcap_j(\mathcal{M}\times\mathcal{W}_j)\Big)=\mathcal{V}\times\mathcal{W}\neq\varnothing \tag{6.72}$$

и

$$\partial(\mathcal{V}\times\mathcal{W})=(\partial\mathcal{V}\times\partial\mathcal{W})\cup(\partial\mathcal{V}\times\mathcal{W})\cup(\mathcal{V}\times\partial\mathcal{W}). \tag{6.73}$$

Покрывая $\bar{\mathcal{K}}$ и $\bar{\mathcal{L}}$ стандартными картами, мы получаем стандартные (с точностью до перестановки координат) карты на $\partial(\mathcal{V}\times\mathcal{W})$. □

Теорема (Фубини). *Пусть* $\mathcal{K}=\cap(\mathcal{V}_i,\,\partial\mathcal{V}_i)$ *и* $\mathcal{L}=\cap(\mathcal{W}_j,\,\partial\mathcal{W}_j)$ *— два подсупермногообразия с кусочно-гладкими границами в супермногообразиях* $\mathcal{M}$ *и* $\mathcal{N}$ *соответственно. Тогда для любой формы* $\rho\in\operatorname{Vol}(\mathcal{M}\times\mathcal{N})$, *такой что* $\operatorname{supp}\rho\cap(\bar{\mathcal{K}}\times\bar{\mathcal{L}})$ *— компакт, выполняется равенство*

$$\int_{\mathcal{M}}\Big(\int_{\mathcal{N}}\rho\Big)=\int_{\mathcal{M}\times\mathcal{N}}\rho, \tag{6.74}$$

где в правой части форма ρ *рассматривается как элемент из* $\operatorname{Vol}(\mathcal{M})\otimes_{C^\infty(\mathcal{M})}\operatorname{Vol}(\mathcal{N};\,\mathcal{M})$, *и* $(1,\,0)$*-полуориентация на* $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ *задается* $(1,\,0)$*-полуориентациями на* $\mathcal{M}$ *и* $\mathcal{N}$.

Доказательство. С помощью разбиения единицы общий случай сводится к ситуации, когда каждый из сомножителей содержится в стандартной карте. Дальше проводятся вычисления в координатах, которые полностью аналогичны доказательству теоремы Фубини из п. 6.2.4. □

6.3.4. Как интегрировать семейства форм. Пусть $\mathcal{M}^{n|m}$ — супермногообразие, а $\mathcal{T}^{p|q}$ — супермногообразие параметров. Подсупермногообразие в $\mathcal{M}\times\mathcal{T}$ с границей $(\mathcal{N},\,\partial\mathcal{N})$ назовем $\mathcal{T}$*-семейством супермногообразий с границами в* $\mathcal{M}$, если для каждой точки $(m,\,t)\in\partial\mathcal{N}$ существует $\mathcal{T}$-семейство систем координат на $\mathcal{U}$ в окрестности $\mathcal{U}\times\mathcal{T}'$, такое что $\partial\mathcal{N}\cap\mathcal{U}\times\mathcal{T}'$ задается уравнением $u_1=0$.

Подсупермногообразие в $\mathcal{M}\times\mathcal{T}$ с кусочно-гладкой границей $\mathcal{K}=\cap(\mathcal{N}_j,\,\partial\mathcal{N}_j)$, такое что $(\mathcal{N}_j,\,\partial\mathcal{N}_j)$ есть $\mathcal{T}$-семейство супермногообразий с границей в $\mathcal{M}$ при всех j, назовем $\mathcal{T}$*-семейством супермногообразий с кусочно-гладкой границей* $\mathcal{M}$.

Ниже мы определим интеграл от $\mathcal{T}$-семейства форм по $\mathcal{T}$*-семейству* подсупермногообразий с кусочно-гладкой границей $\mathcal{M}$, так что результат окажется функцией из $C^\infty(\mathcal{T})$. Сначала мы предположим, что $\mathcal{T}$ является суперобластью, и при необходимости будем уменьшать $\mathcal{T}$, не объявляя этого специально.

Пусть $\mathcal{K}=\cap(\mathcal{N}_i,\,\partial\mathcal{N}_i)$ есть $\mathcal{T}$-семейство подсупермногообразий с кусочно-гладкой границей в $\mathcal{M}$ и множество $\bar K\cap(M\times\{t\})$ есть компакт в M для любой точки $t\in T$. Покроем множество граничных точек в $\mathcal{K}$ конечным числом стандартных семейств карт, т. е. окрестностей вида $\mathcal{U}_\alpha\times\mathcal{T}$, где $\mathcal{U}_\alpha\subseteq\mathcal{M}$, с $\mathcal{T}$-семействами систем координат $x=(x_1,\,\ldots,\,x_{n+m})$, такими что $\mathcal{K}\cap(\mathcal{U}_\alpha\times\mathcal{T})$ является l-краем (где $l\leqslant n$), заданным неравенствами $x_1<0,\,\ldots,\,x_l<0$.

Пользуясь разбиением единицы, мы разложим произвольную форму $\rho\in\operatorname{Vol}(\mathcal{M};\,\mathcal{T})$ в сумму $\rho=\sum\limits_{i\geqslant 0}\rho_j$, где $\operatorname{supp}\rho_0\subseteq\mathcal{U}_0\times\mathcal{T}\subseteq\operatorname{Int}(\mathcal{K})$ при $\mathcal{U}_0\subseteq\mathcal{M}$ и $\operatorname{supp}\rho_j\subseteq\mathcal{U}_j\times\mathcal{T}$, где $j>0$. Положим затем

$$\int_{\mathcal{K}}\rho=\int_{\mathcal{U}_0}\rho_0+\sum_{j>0}\int(\rho_j,\,\mathcal{U}_j\cap\mathcal{K}), \tag{6.75}$$

где $\rho_0\in\operatorname{Vol}_c(\mathcal{M};\,\mathcal{T})$, а остальные интегралы вычисляются по стандартной формуле в $\mathcal{T}$-семействе координатных систем на $\mathcal{U}_j$, выбранных вместе с $\mathcal{U}_j$.

Очевидно, что если указанным выше способом мы вычислим интеграл для двух подсуперобластей $\mathcal{T}'$ и $\mathcal{T}''$ в $\mathcal{T}$, то полученные функции из $C^\infty(\mathcal{T}')$ и $C^\infty(\mathcal{T}'')$ совпадут на $\mathcal{T}'\cap\mathcal{T}''$. Выполняя описанную выше процедуру интегрирования в окрестности каждой точки супермногообразия $\mathcal{T}$, а потом склеивая, мы получим в результате функцию на всем $\mathcal{T}$. Эта функция и есть желаемый интеграл $\int\limits_{\mathcal{K}}\rho$.

Теорема. 1) *Интеграл корректно определен: он не зависит ни от выбора карт* $\mathcal{U}_\alpha$, *ни от* $\mathcal{T}'$*-семейства систем координат в* $\mathcal{U}_j$, *ни от разбиений единицы.*

2) *Интеграл является морфизмом $C^\infty(\mathcal{T})$-модулей*

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{M}\times\mathcal{T}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{T}).$$

3) *Спаривание между семействами форм объема на $\mathcal{M}$ и семействами подсупермногообразий с кусочно-гладкой границей в $\mathcal{M}$ невырождено*:

3а) *для любой невырожденной формы $\varrho\in\mathrm{Vol}(\mathcal{M};\mathcal{T})$ найдется $\mathcal{T}_1$-семейство подсупермногообразий с границей $(\mathcal{N}, \partial\mathcal{N})$, такое что*

$$\int\limits_{(\mathcal{N},\partial N)} \varrho \neq 0,$$

а $\bar N\cap M\times\{t\}$ — компакт для любой точки $t\in T$ и где

$$\mathcal{T}_1=\begin{cases}\mathcal{T}, & \text{если } p(\varrho)=\bar 0,\\ \mathcal{T}_1=\mathcal{T}\times\mathcal{R}^{0|1}, & \text{если } p(\varrho)=\bar 1;\end{cases}$$

3б) *для любых различных $\mathcal{T}$-семейств $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ супермногообразий с кусочно-гладкой границей в $\mathcal{M}\times\mathcal{T}$ существует форма $\varrho\in\mathrm{Vol}_c(\mathcal{M};\mathcal{T})$, такая что $\int\limits_{\mathcal{K}_1}\varrho\neq\int\limits_{\mathcal{K}_2}\varrho$.*

Доказательство. Утверждение 1 доказывается стандартным образом: так же как предложение из п. 6.3.2. Из того же предложения вытекает утверждение 2. Доказательство утверждения 3а следует из двух приведенных ниже лемм.

6.3.4а. Лемма. *Если $\varrho\in\mathrm{Vol}(\mathcal{M};\mathcal{T})$, то существует $\mathcal{T}_1$-семейство систем координат $x=(u, \xi)$ в $\mathcal{M}$, такое что $\varrho=v_xf$ и $\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}\ldots\dfrac{\partial}{\partial\xi_m}f\neq 0$. Здесь*

$$\mathcal{T}_1=\begin{cases}\mathcal{T}, & \text{если } p(\varrho)=\bar 0,\\ \mathcal{T}\times\mathcal{R}^{0|1}, & \text{если } p(\varrho)=\bar 1.\end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}\times\mathcal{T}\subseteq\mathcal{M}\times\mathcal{T}$ — карта, такая что $\varrho|_{\mathcal{U}\times\mathcal{T}}\neq 0$. В координатах имеем $\varrho=v_xf$, где $f=\sum\limits_\alpha f_\alpha(u, t)\xi^\alpha$. Выберем самый лексикографически старший член $f_\beta(u, t)\xi_1^{\beta_1}\ldots\xi_m^{\beta_m}$.

Если $\beta_1+\ldots+\beta_m<m$, то положим

$$\begin{aligned} w_1&=u(1-\Delta),\\ w_i&=u_i \ \text{ при } i\geqslant 2,\\ \eta_j&=\xi_j,\end{aligned}\tag{6.76}$$

где $\Delta=\tau^k\xi_1^{1-\beta i}\ldots\xi_m^{1-\beta m}$, а $k\equiv m+\beta_1+\ldots+\beta_m \pmod 2$, и τ — координата на $\mathcal{R}^{0|1}$. Легко видеть, что с точностью до знака старший член в выражении формы ϱ в $\mathcal{R}^{0|1}\times\mathcal{T}$-семействе координатных систем (w, η) имеет вид $f_\beta\cdot\eta_1\ldots\eta_m\cdot\tau^k$ (здесь мы воспользовались тем, что $\Delta^2=0$). ☐

6.3.4б. Лемма. *Если $\varrho=v_xf$ и $\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}\ldots\dfrac{\partial}{\partial\xi_m}f\neq 0$ в $\mathcal{T}$-семействе систем координат на $\mathcal{M}$, то существует $\mathcal{T}$-семейство $(1, 0)$-полуориентированных подсупермногообразий с границей в $\mathcal{M}$, такое что $\int\limits_{(\mathcal{N},\partial\mathcal{N})}\varrho\neq 0$.*

Доказательство леммы легко сводится к очевидному утверждению. Если $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $f(0)\neq 0$, то существует шар D^n с центром в начале координат, такой что $\int\limits_{D^n} f du_1\ldots du_n\neq 0$. ☐

Чтобы доказать утверждение 3б, достаточно рассмотреть случай, когда $\mathrm{Int}(\mathcal{K}_1)=\mathrm{Int}\,\mathcal{K}_2$. В противном случае утверждение очевидно. Мы можем взять форму ϱ, такую что $\mathrm{supp}\,\varrho\subseteq\mathcal{K}_1\setminus\mathcal{K}_2$ и $\int\varrho\neq 0$.

Выберем карту $\mathcal{U}$ на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{T}$-семейство систем координат на $\mathcal{M}$, в которых пересечение $\mathcal{K}_1\cap(\mathcal{U}\times\mathcal{T})$ задается неравенством $u_1<0$. Теперь осталось сослаться на теорему из п. 6.3.1. ☐

Следствие. *Если $\varrho\in\mathrm{Vol}(\mathcal{M})$ — не тождественно нулевая форма, то $\int\limits_{\mathcal{K}}\varrho=0$ для любого подсупермногообразия $\mathcal{K}$ с границей, такого что $\bar{\mathcal{K}}\cap\mathrm{supp}\,\varrho$ является компактом, тогда и только тогда, когда $p(\varrho)=\bar 1$.*

6.3.5. $\mathcal{R}^{0|q}$-семейства форм и подсупермногообразий (с кусочно-гладкой) границей. Такие семейства суть нечто специальное. В частности, $\mathcal{R}^{0|q}$-семействами подсупермногообразий с кусочно-гладкой границей в супермногообразии $\mathcal{M}$ являются в точности подсупермногообразия с кусочно-гладкой границей в супермногообразии $\mathcal{M}\times\mathcal{R}^{0|q}$.

Предложение. *Пусть $\mathcal{K}$ — это $\mathcal{R}^{0|q}$-семейство подсупермногообразий с кусочно-гладкой границей в супермногообразии $\mathcal{M}$. Тогда для любой формы $\varrho\in\mathrm{Vol}(\mathcal{M})$, такой что $\mathrm{supp}\,\varrho\cap\bar{\mathcal{K}}$ — компакт, выполняется равенство*

$$\int\limits_{\mathcal{R}^{0|q}}\left(\int\limits_{\mathcal{K}}\varrho\right)=\int\limits_{\mathcal{K}}\varrho,\tag{6.77}$$

где в левой части $\mathcal{K}$ рассматривается как $\mathcal{R}^{0|q}$-семейство подсупермногообразий с кусочно-гладкой границей в супермногообразии $\mathcal{M}$, в то время как в правой части $\mathcal{K}$ рассматривается как подсупермногообразие с кусочно-гладкой границей в супермногообразии $\mathcal{M}\times\mathcal{R}^{0|q}$.

Доказательство. $\mathcal{R}^{0|q}$-семейство K задает в точности одно подмногообразие с кусочно-гладкой границей в многообразии M, а именно $\bar{K}$. Следовательно, одно-единственное разбиение единицы на $\operatorname{supp}\rho\cap\bar{K}$ обслуживает все семейство. Теперь мы можем предположить, что носитель $\operatorname{supp}\rho$ достаточно мал, и выбрать стандартное $\mathcal{R}^{0|q}$-семейство систем координат, сведя таким образом общий случай к теореме Фубини (см. п. 6.3.3). □

Это предложение является фактически специальным случаем интегрирования по слоям, которое будет рассматриваться в конце § 6.6. Основанием для того, чтобы поместить это предложение здесь, является его практическая ценность. Процедура интегрирования, описанная выше, требует разбиения единицы и специальных систем координат. Это может показаться слишком замысловатым. Предложение дает более простой алгоритм, который использует интегрирование семейств.

6.3.6. Рецепт вычисления $\int\limits_{\mathcal{K}}\rho$. Если $\mathcal{U}^{n|m}$ — супер*область* с координатами $x=(u,\xi)$, $\mathcal{K}$ — ее подсупермногообразие с кусочно-гладкой границей $f\in C^{\infty}(\mathcal{U})$ и $\rho=v_x f$, то рассмотрим $\mathcal{K}$ как $\mathcal{R}^{0|m}$-семейство подсупермногообразий с кусочно-гладкой границей в $\mathbb{R}^n$ и проинтегрируем $v_u f\in \mathrm{Vol}(\mathcal{R}^{n|0};\mathcal{R}^{0|m})$ по $\mathcal{K}$. Мы получим функцию $g\in C^{\infty}(\mathcal{R}^{0|m})$. Теперь возьмем интеграл от $v_\xi g$ по $\mathcal{R}^{0|m}$, т. е. $\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}\dots\dfrac{\partial}{\partial\xi_m}g$.

Это и есть $\int\limits_{\mathcal{K}}\rho$.

Тот же самый рецепт работает для супер*многообразий*: надо только представить супермногообразие $\mathcal{M}$ в виде $M\times\mathcal{R}^{0|n}$, что локально всегда верно.

6.3.7. Цепи. Интегрирование по цепям. Пока что мы определили супермногообразие с кусочно-гладкой границей коразмерности $0|0$ в $\mathcal{M}$. В общем случае при $r|s<n|m$ назовем $\mathcal{N}^{r|s}$ *супермногообразием с кусочно-гладкой границей в* $\mathcal{M}$, если $\mathcal{N}$ является супермногообразием с кусочно-гладкой границей в каком-то замкнутом $r|s$-подсупермногообразии $\mathcal{W}$ в $\mathcal{M}$.

Назовем *$r|s$-цепью* в $\mathcal{M}$ формальную конечную сумму с целыми коэффициентами $\sum_i k_i\mathcal{K}_i$, где $\mathcal{K}_i$ суть $r|s$-многообразия с кусочно-гладкой границей, а замыкание каждого подстилающего многообразия K_i в M — компакт.

Обозначим символом $C^{r|s}(\mathcal{M})$ *группу $r|s$-цепей* в $\mathcal{M}$. Среди $r|s$-цепей есть, конечно же, и пустая цепь, которой соответствует $0\in C^{r|s}(\mathcal{M})$.

Определим *отображение*

$$\partial\colon C^{n|m}(\mathcal{M})\longrightarrow C^{n-1|m}(\mathcal{M}) \tag{6.78}$$

следующим образом. Пусть $\mathcal{K}$ задано набором $\{(\mathcal{N}_i,\partial\mathcal{N}_i)\mid i\in I\}$. Тогда положим $\partial\mathcal{K}=\sum\partial\mathcal{K}_i$, где $\partial\mathcal{K}_i$ — супермногообразие с кусочно-гладкой границей в $\partial\mathcal{N}_i$, заданное набором

$$\Big\{\Big(\partial\mathcal{N}_i\bigcap_{j\neq i}\mathcal{N}_j,\ \partial\mathcal{N}_i\bigcap_{j\neq i}\partial\mathcal{N}_j\Big)\ \Big|\ \text{где } j \text{ пробегает все индексы, такие что } \partial\mathcal{N}_i\bigcap_{j\neq i}\mathcal{N}_j\neq\varnothing\Big\}. \tag{6.79}$$

Если $\mathcal{K}$ — супермногообразие с границей $(\mathcal{N},\partial\mathcal{N})$, то положим $\partial\mathcal{K}=(\partial\mathcal{N},\varnothing)$, а если $\mathcal{K}=(\mathcal{N},\varnothing)$, то положим $\partial\mathcal{K}=\varnothing$. Продолжим ∂ на всю группу $C^{n|m}(\mathcal{M})$ по $\mathbb{Z}$-линейности.

Отображения $\partial\colon C^{r|s}(\mathcal{M})\longrightarrow C^{r-1|s}(\mathcal{M})$ для $r<n$ определяются аналогично.

Замечание. Граница супермногообразия с границей является супермногообразием, в то время как граница компактного супермногообразия с кусочно-гладкой границей является цепью.

Множества ориентированных $r|s$-цепей определяются естественным образом. Положим $C^{r|s}_{0,0}(\mathcal{M})=C^{r|s}(\mathcal{M})$, и пусть $C^{r|s}_{*,*}(\mathcal{M})$ означает множество цепей с полной ориентацией. Обозначим символом $C^{r|s}_{a,b}(\mathcal{M})$, где $a,b\in\mathbb{Z}/2$, группы по-другому ориентированных цепей.

Если $(\mathcal{N},\partial\mathcal{N})$ — подсупермногообразие с границей и $\partial\mathcal{N}\neq\varnothing$, то ориентация (полуориентация) супермногообразия $\mathcal{N}$ определяет ориентацию (полуориентацию) супермногообразия $\partial\mathcal{N}$. Действительно $(1,0)$-полуориентация супермногообразия $\partial\mathcal{N}$ — это просто ориентация многообразия $\partial N=\partial(N)$, индуцированная ориентацией на N, а $(0,1)$-ориентация на $\partial\mathcal{N}$, унаследована от ориентации на $\mathcal{N}$ согласно предложению из п. 6.1.6. Таким образом мы получаем пять последовательностей множеств и отображений. Стирание ориентаций задает коммутативную диаграмму проекций

$$\begin{tikzcd}
 & C^{r|s}_{*,*}(\mathcal{M}) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
C^{r|s}_{0,1}(\mathcal{M}) \arrow[dr] & C^{r|s}_{1,1}(\mathcal{M}) \arrow[d] & C^{r|s}_{1,0}(\mathcal{M}) \arrow[dl] \; . \\
 & C^{r|s}_{0,0}(\mathcal{M})=C^{r|s}(\mathcal{M}) &
\end{tikzcd} \tag{6.80}$$

Структуру $\mathbb{Z}$-модуля на $C^{r|s}_{a,b}(\mathcal{M})$ определим обычным образом, отождествив каждую замену полуориентации цепи с умножением на -1 в $C^{r|s}_{0,1}(\mathcal{M})$, $C^{r|s}_{1,0}(\mathcal{M})$, и $C^{r|s}_{1,1}(\mathcal{M})$.

Предложение. *В комплексах* $C^{r|s}_{1,0}(\mathcal{M})$ *и* $C^{r|s}_{1,1}(\mathcal{M})$ *выполняется тождество* $\partial^2=0$, *а в комплексах* $C^{r|s}_{0,0}(\mathcal{M})$, $C^{r|s}_{0,1}(\mathcal{M})$ *и* $C^{r|s}_{*,*}(\mathcal{M})$ *выполняется только условие* $\partial^2=0 \pmod 2$. (*Поэтому над* $\mathbb{Z}$ *имеется только два комплекса, а не пять*!)

Вопрос. Формально мы получаем целую кучу гомологий супермногообразий, занумерованных типом ориентации и суперразмерностью. Каков дифференциально-геометрический смысл этих гомологий? Возможно, этот смысл прояснится сам собой, если эти гомологии вычислить хоть для каких-нибудь примеров. А это уже не сомнительный вопрос, а ясная и важная **проблема**.

Назовем $\mathcal{T}$-*семейством* $n|m$-*мерных цепей в* $\mathcal{M}^{n|m}$ формальную сумму $\sum\limits_i k_i\mathcal{K}^i$, где $k_i\in\mathbb{Z}$, а $\mathcal{K}^i$ суть $\mathcal{T}$-семейства подсупермногообразий с кусочно-гладкой границей в $\mathcal{M}$, такие что в каждой точке $t\in T$ множество $\bar{K}\cap(M\times\{t\})$ является компактом в M.

Определения *семейств ориентированных* $r|s$-*цепей* очевидны. Соответствующие обозначения: $C^{r|s}_{a,b}(\mathcal{M};\,\mathcal{T})$. В частности, для $\mathcal{T}=\mathcal{R}^{0|q}$ получаем

$$\begin{gathered}C^{r|s}_{a,b}(\mathcal{M};\,\mathcal{R}^{0|q})\subseteq C^{r|s+q}_{a,b}(\mathcal{M}\times\mathcal{R}^{0|q}),\\ \text{где равенство имеет место, если } s=m.\end{gathered}\tag{6.81}$$

Ниже мы будем использовать то обстоятельство, что группа $C^{r|s}_{a,b}(\mathcal{M};\,\mathcal{T}_1)$ естественным образом вложена в $C^{r|s}_{a,b}(\mathcal{M};\,\mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2)$: умножим каждое слагаемое цепей из $C^{r|s}_{a,b}(\mathcal{M};\,\mathcal{T}_1)$ на $\mathcal{T}_2$.

Теорема. *Как отображение из* $\mathrm{Vol}(\mathcal{M}\times\mathcal{T})\times C^{n|m}_{1,0}(\mathcal{M};\,\mathcal{T})$ *в* $C^\infty(\mathcal{T})$, *интеграл является четным и билинейным отображением. Он согласован со структурой* $C^\infty(\mathcal{T})$-*модуля на первом аргументе и* $\mathbb{Z}$-*модуля на втором.*

Спаривание

$$\int\colon\ \mathrm{Vol}(\mathcal{M};\,\mathcal{T})\times C^{n|m}_{1,0}(\mathcal{M};\,\mathcal{T})\longrightarrow C^\infty(\mathcal{T})\tag{6.82}$$

невырождено: *для любых различных* $\mathcal{K}_1,\,\mathcal{K}_2\in C^{n|m}_{1,0}(\mathcal{M};\,\mathcal{T})$ *существует форма* $\rho\in\mathrm{Vol}(\mathcal{M};\,\mathcal{T})$, *такая что* $\int\limits_{\mathcal{K}_1}\rho\neq\int\limits_{\mathcal{K}_2}\rho$.

Упражнение. Докажите эту теорему.

6.3.8. Дополнение. Пусть $\mathcal{M}$ — супермногообразие, $\mathcal{W}$ — открытое подсупермногообразие в $\mathcal{M}$, такое что замыкание $\mathcal{W}$ в $\mathcal{M}$ — компакт. Обозначим символом $\mathrm{Vol}_{\mathcal{W}}$ множество форм из $\mathrm{Vol}(\mathcal{M})$, носитель которых принадлежит $\bar{\mathcal{W}}$. Оказывается, продолжение интеграла Березина на $\mathrm{Vol}_{\mathcal{W}}$ корректно определено: покроем $\bar{\mathcal{W}}$ картами $\mathcal{U}_i$, разложим $\rho\in\mathrm{Vol}_{\mathcal{W}}$ в сумму форм ρ_i, таких что $\operatorname{supp}\rho_i\subseteq\bar{\mathcal{W}}\cap\mathcal{U}_i$, и положим

$$\int\limits_{\mathcal{W}}{}'\rho=\sum_i\int\limits_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{W}}\rho_i,\tag{6.83}$$

где интегралы в правой части вычисляются в произвольной системе координат на $\mathcal{U}_i$.

Предложение. *Отображение* $\int\limits_{\mathcal{W}}{}'$ *корректно определено, не зависит от выбора покрытия* $\{\mathcal{U}_i\}$ *замыкания* $\bar{\mathcal{W}}$ *и на* $\mathrm{Vol}_{\mathcal{W}}\cap\mathrm{Vol}_c(W)$ *совпадает с интегралом Березина.*

Доказательство можно легко вывести из теоремы из п. 6.3.7. □

§ 6.4. Плотности

6.4.1. Понятие плотности. *Плотностью* на (супер)многообразии $\mathcal{M}^{n|m}$ называется закон, который по каждому подсупермногообразию $\mathcal{N}\hookrightarrow\mathcal{M}$ данной размерности предъявляет форму объема. В этой главе мы ограничимся вложенными подсупермногообразиями и плотностями, которые зависят только от 1-струй вложений (некоторые другие возможности обсуждаются в § 6.7). В координатах плотности интерпретируются следующим образом; см. [BSc]. Пусть супермногообразие $\mathcal{V}^{r|s}$, вложенное в $n|m$-мерную суперобласть $\mathcal{U}$, параметризовано:

$$x_k=f_k(t_1,\,\ldots,\,t_{r+s})\quad\text{для } 1\leqslant k\leqslant n+m.\tag{6.84}$$

Тогда $r|s$-*плотностью* на $\mathcal{U}$ называется функция $\sigma(x,\,A)$ от переменных

$$x=(x_1,\,\ldots x_{n+m})\quad\text{и}\quad A=(a_i^k\mid 1\leqslant k\leqslant n+m,\ 1\leqslant i\leqslant r+s),\tag{6.85}$$

такая что $\int\mathrm{vol}_t\,\sigma\bigl(f,\,\frac{\partial f_k}{\partial t_i}\bigr)$ не зависит от параметризации подсупермногообразия $\mathcal{V}$. Это означает, что

$$\begin{gathered}\sigma(x,\,GA)=\sigma(x,\,A)\cdot\mathrm{Ber}\,G\\ \text{для любого семейства матриц } G\in\mathrm{GL}(r|s;\,C^\infty(\mathcal{V})).\end{gathered}\tag{6.86}$$

Пара $r|s$ называется *размерностью плотности*. Будем говорить не «$r|0$-плотность», а «r-плотность».

Наша цель заключается в том, чтобы сделать это описание более инвариантным. Построим функтор на категории супермногообразий, который каждому супермногообразию $\mathcal{M}$ сопоставляет супермногообразие $\mathcal{T}^{\mathrm{Par}}(\mathcal{M})$, являющееся расслоением над $\mathcal{M}$ со слоем, состоящим из упорядоченных наборов из r четных и s нечетных кокасательных векторов. Теперь определим $r|s$-плотности на супермногообразии $\mathcal{M}$ как функции на открытых подсуперобластях в $\mathcal{T}^{\mathrm{Par}}(\mathcal{M})$, удовлетворяющие условию (6.86).

Мы увидим, что $r|s$-плотности на $r|s$-мерных супермногообразиях можно отождествить с формами объема. Поскольку $\mathcal{T}^{\mathrm{Par}}(\cdot)$ есть функтор, любое вложение супермногообразия $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ задает вложение $\varphi^{\mathrm{Par}}\colon \mathcal{T}^{\mathrm{Par}}(\mathcal{N}) \longrightarrow \mathcal{T}^{r|s}(\mathcal{M})$, и, следовательно, $r|s$-плотность на $\mathcal{N}$ является обратным образом $r|s$-плотности на $\mathcal{M}$. Если $\dim \mathcal{N} = r|s$, то мы получаем $r|s$-плотность на $r|s$-мерном супермногообразии, т. е. желаемую форму объема на $\mathcal{N}$.

Для реализации этой программы мы построим в этом параграфе функтор $\mathcal{T}^{\mathrm{Par}}(\cdot)$ и обсудим две технические проблемы, «заметенные под ковер» в предыдущем изложении.

1) Как ориентируемость супермногообразий и подсупермногообразий сказывается на плотностях?

2) Какие открытые подсупермногообразия из $\mathcal{T}^{\mathrm{Par}}(\mathcal{M})$ естественно выбрать в качестве областей определения плотностей?

Соответствующее определение плотности будет дано в следующем пункте.

Начнем с двух примеров плотностей на многообразиях.

Примеры. 1) Пусть M^n — многообразие. Тогда дифференциальные r-формы являются r-плотностями: форму $\omega \in \Omega^r(M)$ можно ограничить на любое r-мерное подмногообразие $i\colon N \to M$, и мы получим форму максимальной степени $i^*(\omega) \in \Omega^r(N)$ на N, т. е. форму объема на N.

2) Пусть M — риманово многообразие. Тогда на M можно мерить длины кривых, вычислять объемы подмногообразий и т. д. Все это возможно благодаря тому, что, как выразился Ю. И. Манин в книге [МаКП, п. 4.7.8]:

> «*на каждом римановом многообразии заданы*
> *канонические квадраты плотностей всех размерностей*»,

т. е. квадраты плотностей не меняют знак при замене координат.

Эти примеры показывают, что плотность должна иметь по крайней мере две характеристики:

1) размерность подсупермногообразия, на котором она определяет форму объема, — эта размерность будет называться *размерностью плотности*;

2) тип этой формы по отношению к заменам ориентации на этих подсупермногообразиях; этот тип будет называться *типом плотности*.

Как ясно из приведенных примеров, плотности разных типов имеют мало общего друг с другом. Это не удивительно: по куску вложенного под(супер)многообразия невозможно судить, ориентируемо объемлющее (супер)многообразие или нет.

Плотность, задающая форму объема типа $(a,\ b)$ на $r|s$-мерных супермногообразиях $\mathcal{M}^{n|m}$, будет называться *плотностью типа* $(a,\ b)$, и пространство таких плотностей на супермногообразии $\mathcal{M}^{n|m}$ будет обозначаться символом $D^{r|s}_{a,b}(\mathcal{M})$.

Плотности типа $(a,\ b)$ на $\mathcal{M}$ составляют пучок $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-модулей $\mathcal{D}^{r|s}_{a,b}$. В общем случае любой пучок $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-модулей $\mathcal{D}$ имеет четыре ипостаси:

$$\mathcal{D}_{[c,d]} = \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_{[c,d]}, \quad \text{где } c,\ d \in \mathbb{Z}/2.$$

Таким образом, мы должны рассмотреть $4 \times 4 = 16$ пучков $\mathcal{D}^{r|s}_{a,b\,[c,d]}$ плотностей, где $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{Z}/2$ для каждой размерности $r|s$.

Обозначим $C^\infty(\mathcal{W})$-модуль сечений пучка $\mathcal{D}^{r|s}_{a,b\,[c,d]}$ над открытой областью $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{M}$ символом $D^{r|s}_{a,b\,[c,d]}(\mathcal{W})$. Как обычно,

$$\begin{gathered}\mathcal{D}^{r|s}_{a,b\,[c,d]} \simeq \mathcal{D}^{r|s}_{a,b\,[e,f]}, \\ \text{если } \mathcal{M} \text{ допускает } (c+e,\ b+f)\text{-полуориентацию.}\end{gathered} \tag{6.87}$$

Для простоты мы будем в основном рассматривать (в этом параграфе и далее, пока это возможно) $\mathcal{D}^{r|s}_{a,b} := \mathcal{D}^{r|s}_{a,b\,[0,0]}$, предполагая, что $\mathcal{M}$ ориентируемо и поэтому нам встретится не больше четырех типов плотностей.

В частных случаях их будет даже меньше. Как легко видеть,

$$\mathcal{D}^{0|s}_{a,b} \cong \mathcal{D}^{0|s}_{0,0} \quad \text{при } a,\ b \in \mathbb{Z}/2,$$

поскольку $0|s$-мерные супермногообразия ориентируемы. По аналогичным причинам

$$\mathcal{D}^{r|0}_{a,0} \cong \mathcal{D}^{r|0}_{a,1} \quad \text{при } a,\ b \in \mathbb{Z}/2.$$

Если $\mathcal{M}^{n|m}$ допускает $(1,\ 0)$-полуориентацию, то любое подсупермногообразие размерности $n|s$ тоже допускает $(1,\ 0)$-полуориентацию. Следовательно, в этом случае

$$\mathcal{D}^{n|s}_{0,b} \cong \mathcal{D}^{n|s}_{1,b} \quad \text{для любого } b \in \mathbb{Z}/2.$$

Если $\mathcal{M}$ допускает $(0,\ 1)$-полуориентацию, то и любое подсупермногообразие размерности $r|m$ ее допускает. Следовательно, в этом случае

$$\mathcal{D}^{r|m}_{a,0} \cong \mathcal{D}^{r|m}_{a,1} \quad \text{для любого } a \in \mathbb{Z}/2.$$

И наконец, для ориентируемого супермногообразия $\mathcal{M}$ все $\mathcal{D}^{n|m}_{a,b}$ изоморфны.

6.4.1a. Три суперверсии многообразий Штифеля. Рассмотрим линейное супермногообразие $\mathcal{T}^{r|s}_{n|m} \simeq \mathcal{R}^{rn+sm|rm+ns}$, координатные функции которого занумерованы парой чисел и заполняют суперматрицу $A = (a^k_i)$ **стандартного формата** $(r|s) \times (n|m)$. Подстилающее многообразие супермногообразия $\mathcal{T}^{r|s}_{n|m}$ является многообразием блочных матриц вида

$$\begin{pmatrix} A_{00} & 0 \\ 0 & A_{11} \end{pmatrix}, \quad \text{где } A_{00} \in \mathrm{Mat}(r \times n; \mathbb{R}) \;\text{ и }\; A_{11} \in \mathrm{Mat}(s \times m; \mathbb{R}). \tag{6.88}$$

При $r \leqslant n$ обозначим символом ${}^{(0)}\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}$ открытое подсупермногообразие в $\mathcal{T}^{r|s}_{n|m}$, подстилающее многообразие которого задается условием $\operatorname{rk} A_{00} = r$ для матрицы A_{00} из формулы (6.88).

При $s \leqslant m$ обозначим символом ${}^{(1)}\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}$ открытое подсупермногообразие в $\mathcal{T}^{r|s}_{n|m}$, подстилающее многообразие которого задается условием $\operatorname{rk} A_{11} = s$ для матрицы A_{11} из формулы (6.88).

При $r|s \leqslant n|m$ положим

$$\mathcal{E}^{r|s}_{n|m} = \big({}^{(0)}\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}\big) \cap \big({}^{(1)}\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}\big). \tag{6.89}$$

Супермногообразие $\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}$ называется *супермногообразием $r|s$-реперов* на $\mathcal{R}^{n|m}$ или *супермногообразием Штифеля*. Отметим, что, строго говоря, имеется несколько типов супермногообразий Штифеля $\mathcal{E}^{\mathrm{Par}_1}_{\mathrm{Par}_2}$, по одному на каждую пару суперматричных форматов $\mathrm{Par}_1 \times \mathrm{Par}_2$, где $|\,\mathrm{Par}_1\,| = r|s$ и $|\,\mathrm{Par}_2\,| = n|m$. Пока возможно, мы будем для простоты рассматривать лишь один тип супермногообразий Штифеля — тот, что отвечает стандартным форматам.

Очевидно, что $\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}$ плотно в $\mathcal{T}^{r|s}_{n|m}$ при $r \leqslant n$ и $s \leqslant m$, а если только одно из этих неравенств выполняется, то соответственно либо ${}^{(0)}\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}$, либо ${}^{(1)}\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}$ плотно в $\mathcal{T}^{r|s}_{n|m}$.

Замечание. Пусть $A = (a^k_i)$ — координаты на $\mathcal{T}^{r|s}_{n|m}$ и $B = (b^k_i)$ — координаты на $\mathcal{T}^{s|r}_{m|n}$. Соответствие $a^k_i \longleftrightarrow b^{n+m-k}_{r+s-i}$ задает изоморфизм $\mathcal{T}^{r|s}_{n|m} \cong \mathcal{T}^{s|r}_{m|n}$. Этот изоморфизм индуцирует диффеоморфизмы

$${}^{(0)}\mathcal{E}^{r|s}_{n|m} \longleftrightarrow {}^{(1)}\mathcal{E}^{s|r}_{m|n} \quad \text{и} \quad {}^{(1)}\mathcal{E}^{r|s}_{n|m} \longleftrightarrow {}^{(0)}\mathcal{E}^{s|r}_{m|n}. \tag{6.90}$$

Говоря неформально, $\mathcal{T}^{r|s}_{n|m}$ является супермногообразием упорядоченных множеств, состоящих из r четных и s нечетных векторов из $\mathcal{R}^{n|m}$, а ${}^{(0)}\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}$ выделяется тем условием, что четные векторы должны быть линейно независимы; аналогично ${}^{(1)}\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}$ выделяется условием линейной независимости нечетных векторов. И, наконец, супермногообразие (6.89) это супермногообразие $r|s$-реперов в $\mathcal{R}^{n|m}$.

Мы не можем ограничиться рассмотрением ни $\mathcal{T}^{r|s}_{n|m}$, ни $\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}$. Первое супермногообразие слишком большое, поскольку функция $\mathrm{Ber}(A)$, которая играет важнейшую роль в теории интегрирования, первоначально определена только на супермногообразии $\mathcal{E}^{n|m}_{n|m}$. Эту функцию можно естественно продолжить на ${}^{(1)}\mathcal{E}^{n|m}_{n|m}$, но на супермногообразии $\mathcal{T}^{n|m}_{n|m} \setminus {}^{(1)}\mathcal{E}^{n|m}_{n|m}$ у нее обязательно будут особенности. Аналогичное утверждение верно для Ber^{-1} и ${}^{(0)}\mathcal{E}^{n|m}_{n|m}$.

И наоборот, $\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}$ — слишком маленькое супермногообразие. Теория плотностей, основанная на $\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}$ может справиться только с **вложениями** подсупермногообразий, и мы получаем ограничения $r|s \leqslant n|m$.

В § 6.6 мы покажем нечто неожиданное, а именно, что

> *если $r > n$, а $s < m$, то существуют $r|s$-плотности на $n|m$-мерной суперобласти $\mathcal{U}$ и семейства морфизмов $r|s$-мерной суперобласти в $\mathcal{U}$, такие что интегралы от прообразов соответствующих плотностей не обращаются в нуль.*

Это, собственно, и позволяет нам быть уверенным в том, что проблема, сформулированная в конце введения в эту главу, имеет положительное решение.

Таким образом, мы должны развить два варианта теории плотностей. Одна основана на $\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}$, а другая — на ${}^{(1)}\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}$ (та, что основана на ${}^{(0)}\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}$, аналогична).

По супермногообразию $\mathcal{M}^{n|m}$ и атласу $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ на нем склеим супермногообразие $\mathcal{T}^{r|s}(\mathcal{M})$ из карт $\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{T}^{r|s}_{n|m}$ следующим образом. Каждому открытому вложению $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ суперобластей с координатами x и y соответственно сопоставим морфизм $\varphi^{r|s}\colon \mathcal{U} \times \mathcal{T}^{r|s}_{n|m} \longrightarrow \mathcal{V} \times \mathcal{T}^{r|s}_{n|m}$, который в координатах имеет вид

$$(\varphi^{r|s})^*(y_k) = \varphi^*(y_k), \qquad (\varphi^{r|s})^*(b^k_i) = \sum_{l=1}^{n+m} a^l_i \,\frac{\partial \varphi^*(y_k)}{\partial x_l}, \tag{6.91}$$

где $(x,\, a^l_i)$ и $(y,\, b^k_i)$ — координаты на $\mathcal{U} \times \mathcal{T}^{r|s}_{n|m}$ и $\mathcal{V} \times \mathcal{T}^{r|s}_{n|m}$ соответственно.

Ясно, что супермногообразие $\mathcal{T}^{r|s}(\mathcal{M})$ построено одновременно с проекцией на $\mathcal{M}$ и является суперрасслоением, слой которого $\mathcal{T}^{r|s}_{n|m}$ в точке p является супермногообразием, соответствующим линейному суперпространству $(T_p\mathcal{M})^r \oplus (\Pi T_p\mathcal{M})^s$. Когда выполняется одно из неравенств $r \leqslant n$ или $s \leqslant m$, мы можем определить одно из расслоений ${}^{(0)}\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}(\mathcal{M})$ или

${}^{(1)}\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}(\mathcal{M})$, а если выполняются оба неравенства, то можем определить расслоение $\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}(\mathcal{M})$. Если $r|s \leqslant n|m$, то получаем коммутативную диаграмму вложений векторных расслоений на $\mathcal{M}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}^{r|s}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[d] & {}^{(1)}\mathcal{E}^{r|s}(\mathcal{M}) \arrow[d] \\ {}^{(0)}\mathcal{E}^{r|s}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathcal{T}^{r|s}(\mathcal{M}) \end{tikzcd} \qquad (6.92)$$

Любой морфизм супермногообразий $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ можно поднять до морфизма

$$\varphi^{r|s}\colon \mathcal{T}^{r|s}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{T}^{r|s}(\mathcal{N}), \tag{6.93}$$

совместного с проекцией. В локальных координатах $(x,\ A = (a_i^l))$ на $\mathcal{T}^{r|s}(\mathcal{M})$ и $(y,\ B = (b_i^k))$ на $\mathcal{T}^{r|s}(\mathcal{N})$ получаем

$$(\varphi^{r|s})^*(b_i^k) = \sum_{l=1}^{n+m} a_i^l \, \frac{\partial \varphi^*(y_k)}{\partial x_l} \quad \text{и} \quad \tilde{\varphi}^{r|s}(x,\ A) = \Big(\tilde{\varphi}(x),\ \tilde{A} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}(x)\Big), \tag{6.94}$$

где A — блочно-диагональная матрица координат на $T^{r|s}(N)$.

Упражнение. Проверьте, что морфизм $\varphi^{r|s}$ определен корректно, а соответствие $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{T}^{r|s}(\mathcal{M})$ является функтором в категории многообразий (как гладких, так и аналитических, определенных в книгах [МаКП, Бер]).

Мы скажем, что *морфизм* $\varphi\colon \mathcal{M}^{n|m} \to \mathcal{N}$ имеет *полный четный ранг*, если в любой локальной системе координат $x = (u,\ \xi)$ на $\mathcal{M}$ и $y = (v,\ \eta)$ на $\mathcal{N}$ выполняется условие

$$\operatorname{rk}\left(\frac{\partial \varphi^*(v)}{\partial u}\right) = n \quad \text{в любой точке многообразия } \mathcal{M}. \tag{6.95}$$

Скажем, что *морфизм* $\varphi\colon \mathcal{M}^{n|m} \to \mathcal{N}$ имеет *полный нечетный ранг*, если

$$\operatorname{rk}\left(\frac{\partial \varphi^*(\eta)}{\partial \xi}\right) = m \qquad \text{в любой точке многообразия } \mathcal{M},$$

и *полный ранг*, если морфизм одновременно имеет и полный четный, и полный нечетный ранги.

6.4.2. Предложение. 1) *При $r \leqslant n$ морфизм $\varphi\colon \mathcal{M}^{n|m} \to \mathcal{N}$ имеет полный четный ранг тогда и только тогда, когда*

$$\varphi^{r|s}\big({}^{(0)}\mathcal{E}^{r|s}(\mathcal{M})\big) \subseteq {}^{(0)}\mathcal{E}^{r|s}(\mathcal{N}). \tag{6.96}$$

2) *При $s \leqslant m$ морфизм $\varphi\colon \mathcal{M}^{n|m} \to \mathcal{N}$ имеет полный нечетный ранг тогда и только тогда, когда*

$$\varphi^{r|s}\big({}^{(1)}\mathcal{E}^{r|s}(\mathcal{M})\big) \subseteq {}^{(1)}\mathcal{E}^{r|s}(\mathcal{N}). \tag{6.97}$$

3) *При $r \leqslant n$ и $s \leqslant m$ морфизм $\varphi\colon \mathcal{M}^{n|m} \to \mathcal{N}$ имеет полный ранг тогда и только тогда, когда $\varphi^{r|s}(\mathcal{E}^{r|s}(\mathcal{M})) \subseteq \mathcal{E}^{r|s}(\mathcal{N})$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть только подстилающие морфизмы. Морфизм $\varphi^{r|s}$ линеен по слою над $z \in \mathcal{M}$, а в локальных координатах x на $\mathcal{M}$ и y на $\mathcal{N}$ ему отвечает матрица из двух подобных блоков, так что мы приходим к элементарной задаче линейной алгебры. Если $X \in \mathrm{Mat}(k \times n)$ и $\operatorname{rk} X = r$, то отображение $A \mapsto AX$ переводит любую $(r \times k)$-матрицу ранга r в $(r \times n)$-матрицу ранга r.

С другой стороны, если $\operatorname{rk} X < r$, то $\operatorname{rk} AX < r$. ☐

Замечание. На $\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}$ действуют супергруппы $\mathcal{GL}(n|m)$ и $\mathcal{GL}(r|s)$, и их действия коммутируют. Фактор супермногообразия $\mathcal{G}r^{r|s}_{n|m}$ по $\mathcal{GL}(r|s)$-действию называется *грассманианом $r|s$-мерных подсуперпространств в $\mathcal{R}^{n|m}$*.

Более точно, на $\mathcal{E}^{\mathrm{Par}_1}_{\mathrm{Par}_2}$, где $|\,\mathrm{Par}_1\,| = r|s$, а $|\mathrm{Par}_2| = n|m$, действуют супергруппы $\mathcal{GL}(\mathrm{Par}_2)$ и $\mathcal{GL}(\mathrm{Par}_1)$, и их действия коммутируют. *Грассманиан $r|s$-мерных подсуперпространств в $\mathcal{R}^{n|m}$* — это **несвязное объединение по всем форматам** факторов

$$\mathcal{G}r^{\mathrm{Par}_1}_{\mathrm{Par}_2} := \mathcal{E}^{\mathrm{Par}_1}_{\mathrm{Par}_2} / \mathcal{GL}(\mathrm{Par}_1). \tag{6.98}$$

Иногда (и мы тоже будем этим грешить) термин «грассманиан» применяется к индивидуальным членам этого несвязного объединения (6.98). Для этих индивидуальных членов нужно подобрать название.

Аналогично из $\mathcal{E}^{r|s}(\mathcal{M})$ мы получаем грассманиан $r|s$-мерных касательных плоскостей. Теорию плотностей, основанную на $\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}$, можно изложить в терминах грассманианов, а вот теорию, основанную на ${}^{(1)}\mathcal{E}^{r|s}_{n|m}$, нельзя. Пока мы эти грассманианы использовать не будем, см. [МаКП].

6.4.3. Определение плотностей.

6.4.3а. Для любого супермногообразия параметров $\mathcal{T}$ обозначим символом $\mathrm{GL}_+(r|s,\ \mathcal{T})$ подгруппу в $\mathrm{GL}(r|s,\ C^\infty(\mathcal{T}))$:

$$\mathrm{GL}_+(r|s,\ \mathcal{T}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{l} \operatorname{cpr}(\det A) > 0 \text{ и } \operatorname{cpr}(\det D) > 0 \\ \text{в любой точке подстилающего многообразия } T \end{array} \right\}. \tag{6.99}$$

Пусть $\mathcal{M}^{n|m}$ — супермногообразие. Любое $\mathcal{M}\times\mathcal{T}$-семейство суперматриц $g\in \mathrm{GL}_+(r|s,\ \mathcal{M}\times\mathcal{T})$ определяет $\mathcal{T}$-семейство морфизмов расслоений

$$g\colon \mathcal{T}^{r|s}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{T}^{r|s}(\mathcal{M}). \tag{6.100}$$

В карте $\mathcal{U}\times\mathcal{T}^{r|s}_{n|m}$ имеем

$$g^*(a_i^k) = \sum_{1\leqslant j\leqslant r+s} \bigl(g_i^j\big|_{\mathcal{U}\times\mathcal{T}}\bigr)a_I^k \quad \text{и} \quad g^*(x_i)=x_i. \tag{6.101}$$

Это действие согласовано с морфизмами в следующем смысле. Для любого морфизма $\varphi\colon \mathcal{N}\to\mathcal{M}$ имеем

$$\varphi^*(g)\in \mathrm{GL}_+(r|s,\ \mathcal{N}\times\mathcal{T}) \quad \text{и} \quad \varphi^{r|s}\circ g = \varphi^*(g)\circ\varphi^{r|s}. \tag{6.102}$$

Функция $\sigma\in C^\infty(\mathcal{E}^{r|s}(\mathcal{M}))$, такая что для любого $g\in \mathrm{GL}_+(r|s,\ \mathcal{M}\times\mathcal{T})$ и любого $\mathcal{T}$ выполняется тождество

$$g^*(\sigma)=\sigma\,\mathrm{Ber}\,g, \tag{6.103}$$

будет называться *$r|s$-плотностью* на $\mathcal{M}$. Иными словами,

$$\sigma(x,\ gA)=\sigma(x,\ A)\,\mathrm{Ber}\,g \quad \text{для любой } r|s\text{-плотности } \sigma\in C^\infty(\mathcal{E}^{r|s}(\mathcal{M})). \tag{6.104}$$

Функция $\sigma\in C^\infty({}^{(1)}\mathcal{E}^{r|s}(\mathcal{M}))$, удовлетворяющая тому же условию (6.104), называется *продолжаемой $r|s$-плотностью* на $\mathcal{M}$.

Итак, $r|s$-плотности на $\mathcal{M}$ определены при $r|s\leqslant n|m$, а продолжаемые $r|s$-плотности на $\mathcal{M}$ определены при $s\leqslant m$. Термин «продолжаемые» объясняется следующим образом. Если $r|s\leqslant n|m$, то супермногообразие $\mathcal{E}^{r|s}(\mathcal{M})$ плотно в ${}^{(1)}\mathcal{E}^{r|s}(\mathcal{M})$, так что пространства продолжаемых $r|s$-плотностей отождествляется с подпространством тех $r|s$-плотностей, которые можно продолжить на ${}^{(1)}\mathcal{E}^{r|s}(\mathcal{M})$ как дифференцируемые функции.

Упражнение. Докажите существование непродолжаемых плотностей.

Обозначим пространство $r|s$-плотностей на $\mathcal{M}$ символом $D^{r|s}(\mathcal{M})$, а пространства продолжаемых $r|s$-плотностей — символом $ED^{r|s}(\mathcal{M})$. Для любой суперматрицы $g\in\mathrm{GL}(r|s,\ C^\infty(\mathcal{M}\times\mathcal{T}))$ стандартного формата $\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ и любых $a,\ b\in\mathbb{Z}/2$ положим

$$\mathrm{Ber}_{a,b}\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix} = \mathrm{Ber}\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\cdot \mathrm{sgn}(\det A)^a\cdot\mathrm{sgn}(\det D)^b. \tag{6.105}$$

Функция $\sigma\in C^\infty(\mathcal{E}^{r|s}(\mathcal{M}))$, такая что

$$g^*(\sigma)=\sigma\,\mathrm{Ber}_{a,b}\,g \tag{6.106}$$

для любой функции $g\in\mathrm{GL}(r|s,\ C^\infty(\mathcal{M}\times\mathcal{T}))$ и любого супермногообразия параметров $\mathcal{T}$, будет называться *$r|s$-плотностью типа $(a,\ b)$*.

Продолжаемые плотности типа $(a,\ b)$ определяются таким же образом. Очевидно, что

$$D^{r|s}(\mathcal{M}) = \bigoplus_{a,b\in\mathbb{Z}/2} D^{r|s}_{a,b}(\mathcal{M});\qquad ED^{r|s}(\mathcal{M}) = \bigoplus_{a,b\in\mathbb{Z}/2} ED^{r|s}_{a,b}(\mathcal{M}), \tag{6.107}$$

где $D^{r|s}_{a,b}(\mathcal{M})$ — пространства $r|s$-плотностей типа $(a,\ b)$ на $\mathcal{M}$, а $ED^{r|s}_{a,b}(\mathcal{M}))$ — пространства продолжаемых плотностей.

6.4.4. Предложение. *Пусть $\mathcal{M}^{n|m}$ и $\mathcal{N}^{k|l}$ — супермногообразия, а $s\leqslant m$ и $s\leqslant l$.*

1) *Если морфизм $\varphi\colon\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ имеет полный ранг, а $r\leqslant n$ и $r\leqslant k$, то*

$$(\varphi^{r|s})^*(D^{r|s}_{a,b}(\mathcal{M}))\subseteq D^{r|s}_{a,b}(\mathcal{N}). \tag{6.108}$$

2) *Если морфизм $\varphi\colon\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ имеет полный нечетный ранг, то*

$$(\varphi^{r|s})^*(ED^{r|s}_{a,b}(\mathcal{M}))\subseteq ED^{r|s}_{a,b}(\mathcal{N}). \tag{6.109}$$

Доказательство следует из предложения 6.4.2 и определения плотностей с учетом согласованности $\mathcal{GL}(r|s)$-действия с морфизмами. ☐

Лемма. *Пусть $\mathcal{U}^{n|m}$ — суперобласть с координатами x, а $(x,\ A)$ — система координат на $\mathcal{T}^{n|m}(\mathcal{M})$, ассоциированная с x. Тогда $D^{n|m}_{a,b}(\mathcal{U})$ является свободным $C^\infty(\mathcal{U})$-модулем ранга $1|0$ с одной образующей $\mathrm{Ber}_{a,b}(A)$.*

Отображение

$$V_{\mathcal{U}}\colon D^{n|m}_{a,b}(\mathcal{U})\longrightarrow \mathrm{Vol}(\mathcal{U})_{[a,b]},\qquad V_{\mathcal{U}}(\mathrm{Ber}_{a,b}(A)f)=\mathrm{vol}_{x\,[a,b]}\,f, \tag{6.110}$$

не зависит от системы координат на $\mathcal{U}$, и

$$\Pi^m V_{\mathcal{U}}\colon \Pi^m D^{n|m}_{a,b}(\mathcal{U})\longrightarrow \mathrm{Vol}(\mathcal{U})_{[a,b]} \tag{6.111}$$

является изоморфизмом $C^\infty(\mathcal{U})$-модулей. Для любого $b\in\mathbb{Z}/2$ выполняются соотношения $ED^{n|m}_{1,b}(\mathcal{U})=0$ и $ED^{n|m}_{0,b}(\mathcal{U})=D^{n|m}_{0,b}(\mathcal{U})$.

Доказательство. Из условия

$$\sigma(x,\ GA)=\sigma(x,\ A)\cdot\mathrm{Ber}_{a,b}\,G \tag{6.112}$$

(см. (6.106)) мы выводим, благодаря обратимости матрицы A, что

$$\sigma(x,\ A)=\sigma(x,\ I)\cdot\mathrm{Ber}_{a,b}\,A,\quad \text{где } I \text{ — единичная матрица}. \tag{6.113}$$

Таким образом, функция $\mathrm{Ber}_{a,b}\,A$ составляет базис в $C^\infty(\mathcal{U})$-модуле $D^{n|m}_{a,b}(\mathcal{U})$ (очевидно, что $\mathrm{Ber}_{a,b}(A)$ является элементом этого модуля), а соответствие

$$\mathrm{Ber}_{a,b}(A)f \longmapsto \mathrm{vol}_{x\,[a,b]}\, f \tag{6.114}$$

определяет изоморфизм $V_{\mathcal{U}}\colon D^{n|m}_{a,b} \longrightarrow \mathrm{Vol}(\mathcal{U})_{[a,b]}$ четности Π^m правых $C^\infty(\mathcal{U})$-модулей. И функция $\mathrm{Ber}_{a,b}(A)$, и образующая $\mathrm{vol}_{x\,[a,b]}$ модуля $\mathrm{Vol}(\mathcal{U})_{[a,b]}$ умножаются при замене координат $x \mapsto y$ на $\mathrm{Ber}_{a,b}\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)$, а значит, изоморфизм $V_{\mathcal{U}}$ не зависит от системы координат на $\mathcal{U}$. Легко видеть, что функции вида $\mathrm{Ber}_{a,b}(A)$ продолжаемы только при $a = 0 \pmod 2$, что завершает доказательство. □

Пусть теперь $\mathcal{M}^{n|m}$ — супермногообразие. Лемма из п. 6.4.4 обеспечивает возможность склеить отображения $V_{\mathcal{U}}$ для разных карт в глобальное отображение

$$V_{\mathcal{M}}\colon D^{n|m}_{a,b}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Vol}(\mathcal{M})_{[a,b]}. \tag{6.115}$$

6.4.5. Предложение. *Построенное отображение $V_{\mathcal{M}}$ определяет изоморфизм $C^\infty(\mathcal{M})$-модулей*

$$\Pi^m V_{\mathcal{M}}\colon \Pi^m D^{n|m}_{a,b}(\mathcal{M}) \cong \mathrm{Vol}(\mathcal{M})_{[a,b]}. \tag{6.116}$$

Упражнение. Докажите предложение.

6.4.6. Итак, мы построили желаемый объект: если $\varphi\colon \mathcal{N}^{r|s} \to \mathcal{M}$ — морфизм полного ранга, то по элементу $\sigma \in D^{r|s}_{a,b}(\mathcal{M})$ мы восстанавливаем форму объема $V_{\mathcal{N}}(\varphi^{r|s})^*(\sigma) \in \mathrm{Vol}(\mathcal{N})_{a,b}$.

Если φ — морфизм полного нечетного ранга, но не полного ранга, то мы можем интегрировать продолжаемые плотности только типов (0, 1) и (0, 0).

Вопрос. В § 6.6 мы увидим, что существует полно́ продолжаемых плотностей типа (0, 1). А вот запас продолжаемых $r|s$-плотностей типа (0, 0) на $n|m$-мерной суперобласти пока не описан для общего случая $r|s$, т. е. для $0 < s < m$, $r \neq 0$, $r \neq n$. Каков этот запас? Опишите его явно.

Предложение. *Если $\sigma \in D^{r|s}_{a,b}(\mathcal{M})$ — ненулевая плотность, то для некоторого $q \in \mathbb{N}$ существует $\mathcal{R}^{0|q}$-семейство $r|s$-мерных подсупермногообразий в $\mathcal{M}$, такое что на этом семействе σ задает отличную от нуля форму объема.*

Доказательство. Можно предположить, что $\mathcal{M}$ — суперобласть с координатами $x = (w, \xi)$. Пусть $E = (e^k_j)^{1\leqslant k\leqslant r+s}_{1\leqslant j\leqslant n+m}$ — координаты в слое расслоения $\mathcal{T}^{r|s}(\mathcal{U})$. Мы можем представить E как сумму $B + \Phi$, где элементы суперматрицы B четны, а элементы суперматрицы Φ нечетны.

Пусть $\sigma(x, E)$ не обращается в нуль в окрестности точки с координатами $(u, A) \in T^{r|s}(U)$, а $\mathcal{V}$ — какая-то $r|s$-мерная суперобласть с координатами t_i.

Возьмем два набора нечетных параметров $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ и

$$\Omega = \{\omega^k_j \mid p(k) + p(j) = \bar{1},\ 1 \leqslant j \leqslant n+m,\ 1 \leqslant k \leqslant r+s\}. \tag{6.117}$$

Определим морфизм $\varphi\colon \mathcal{V} \times \mathcal{R}^{0|m+ns+mr} \longrightarrow U$ в векторном виде, положив для вектор-строк координат $\varphi^*(x) = y + tC$, где начальное значение (при $t = 0$) каждой четной координаты y_k равно u_k, начальное значение каждой нечетной координаты ξ_k равно η_k, а $\mathcal{R}^{0|ns+mr}$-семейство $r|s \times n|m$-суперматриц C есть $A + \Omega$. Значение частной производной $\dfrac{\partial\varphi^*(x)}{\partial x}$ — константа, равная A, поэтому морфизм φ имеет требуемый вид (полного ранга или полного нечетного ранга, такого же как и у A).

С другой стороны, $(\varphi^{r|s})^*\sigma\big|_{t=0} = \sigma(u, \eta, C) \neq 0$. □

Замечание. Мы установили, таким образом, что любая отличная от нуля плотность восстанавливается по значению своих интегралов, если рассмотреть семейства вложенных подсупермногообразий. Если же мы проигнорируем семейства и рассмотрим, например, $\xi_1 \ldots \xi_m D^{r|s}(R^{n|m})$ при $s < m$, то из такой плотности на любом $r|s$-мерном супермногообразии можно восстановить только форму объема, тождественно равную нулю.

§ 6.5. Супераналоги дифференциальных форм

6.5.1. Супермногообразия с крышечкой.

6.5.1a. Пусть $\mathcal{U}^{n|m}$ — суперобласть. Каждой системе координат x на $\mathcal{U}$ сопоставим систему координат $(x, \hat{x}) = (u, \hat{\xi}, \xi, \hat{u})$ на $\widehat{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \times \mathcal{R}^{m|n}$, где $\hat{\xi}_j$ — четные, а $\hat{u}_i$ — нечетные координаты. Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — суперобласти с фиксированными системами координат x и y соответственно. Каждому морфизму суперобластей $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ сопоставим морфизм $\hat{\varphi}\colon \widehat{\mathcal{U}} \to \widehat{\mathcal{V}}$, который в координатах имеет вид

$$\hat{\varphi}^*(y_i) = \varphi^*(y_i), \qquad \hat{\varphi}^*\hat{y}_i = \sum_{1\leqslant j\leqslant n+m} \hat{x}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi^*(y_i). \tag{6.118}$$

Очевидно, что если φ — диффеоморфизм, то и $\hat{\varphi}$ — диффеоморфизм.

Пусть $\mathcal{M}$ — супермногообразие, а $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ — атлас на $\mathcal{M}$. Построим супермногообразие $\widehat{\mathcal{M}}$, склеив его из карт $\{\widehat{\mathcal{U}}_\alpha\}$ с помощью морфизмов $\hat{\varphi}_{\alpha\beta}$. Очевидно, что $\widehat{\mathcal{M}}$ — это в точности $\mathcal{T}^{0|1}(\mathcal{M})$, так что имеется *каноническая проекция* $\mathrm{pr}_0\colon \widehat{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$ и каждому морфизму супермногообразий $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ отвечает морфизм $\hat{\varphi}\colon \widehat{\mathcal{N}} \to \widehat{\mathcal{M}}$.

Пространство функций $\widehat{\Omega}(\mathcal{M}) := C^\infty(\widehat{\mathcal{M}})$ на $\widehat{\mathcal{M}}$ называется *пространством псевдодифференциальных форм* на $\mathcal{M}$. Супералгебра $C^\infty(\mathcal{M})$ каноническим образом вложена в супералгебру $\widehat{\Omega}(\mathcal{M})$ с помощью pro*, а, стало быть, на $\widehat{\Omega}(\mathcal{M})$ имеется структура $C^\infty(\mathcal{M})$-модуля.

На $\widehat{\mathcal{M}}$ есть несколько канонических структур, которыми супермногообразия $\mathcal{T}^{r|s}(\mathcal{M})$ при произвольных r и s вроде бы не обладают. Наиболее ценные из них — следующие:

- каноническое гомологическое векторное поле d (внешний дифференциал),
- каноническое нечетное отображение $\iota\colon \operatorname{Vect}(\mathcal{M}) \to \operatorname{Vect}(\widehat{\mathcal{M}})$ (внутренняя производная),
- каноническая форма объема.

Все эти структуры появляются благодаря тому, что под действием замен координат на $\mathcal{M}$ матрица частных производных соответствующей замены координат (6.118) на $\widehat{\mathcal{M}}$ имеет очень специальный вид. А именно, пусть x — локальные координаты на $\mathcal{M}$, а $X = (x, \hat{x})$ — соответствующие координаты на $\widehat{\mathcal{M}}$. Пусть y — другая система координат на $\mathcal{M}$, а $Y = (y, \hat{y})$ — соответствующие координаты на $\widehat{\mathcal{M}}$. Тогда матрица частных производных на $\widehat{\mathcal{M}}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad \text{где } A = \frac{\partial x}{\partial y}. \tag{6.119}$$

Отметим, что в этой формуле координаты $(x, \hat{x})$ и $(y, \hat{y})$ перечислены в нестандартном формате: нечетные координаты на $\mathcal{M}$ предшествуют своим дифференциалам, которые четны. Такие системы координат более удобны на супермногообразиях с крышечкой.

Упражнение. Выпишите матрицу частных производных на $\widehat{\mathcal{M}}$ в стандартном формате координат.

Замечание. Ниже в этом параграфе мы определим разные объекты теории интегрирования в терминах $\widehat{\mathcal{M}}$. Однако мы получим объекты, естественно связанные с $\mathcal{M}$, поскольку на $\widehat{\mathcal{M}}$ мы рассматриваем только те диффеоморфизмы, которые подняты с диффеоморфизмов супермногообразия $\mathcal{M}$.

6.5.1б. Пусть $\mathcal{U}$ — суперобласть с координатами x. Положим $d_{\mathcal{U}} = \sum \hat{x}_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} \in (\operatorname{Vect}(\widehat{\mathcal{U}}))_{\bar{1}}$.

Предложение. 1) *Внешний дифференциал $d_{\mathcal{U}}$ не зависит от выбора системы координат на $\mathcal{U}$.*

2) *Внешний дифференциал $d_{\mathcal{U}}$ — гомологическое векторное поле, т. е. $d_{\mathcal{U}}^2 = 0$.*

3) *Если $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ — морфизм супермногообразий, то $\hat{\varphi}^* \circ d_{\mathcal{V}} = d_{\mathcal{U}} \circ \hat{\varphi}^*$, т. е. диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\Omega}(\mathcal{V}) \arrow[r, "\hat{\varphi}^*"] \arrow[d, "d_{\mathcal{V}}"'] & \widehat{\Omega}(\mathcal{U}) \arrow[d, "d_{\mathcal{U}}"] \\
\Omega(\mathcal{V}) \arrow[r, "\hat{\varphi}^*"] & \widehat{\Omega}(\mathcal{U})
\end{tikzcd} \tag{6.120}$$

коммутативна.

Доказательство. Определение морфизма $\hat{\varphi}$ сводится к двум условиям

$$\hat{\varphi}^*\big|_{C^\infty(\mathcal{V})} = \varphi^* \quad \text{и} \quad \hat{\varphi}^* \circ d_{\mathcal{V}}\big|_{C^\infty(\mathcal{V})} = d_{\mathcal{U}} \circ \hat{\varphi}^*\big|_{C^\infty(\mathcal{V})}. \tag{6.121}$$

□

Следствие. *Имеется каноническое гомологическое векторное поле $d_{\mathcal{M}}$ на $\widehat{\mathcal{M}}$ для произвольного супермногообразия $\mathcal{M}$. Для любого морфизма $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ выполняется условие $d_{\mathcal{N}} \circ \varphi^* = \varphi^* \circ d_{\mathcal{M}}$.*

Обычно мы опускаем индекс $\mathcal{M}$ и обозначаем все поля $d_{\mathcal{M}}$ символом d, который называется *внешним дифференциалом*.

6.5.1в. Пусть $\mathcal{U}$ — суперобласть. По любому полю $D \in \operatorname{Vect}(\mathcal{U})$ и системе координат x на $\mathcal{U}$ построим векторное поле

$$\iota_D = -(-1)^{p(D)} \sum D(x_i) \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} \in \operatorname{Vect}(\widehat{\mathcal{U}}). \tag{6.122}$$

Лемма. *Векторное поле ι_D не зависит от выбора системы координат на $\mathcal{U}$.*

Доказательство. По определению поле ι_D на $\widehat{\mathcal{U}}$ таково, что

$$\iota_D f = 0 \quad \text{и} \quad \iota_D df = -(-1)^{p(d)} D(f) \quad \text{для любой функции } f \in C^\infty(\mathcal{U}). \tag{6.123}$$

Эти свойства полностью определяют поле ι_D, поскольку любая система координат на $\widehat{\mathcal{U}}$ — это набор координат на $\mathcal{U}$ и их дифференциалов. □

Таким образом, для произвольного многообразия $\mathcal{M}$ и для любого векторного поля $D \in \operatorname{Vect}(\mathcal{M})$ на нем можно однозначно построить векторное поле $\iota_D \in \operatorname{Vect}(\widehat{\mathcal{M}})$, которое называется *внутренним умножением* на D.

Предложение. 1) *Справедливы соотношения*

$$\iota_D|_{C^\infty(\mathcal{M})} = 0,$$

$$\iota_D \circ d\big|_{C^\infty(\mathcal{M})} = -(-1)^{p(D)} D.$$

2) *Отображение $\iota\colon \operatorname{Vect}(\mathcal{M}) \longrightarrow \operatorname{Vect}(\widehat{\mathcal{M}})$ нечетно и согласовано со структурой левых $C^\infty(\mathcal{M})$-модулей.*

3) *На* $\widehat{\Omega}(\mathcal{M})$ *производная Ли вдоль векторного поля* $D\in\mathrm{Vect}(\mathcal{M})$ *задается формулой*

$$L_D=[d,\,\iota_D]. \tag{6.124}$$

В частности, если D *четно, то*

$$L_D=(d+\iota_D)^2. \tag{6.125}$$

4) *Выполняется соотношение* $[d,\,L_D]=0$.

5) *Для любых* $D_1,\,D_2\in\mathrm{Vect}(\mathcal{M})$ *выполняются тождества*

$$\begin{aligned}&[\iota_{D_1},\,\iota_{D_2}]=0,\\&[L_{D_1},\,L_{D_2}]=L_{[D_1,D_2]},\\&[\iota_{D_1},\,L_{D_2}]=\iota_{[D_1,D_2]}.\end{aligned}\tag{6.126}$$

Доказательство. Утверждение 1 содержится в предыдущей лемме. Утверждение 2 следует из координатной записи поля ι_D. Производная Ли является дифференцированием, поэтому достаточно проверить равенство (6.124) на пробных функциях из $C^\infty(\mathcal{M})$ и их дифференциалах. Поскольку дифференциал d инвариантен относительно диффеоморфизмов, $[d,\,L_D]=0$. Имеем

$$[d,\,\iota_D]=d\circ\iota_D-(-1)^{p(d)p(D)}\iota_D\circ d=d\circ\iota_D-(-1)^{p(D)}\iota_D\circ d. \tag{6.127}$$

Для любой функции $f\in C^\infty(\mathcal{M})$ отсюда следует, что

$$[d,\,\iota_D]f=D(f)\quad\text{и}\quad[d,\,\iota_D]df=(-1)^{p(D)}d(Df)=L_Ddf. \tag{6.128}$$

Таким образом утверждения 3 и 4 доказаны. Мы оставляем читателю в качестве упражнения проверку формул из п. 5. ☐

6.5.1г. Пусть $\mathcal{U}^{n|m}$ — суперобласть с координатами x. Рассмотрим форму $\mathrm{vol}_{x,\hat{x}}\in\mathrm{Vol}(\widehat{\mathcal{U}})$, соответствующую координатам $(x,\,\hat{x})$ на $\widehat{\mathcal{U}}$.

Предложение. *Форма объема* $\mathrm{vol}_{x,\hat{x}}$ *не зависит от координат на* $\mathcal{U}$ *и* $p(\mathrm{vol}_{x,\hat{x}})=n+m \pmod 2$ *при определении* (6.19 а) *или* $\bar{0}$ *при определении* (6.19 б).

Доказательство. Структура суперматрицы частных производных замены координат на $\mathcal{U}$, описанная в формуле (6.119), показывает, что березиниан этой суперматрицы равен единице, поскольку четности строк и столбцов блока в правом нижнем углу противоположны четностям строк и столбцов блока в левом верхнем углу, а значит, березинианы этих блоков взаимно обратны. ☐

Таким образом, $\widehat{\Omega}(\mathcal{M})$ вкладывается в $\mathrm{Vol}(\widehat{\mathcal{M}})_{[0,0]}$. Но мы должны приложить дополнительные усилия, чтобы проинтегрировать элементы из $\widehat{\Omega}(\mathcal{M})$, поскольку при $m\neq 0$ по любому куску супермногообразия $\mathcal{M}$ в $\widehat{\mathcal{M}}$ восстанавливается некомпактное множество. Именно поэтому, несмотря на то что в работе [BL1] содержится практически все что нужно, чтобы определить то, что мы ниже назовем *регулярными плотностями*, эта возможность была упущена, и проблема построения удобных плотностей оставалась открытой вплоть до работы Ф. Ф. Воронова и А. В. Зорича [VZ1]. Наш анализ работы [VZ1] в [Sha5] и [Ша1] показал истинную роль псевдодифференциальных форм.

6.5.1д. Ориентируемость супермногообразий с крышечкой описывается следующим образом.

Предложение. 1) *Супермногообразие* $\widehat{\mathcal{M}}$ *всегда* $(1,\,1)$*-полуориентируемо.*

2) *Если супермногообразие* $\widehat{\mathcal{M}}$ *допускает* $(1,\,0)$ *или* $(0,\,1)$*-полуориентацию, то* $\widehat{\mathcal{M}}$ *полностью ориентируемо, а* $\mathcal{M}$ *является* $(1,\,1)$*-полуориентируемым.*

3) *Зафиксировать* $(1,\,0)$*- или* $(0,\,1)$*-полуориентацию на* $\widehat{\mathcal{M}}$ *— это то же самое, что зафиксировать* $(1,\,1)$*-полуориентацию на* $\mathcal{M}$.

Доказательство. Пусть значение матрицы частных производных замены координат на $\mathcal{M}$ равно $\mathrm{diag}(a,\,b)$. Тогда значение матрицы частных производных замены координат на $\widehat{\mathcal{M}}$ равно $\mathrm{diag}(a,\,b,\,a,\,b)$, где координаты упорядочены стандартным образом: сначала четные координаты, потом дифференциалы нечетных, потом нечетные, а потом дифференциалы четных координат. Следовательно, $\widehat{\mathcal{M}}$ всегда $(1,\,1)$-полуориентируемо, а полуориентируемость типа $(1,\,0)$ или $(0,\,1)$ супермногообразия $\widehat{\mathcal{M}}$ эквивалентна $(1,\,1)$-полуориентируемости супермногообразия $\mathcal{M}$. ☐

6.5.2. Быстро убывающие функции и однородные функции на $\boldsymbol{\mathcal{R}^{p|q}}$**.** Этот пункт дополнительный. Его материал относится в основном к теории векторных суперрасслоений на супермногообразии.

Зафиксируем размерность $p|q$. Предположим, что класс систем координат на $\mathcal{R}^{p|q}$ выбран так, что группа $\mathrm{GL}(p|q,\,\mathbb{R})$ действует на нем транзитивно. Системы координат из выбранного класса назовем *допустимыми*. Другими словами, если системы координат x на $\mathcal{R}^{p|q}$ допустимы, то любая другая система координат y на $\mathcal{R}^{p|q}$ допустима тогда и только тогда, когда $y_j=\sum\limits_j g_i^jx_i$ для некоторой матрицы $(g_i^j)\in\mathrm{GL}(p|q;\,\mathbb{R})$.

Если существует $\mathcal{T}$-семейство матриц $(g_i^j)\in\mathrm{GL}(p|q;\,C^\infty(\mathcal{T}))$, такое что $y_j=\sum\limits_j g_i^jx_i$ для некоторой допустимой системы координат x на $\mathcal{R}^{p|q}$, то $\mathcal{T}$-семейство систем координат y на $\mathcal{R}^{p|q}$ назовем *допустимым*. Итак, по определению группа $\mathrm{GL}(p|q;\ C^\infty(\mathcal{T}))$ транзитивно действует на множестве допустимых $\mathcal{T}$-семейств систем координат на $\mathcal{R}^{p|q}$.

Мы оставляем читателю в качестве упражнения задачу дать аккуратное определение подкатегорий в категории супермногообразий, объектами которых являются векторные суперрасслоения, а морфизмами являются послойно линейные морфизмы. Для наших целей локальной модели достаточно, а в ней все ясно.

Определим теперь несколько пространств функций на $\mathcal{R}^{p|q}$, инвариантных относительно линейных замен координат. Эти пространства будут использоваться (в п. 6.5.3)) при определении аналогов дифференциальных форм на супермногообразии $\mathcal{M}^{n|m}$. В свете этих определений супермногообразие $\widehat{\mathcal{M}}$ рассматривается как расслоение над $\mathcal{M}$, т. е. как $\mathcal{M}$-семейство точек супермногообразия $\mathcal{R}^{m|n}$. Поскольку в конструкцию вклинилась послойная замена четности, морфизм $\hat{\varphi}$, отвечающий морфизму $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ полного нечетного ранга, является послойным морфизмом полного четного ранга, и наоборот.

6.5.2а. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ обозначим символом $P^k(\mathcal{R}^{p|q};\ \mathcal{T})$ *пространство однородных полиномов от координатных функций* на $\mathcal{R}^{p|q}$ степени k с коэффициентами из $C^\infty(\mathcal{T})$ и положим

$$P(\mathcal{R}^{p|q};\ \mathcal{T}) := \bigoplus_{k \geqslant 0} P^k(\mathcal{R}^{p|q};\ \mathcal{T}). \tag{6.129}$$

Напомним, что *пространством Шварца* называется

$$S(\mathbb{R}^p) = \begin{cases} \text{пространство Шварца} & \\ \text{быстроубывающих функций на } \mathbb{R}^p & \text{при } p > 0, \\ \mathbb{R} & \text{при } p = 0. \end{cases} \tag{6.130}$$

Пространством Шварца, или *пространством $\mathcal{T}$-семейств быстроубывающих функций* на $\mathcal{R}^{p|q}$, назовем пространство

$$S(\mathcal{R}^{p|q};\mathcal{T}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathcal{R}^{p|q} \times \mathcal{T}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{в любой карте } \mathcal{T}' \subset \mathcal{T} \text{ с координата-} \\ \text{ми } (t, \tau) \text{ имеем } f = \sum\limits_{\alpha,\beta} \tau^\beta f_{\alpha\beta}(u,t)\xi^\alpha, \\ \text{где } f_{\alpha,\beta}(u,s) \in S(\mathbb{R}^p) \text{ при любых } \alpha, \beta \\ \text{и } s \in T \end{array} \right\}. \tag{6.131}$$

Лемма. *Определение пространства $S(\mathcal{R}^{p|q};\ \mathcal{T})$ не зависит от выбора допустимой системы координат на $\mathcal{R}^{p|q}$.*

Доказательство. Ясно, что $S(\mathcal{R}^{0|q};\ \mathcal{T}) = C^\infty(\mathcal{R}^{0|q} \times \mathcal{T})$. Если $p \neq 0$, то пространство $S(\mathcal{R}^{p|q};\ \mathcal{T})$ состоит из всех функций $f \in C^\infty(\mathcal{R}^{p|q} \times \mathcal{T})$, таких что для любого дифференциального оператора X (произвольного порядка) на $\mathcal{R}^{p|q} \times \mathcal{T}$ с коэффициентами, постоянными вдоль $\mathcal{R}^{p|q}$, значения функций $\mathrm{cpr}(Xf)$ быстро убывают при $u \to \infty$. Пространство дифференциальных операторов на $\mathcal{R}^{p|q} \times \mathcal{T}$ с постоянными вдоль $\mathcal{R}^{p|q}$ коэффициентами, очевидно, инвариантно относительно $\mathcal{T}$-семейства линейных замен координат на $\mathcal{R}^{p|q}$. □

Предложение. *Пусть $\varphi\colon \mathcal{R}^{p_1|q_1} \times \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{R}^{p_2|q_2} \times \mathcal{T}$ есть $\mathcal{T}$-семейство морфизмов супермногообразий, заданное в допустимых $\mathcal{T}$-семействах систем координат x и y линейным отображением φ, таким что $\varphi^*(y_i) = \sum x_j a^i_j$, где $a^i_j \in C^\infty(\mathcal{T})$.*

Включение $\varphi^*(S(\mathcal{R}^{p_2|q_2};\ \mathcal{T})) \subseteq S(\mathcal{R}^{p_1|q_1};\ \mathcal{T})$ выполняется, если и только если $\mathrm{rk}(a^i_j)^{i \leqslant p_2}_{j \leqslant p_1} = p_1$ в любой точке многообразия T.

(Другими словами, φ должен быть морфизмом полного четного ранга.)

Доказательство. Если условие на ранг выполняется, то, выполнив в $\mathcal{R}^{p_2|q_2}$ допустимое $\mathcal{T}$-семейство замен координат, мы можем предположить, что

$$\psi^*(y_i) = \begin{cases} x_i & \text{при } i \leqslant p_1, \\ 0 & \text{при } i > p_1. \end{cases} \tag{6.132}$$

Если координаты η_j были преобразованы тождественно, то такое преобразование являлось бы простым ограничением области определения коэффициентов f_α в выражении $f = \sum f_\alpha \xi^\alpha$ для любой функции $f \in S(\mathcal{R}^{p_1|q_1};\ \mathcal{T})$.

В общем случае кроме ограничения, которое переводит $S(\mathbb{R}^{p_2})$ в $S(\mathbb{R}^{p_1})$, мы также умножаем функции f_α на многочлены и берем линейные комбинации полученных выражений. Если $\mathrm{rk}(a^i_j)^{i \leqslant p_2}_{j \leqslant p_1} = r < p_1$, то можно предположить, что

$$\mathrm{cpr}\ \varphi^*(y_i) = \begin{cases} \mathrm{cpr}\ x_i & \text{при } i \leqslant r, \\ \mathrm{cpr}\ \varphi(y_i) = 0 & \text{при } i > r. \end{cases}$$

Таким образом, функции из $\varphi^*(C^\infty(\mathcal{R}^{p_2|q_2};\ \mathcal{T}))$ либо не зависят от координаты x_{r+1}, либо зависят от нее полиномиально, т. е.

$$\varphi^*(C^\infty(\mathcal{R}^{p_2|q_2};\ \mathcal{T})) \subseteq C^\infty(\mathcal{R}^{p_1|q_1};\ \mathcal{T}) \setminus S(\mathcal{R}^{p_1|q_1};\ \mathcal{T}). \tag{6.133}$$

□

Положим

$$\begin{aligned} F(\mathcal{R}^{p|q};\ \mathcal{T}) = \{f \in C^\infty(\mathcal{R}^{p|q} \times \mathcal{T}) \mid \operatorname{supp} f \cap \mathbb{R}^p \times \{t\} \text{ — компакт} \\ \text{при любой функции } t \in T\}. \end{aligned} \tag{6.134}$$

Ясно, что $F(\mathcal{R}^{p|q};\ \mathcal{T})$ — идеал в $C^\infty(\mathcal{R}^{p|q} \times \mathcal{T})$ и $F(\mathcal{R}^{p|q};\ \mathcal{T}) \subseteq S(\mathcal{R}^{p|q};\ \mathcal{T})$.

6.5.2б. При $p \neq 0$ обозначим символом $\mathcal{R}^{p|q}_*$ открытую подсуперобласть в $\mathcal{R}^{p|q}$ с подстилающей областью $\mathbb{R}^p \setminus \{0\}$. Положим также $\mathcal{R}^{0|q}_* = \mathcal{R}^{0|q}$.

Вопрос. Может быть, «обесточенное» («point-less») супермногообразие $\mathcal{R}^{0|q} \setminus \{0\}$ здесь более уместно?

Очевидно, что $\mathcal{R}^{p|q}_*$ инвариантно относительно $\mathcal{T}$-семейств линейных обратимых отображений $\mathcal{R}^{p|q} \longrightarrow \mathcal{R}^{p|q}$.

На $\mathcal{R}^{p|q}_*$ мультипликативная группа положительных вещественных чисел $\mathbb{R}^\times_+$ действует очевидным образом.

Обозначим символом $H^k(\mathcal{R}^{p|q})$ *пространство однородных функций* степени $k \in \mathbb{Z}$, т. е. пространство всех функций из $C^\infty(\mathcal{R}^{p|q}_*)$, таких что

$$f(\lambda x) = \lambda^k f(x) \quad \text{для любого } \lambda \in \mathbb{R}_+. \tag{6.135}$$

Другими словами, мы рассматриваем диффеоморфизмы $\psi\colon \mathcal{R}^{p|q}_* \longrightarrow \mathcal{R}^{p|q}_*$, такие что $\psi^*(x_i) = \lambda x_i$ для $1 \leqslant i \leqslant p+q$, и выбираем функции, которые под действием таких диффеоморфизмов умножаются на λ^k. Пространства $H^k(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T})$ определяются аналогично. Положим

$$B^k(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T}) = \begin{cases} H^k(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T}) + P^k(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T}) \cdot \log\left(\sum x_i^2\right) & \text{при } k \geqslant 0, \\ H^k(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T}) & \text{при } k < 0. \end{cases} \tag{6.136}$$

Лемма. *Пространства $H^k(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T})$ и $B^k(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T})$ не зависят от выбора допустимых $\mathcal{T}$-семейств систем координат на $\mathcal{R}^{p|q}$.*

Доказательство. В определении пространства $H^k(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T})$ координатные функции не участвуют вовсе. Если оба $\mathcal{T}$-семейства систем координат x и y на $\mathcal{R}^{p|q}$ допустимые, то

$$\frac{\sum y_i^2}{\sum x_i^2} \in H^0(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T}) \tag{6.137}$$

и

$$P^k(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T}) \cdot \log\left(\frac{\sum y_i^2}{\sum x_i^2}\right) \subset H^k(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T}). \tag{6.138}$$

□

Элементы пространства $H^k(\mathcal{R}^{p|q})$ называются *однородными степени k функциями* на $\mathcal{R}^{p|q}$, а элементы пространства $H^k(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T})$ называются $\mathcal{T}$-семействами однородных функций. Функции из $B^k(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T})$ будут называться *$\mathcal{T}$-семействами почти однородных функций степени k*. Положим

$$\begin{aligned} H(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T}) &= \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^k(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T}); & H(\mathcal{R}^{p|q}) &= \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^k(\mathcal{R}^{p|q}); \\ B(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T}) &= \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} B^k(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T}); & B(\mathcal{R}^{p|q}) &= \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} B^k(\mathcal{R}^{p|q}); \end{aligned} \tag{6.139}$$

$$H^k(\mathcal{R}^{p|0}; \mathcal{T})\colon \overset{\text{def}}{=} P^k(\mathcal{R}^{p|0}; \mathcal{T}); \tag{6.140}$$

$$P(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T}) := C^\infty(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T}) \cap H(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T}). \tag{6.141}$$

Предложение. *Пусть $\varphi\colon \mathcal{R}^{p_1|q_1} \times \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{R}^{p_2|q_2} \times \mathcal{T}$ — семейство линейных отображений полного четного ранга. Тогда*

1) *вложение $\tilde\varphi(\mathbb{R}^{p_1} \times \{t\}) \subseteq \mathbb{R}^{p_2} \times \{t\}$ имеет место для любой точки $t \in T$, причем ограничение $\varphi|_{\mathcal{R}^{p_1|q_1}_* \times \mathcal{T}}$ определяет $\mathcal{T}$-семейство морфизмов*

$$\varphi'\colon \mathcal{R}^{p_1|q_1}_* \times \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{R}^{p_2|q_2}_* \times \mathcal{T}. \tag{6.142}$$

2) *$\mathcal{T}$-семейство морфизмов $(\varphi')^*\colon C^\infty(\mathcal{R}^{p_2|q_2}_*; \mathcal{T}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{R}^{p_1|q_1}_*; \mathcal{T})$ переводит пространство $H^k(\mathcal{R}^{p_2|q_2}; \mathcal{T})$ в $H^k(\mathcal{R}^{p_1|q_1})$, а $B^k(\mathcal{R}^{p_2|q_2}; \mathcal{T})$ в $B^k(\mathcal{R}^{p_1|q_1}; \mathcal{T})$.*

Замечания. 1) Функцию $\sum x_i^2$ в определении пространства $B^k(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T})$ можно заменить любой однородной функцией f ненулевой степени однородности и такой, что $\operatorname{cpr} f > 0$ на $\mathbb{R}^p_*$.

2) Пространство $C^\infty(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T})$ вложено в $C^\infty(\mathcal{R}^{p|q}_*; \mathcal{T})$, а $P(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T})$ является пространством многочленов.

3) При $p > 0$ имеем взаимно однозначное соответствие

$$H^k(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T}) \longleftrightarrow C^\infty(S^{p-1} \times \mathbb{R}^{0|q} \times \mathcal{T}), \tag{6.143}$$

где S^{p-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^p$. Никакого $\mathrm{GL}(p|q, C^\infty(\mathcal{T}))$-инвариантного изоморфизма между этими пространствами нет.

4) Если φ не является морфизмом полного четного ранга, то $\tilde\varphi(\mathbb{R}^{p_1}_* \times T) \not\subset (\mathbb{R}^{p_2}_* \times T)$.

Доказательство. Для любой точки $t \in T$ отображение $u \mapsto \tilde\varphi(u, t)$ линейно и имеет полный ранг, следовательно, у него нет ядра, т. е. $\tilde\varphi(\mathbb{R}^{p_1}_* \times \{t\}) \subset \mathbb{R}^{p_2}_* \times \{t\}$. Действие группы $\mathbb{R}_+$ растяжениями на $\mathcal{R}^{p_1|q_1}$ и $\mathcal{R}^{p_2|q_2}$ коммутирует с семействами линейных отображений, поэтому

$$\varphi^*(H^k(\mathcal{R}^{p_2|q_2}; \mathcal{T})) \subset H^k(\mathcal{R}^{p_1|q_1}; \mathcal{T}) \quad \text{и} \quad \varphi^*(P^k(\mathcal{R}^{p_2|q_2}; \mathcal{T})) \subset P^k(\mathcal{R}^{p_1|q_1}; \mathcal{T}). \tag{6.144}$$

Если $\operatorname{cpr} f \neq 0$ на $\mathbb{R}^{p_2}_* \times T$, то $\operatorname{cpr} f \neq 0$ на $\mathbb{R}^{p_1}_* \times T$ и мы видим, что

$$\begin{multline} \varphi^*(B^k(\mathcal{R}^{p_2|q_2}; \mathcal{T})) \subset \\ \subset H^k(\mathcal{R}^{p_1|q_1}; \mathcal{T}) + P^k(\mathcal{R}^{p_1|q_1}; \mathcal{T}) \cdot \log(\varphi^*(f)) = B^k(\mathcal{R}^{p_1|q_1}; \mathcal{T}). \end{multline} \tag{6.145}$$

□

6.5.2в. Пусть $\rho \in \mathrm{Vol}(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T})$ — форма объема, такая что для допустимого $\mathcal{T}$-семейства систем координат $x = (u, \xi)$ выполняется равенство $\rho = \mathrm{vol}_x f$, где $f \in S(\mathcal{R}^{p|q}; \mathcal{T})$. Положим

$$\int\limits_{\mathcal{R}^{p|q}} \rho = \int\limits_{\mathbb{R}^p} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \ldots \frac{\partial}{\partial \xi_q} f\right) d_{u_1} \ldots d_{u_p}. \tag{6.146}$$

Предложение. 1) *Множество* $\mathrm{vol}_x\cdot S(\mathcal{R}^{p|q};\,\mathcal{T})$ *семейств форм не зависит от выбора допустимого* $\mathcal{T}$*-семейства систем координат* x.

2) *Пусть* $\varphi\colon \mathcal{R}^{p|q}\times\mathcal{T}\longrightarrow\mathcal{R}^{p|q}\times\mathcal{T}$ *есть* $\mathcal{T}$*-семейство диффеоморфизмов линейное относительно допустимых* $\mathcal{T}$*-семействах систем координат, а* $\rho=\mathrm{vol}_x f$, *где* $f\in S(\mathcal{R}^{p|q};\,\mathcal{T})$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathcal{R}^{p|q}}\rho=\varepsilon\int\limits_{\mathcal{R}^{p|q}}\varphi^*(\rho), \tag{6.147}$$

где $\varepsilon=\begin{cases}1, & \text{если } \varphi \text{ сохраняет } (1,\,0)\text{-полуориентацию на } \mathcal{R}^{p|q},\\ -1 & \text{в противном случае.}\end{cases}$

Доказательство аналогично проверке того, что интеграл от формы с компактным носителем корректно определен, и получается факторизацией морфизма φ в произведение $(\mathcal{T}\times\mathcal{R}^{0|q})$-семейства линейных диффеоморфизмов супермногообразия $\mathcal{R}^{p|0}$ и $\mathcal{T}\times\mathcal{R}^{p|0}$-семейства линейных диффеоморфизмов супермногообразия $\mathcal{R}^{0|q}$. □

6.5.3. Супераналоги дифференциальных форм; как их интегрировать.

6.5.3a. Пусть $\mathcal{U}^{n|m}$ — суперобласть с координатами x. Мы отождествляем функции на $\widehat{\mathcal{U}}$ с $\mathcal{U}$-семействами функций на $\mathcal{R}^{m|n}$, где класс допустимых систем координат содержит $\hat{x}$ для любой системы координат x на $\mathcal{U}$.

Для любого $k\in\mathbb{Z}$ обозначим символом $\widehat{\Omega}^k(\mathcal{U})$ подсуперпространство в $\widehat{\Omega}(\mathcal{U})$, состоящее из функций $f(x,\,\hat{x})$, являющихся однородными степени k многочленами по переменным $\hat{x}$, а от x зависящих гладко, но не обязательно полиномиально, и положим

$$\widehat{\Omega}^{(\cdot)}(\mathcal{U})=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\Omega}^k(\mathcal{U}). \tag{6.148}$$

Обозначим

$$\Omega S(\mathcal{U}):=S(\mathcal{R}^{m|n};\,\mathcal{U}). \tag{6.149}$$

Для любого $k\in\mathbb{Z}$ положим

$$\begin{aligned}\Omega H^k(\mathcal{U})&:=H^k(\mathcal{R}^{m|n};\,\mathcal{U}),\\ \Omega B^k(\mathcal{U})&:=B^k(\mathcal{R}^{m|n};\,\mathcal{U}),\\ \Omega H^{\cdot}(\mathcal{U})&:=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\Omega H^k(\mathcal{U}),\\ \Omega B^{(\cdot)}(\mathcal{U})&:=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\Omega B^k(\mathcal{U}),\\ \Omega F(\mathcal{U})&:=F(\mathcal{R}^{m|n};\,\mathcal{U}).\end{aligned} \tag{6.150}$$

Из п. 6.5.2 следует, что эти пространства не зависят от координат на $\mathcal{U}$, и, стало быть, стандартным образом на любом супермногообразии $\mathcal{M}$ мы можем определить пучки $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-модулей

$$\Omega_{\mathcal{M}},\quad \Omega S_{\mathcal{M}},\quad \Omega H_{\mathcal{M}},\quad \Omega B_{\mathcal{M}},\quad \Omega F_{\mathcal{M}}. \tag{6.151}$$

Сечения соответствующих пучков назовем

- $\Omega_{\mathcal{M}}$: *дифференциальными формами*,
- $\Omega S_{\mathcal{M}}$: *быстроубывающими псевдодифференциальными формами*,
- $\Omega H_{\mathcal{M}}$: *однородными дифференциальными формами*,
- $\Omega B_{\mathcal{M}}$: *суперформами*,
- $\Omega F_{\mathcal{M}}$: *псевдодифференциальными формами с компактным носителем* (на $\mathcal{M}$).

Предложение. 1) *Выполняются соотношения* $\Omega(\mathcal{M})\cap\Omega S(\mathcal{M})=0$ *и* $\Omega P^k(\mathcal{M})\subset\Omega H^k(\mathcal{M})$. *Супералгебра* $\Omega F(\mathcal{M})$ *является идеалом в* $\widehat{\Omega}(\mathcal{M})$. *Если* $m=0$, *то*

$$\widehat{\Omega}(\mathcal{M})=\Omega P(\mathcal{M})=\Omega S(\mathcal{M})=\Omega H(\mathcal{M})=\Omega B(\mathcal{M})=\Omega F(\mathcal{M}). \tag{6.152}$$

2) *Подалгебры* $\Omega(\mathcal{M})\subset\Omega H(\mathcal{M})$ *и* $\Omega H(\mathcal{M})\subset\Omega B(\mathcal{M})$ *— градуированные. Супералгебра* $\Omega(\mathcal{M})$ *не содержится в* $\Omega S(\mathcal{M})$, *но пространство* $\Omega S(\mathcal{M})$ *тоже инвариантно относительно умножения на дифференциальные формы.*

3) *Для любого морфизма* $\varphi\colon\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ *отображение* $\hat{\varphi}^*$ *отправляет пространство* $\Omega^k(\mathcal{M})$ *в* $\Omega^k(\mathcal{N})$ *и является гомоморфизмом супералгебр.*

4) *Для любого морфизма* $\varphi\colon\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ *постоянного нечетного ранга имеет место включение*

$$\hat{\varphi}^*(\Omega S(\mathcal{M}))\subseteq\Omega S(\mathcal{N}). \tag{6.153}$$

Отображение $(\hat{\varphi}')^*\colon\Omega B^k(\mathcal{M})\longrightarrow\Omega B^k(\mathcal{N})$ *определено естественным образом, причем*

$$(\hat{\varphi}')^*|_{\Omega^k(\mathcal{M})}=(\hat{\varphi})^*\quad\text{и}\quad(\hat{\varphi}')^*\Omega H^k(\mathcal{M})\subset\Omega H^k(\mathcal{N}). \tag{6.154}$$

5) *Для любой формы* $\omega\in\Omega(\mathcal{M})$ *следующие диаграммы коммутативны*:

$$\begin{tikzcd}\widehat{\Omega}(\mathcal{M}) \arrow[r, "\hat{\varphi}^*"] \arrow[d, "\omega"'] & \widehat{\Omega}(\mathcal{N}) \arrow[d, "\hat{\varphi}^*\omega"] & & \Omega B(\mathcal{M}) \arrow[r, "(\hat{\varphi}')^*"] \arrow[d, "\omega"'] & \Omega B(\mathcal{N}) \arrow[d, "\hat{\varphi}^*\omega"] \\ \widehat{\Omega}(\mathcal{M}) \arrow[r, "\hat{\varphi}^*"] & \widehat{\Omega}(\mathcal{N}) & & \Omega B(\mathcal{M}) \arrow[r, "(\hat{\varphi}')^*"] & \Omega B(\mathcal{N})\end{tikzcd} \tag{6.155}$$

где вертикальные стрелки, отмеченные символами ω *и* $\hat{\varphi}^*\omega$, *являются умножениями справа на указанные формы.*

Упражнение. Доказательства предоставляется читателю в качестве упражнения.

Всюду ниже, допуская некоторую вольность речи, мы не будем больше упоминать, что нечетная размерность супермногообразия $\dim_{\bar{1}} \mathcal{M}$ отлична от нуля, и будем обозначать $\hat{\varphi}^*$ и $(\hat{\varphi}')^*$ попросту: символом φ^*.

6.5.3б. Предложение. 1) *Пространства* $\Omega(\mathcal{M})$, $\Omega S(\mathcal{M})$, $\Omega H(\mathcal{M})$, $\Omega F(\mathcal{M})$ *и* $\Omega F(\mathcal{M})$ *инвариантны относительно внешнего дифференциала* d. *На* $\Omega B(\mathcal{M})$ *степень дифференциала* $\deg d$ *равна* 1.

2) *Пространства* $\Omega(\mathcal{M})$, $\Omega S(\mathcal{M})$ *и* $\Omega H(\mathcal{M})$ *инвариантны относительно* ι_D, *где* $D \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M})$, *а степень внутреннего умножения* $\deg \iota_D$ *равна* -1 *на* $\Omega(\mathcal{M})$ *и* $\Omega B(\mathcal{M})$.

3) *Если* $\dim \mathcal{M} = n|0$, *то* ι_D *и* d *совпадают с привычным внутренним умножением на векторное поле и внешним дифференциалом соответственно.*

Упражнение. Доказательство снова предоставляется читателю в качестве упражнения.

Пусть $i\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ — вложение супермногообразия. Тогда i является морфизмом полного нечетного ранга в смысле п. 6.5.2 и определен гомоморфизм $i^*\colon \Omega S(\mathcal{M}) \to \Omega S(\mathcal{N})$. Естественно назвать его *ограничением на подсупермногообразие.*

6.5.3в. Предложение. *Пусть* $\mathcal{M}_i$, *где* $i = 1, 2$, — *супермногообразия и* $D_i \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M}_i)$, *а* $\varphi\colon \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_1$ — *морфизм, такой что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} C^\infty(\mathcal{M}_1) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "D_1"'] & C^\infty(\mathcal{M}_2) \arrow[d, "D_2"] \\ C^\infty(\mathcal{M}_1) \arrow[r, "\varphi^*"] & C^\infty(\mathcal{M}_2) \end{tikzcd} \tag{6.156}$$

коммутативна. Тогда следующие диаграммы тоже коммутативны:

$$\begin{tikzcd} \widehat{\Omega}(\mathcal{M}_1) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "\iota_{D_1}"'] & \widehat{\Omega}(\mathcal{M}_2) \arrow[d, "\iota_{D_2}"] \\ \widehat{\Omega}(\mathcal{M}_1) \arrow[r, "\varphi^*"] & \widehat{\Omega}(\mathcal{M}_2) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \widehat{\Omega}(\mathcal{M}_1) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "L_{D_1}"'] & \widehat{\Omega}(\mathcal{M}_2) \arrow[d, "L_{D_2}"] \\ \widehat{\Omega}(\mathcal{M}_1) \arrow[r, "\varphi^*"] & \widehat{\Omega}(\mathcal{M}_2) \end{tikzcd} \tag{6.157}$$

Доказательство. Поскольку ι_D, $L_D \in \mathrm{Vect}\,\widehat{\mathcal{M}}$, достаточно проверить соответствующее тождество на функциях из $C^\infty(\mathcal{M}_1)$ и $d(C^\infty(\mathcal{M}_1)) \subseteq \Omega^1(\mathcal{M}_1)$. Эта проверка сводится к определениям дифференцирований ι_D и L_D и проверке коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} \widehat{\Omega}(\mathcal{M}_1) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "d"'] & \widehat{\Omega}(\mathcal{M}_2) \arrow[d, "d"] \\ \widehat{\Omega}(\mathcal{M}_1) \arrow[r, "\varphi^*"] & \widehat{\Omega}(\mathcal{M}_2) \end{tikzcd} \tag{6.158}$$

□

Замечание. Если φ — морфизм постоянного нечетного ранга, то всюду в вышеприведенных диаграммах супералгебру $\widehat{\Omega}(\mathcal{M}_i)$ можно заменить на $\Omega S(\mathcal{M}_i)$ или $\Omega B(\mathcal{M}_i)$.

6.5.3г. Пусть $\mathcal{U}^{n|m}$ — суперобласть, $x = (u, \xi)$ — координаты на ней, а $f(x, \hat{x}) \in \Omega S(\mathcal{U})$. Положим

$$\Upsilon_{\mathcal{U}}(f) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{vol}_x \int\limits_{\mathcal{R}^{m|n}} \mathrm{vol}_{\hat{t}}\, f(x, \hat{t}), \tag{6.159}$$

где функция f рассматривается как элемент суперпространства $S(\mathcal{R}^{m|n}; \mathcal{U})$, а $\hat{t}$ — координаты на $\mathcal{R}^{s|r}$, занумерованные *антистандартным образом*:

$$\hat{t}_1, \ldots, \hat{t}_r \;\; \text{нечетные}, \quad \text{а } \hat{t}_{r+1}, \ldots, \hat{t}_{r+s} \text{ — четные.} \tag{6.160}$$

Лемма. *Отображение* $\Upsilon_{\mathcal{U}}$ *является сюрьекцией пространства* $\Omega S(\mathcal{U})$ *на* $\mathrm{Vol}(\mathcal{U})_{[0,1]}$ *и не зависит от координат на* $\mathcal{U}$.

Доказательство. Согласно предложению из п. 6.5.2в замена координат $\hat{x} \mapsto \hat{y}$ умножает

$$\mathrm{vol}_x \int\limits_{\mathcal{R}^{m|n}} \mathrm{vol}_{\hat{t}}\, f(x, \hat{t}) \tag{6.161}$$

на ε, где $\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{если (1, 0)-полуориентация на } \mathcal{R}^{m|n} \text{ сохранилась,} \\ -1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Замена координат $\hat{\varphi}\colon \hat{x} \mapsto \hat{y}$ сохраняет (1, 0)-полуориентацию на $\mathcal{R}^{m|n}$ в точности тогда, когда $\hat{\varphi}$ индуцировано заменой координат $\varphi\colon x \mapsto y$, которая сохраняет (0, 1)-полуориентацию на $\mathcal{U}$, так что $\Upsilon_{\mathcal{U}}(f) \in \mathrm{Vol}(\mathcal{U})_{[0,1]}$.

Произвольная форма $\mathrm{vol}_{x[0,1]}\, g(x)$ получается из элемента

$$\Pi^{-n/2} \hat{u}_1 \cdot \ldots \cdot \hat{u}_n e^{-(\hat{\xi}_1^2 + \ldots + \hat{\xi}_m^2)} g(x). \tag{6.162}$$

□

Итак, для любого супермногообразия $\mathcal{M}$ мы построили отображение

$$\Upsilon_{\mathcal{M}}\colon \Omega S(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Vol}(\mathcal{M})_{[0,1]}. \tag{6.163}$$

Легко видеть, что это отображение $C^\infty(\mathcal{M})$-линейно справа, а четность его равна $m \pmod 2$.

Теорема. *Для любого* $(a, b) \in \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ *отображение* $\Upsilon_{\mathcal{M}[a,b]}$, *заданное в локальной системе координат x формулой*

$$\Upsilon_{\mathcal{U}[a,b]}(f(x, \hat{x})) \overset{def}{=} \mathrm{vol}_{x[a,1+b]} \int\limits_{\mathcal{R}^{m|n}} \mathrm{vol}_{\hat{t}}\, f(x, \hat{t}), \tag{6.164}$$

где $\hat{t}$ *такие же, как в условии* (6.160),

определено корректно и переводит $\Omega S(\mathcal{M})_{[a,b]}$ *в* $\mathrm{Vol}(\mathcal{M})_{[a,b+1]}$. *Отображение* $\Upsilon_{\mathcal{M}[a,b]}$ *сюръективно и* $C^\infty(\mathcal{M})$*-линейно справа.*

Доказательство. Утверждение теоремы локально и фактически содержится в только что сформулированной лемме. Осталось добавить всего лишь, что

$$\begin{gathered} \mathrm{Vol}_{\mathcal{M}[a,b+1]} \cong \mathrm{Vol}(\mathcal{M})_{[0,1]} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{M}} \mathcal{O}_{\mathcal{M}[a,b]}, \\ \Omega S_{\mathcal{M}[a,b]} \cong \Omega S_\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{M}} \mathcal{O}_{\mathcal{M}[a,b]}. \end{gathered} \tag{6.165}$$

□

6.5.3д. Предложение. *Ядро отображения* $\Upsilon_\mathcal{M}$ *состоит из конечных линейных комбинаций форм вида* $\iota_D f$, *где* $D \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M})$, *а* $f \in \Omega S(\mathcal{M})$.

Лемма. *Пусть функция* $f \in S(\mathbb{R}^m)$ *такова, что*

$$\int f(t_1, \ldots, t_m)dt_1 \ldots dt_m = 0. \tag{6.166}$$

Тогда существуют функции $f_1, \ldots, f_m \in S(\mathbb{R}^m)$, *такие что* $f = \sum \partial_i f_i$.

Доказательство леммы: индукция по m. При $m = 1$ она очевидна, а при $m > 1$ возьмем функцию $g(t) \in S(\mathbb{R})$, такую что $\int g(t)dt = 1$, и положим

$$h(t_1, \ldots, t_{m-1}) = \int f dt_m \in S(\mathbb{R}^{m-1}) \tag{6.167}$$

и

$$f_m(t_1, \ldots, t_m) = \int\limits_{-\infty}^{t_m} dt_m \left(f - g(t_m) \cdot h(t_1, \ldots, t_{m-1})\right). \tag{6.168}$$

Поскольку $\int h(t_1, \ldots, t_{m-1})dt_1 \ldots dt_{m-1} = 0$, по предположению индукции $h = \sum \partial_i h_i \in S(\mathbb{R}^{m-1})$, и искомое равенство выполняется, если положить $f_i = g(t_m) \cdot h_i(t_1, \ldots, t_{m-1})$ при $i = 1, \ldots, m-1$. □

Доказательство предложения. Мы можем считать, что $\mathcal{M}$ — суперобласть с координатами $x = (u_1, \ldots, u_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$. Общий случай сводится к этому с помощью разбиения единицы на $\mathcal{M}$. Пространство линейных комбинаций форм вида $\iota_D f$ натянуто на формы вида $\iota_j f$, где

$$\iota_j := \iota_{\frac{\partial}{\partial x_j}}. \tag{6.169}$$

Если $p(x_j) = \bar{0}$, то $\iota_j f$ не содержит члена с $\hat{u}_1 \ldots \hat{u}_n$, а при $p(x_j) = \bar{1}$ коэффициент при $\hat{u}_1 \ldots \hat{u}_n$ в $\iota_j f$ является производной от быстроубывающей функции. Поэтому все формы вида $\iota_D f$ лежат в ядре отображения $\ker \Upsilon_\mathcal{M}$.

Пусть теперь $f = \sum \hat{u}_1^{\alpha_1} \ldots \hat{u}_n^{\alpha_n} f_\alpha(u, \hat{\xi}, \xi)$ лежит в ядре отображения $\Upsilon_\mathcal{M}$. Это эквивалентно тому, что

$$\int f_{1\ldots1}(\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_m)d\hat{\xi}_1 \ldots d\hat{\xi}_m = 0, \tag{6.170}$$

и осталось применить лемму. □

Следствие. *Если* $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ — *вложение подсупермногообразия, а векторное поле* $D \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M})$ *касательно к подсупермногообразию* $\mathcal{N}$, *т. е. существует поле* $D' \in \mathrm{Vect}(\mathcal{N})$, *такое что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} C^\infty(\mathcal{M}) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "D"'] & C^\infty(\mathcal{N}) \arrow[d, "D'"] \\ C^\infty(\mathcal{M}) \arrow[r, "\varphi^*"] & C^\infty(\mathcal{N}) \end{tikzcd} \tag{6.171}$$

коммутативна, то $\varphi^*(\iota_D(\Omega S(\mathcal{M})))$ *определяет нулевую форму объема на* $\mathcal{N}$.

Действительно,

$$\varphi^* \iota_D(\Omega S(\mathcal{M})) = \iota_{D'} \varphi^*(\Omega S(\mathcal{M})). \tag{6.172}$$

6.5.4. Интегрирование по подсупермногообразиям и теорема Стокса. Форму $f \in \Omega S(\mathcal{M})$ можно интегрировать по подсупермногообразию следующим образом. Пусть $\mathcal{K}$ — подсупермногообразие с кусочно-гладкой границей в закмнутом подсупермногообразии $\mathcal{N}$ супермногообразия $\mathcal{M}$, а $i\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ — каноническое вложение подсупермногообразия $\mathcal{N}$ в $\mathcal{M}$. Тогда $\Upsilon_\mathcal{N}(i^*(f)) \in \mathrm{Vol}(\mathcal{N})_{[0,1]}$ и образ можно интегрировать по $\mathcal{K}$, если, конечно, $\mathcal{K}$ является (1, 1)-полуориентированным.

Мы назовем $\int\limits_\mathcal{K} \Upsilon_\mathcal{N}(i^*(f))$ *интегралом от* f *по* $\mathcal{K}$ и обычно обозначаем этот интеграл попросту $\int\limits_\mathcal{K} f$.

Теорема (Стокс). *Пусть* $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ — *морфизм полного нечетного ранга, а* $\mathcal{K}$ — *полуориентированное подсупермногообразие с кусочно-гладкой границей в* $\mathcal{M}$. *Тогда*

$$\int\limits_\mathcal{K} \varphi^*(df) = \int\limits_{\partial\mathcal{K}} \varphi^*(f) \quad \textit{для любой формы } f \in \Omega S(\mathcal{N}), \tag{6.173}$$

такой что $\operatorname{supp} \varphi^*(f) \cap \bar{K}$ — *компакт в* M.

Доказательство. Поскольку $\varphi^*(df) = d(\varphi^*(f))$, мы можем предположить, что $\mathcal{M} = \mathcal{N}$, а φ — тождественное отображение.

С помощью разбиения единицы общий случай сводится к ситуации, когда $\mathcal{M} = \mathcal{R}^{n|m}$, а $\mathcal{K}$ является s-краем A_s. Теперь мы можем вычислить оба интеграла в системе координат $x = (u,\ \xi)$, стандартной для $\mathcal{K}$. Поскольку $df = \sum \hat{x}_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, мы получаем

$$\int\limits_{\mathcal{K}} df = \sum \int\limits_{\mathcal{K}} \hat{u}_i \frac{\partial}{\partial u_i} f. \tag{6.174}$$

Интеграл $\int\limits_{\mathcal{K}} \hat{x}_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} f$ обращается в нуль при $i > s$. Действительно, $\int\limits_{\mathcal{K}} \hat{u}_i \dfrac{\partial}{\partial u_i}$ при $i > s$ содержит интегрирование по u_i от функций вида $\dfrac{\partial}{\partial u_i} g$, где $\operatorname{supp} g$ — собственное подмножество при ограничении проекции на координатную гиперплоскость $u_i = 0$ на любой слой, а в $\int \hat{\xi}_i \dfrac{\partial}{\partial \xi_i} f$ отсутствует одна из нечетных координат (мы пользуемся здесь теоремой Фубини).

Итак, $\int\limits_{\mathcal{K}} df = \sum\limits_{i \leqslant s} \int\limits_{\mathcal{K}} \hat{u}_i \dfrac{\partial}{\partial u_i} f$. Представим f в виде $f = \sum\limits_{\alpha,\beta} \hat{u}^{\alpha} \xi^{\beta} f_{\alpha\beta}(u,\ \hat{\xi})$. Тогда ограничение формы f на подсупермногообразие, заданное уравнением $u_j = 0$, имеет вид

$$\sum_{\{\alpha | \alpha_j = 0\},\ \beta} \hat{u}^{\alpha} \xi^{\beta} f_{\alpha\beta}(u_1,\ \ldots u_{j-1},\ 0,\ u_{j+1},\ \ldots,\ u_n,\ \hat{\xi}_1,\ \ldots,\ \hat{\xi}_m). \tag{6.175}$$

Теперь мы видим, что $\mathcal{K} = \{u_j \leqslant 0\} \times \mathcal{K}'$, где $\mathcal{K}'$ есть $(s-1)$-край в $\mathcal{R}^{n-1|m}$ и

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathcal{K}} \hat{u}_1 \frac{\partial}{\partial u_1} f = \int\limits_{u_1 \leqslant 0} du_1 \frac{\partial}{\partial \hat{u}_1} \int\limits_{\mathcal{K}'} \hat{u}_1 \frac{\partial}{\partial u_1} \sum_{\alpha,\beta} \hat{u}^{\alpha} \xi^{\beta} f_{\alpha\beta}(u,\ \hat{\xi}) = \\ = \int\limits_{u_1 \leqslant 0} du_1 \int\limits_{\mathcal{K}'} \frac{\partial}{\partial u_1} \sum_{\{\alpha | \alpha_1 = 0\},\beta} \hat{u}^{\alpha} \xi^{\beta} f_{\alpha\beta}(u,\ \xi) = \int\limits_{u_1 = 0} f. \end{aligned} \tag{6.176}$$

Последнее равенство является композицией теоремы Фубини с интегрированием по частям в $\mathbb{R}^1$.

Аналогичным образом мы видим, что

$$\int\limits_{\mathcal{K}} \hat{u}_i \frac{\partial}{\partial u_i} f = \int\limits_{u_i = 0} f. \tag{6.177}$$

□

§ 6.6. Регулярные плотности

6.6.1. Пусть $\mathcal{M}^{n|m}$ — супермногообразие, а $f \in \Omega S(\mathcal{M})$. Как было отмечено в § 6.5, любой морфизм $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ полного нечетного ранга задает

форму объема $\Upsilon_{\mathcal{N}}(\varphi^*(f)) \in \mathrm{Vol}(\mathcal{N})_{[0,1]}$. Итак, пространство $\Omega S(\mathcal{M})$ предоставляет довольно богатый запас плотностей (в широком смысле слова) типа (0, 1) любой размерности $r|s$, такой что $s \leqslant m$. Действительно, любой форме $f \in \Omega S(\mathcal{M})$ отвечает единственная плотность $\Theta^{r|s}_{\mathcal{M}}(f) \in ED^{r|s}_{0,1}(\mathcal{M})$, а

$$\Theta^{r|s}_{\mathcal{M}}\colon \Omega S(\mathcal{M}) \longrightarrow ED^{r|s}_{0,1}(\mathcal{M}) \tag{6.178}$$

— интегральное преобразование.

Теорема. *Пусть $\mathcal{M}^{n|m}$ — супермногообразие, а $s \leqslant m$.*

1) *Любой форме $f \in \Omega S(\mathcal{M})$ отвечает единственная плотность $\Theta^{r|s}_{\mathcal{M}}(f) \in ED^{r|s}_{0,1}(\mathcal{M})$, такая что*

$$\Upsilon_{\mathcal{U}}(\varphi^*(f)) = V_{\mathcal{U}}(\varphi^*(\Theta^{r|s}_{\mathcal{M}}(f))) \tag{6.179}$$

для любого семейства морфизмов постоянного нечетного ранга $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{M}$, где $\mathcal{U}^{r|s}$ — суперобласть.

2) *В локальных координатах x на $\mathcal{M}$ отображение $\Theta^{r|s}_{\mathcal{M}}$ задается формулой*

$$\Theta^{r|s}_{\mathcal{M}}(f)(x,\ A) = \int\limits_{\mathcal{R}^{s|r}} \mathrm{vol}_{\hat{t}}\, f(x,\ \hat{t}A) \quad \text{для любой функции } f(x,\ \hat{x}) \in \Omega S(\mathcal{M}), \tag{6.180}$$

где $\hat{t}$ — координаты на $\mathcal{R}^{s|r}$, занумерованные антистандартным образом:

$$\hat{t}_1,\ \ldots,\ \hat{t}_r \text{ — нечетные}, \quad \text{а } \hat{t}_{r+1},\ \ldots,\ \hat{t}_{r+s} \text{ — четные}. \tag{6.181}$$

3) *Отображение $\Theta^{r|s}_{\mathcal{M}}$ является $C^{\infty}(\mathcal{M})$-линейным справа и $p(\Theta^{r|s}_{\mathcal{M}}) = r \pmod 2$.*

4) *Любая плотность $\sigma \in \mathrm{Im}(\Theta^{r|s}_{\mathcal{M}})$ удовлетворяет уравнениям*

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial a_i^k \partial a_j^l} + (-1)^{p_{\mathrm{row}}(j)((p_{\mathrm{col}}(k) + p_{\mathrm{col}}(l)) + p_{\mathrm{col}}(k) p_{\mathrm{col}}(l)} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial a_i^l \partial a_j^k} = 0 \tag{6.182}$$

при всех i, j, k, l.

5) *Для любого семейства морфизмов постоянного нечетного ранга $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd} \Omega S(\mathcal{M}) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "\Theta^{r|s}_{\mathcal{M}}"'] & \Omega S(\mathcal{N}) \arrow[d, "\Theta^{r|s}_{\mathcal{N}}"] \\ ED^{r|s}_{0,1}(\mathcal{M}) \arrow[r, "\varphi^*"] & ED^{r|s}_{0,1}(\mathcal{N}) \end{tikzcd} \tag{6.183}$$

Доказательство. В локальной системе координат x для любой функции

$$f(x,\ \hat{x}) \in \Omega S(\mathcal{M})$$

формула (6.180) определяет плотность (мы совершенно не утверждаем, что эта плотность не зависит от выбора системы координат), поскольку

$$\Theta^{r|s}_{\mathcal{M}}(f)(x,\, gA) = \int\limits_{\mathcal{R}^{s|r}} \operatorname{vol}_{\hat{t}} f(x,\, \hat{t}(gA)) =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{R}^{s|r}} \operatorname{vol}_{\hat{t}} f(x,\, (\hat{t}g)A) = \Theta^{r|s}_{\mathcal{M}}(f)(x,\, A)\operatorname{Ber}(g). \qquad (6.184)$$

Отметим тот замечательный факт, что одна и та же суперматрица g в выражениях gA и $\hat{t}g$ представляет два совершенно разных оператора: в gA суперматрица g является матрицей оператора $G \in \mathrm{GL}(r|s)$, а в $\hat{t}g$ она является матрицей оператора $G^{\Pi} \in \mathrm{GL}(s|r)$ в нестандартном формате, отвечающему нашему антистандартному упорядочению координат. Березинианы этих операторов обратны друг другу.

Пусть y — координаты на $\mathcal{U}$. Тогда $\varphi^*(f)(y,\, \hat{y}) = f\Big(\varphi^*(x),\, \hat{y}\dfrac{\partial\varphi^*(x)}{\partial y}\Big)$ и

$$\Upsilon_{\mathcal{U}}\varphi^*(f) = \int\limits_{\mathcal{R}^{s|r}} \operatorname{vol}_{\hat{t}} f\Big(\varphi^*(x),\, \hat{t}\frac{\partial\varphi^*(x)}{\partial y}\Big) = V_{\mathcal{U}}(\varphi^*(\Theta^{r|s}_{\mathcal{M}}(f))). \qquad (6.185)$$

По предложению из п. 6.4.5 любая плотность полностью восстанавливается по тем формам объема, которые она производит.

Поскольку $\Upsilon_{\mathcal{U}}(\varphi^*(f))$ не зависит от выбора системы координат на $\mathcal{M}$, формула (6.180) определяет отображение

$$\Theta^{r|s}_{\mathcal{M}}\colon \Omega S(\mathcal{M}) \longrightarrow ED^{r|s}_{0,1}(\mathcal{M}), \qquad (6.186)$$

которая удовлетворяет п. 1 теоремы. Таким образом, п. 2 тоже доказан.

Пункты 3 и 4 непосредственно следуют из формулы (6.180).

Чтобы проверить п. 5, мы просто продифференцируем формулу (6.180):

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{\sigma}}{\partial a_i^k \partial a_j^l}\Theta^{r|s}_{\mathcal{M}}(f) = (-1)^{c(i,j,k,l)} \int\limits_{\mathcal{R}^{s|r}} \hat{t}_j\hat{t}_i \operatorname{vol}_{\hat{t}} \frac{\partial^2}{\partial a_i^k \partial a_j^l} f(x,\, (\hat{t})A), \qquad (6.187)$$

где

$$c(i,\, j,\, k,\, l) = (n + p(\hat{t}_j))(p(a_j^l) + p(a_i^k)) + p(\hat{t}_i)p(a_i^k) \pmod 2.$$ ☐

6.6.2. Определение регулярных плотностей.

6.6.2а. Пусть $\mathcal{M}^{n|m}$ — супермногообразие. Как было отмечено выше, множество $\Omega S(\mathcal{M})$ предоставляет достаточно богатый набор плотностей типа (0, 1) любой размерности $r|s$, такой что $s \leqslant m$, но отображение $\Theta^{r|s}_{\mathcal{M}}$, определенное формулой (6.186), имеет ядро.

Плотности, полученные из $\Omega S(\mathcal{M})$, назовем *регулярными*. Оказывается, порядочное число структур переносится с пространства $\Omega S(\mathcal{M})$ на регулярные плотности.

Лемма. *Пусть* $\mathcal{U}^{r|s}$ — *суперобласть*, $s \leqslant m$, *а* $f \in \Omega S(\mathcal{M})$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1) *Для любого супермногообразия параметров* $\mathcal{W}$, *любого* $\mathcal{W}$*-семейства* φ *морфизмов полного нечетного ранга* $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ *и любой функции* $c \in C^{r|s}_{1,1}(\mathcal{U})$ *выполняется равенство*

$$\int\limits_{c} \varphi^*(f) = 0. \qquad (6.188)$$

2) *Для любого супермногообразия параметров* $\mathcal{W}$ *и любого* $\mathcal{W}$*-семейства морфизмов* $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ *полного нечетного ранга* $\mathcal{W}$*-семейство форм объема* $\varphi^*(f)$ *на* $\mathcal{U}$ *равно нулю.*

3) *Для любого* $\mathcal{R}^{0|q}$*-семейства* $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ *морфизмов полного нечетного ранга* $\mathcal{R}^{0|q}$*-семейство форм объема* $\varphi^*(f)$ *на* $\mathcal{U}$ *равно нулю.*

Доказательство. По теореме 6.6.1 первые два утверждения эквивалентны, а третье является частным случаем второго. Если бы второе утверждение было неверно, тогда существовали бы супермногообразие $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}$-семейство морфизмов $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{M}$, такие что $\varphi^*(f) \neq 0$. Пусть $\dim\mathcal{T} = p|q$. Рассмотрим $\mathcal{T}$ как $\mathcal{T}$-семейство точек супермногообразия $\mathcal{R}^{0|q}$. Одна из точек супермногообразия $\mathcal{W}$ задает нам $\mathcal{R}^{0|q}$-семейство морфизмов $\mathcal{U} \to \mathcal{M}$, для которого третье утверждение неверно. Следовательно, второе и третье утверждение тоже эквивалентны, и все доказано. ☐

Упражнение. Первые два утверждения леммы совсем не эквивалентны, если фиксировать $\mathcal{T}$. Пример: $\mathcal{T} = \mathrm{pt}$ и $r|s = n|m$, а $p(f) = n + m + 1 \pmod 2$. Тогда первое утверждение выполняется, а второе, вообще говоря, нет (приведите пример).

6.6.2б. Обозначим символом $K^{r|s}(\mathcal{M})$ множество тех форм $f \in \Omega S(\mathcal{M})$, из которых получаются нулевые формы объема на любых $\mathcal{T}$-семействах морфизмов максимального ранга $r|s$-мерных подсуперобластей в $\mathcal{M}$ для любой суперобласти параметров $\mathcal{T}$. Положим

$$\begin{aligned} F^{r|s}(\mathcal{M}) &= \Omega S(\mathcal{M})/K^{r|s}(\mathcal{M}),\\ F^{*|s}(\mathcal{M}) &= \bigoplus_{r} F^{r|s}(\mathcal{M}),\\ F^{*|*}(\mathcal{M}) &= \bigoplus_{r,s} F^{r|s}(\mathcal{M}). \end{aligned} \qquad (6.189)$$

Структура $C^{\infty}(\mathcal{M})$-модуля переносится с $\Omega S(\mathcal{M})$ на $F^{*|*}(\mathcal{M})$. Оказывается, последовательности (а точнее, комплексы) $F^{*|s}(\mathcal{M})$ полубесконечны вправо при $s<m$, но, чтобы это увидеть, нам нужно бесконечное число нечетных параметров[1].

Обозначим символом $K_q^{r|m}(\mathcal{M})$ подсуперпространство в $\Omega S(\mathcal{M})$, состоящее из псевдодифференциальных форм, из которых получаются нулевые формы объема на любых $\mathcal{R}^{0|q}$-семействах морфизмов постоянного нечетного ранга $\mathcal{U} \to \mathcal{M}$. Очевидно, что

$$K^{r|s}(\mathcal{M}) = \bigcap_{q\in\mathbb{Z}_+} K_q^{r|m}(\mathcal{M}). \tag{6.190}$$

Предложение. 1) *Соотношение* $K_q^{r|m}(\mathcal{M}) = \Omega S(\mathcal{M})$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $r>n$ (*вне зависимости от* q).

2) *Соотношение* $K_q^{r|s}(\mathcal{M}) = \Omega S(\mathcal{M})$ *при* $0 \leqslant s < m$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $r > n+s+q$.

Следствие. *При* $s<m$ *и любом* r *выполняется неравенство* $F^{r|s}(\mathcal{M}) \neq 0$.

Замечание. Если бы мы не ввели нечетные параметры, то комплексы $F^{*|s}(\mathcal{M})$ закончились бы на $F^{n+s|s}(\mathcal{M})$, т. е. при отсутствии нечетных параметров $F^{n+s+i|s}(\mathcal{M}) = 0$, если $i>0$.

Доказательство. Пусть (u, ξ) — координаты на $\mathcal{M}$, а

$$f = \sum_a \hat{u}_1^{a_1} \ldots \hat{u}_n^{a_n} f_a(\xi, \hat{\xi}, u) \in \Omega S(\mathcal{M}). \tag{6.191}$$

Рассмотрим $\mathcal{R}^{0|q}$-семейство морфизмов φ постоянного нечетного ранга $\varphi\colon \mathcal{R}^{r|s} \to \mathcal{M}$, где (v, η) — координаты на $\mathcal{R}^{r|s}$, а $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_q)$ — координаты на супермногообразии параметров $\mathcal{R}^{0|q}$.

Ясно, что степени функций $\varphi^*(\hat{u}_i)$ и $\varphi(\hat{\xi}_j)$ по $\hat{v}$ не превосходят 1, а степень каждого коэффициента при $\hat{v}_k$ не меньше чем 1 по модулю идеала $I(\eta, \tau)$, порожденного всеми η и τ.

Поэтому коэффициент при $\hat{v}_1 \ldots \hat{v}_r$ в разложении функции $\varphi^*(f)$ принадлежит (при $r>n$) идеалу $I(\eta, \tau)^{r-n}$, и, поскольку $I(\eta, \tau)^{q+s+1} = 0$, это доказывает большую часть второго утверждения. Мы оставляем читателю упражнение — построить позитивный пример, основанный на приведенных выше аргументах.

Если $s=m$, то можно найти $\mathcal{R}^{0|q}$-семейство систем координат на $\mathcal{M}$, такое что $\varphi^*(\xi_i) = \eta_i$. Тогда

$$\begin{gathered}\xi^*(f) = \sum_a \varphi^*(\hat{u}_1)^{a_1} \ldots \varphi^*(\hat{u}_n)^{a_n} f_a(\eta, \hat{\eta}, \varphi^*(u)),\\ \deg_{\hat{v}} \varphi^*(f) \leqslant \deg_{\hat{u}} f.\end{gathered} \tag{6.192}$$

$\square$

---

[1] А как с ними работать, нас научит В. Молотков в томе 2.

Замечание. Итак, с точностью до замены четности пространство $F^{r|s}(\mathcal{M})$ совпадает с образом пространства $\Omega S(\mathcal{M})$ при отображении $\Theta_{\mathcal{M}}^{r|s}$ в $D_{0,1}^{r|s}(\mathcal{M})$.

6.6.3. Как переносить внешний дифференциал, внутреннее произведение и действие дифференциальных форм с $\Omega S(\mathcal{M})$ на пространство регулярных плотностей.

Теорема. 1) *Существует отображение* $d\colon F^{*|*}(\mathcal{M}) \longrightarrow F^{*|*}(\mathcal{M})$ *степени* $1|0$, *такое что следующая диаграмма коммутативна*:

$$\begin{tikzcd} \Omega S(\mathcal{M}) \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \Omega S(\mathcal{M}) \arrow[d] \\ F^{r|s}(\mathcal{M}) \arrow[r, "d"] & F^{r+1|s}(\mathcal{M}) \end{tikzcd} \tag{6.193}$$

2) *Для любого поля* $D \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M})$ *существует морфизм* ι_D *степени* $-1|0$, *такой что следующая диаграмма коммутативна*:

$$\begin{tikzcd} \Omega S(\mathcal{M}) \arrow[r, "\iota_D"] \arrow[d] & \Omega S(\mathcal{M}) \arrow[d] \\ F^{r+1|s}(\mathcal{M}) \arrow[r, "\iota_D"] & F^{r|s}(\mathcal{M}) \end{tikzcd} \tag{6.194}$$

3) *Существует* $C^\infty(\mathcal{M})$-*действие форм из* $\Omega P(\mathcal{M})$ *на* $F^{*|*}(\mathcal{M})$, *такое что степень оператора, отвечающего любому элементу из* $\Omega P^k(\mathcal{M})$, *равна* $k|0$, *а диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \Omega P^k(\mathcal{M}) \times \Omega S(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega S(\mathcal{M}) \arrow[d] \\ \Omega P^k(\mathcal{M}) \times F^{r|s}(\mathcal{M}) \arrow[r] & F^{r|s}(\mathcal{M}) \end{tikzcd} \tag{6.195}$$

где верхняя стрелка задана формулой $(\omega, f) \mapsto \omega f$, *коммутативна.*

Во всех приведенных выше диаграммах вертикальные стрелки являются каноническими проекциями на факторпространства.

4) *Отображение* d, ι_D *и действие форм из* $\Omega P(\mathcal{M})$ *определены однозначно коммутативностью соответствующих диаграмм и степени.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что во всех диаграммах левые вертикальные стрелки являются линейными отображениями, что гарантирует единственность. Доказательство теоремы сводится, таким образом, к проверке следующих вложений:

1) $d(K^{r|s}(\mathcal{M})) \subseteq K^{r+1|s}(\mathcal{M})$;

2) $\iota_D(K^{r+1|s}(\mathcal{M})) \subseteq K^{r|s}(\mathcal{M})$;

3) $\Omega P^k(\mathcal{M}) \cdot K^{r|s}(\mathcal{M}) \subseteq K^{r+1|s}(\mathcal{M})$.

Первое из них следует немедленно из теоремы Стокса и леммы из п. 6.6.2а.

Чтобы доказать второе включение, воспользуемся формулами (6.180): пусть $f(x, \hat{x}) \in K^{r+1|s}(\mathcal{M})$. Это значит, что $\int\limits_{\mathcal{R}^{s|t+1}} \mathrm{vol}_{\hat{t}} f(x, \hat{t}A) = 0$, где в суперматрице A имеется $r+1$ нечетная строка. Выделим последнюю строку $\bar{a}_{r+s+1}$. Получим

$$0 = \int\limits_{\mathcal{R}^{s|r+1}} \mathrm{vol}_{\hat{t}}\, \mathrm{vol}_{\hat{t}_{r+s+1}} f(x, \hat{t}'A' + \hat{t}_{r+s+1}\bar{a}_{r+s+1}) = \\ = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n+m} a^k_{r+s+1} \int v'_{\hat{t}} \frac{\partial f}{\partial \hat{x}_k}(x, \hat{t}'A'), \tag{6.196}$$

где A' — подматрица матрицы A без последней строки, а $t' = (\hat{t}_1, \ldots, \hat{t}_{r+s})$. Поскольку элементы строки a_{r+s+1} линейно независимы, мы получаем

$$0 = \int v'_{\hat{t}} \frac{\partial f}{\partial \hat{x}_k}(x, \hat{t}'A), \quad \text{т. е. } \iota_k(f) = \frac{\partial f}{\partial \hat{x}_k} \in K^{r|s}(\mathcal{M}).$$

Включение 3 достаточно доказать при $k = 1$. Снова с помощью формулы (6.180) мы видим, что $\hat{x}_k f$ принимает вид (с точностью до знаков, которые несущественны, поскольку каждое слагаемое все равно обращается в нуль)

$$\int\limits_{\mathcal{R}^{0|1}} \int\limits_{\mathcal{R}^{s|r}} \mathrm{vol}_{\hat{t}_{r+s+1}} \mathrm{vol}_{\hat{t}} \Bigg(\sum_{1 \leqslant j \leqslant r+s} \hat{t}_j a^k_j + \hat{t}_{r+s+1} a^k_{r+s+1} \Bigg) f(x, \hat{t}A + \hat{t}_{r+s+1}\bar{a}_{r+s+1}) = \\ = a^k_{r+s+1} \int\limits_{\mathcal{R}^{s|r}} \mathrm{vol}_{\hat{t}} f(x, \hat{t}A) + \\ + \sum_{1 \leqslant j \leqslant r+s} \int\limits_{\mathcal{R}^{s|r}} \mathrm{vol}_{\hat{t}}\, \hat{t}_j a^k_j \Bigg(\sum_{1 \leqslant l \leqslant n+m} a^l_{r+s+1} \int v'_{\hat{t}} \frac{\partial f}{\partial \hat{x}_l}(x, \hat{t}A) \Bigg) = \\ = \sum_{1 \leqslant j \leqslant r+s} \sum_{1 \leqslant l \leqslant n+m} a^k_j a^l_{r+s+1} \frac{\partial}{\partial a^l_j} \int \mathrm{vol}_{\hat{t}} f(x, \hat{t}A) = 0. \tag{6.197}$$

□

6.6.4. Регулярные плотности в пограничных размерностях.

6.6.4а. Рассмотрим отдельно случай $F^{*|0}(\mathcal{M})$. Заметим, что семейство морфизмов $\varphi\colon \mathcal{N}^{r|0} \to \mathcal{M}$ задает гомоморфизм $\varphi^*\colon \Omega(\mathcal{M}) \longrightarrow \Omega(\mathcal{N}) = \Omega S(\mathcal{N})$ и поэтому каждая псевдодифференциальная форма производит $r|0$-плотность; отображение

$$\Omega(\mathcal{M}) \longrightarrow D^{r|0}_{0,0}(\mathcal{M}) = D^{r|0}_{0,1}(\mathcal{M}) \tag{6.198}$$

задается той же самой формулой (6.180).

Для любой формы $f \in \Omega(\mathcal{U})$, где $\mathcal{U}$ — суперобласть, обозначим символом $p_k(f) \in \Omega P^k(\mathcal{U})$ каждый k-й член в разложении ряда Тейлора для f по переменным с крышечкой в начале координат. Очевидно, что p_k являются проекциями на $\Omega P^k(\mathcal{M})$ и что они не зависят от координат на $\mathcal{U}$ и коммутируют с ограничениями на подсупермногообразия. Поэтому на любом супермногообразии $\mathcal{M}$ эти проекции

$$p_k\colon \Omega(\mathcal{M}) \longrightarrow \Omega P^k(\mathcal{M}) \tag{6.199}$$

определены корректно.

Предложение. *Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*

1) *ограничения отображений p_k на $\Omega S(\mathcal{M})$ сюръективны*;

2) *диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \Omega S(\mathcal{M}) \arrow[r, "p_k"] \arrow[d] & \Omega P^k(\mathcal{M}) \arrow[d] \\ F^{k|0}(\mathcal{M}) \arrow[r, "p_k"] & D^{k|0}_{0,1}(\mathcal{M}) \end{tikzcd} \tag{6.200}$$

коммутативна, а правая вертикальная стрелка инъективна;

3) $F^{k|0}(\mathcal{M}) \cong \Omega P^k(\mathcal{M})$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ — это суперобласть $\mathcal{U}$ с координатами $x_1, \ldots, x_{n+m}$. Чтобы доказать первое утверждение, рассмотрим произвольную функцию $g \in S(\mathbb{R}^m)$, равную единице в окрестности начала координат. Тогда для любой формы $\omega \in \Omega P^k(\mathcal{U})$ получаем

$$\omega \cdot g(\hat{x}_{n+1}, \ldots, \hat{x}_{n+m}) \in \Omega S(\mathcal{U}), \quad p_k(\omega \cdot g(\hat{x}_{n+1}, \ldots, \hat{x}_{n+m})) = \omega. \tag{6.201}$$

Коммутативность диаграммы следует из формулы (6.180):

$$f(x, \hat{x}) \mapsto \int\limits_{\mathcal{R}^{0|k}} \mathrm{vol}_{\hat{t}} f(x, \hat{t}A), \tag{6.202}$$

а каждый член степени k по $\hat{t}$ в подынтегральном выражении получается из соответствующего члена ряда Тейлора для f.

Чтобы доказать инъективность, достаточно по любой форме $\omega \in \Omega P^k(\mathcal{U})$ построить семейство морфизмов $\varphi\colon \mathcal{R}^{k|0} \to \mathcal{U}$, такое что $\varphi^*(\omega) \neq 0$. Мы можем предположить, что ω содержит ненулевой моном

$$\begin{gathered} c(x, \xi) = c(x)\hat{u}_1 \ldots \hat{u}_s \hat{\xi}_1^{l_1} \ldots \hat{\xi}_r^{l_r}, \text{ где} \\ c(0, \xi) \neq 0, \quad \text{а} \quad l_1 + \ldots + l_r + s = k. \end{gathered} \tag{6.203}$$

Пусть $t_1, \ldots, t_k$ — координаты на $\mathcal{R}^{k|0}$. Возьмем достаточно богатый запас нечетных параметров α_i и β_i и положим

$$\varphi^*(u_i) = \begin{cases} t_i & \text{для } i \leqslant s, \\ 0 & \text{для } i > s, \end{cases}$$
$$\varphi^*(\xi_j) = \begin{cases} 0 & \text{для } j > r, \\ \alpha_j + \sum\limits_{a_j}^{a_{j+1}-1} t_k\beta_k & \text{для } j \leqslant r, \end{cases} \tag{6.204}$$

где $a_1 = s+1$ и $a_j = s+1+l_1+\ldots+l_{j-1}$ при $j > 1$.

Нетрудно видеть, что наш моном с точностью до знака принимает вид

$$\varphi^*(c(x, \xi)) = \prod_{1\leqslant i\leqslant k} \hat{t}_I \prod_{s+1\leqslant j\leqslant k} \beta_j \tag{6.205}$$

и $\varphi^*(c(x, \xi)) \neq 0$, в то время как все прочие мономы в ω обращаются в нуль.

Третье утверждение вытекает из коммутативности диаграммы и доказанной выше инъективности: ядро отображения p_k совпадает с $K^{k|0}(\mathcal{M})$. ☐

6.6.4б. Пусть $\mathcal{U}$ — суперобласть. Из теоремы из п. 6.5.3г и предложения из п. 6.6.2б следует, что

$$F^{r|m}(\mathcal{U}) = \begin{cases} 0 & \text{при } r > n, \\ F^{n|m}(\mathcal{U}) = \Pi^m \operatorname{Vol}(\mathcal{U})_{0,1} & \text{при } r = n. \end{cases} \tag{6.206}$$

Итак, $F^{n|m}(\mathcal{U})$ — свободный $C^\infty(\mathcal{U})$-модуль ранга 1 с образующей ρ_0 четности $n \pmod 2$.

Рассмотрим $C^\infty(\mathcal{M})$-модуль $\operatorname{Vect}(\mathcal{U})\Pi$, состоящий из тех же элементов, что и $\operatorname{Vect}(\mathcal{U})$, но имеющий противоположную четность, хотя и прежнее левое $C^\infty(\mathcal{U})$-действие. Нетрудно видеть, что $C^\infty(\mathcal{U})$-модуль $S^k(\operatorname{Vect}(\mathcal{U})\Pi)$ свободен и его элементы имеют вид $\sum\limits_\alpha c_\alpha e^\alpha$, где α — мультииндексы вида $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m})$, а

$$e^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Pi\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_{n+m}}\Pi\right)^{\alpha_{n+m}}. \tag{6.207}$$

Определим спаривание

$$\langle\cdot, \cdot\rangle\colon S^k(\operatorname{Vect}(\mathcal{U})\Pi) \times \Omega P^k(\mathcal{U}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{U}), \tag{6.208}$$

положив

$$\left\langle \sum C_\alpha e^\alpha,\ \omega \right\rangle = \sum_\alpha C_\alpha \iota_1^{\alpha_1} \ldots \iota_{n+m}^{\alpha_{n+m}} \omega. \tag{6.209}$$

Ясно, что (для некоторой функции $K(\alpha)$)

$$\langle e^\alpha,\ \hat{x}_1^{\beta_1} \ldots \hat{x}_{n+m}^{\beta_{n+m}} \rangle = (-1)^{K(\alpha)} \delta_\beta^\alpha, \tag{6.210}$$

так что это спаривание определяет изоморфизм

$$S^k(\operatorname{Vect}(\mathcal{U})\Pi) \cong \operatorname{Hom}_{C^\infty(\mathcal{U})}(\Omega P^k(\mathcal{U}),\ C^\infty(\mathcal{U})). \tag{6.211}$$

При $r \leqslant n$ мы определим спаривание формулой

$$\langle f, \omega\rangle \mapsto \widetilde{f\omega}, \tag{6.212}$$

где $f \in F^{r|m}(\mathcal{U})$, $\omega \in \Omega P(\mathcal{U})$, а $\widetilde{f\omega}$ есть образ элемента $f\omega \in F^{*|m}(\mathcal{U})$ при проекции на $F^{n|m}(\mathcal{U})$.

В частности, мы видим, что всегда верно следующее:

$$\langle f, \omega\rangle = 0 \quad \text{при любых} \ \ f \in F^{r|m}(\mathcal{U}), \quad \omega \in \Omega P^l(\mathcal{U}) \ \ \text{и} \ \ r + l > n. \tag{6.213}$$

Лемма. *Если* $0 \leqslant r \leqslant n$, *то*

$$F^{r|m}(\mathcal{U}) \simeq \operatorname{Hom}_{C^\infty(\mathcal{U})}(\Omega P^{n-r}(\mathcal{U}), \Pi^m \operatorname{Vol}(\mathcal{U})_{0,1}) \tag{6.214}$$

(*где в правой части — пространство гомоморфизмов, коммутирующих с правым* $C^\infty(\mathcal{U})$-*действием*), *а*

$$\Pi^m(\operatorname{Vol}(\mathcal{U})_{0,1}) \simeq \Pi^m \operatorname{Vol}(\mathcal{U})_{0,1} \otimes S^{n-r}(\operatorname{Vect}(\mathcal{U})\Pi). \tag{6.215}$$

Доказательство. В этих формулах $\Pi^m \operatorname{Vol}(\mathcal{U})_{0,1} = F^{n|m}(\mathcal{U})$. Второе равенство определяется из формулы

$$\left(f \otimes \sum C_\alpha e^\alpha\right) \omega = f \cdot \left\langle \sum C_\alpha e^\alpha,\ \omega \right\rangle, \tag{6.216}$$

а первое — из спаривания

$$F^{*|m}(\mathcal{U}) \times \Omega P(\mathcal{U}) \longrightarrow \Pi^m \operatorname{Vol}(\mathcal{U})_{0,1}, \tag{6.217}$$

невырожденность которого вытекает из тождества

$$\left(\left(\iota_{\left(\frac{\partial}{\partial x}\Pi D\right)}\right)^\alpha \rho_0\right)\omega = (-1)^{(p(\rho_0)+\alpha_1+\ldots+\alpha_n)p(\omega)}\omega\left(\iota_{\left(\frac{\partial}{\partial x}\Pi D\right)}\right)^\alpha \rho_0 =$$
$$= (-1)^{c(\alpha,p,\beta)}\sigma_\beta^\alpha \rho_0, \tag{6.218}$$

где ρ_0 — образующая модуля $F^{n|m}(\mathcal{U})$, а $\omega = dx_1^{\beta_1} \ldots dx_{n+m}^{\beta_{n+m}}$. ☐

Склеивая супермногообразия из карт, мы получаем следующее утверждение.

Теорема. *Для любого супермногообразия* $\mathcal{M}^{n|m}$ *имеют место изоморфизмы*

$$F^{r|m}(\mathcal{M}) \cong \begin{cases} 0 & \textit{при } r > n, \\ \operatorname{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega P^{n-r}(\mathcal{M}), \Pi^m \operatorname{Vol}(\mathcal{M})_{0,1}) \cong & \\ \cong \Pi^m \operatorname{Vol}(\mathcal{M})_{0,1} \otimes_{C^\infty(\mathcal{M})} S^{n-r}(\operatorname{Vect}(\mathcal{M})\Pi) & \textit{при } r \leqslant n, \end{cases} \tag{6.219}$$

где первый изоморфизм (при $r > n$) устанавливается с помощью спаривания $F^{r|m}(\mathcal{M}) \times \Omega P(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Vol}(\mathcal{M})_{0,1}$, а второй (при $r \leqslant n$) — с помощью спаривания $S^{n-r}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\mathrm{Vect}(\mathcal{M})\Pi) \times \Omega P^{n-r}(\mathcal{M}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{M})$).

6.6.4в. Изоморфизм

$$F^{r|m}(\mathcal{M}) \cong \Pi^m \,\mathrm{Vol}(\mathcal{M})_{0,1} \otimes S^{n-r}(\mathrm{Vect}(\mathcal{M})\Pi) \tag{6.220}$$

снабжает нас базисом в пространстве $F^{r|m}(\mathcal{M})$.

Пусть $x = (u, \xi)$ — координаты на $\mathcal{U}$, а ρ_0 — образующая в $F^{n|m}(\mathcal{U})$, которая превращается в $\Pi^m \,\mathrm{vol}_x$ при изоморфизме $F^{n|m}(\mathcal{U}) \cong \Pi^m \,\mathrm{Vol}(\mathcal{U})_{0,1}$. Положим

$$\check{x} := \iota_{\frac{\partial}{\partial x}}. \tag{6.221}$$

Тогда любой элемент из $F^{r|m}(\mathcal{U})$ можно однозначно представить в виде

$$f = \sum_{\alpha} c_\alpha \check{x}_1^{\alpha_1} \ldots \check{x}_{n+m}^{\alpha_{n+m}} \rho_0, \tag{6.222}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m})$ — мультииндекс, такой что

$$\begin{gathered} \alpha_i \in \{0, 1\} \quad \text{при} \quad i \leqslant n, \qquad \alpha_i \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{при} \quad i > n \quad \text{и} \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n+m} = n - r. \end{gathered} \tag{6.223}$$

Как выразить в терминах этого базиса основные структуры на $F^{*|m}(\mathcal{M})$?

Внутреннее произведение выражается естественным образом. Действие формы $\omega \in \Omega P^k(\mathcal{M})$ при $k > r$ равно нулю. При $k \leqslant r$ форма $\omega_0 \check{x}^\alpha$ представляется в виде

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant k} s_i \omega_i, \quad \text{где} \quad \omega_i \in \omega P^i(\mathcal{M}), \quad \text{а} \quad s_i \in S^{n-r+i}(\mathrm{Vect}(\mathcal{M})\Pi) \tag{6.224}$$

(мы используем здесь скобку операторов), так что

$$\omega_0 \check{x}^\alpha \rho_0 = s_0 \rho_0, \tag{6.225}$$

поскольку $\omega_i F^{n|m}(\mathcal{M}) = 0$ при $i > 0$.

Внешний дифференциал на $\Omega S(\mathcal{M})$ в координатах имеет вид

$$d = \sum \hat{x}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{6.226}$$

(очевидно, d — Фурье-образ по переменным $\check{x}$ оператора (6.228)). Умножение на $\hat{x}_j$ имеет вид

$$\check{x}_1^{\alpha_1} \ldots \check{x}_{n+m}^{\alpha_{n+m}} \rho_0 \mapsto (-1)^{k(\alpha, j)} \alpha_j \check{x}_1^{\alpha_1} \ldots \check{x}_{j-1}^{\alpha_{j-1}} \check{x}_j^{\alpha_j - 1} \check{x}_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \ldots \check{x}_{n+m}^{\alpha_{n+m}} \rho_0, \tag{6.227}$$

где

$$k(\alpha, j) = \begin{cases} (p(x_j) + 1)(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{j-1} + 1) & \text{при } j > 1, \\ p(x_j) + 1 & \text{при } j = 1. \end{cases}$$

Отсюда следует явная формула для внешнего дифференциала на $F^{n|m}(\mathcal{M})$:

$$d = \sum_j (-1)^{p(x_j)+1} \frac{\partial^2}{\partial \check{x}_j \partial x_j}. \tag{6.228}$$

Очевидно, d — Фурье-образ по переменным $\hat{x}$ оператора (6.226).

6.6.4г. Связь между интегральными формами и регулярными плотностями. *Интегральными формами* на $\mathcal{M}$ называются элементы пространства

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{M}) \otimes S(\mathrm{Vect}(\mathcal{M})\Pi) \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_+} \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega P^i(\mathcal{M}), \mathrm{Vol}(\mathcal{M})), \tag{6.229}$$

где изоморфизм осуществляется с помощью описанного выше спаривания пространства $S(\mathrm{Vect}(\mathcal{M})\Pi)$ и $\Omega P(\mathcal{M})$ в $C^\infty(\mathcal{M})$. Пространство интегральных форм является $C^\infty(\mathcal{M})$-модулем, который обозначается символом

$$\Sigma(\mathcal{M}) = \bigoplus_{-\infty}^{n-m} \Sigma_j(\mathcal{M}), \tag{6.230}$$

где

$$\Sigma_j(\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega P^{n-m-j}(\mathcal{M}), \mathrm{Vol}(\mathcal{M})). \tag{6.231}$$

На $\Sigma(\mathcal{M})$ мы автоматически получаем и внутреннее умножение ι_D, и $\Omega P(\mathcal{M})$-действие, и внешний дифференциал, определенный так же, как на $F^{*|m}(\mathcal{M})$.

Связь между интегральными формами на $\mathcal{M}$ и элементами из $F^{*|m}(\mathcal{M})$ следующая: оба пространства, и $F^{*|m}(\mathcal{M})$, и $\Sigma(\mathcal{M})$, могут быть (как пространства сечений пучков $\mathcal{O}_\mathcal{M}$-модулей) любого из четырех типов $(a, b) \in \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, причем пространство $F^{*|m}(\mathcal{M})_{a,b}$ строится аналогично тому, как это сделано выше, но не из форм, лежащих в $\Omega S(\mathcal{M})$, а из форм, лежащих в $\Omega S(\mathcal{M})_{a,b} \subseteq \Omega(\mathcal{M})_{a,b}$. Итак,

$$\Sigma(\mathcal{M})_{a,b} \cong \mathrm{Vol}(\mathcal{M})_{a,b} \otimes S(\mathrm{Vect}(\mathcal{M})\Pi), \tag{6.232}$$

и

$$\Sigma_j(\mathcal{M})_{a,b} \cong \Pi^m(F^{m+j|m}(\mathcal{M})_{a,b+1}) \quad \text{при } -m \leqslant j \leqslant n - m. \tag{6.233}$$

6.6.5. Связь между $\boldsymbol{\Omega H(\mathcal{M})}$, $\boldsymbol{F^{*|*}(\mathcal{M})}$, $\boldsymbol{\Omega S(\mathcal{M})}$ и $\boldsymbol{VZ(\mathcal{M})}$. Ниже мы сформулируем основные утверждения о связях между указанными объектами, отложив большую часть доказательств до более подробного изучения интегральной геометрии (в следующих томах).

6.6.5а. На супермногообразии $\mathcal{R}^{s|r}$ с координатами t в стандартном формате рассмотрим интегральную форму $\rho = \iota_E(\mathrm{vol}_t)$, где $E = \sum t_i \dfrac{\partial}{\partial t_i}$.

Лемма. *Для любой однородной функции $f \in H^{r-s}(\mathcal{R}^{s|r})$ форма $f\rho$ замкнута.*

Доказательство. На $\mathcal{R}_*^{s|r}$ перейдем к полярным координатам $\mathcal{R}_*^{s|r} \cong \mathcal{R}_+^{1|0} \times \mathcal{S}^{s-1|r}$, где $\mathcal{S}^{s-1|r}$ — суперсфера, т. е. $\mathcal{S}^{s-1} \times \mathcal{R}^{0|r}$ (или любое другое $(s-1|r)$-мерное подсупермногообразие в $\mathcal{R}^{s|r}$, подстилающее многообразие которого пересекает каждый луч в $\mathbb{R}^s$, выходящий из начала координат, лишь один раз). Ясно, что у $f\rho$ есть проекция на суперсферу $\mathcal{S}^{s-1|r}$, причем образ этой проекции — интегральная форма максимальной степени $\left(\text{в полярных координатах } E = r\dfrac{\partial}{\partial r}\right)$.

При $s > 0$ определим отображение

$$\nu^{r|s} \colon \Omega H^{r-s}(\mathcal{M}) \longrightarrow D^{r|s}(\mathcal{M}), \tag{6.234}$$

положив в координатах

$$\nu^{r|s}(f(x, \hat{x})) = \sigma^{r|s} f(x, A), \quad \text{где} \quad \sigma^{r|s} f(x, A) = \int\limits_{\mathcal{S}^{s|r}} \rho_{\hat{t}} f(x, \hat{t}A), \tag{6.235}$$

а координаты $\hat{t}$ занумерованы нашим обычным антистандартным образом, т. е. $\hat{t}_1, \ldots, \hat{t}_r$ — нечетные, а $\hat{t}_{r+1}, \ldots, \hat{t}_{r+s}$ — четные. □

Определим пространство плотностей Воронова—Зорича, положив $VZ_{0,1}^{r|s}(\mathcal{M}) := \operatorname{Im} \nu^{r|s}$ при $s > 0$. Отметим, что оригинальное (эквивалентное) определение было трудным для восприятия; см. [VZ1].

Предложение. *Отображение* $\nu^{r|s}$ *корректно определено.*

Для любого $\varepsilon \in \mathbb{Z}/2$ *положим*

$$\Omega H^{k,\varepsilon}(\mathcal{M}) := \{f(x, \hat{x}) \in \Omega H^k(\mathcal{M}) \mid f(x, -\hat{x}) = (-1)^{k+\varepsilon} f(x, \hat{x})\}, \tag{6.236}$$

тогда

$$\Omega H^k(\mathcal{M}) \cong \Omega H^{k,0}(\mathcal{M}) \oplus \Omega H^{k,1}(\mathcal{M}) \quad \textit{при } k \geqslant 0 \tag{6.237}$$

и

$$\Omega H^k(\mathcal{M}) \subseteq \Omega H^{k,0}(\mathcal{M}) \quad \textit{при } k \geqslant 0. \tag{6.238}$$

Нетрудно видеть, что $d(\Omega H^{k,\varepsilon}(\mathcal{M})) \subset \Omega H^{k+1,\varepsilon}(\mathcal{M})$.

Теорема. *При* $s > 0$ *и* $r \in \mathbb{Z}_+$ *выполняются следующие утверждения*:

1) *отображение* $\nu^{r|s} \colon \Omega H^{r-s}(\mathcal{M}) \longrightarrow VZ_{0,1}^{r|s}(\mathcal{M})$ *сюръективно*;

2) $\operatorname{Ker} \nu^{r|s} = \Omega H^{r-s,1-\varepsilon}(\mathcal{M}) \oplus (\Omega H^{r-s,\varepsilon}(\mathcal{M}) \cap \Omega P(\mathcal{M}))$, *где* $\varepsilon = s \pmod 2$;

3) $p(\nu^{r|s}) = r \pmod 2$;

4) *внешние дифференциалы на* $\Omega H^{r-s}(\mathcal{M})$ *и* $VZ_{0,1}^{r|s}(\mathcal{M})$ *согласованы.*

Замечание. 1) Имеют место изоморфизмы

$$VZ_{0,0}^{r|0}(\mathcal{M}) \cong VZ_{0,1}^{r|0}(\mathcal{M}) \cong \Pi^r \Omega P^r(\mathcal{M}).$$

2) Второе утверждение теоремы означает, что (здесь $\varepsilon = s \pmod 2$)

$$VZ_{0,1}^{r|s}(\mathcal{M}) \cong \begin{cases} \Pi^r \Omega P^{r-s,\varepsilon}(\mathcal{M}) & \begin{array}{l}\text{при } 0 \leqslant r < s \text{ или} \\ r \geqslant s \text{ и нечетном } s,\end{array} \\ \Pi \Omega P^{r-s,0}(\mathcal{M}) / \Omega P^{r-s}(\mathcal{M}) & \text{при четном } s \text{ и } s \leqslant r. \end{cases} \tag{6.239}$$

Доказательства теоремы и предложения сводятся к ссылке на суперверсию теории проективного преобразования, сформулированную ниже.

Эта теорема позволяет нам яснее понять, каков же, в сущности, запас плотностей Воронова—Зорича, и иметь дело с гораздо более удобными объектами, а именно с суперкоммутативной супералгеброй $\Omega H(\mathcal{M})$. В частности, оказывается,

$$VZ_{0,1}^{r|s}(\mathcal{M}) \cong VZ_{0,1}^{r+2|s+2}(\mathcal{M}) \quad \text{при } 0 < s + r < m - 2. \tag{6.240}$$

6.6.5б. Предложение. *Образ (определенного формулой* (6.235)) *отображения* $\Omega S(\mathcal{M}) \longrightarrow \Theta_{0,1}^{r|s}(\mathcal{M})$ *равен* $VZ_{0,1}^{r|s}(\mathcal{M})$.

Следствие. 1) *Справедливо соотношение*

$$VZ_{0,1}^{r|s}(\mathcal{M}) = \Pi^r F^{r|s}(\mathcal{M}).$$

2) *Справедливо соотношение*

$$F^{r|s}(\mathcal{M}) = \begin{cases} \Omega H^{r-s,\varepsilon}(\mathcal{M}) & \begin{array}{l}\textit{при } s = 2k+1 \textit{ или} \\ s = 2k \textit{ и } r < s,\end{array} \\ \Omega H^{r-s,0}(\mathcal{M}) / \Omega P^{r-s}(\mathcal{M}) & \textit{при } s = 2k \textit{ и } r \geqslant s, \end{cases}$$

где $\varepsilon = s \pmod 2$.

Доказательство. Формула

$$f(x, \hat{x}) \mapsto \sigma^{r|s} f(x, A) = \int\limits_{\mathcal{R}^{s|r}} \rho_{\hat{t}} f(x, \hat{t}A) \tag{6.241}$$

немедленно следует из уравнений (6.180). Достаточно взять производную по параметрам a_i^k под знаком интеграла. Осталось доказать сюръективность этого отображения, а это можно проделать в карте с координатами $x_1, \ldots, x_{n+m}$.

При $s = 0$ предложение следует из предложения из п. 6.6.4а; поэтому всюду ниже мы предполагаем, что $s > 0$ и $m \geqslant s > 0$.

При $m > 0$ положим

$$\begin{aligned} \Omega S_c(\mathcal{U}) = \{ & f(x, \hat{x}) \in \Omega S(\mathcal{U}) = S(\mathcal{R}^{m|n}; \mathcal{U}) \mid f(x, \hat{x}) = 0 \\ & \text{в окрестности начала координат в } \mathcal{R}^{m|n} \} \end{aligned} \tag{6.242}$$

и

$$\lambda_z(f) = \int\limits_0^\infty \lambda^{-z-1} \cdot f(x,\, \lambda\hat{x}) d\lambda \in \Omega H^z(\mathcal{U}) \quad \text{при любых } z \in \mathbb{Z} \text{ и } f \in \Omega S_c(\mathcal{U}). \tag{6.243}$$

Лемма. *Отображение* $\lambda_z \colon \Omega S_c(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega H^z(\mathcal{U})$ *не зависит от системы координат и сюръективно.*

Доказательство. Ясно, что единственное, что надо доказать, — это сюръективность отображения λ_z. Возьмем произвольную функцию $g \in S(\mathcal{R}^{1|0})$, такую что $g|_{(-1,1)} = 0$ и $\int\limits_0^\infty g(r) r^{-1} dr = 0$. Нетрудно видеть, что

$$f_{(g)} = f(x,\, \hat{x}) g\Big(\sqrt{\textstyle\sum \hat{x}_i^2}\,\Big) \in \Omega S_0(u) \text{ для любой функции } f \in \Omega H(\mathcal{U}), \tag{6.244}$$

а для любой формы $f(x,\, \hat{x}) \in \Omega H^{-z}(u)$ имеем

$$\begin{aligned} \lambda_{-z}(f_{(g)}) &= \int\limits_0^\infty f(x,\, \hat{x}) g\Big(\lambda\sqrt{\textstyle\sum \hat{x}_i^2}\,\Big) d\lambda = \\ &= f(x,\, \hat{x}) \int\limits_0^\infty g\Big(\lambda\sqrt{\textstyle\sum \hat{x}_i^2}\,\Big) \lambda^{-1} d\lambda = f(x,\, \hat{x}). \end{aligned} \tag{6.245}$$

□

Замечание. Отображение $f \mapsto f_{(g)}$ зависит от системы координат, и поэтому глобального отображения $\Omega H^z(\mathcal{M}) \to \Omega S(\mathcal{M})$ нет.

Вычислим образ преобразования (6.235)

$$f \longmapsto \sigma^{r|s} f \in VZ_{0,1}^{r|s}(\mathcal{M}) \quad \text{при} \quad f \in \Omega S_c(\mathcal{M}). \tag{6.246}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sigma^{r|s} f(x,\, A) &= \int\limits_0^\infty d\lambda \int\limits_{S(\lambda)} \rho_{\hat{t}} f(x,\, \hat{t}A) = \\ &= \int\limits_0^\infty d\lambda \int\limits_{S(\lambda)} \lambda^{s-r-1} \rho_{\hat{t}} f(x,\, \lambda\hat{t}A) = \nu_0^{r|s} \lambda_{r-s}(f), \end{aligned} \tag{6.247}$$

где $S(\lambda) = \{\hat{t} \mid \sum \hat{t}_j^2 = \lambda^2\}$, и поэтому на $\Omega S_c(\mathcal{M}) \subseteq \Omega S(\mathcal{M})$ преобразование (6.235) является композицией сюръективных отображений $\nu^{r|s}$ и λ_{r-s}, а стало быть, и само сюръективно. Предложение доказано. □

6.6.5в. На $VZ_{0,1}^{*|*}(\mathcal{M})$ и $F^{*|*}(\mathcal{M})$ дифференциал, структуру $\Omega P(\mathcal{M})$-модуля и внутреннее умножение на поле $D \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M})$ можно перенести как с $\Omega S(\mathcal{M})$, так и с $\Omega H(\mathcal{M})$. Результат перенесения этих структур с $\Omega S(\mathcal{M})$ на $F^{*|*}(\mathcal{M})$, а следовательно, и на $VZ_{0,1}^{*|*}(\mathcal{M})$ корректно определен, как было проверено выше, а результат такого переноса с $\Omega H(\mathcal{M})$ очевиден, если

принять во внимание явное описание ядра отображения $\nu^{r|s}$. Совпадение этих структур отмечено в следующем утверждении.

Предложение. *Пусть* $m > 0$, $l \in \mathbb{Z}$, $\omega \in \Omega P^k(\mathcal{M})$, $D \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M})$, *а отображение* $\lambda_l \colon \Omega S(M) \longrightarrow \Omega H^l(\mathcal{M})$ *определено формулой* (6.243).

Тогда следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd} \Omega S_0(\mathcal{M}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\lambda_l"'] & \Omega S_0(\mathcal{M}) \arrow[d, "\lambda_{l+1}"] \\ \Omega H^l(\mathcal{M}) \arrow[r, "d"] & \Omega H^{l+1}(\mathcal{M}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega S_0(\mathcal{M}) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\lambda_l"'] & \Omega S_0(\mathcal{M}) \arrow[d, "\lambda_{l+k}"] \\ \Omega H^l(\mathcal{M}) \arrow[r, "\omega"] & \Omega H^{l+k}(\mathcal{M}) \end{tikzcd} \tag{6.248}$$

$$\begin{tikzcd} \Omega S_0(\mathcal{M}) \arrow[r, "\iota_D"] \arrow[d, "\lambda_l"'] & \Omega S_0(\mathcal{M}) \arrow[d, "\lambda_{l-1}"] \\ \Omega H^l(\mathcal{M}) \arrow[r, "\iota_D"] & \Omega H^{l-1}(\mathcal{M}) \end{tikzcd} \tag{6.249}$$

Доказательство. Выпишите все в координатах. □

6.6.5г. Чтобы прояснить картину, напомним основные соотношения, установленные в этом параграфе между разными персонажами этой главы. Мы предполагаем, что $m > 0$:

$\Omega P(\mathcal{M})$ — градуированная супералгебра, производящая $(r,\, 0)$-плотности типа $(0,\, 0)$ при любом r и переносимая на любое подсупермногообразие $\mathcal{N}$ под действием морфизма $\varphi \colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$;

$\Omega S(\mathcal{M})$ производит плотности типа $(0,\, 1)$ любой размерности, но со значительным ядром;

$VZ_{0,1}^{r|s}(\mathcal{M})$ есть пространство $(r|s)$-плотностей, полученных из $\Omega S(\mathcal{M})$;

$F^{r|s}(\mathcal{M}) = \Omega S(\mathcal{M}) / \operatorname{Ker}(\Omega S(\mathcal{M}) \longrightarrow D_{0,1}^{r|s}(\mathcal{M}))$;

$F^{r|s}(\mathcal{M}) \cong \Pi^r VZ_{0,1}^{r|s}(\mathcal{M})$;

$F^{r|0}(\mathcal{M}) \cong \Omega P^r(\mathcal{M})$;

$\Sigma_i(\mathcal{M})_{\alpha,\beta} = \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathcal{M})}(\Omega P^{n-m-i}(\mathcal{M}),\, \mathrm{Vol}(\mathcal{M})_{\alpha,\beta})$ при $(\alpha,\, \beta) \in (\mathbb{Z}/2)^2$;

$F^{r|m}(\mathcal{M})_{\alpha,\beta} \cong \Pi^m \Sigma_{r-m}(\mathcal{M})_{\alpha,\beta+1}$ при $0 \leqslant r$;

$F^{n|m}(\mathcal{M})_{\alpha,\beta} = \Pi^m \,\mathrm{Vol}(\mathcal{M})_{\alpha,\beta+1}$;

$\Sigma_{n-m}(\mathcal{M})_{\alpha,\beta} = \mathrm{Vol}(\mathcal{M})_{\alpha,\beta}$;

$\Omega H(\mathcal{M})$ является $\mathbb{Z}$-градуированной алгеброй, содержащей $\Omega P(\mathcal{M})$;

$\Omega H(\mathcal{M}) / \Omega P(\mathcal{M})$ производит $(0,\, 1)$-плотности всех размерностей; более точно, при $\varepsilon = s \pmod 2$ имеет место равенство

$$F^{r|s}(\mathcal{M}) = \Omega H^{r-s,\varepsilon}(\mathcal{M}) / (\Omega P(\mathcal{M}) \cap \Omega H^{r-s,\varepsilon}(\mathcal{M})). \tag{6.250}$$

Все эти соотношения можно выразить двумя коммутативными диаграммами

$$\begin{tikzcd}
\Omega S(M)_{[\alpha,\beta]} \arrow[d] & \Omega S_0(M)_{[\alpha,\beta]} \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[r, "\lambda_{r-s}"] & \Omega H^{r-s}(M)_{[\alpha,\beta]} \arrow[dl, "\nu^{r|s}"'] \\
F^{r|s}(M)_{[\alpha,\beta]} \arrow[r, "\Pi^r", "\sim"'] & VZ^{r|s}_{0,1}(M)_{[\alpha,\beta]} \arrow[r, hook, "i"] & D^{r|s}_{0,1}(M)_{[\alpha,\beta]}
\end{tikzcd} \qquad (6.251)$$

и

$$\begin{tikzcd}
\Omega S(M)_{[\alpha,\beta]} \arrow[r, "d"] \arrow[ddddd, bend right] & \ldots \arrow[r, "d"] & \Omega S(M)_{[\alpha,\beta]} \arrow[r] & \Omega S(M)_{[\alpha,\beta]} \arrow[dddd, bend left] \\
\Omega S_0(M)_{[\alpha,\beta]} \arrow[r, "d"] \arrow[u, hook] \arrow[d, "\lambda_{-m}"] & \ldots \arrow[r, "d"] & \Omega S_0(M)_{[\alpha,\beta]} \arrow[r] \arrow[u, hook, "i"'] \arrow[d, "\lambda_{n-m}"] & \Omega S_0(M)_{[\alpha,\beta]} \arrow[u, hook] \arrow[d, "\lambda_{n-m+1}"] \\
\Omega H^{-m}(M)_{[\alpha,\beta]} \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \ldots \arrow[r, "d"] & \Omega H^{n-m}(M)_{[\alpha,\beta]} \arrow[r] \arrow[d, "\nu^{m|n}"] & \Omega H^{n-m+1}(M)_{[\alpha,\beta]} \\
F^{0|m}(M)_{[\alpha,\beta]} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\Pi^m", "\sim"'] & \ldots \arrow[r, "d"] & F^{n|m}(M)_{[\alpha,\beta]} \arrow[r] \arrow[d, "\Pi^m", "\sim"'] & F^{n+1|m}(M)_{[\alpha,\beta]} = 0 \\
\Sigma_{-m}(M)_{[\alpha,\beta+1]} \arrow[r, "d"] & \ldots \arrow[r, "d"] & \Sigma_{n-m}(M)_{[\alpha,\beta+1]} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (6.252)$$

В обеих этих диаграммах дополнительным индексом $[\alpha, \beta]$ мы обозначаем тип соответствующих объектов как элементов пучка на $\mathcal{M}$. Например, символом $D^{r|s}_{0,1\,[\alpha,\beta]}(\mathcal{M})$ мы обозначаем объекты типа (α, β) на $\mathcal{M}$, которые производят плотности типа (0, 1) на $(r|s)$-мерных подсупермногообразиях.

На $\Omega S(\mathcal{M})$ и $\Omega H(\mathcal{M})$ имеются следующие естественные структуры: структура $\Omega P(\mathcal{M})$-модуля, внешний дифференциал и внутреннее умножение на векторное поле, которые согласованы с переносом на $F^{r|s}(\mathcal{M})$, а следовательно, и на $VZ^{r|s}_{0,1}(\mathcal{M})$.

Если $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ — морфизм полного нечетного ранга, то определены отображения

$$\varphi^*\colon \Omega S(\mathcal{M}) \longrightarrow \Omega S(\mathcal{N}) \quad \text{и} \quad \varphi^*\colon \Omega H(\mathcal{M}) \longrightarrow \Omega H(\mathcal{N}),$$
$$\varphi^*\colon F^{r|s}(\mathcal{M}) \longrightarrow F^{r|s}(\mathcal{N}), \quad \text{если } s \leqslant \dim_{\bar{1}} \mathcal{N}). \qquad (6.253)$$

Если $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ — морфизм полного нечетного ранга и $\dim_{\bar{1}} \mathcal{N} = \dim_{\bar{1}} \mathcal{M}$, то гомоморфизм φ^* определяет отображение

$$\varphi^*\colon \Sigma_{r-m}(\mathcal{M})_{0,1} \longrightarrow \Sigma_{r-m}(\mathcal{N})_{0,1}. \qquad (6.254)$$

Все отображения φ^* согласованы (когда определены) с $\Omega P(\mathcal{M})$-действием, внешним дифференциалом, а если $D \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M})$ и $D' \in \mathrm{Vect}(\mathcal{N})$ таковы, что $\varphi^* D = D' \varphi^*$, то и с внутренними умножениями на $D \in \mathrm{Vect}(\mathcal{M})$ и $D' \in \mathrm{Vect}(\mathcal{N})$.

При $m = 0$ имеем

$$VZ^{r|0}_{0,1}(\mathcal{M}) = \Omega P^r(\mathcal{M}) = \Omega H^r(\mathcal{M}) \qquad (6.255)$$

и

$$\Omega S(\mathcal{M}) = \Omega(\mathcal{M}) = \Omega P(\mathcal{M}) = \Omega H(\mathcal{M}). \qquad (6.256)$$

В этом случае все вышеприведенные структуры превращаются в умножение на форму, внешний дифференциал и внутреннее умножение переходом к обратному образу дифференциальных форм и изоморфизму $\mathrm{Vol}(M) = \Omega P^n(M)$ соответственно.

6.6.5д. Теоремы Стокса. В сущности у нас есть только одна теорема Стокса для регулярных плотностей. Эта теорема производит подобное утверждение для любых объектов, которые можно превратить в регулярные плотности какого бы то ни было вида. Элементы из $\Omega S(\mathcal{M})$, $F^{r|s}(\mathcal{M})$, $\Omega H^{r-s}(\mathcal{M})$ и $VZ^{r|s}_{0,1}(\mathcal{M})$ можно интегрировать по любой $(r|s)$-цепи из $C^{r|s}_{1,1}(\mathcal{M})$. Элементы из $\Omega S(\mathcal{M})$ превращаются в плотности под действием $\sigma^{r|s}$, элементы из $F^{r|s}(\mathcal{M})$ поднимаются до элементов из $\Omega S(\mathcal{M})$, элементы из $\Omega^{r-s}(\mathcal{M})$ превращаются в элементы из $F^{r|s}(\mathcal{M})$ с помощью $\nu^{r|s}$, а элементы из $VZ^{r|s}_{0,1}(\mathcal{M})$ превращаются в элементы из $\Xi^{r|s}_{0,1}(\mathcal{M})$.

Предложение. *Пусть x — элемент одного из вышеуказанных пространств. Тогда*

$$\int\limits_c dx = \int\limits_{\partial c} x \quad \textit{для любой цепи } c \in C^{r+1|s}_{1,1}(\mathcal{M}). \qquad (6.257)$$

Доказательство следует из теоремы Стокса (см. п. 6.5.4), определения пространства $F^{r|s}(\mathcal{M})$ и коммутирующих диаграмм (6.251) и (6.252). □

6.6.6. Интегрирование по слоям.

6.6.6а. Пусть $\varphi\colon \mathcal{L}^{n+k|m+l} \longrightarrow \mathcal{M}^{n|m}$ — морфизм супермногообразий, субмерсивный во всех точках из $\mathcal{L}$. Пусть $k + l > 0$ и задана $(\alpha + 1, \beta)$-полуориентация слоев. Если $\sigma \in D^{r+k|s+l}_{\alpha,\beta}(\mathcal{L})$, то мы можем попробовать «приготовить» $r|s$-плотность $\varphi_*(\sigma)$ на $\mathcal{M}$ следующим образом. Для любой $r|s$-цепи $c \in C^{r|s}_{\alpha+1,\beta}(\mathcal{M})$ положим

$$\int\limits_c \varphi_*(\sigma) = \int\limits_{\varphi^{-1}(c)} \sigma. \qquad (6.258)$$

Чтобы определить отображение $\varphi_*\colon D^{r+k|s+l}_{\alpha,\beta}(\mathcal{L}) \longrightarrow D^{r|s}_{\alpha,\beta}(\mathcal{M})$ по формуле (6.258), необходимо преодолеть два препятствия.

Во-первых, образом морфизма φ является (как следует из его субмерсивности) открытое подсупермногообразие $\varphi(\mathcal{L})$, которое не обязательно совпадает с $\mathcal{M}$. Если $\mathcal{M} \setminus \varphi(\mathcal{L}) \neq \varnothing$, то $\varphi^{-1}(c)$ определено, лишь если $c \subseteq \varphi(\mathcal{L})$, т. е. формула (6.258) неоднозначно определяет $\varphi_*(\sigma)$.

Мы можем преодолеть эту трудность двумя способами: либо потребовав, чтобы выполнялось условие $\varphi(\mathcal{L}) = \mathcal{M}$, т. е. рассматривая расслоение, либо рассматривая плотности с компактными носителями, т. е. требуя, чтобы $\tilde{\varphi}(\operatorname{supp}\ \sigma)$ было бы компактно в $\mathcal{M}$, поскольку тогда $\varphi_*(\sigma)$ можно продолжить на $\mathcal{M} \setminus \varphi(\mathcal{L})$ нулем.

Во-вторых, тот факт, что c — компакт, не является гарантией того, что прообраз $\varphi^{-1}(c)$ — компакт, а поэтому существование интеграла в правой части формулы (6.258) требует дополнительных ограничений. Мы можем здесь потребовать, либо чтобы форма σ быстро убывала по каждому слою, либо чтобы слои были компактами, либо заменить интегрирование по $\varphi^{-1}(c)$ интегрированием по $\varphi^{-1}(c) \cap c'$, где c' — какая-то $(n+k|m+l)$-цепь в $\mathcal{L}$, и т. д.

Произведение разных способов преодолеть первое препятствие на количество способов преодолеть второе дает кучу утверждений, которые мы не будем даже и формулировать, чтобы не перегружать изложение.

Ниже мы дадим примеры всех значительных (по нашему мнению) утверждений об интегрировании по слоям, оставив читателю в качестве упражнения рассмотрение различных модификаций, с тем чтобы получить нужный ему вариант.

6.6.6б. Предположим, что $\varphi(\mathcal{L}) = \mathcal{M}$. Обозначим символом $\widetilde{D}_{\alpha,\beta}(\mathcal{L})$ подмодуль в $C^\infty(\mathcal{L})$-модуле $D_{\alpha,\beta}(\mathcal{L})$, состоящий из плотностей σ, таких что у любой точки $t \in \mathcal{M}$ есть окрестность $\mathcal{U}_t$ с компактным замыканием, причем $\operatorname{supp}\ \sigma \cap \varphi^{-1}(\mathcal{U}_t)$ является компактом в $\mathcal{L}$.

Натурально, $\widetilde{D}(\mathcal{L})$ содержит все плотности с компактным носителем, а если слои морфизма $\varphi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ компактны, то $\widetilde{D}(\mathcal{L}) = D(\mathcal{L})$.

Предложение. *Пусть* $\varphi\colon \mathcal{L}^{n+k|m+l} \longrightarrow \mathcal{M}^{n|m}$ *морфизм, субмерсивный во всех точках супермногообразия* $\mathcal{L}$, *причем* $k + l > 0$ *и* $\varphi(\mathcal{L}) = \mathcal{M}$, *а слои морфизма* φ *снабжены* $(\alpha+1|\beta)$-*полуориентации. Тогда определено отображение* $\varphi_*\colon \widetilde{D}_{\alpha,\beta}(\mathcal{L}) \longrightarrow D_{\alpha,\beta}(\mathcal{M})$, *которое переводит* $\widetilde{D}^{r+k|s+l}_{\alpha,\beta}(\mathcal{L})$ *в* $D^{r|s}_{\alpha,\beta}(\mathcal{M})$ *и имеет следующие свойства:*

1) *если* $c \in C^{r|s}_{\alpha+1,\beta}(\mathcal{M})$, *то для любой формы* $\sigma \in \widetilde{D}^{r+k|s+l}_{\alpha,\beta}(\mathcal{L})$ *интеграл* $\int\limits_{\varphi^{-1}(c)} \sigma$, *где прообраз* $\varphi^{-1}(c)$ *снабжен естественной* $(\alpha+1,\ \beta)$-*полуориентацией, корректно определен и удовлетворяет формуле* (6.258);

2) $\varphi_*(\varphi^*(f)\sigma) = f \cdot \varphi_*(\sigma)$ *для любых* $\sigma \in \widetilde{D}^{r+k|s+l}_{\alpha,\beta}(\mathcal{L})$ *и* $f \in C^\infty(\mathcal{M})$;

3) $\operatorname{supp}\ \varphi_*(\sigma) \subseteq \varphi(\operatorname{supp}\sigma)$ *для любой формы* σ.

Доказательство. Разбиение единицы на $\mathcal{M}$ позволяет нам иметь дело только с картой $\mathcal{U}$ на $\mathcal{M}$. Можно предположить, что $\mathcal{L} \cap \varphi^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \times \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — $k|l$-мерное супермногообразие, а $\varphi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{N}}$ — проекция на сомножители. Пусть $\sigma \in \widetilde{D}^{r+k|s+l}_{\alpha,\beta}(\mathcal{L})$. Тогда, уменьшая при необходимости $\mathcal{U}$, мы получаем $\operatorname{supp}\ \sigma \subset \mathcal{U} \times \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — компакт в $\mathcal{N}$. Пользуясь разбиением единицы в $\mathcal{N}$, мы раскладываем σ в конечную сумму форм σ_i, таких что $\operatorname{supp}\ \sigma_i \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{K}_i$, где $\mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{V}_i$, а $\mathcal{V}_i$ — карты в $\mathcal{N}$.

Итак, осталось построить требуемое отображение в случае, когда $\mathcal{L} = \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ — произведение суперобластей. Пусть x и y суть координаты на $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ соответственно. Тогда $\sigma = \sigma(x,\ y,\ A)$ и мы полагаем

$$\varphi_*(\sigma)(x,\ A') = \int\limits_{\mathcal{U}} \sigma(x,\ y,\ A(A'))\mathcal{U}_y, \tag{6.259}$$

где $A' \to A(A')$ — естественное вложение матрицы A' размера $(r|s) \times (n|m)$ в матрицу A размера $(r+k|s+l) \times (n+k|m+l)$:

$$\begin{pmatrix} A'_{11} & 0 & A'_{12} & 0 \\ 0 & 1_k & 0 & 0 \\ A'_{21} & 0 & A'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_l \end{pmatrix}, \qquad \text{где } A' = \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{pmatrix} \text{— стандартное представление.} \tag{6.260}$$

Упражнение. Проверка того, что $\varphi_*(\sigma)$ действительно плотность на $\mathcal{M}$, не зависящая от системы координат и покрытий супермногообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ картами, оставляется читателю в качестве упражнения.

Указание. Если для открытого подсупермногообразия $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ можно построить отображение φ_*, удовлетворяющее формуле (6.258), то $\varphi_*(\sigma)|_{\mathcal{M}'}$ устанавливается из формулы (6.258) однозначно.

Выполнение условий 1, 2 и 3 немедленно следует из описанного выше явного построения отображения φ_*. □

6.6.6в. Предложение. *В условиях предложения из п.* 6.6.6б *пусть* $(\alpha,\ \beta) = (0,\ 1)$. *Тогда*

1) *определены отображения*

$$\varphi_*^{(a)}\colon \widetilde{\Omega}S(\mathcal{L}) \longrightarrow \Omega S(\mathcal{M}) \quad \text{и} \quad \varphi_*^{(b)}\colon \widetilde{F}^{r+k|s+l}(\mathcal{L}) \longrightarrow F^{r|s}(\mathcal{M}), \tag{6.261}$$

такие что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \Omega S(L) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_*^{(a)}"'] & F^{r+k|s+l}(L) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_*^{(b)}"'] & D^{r+k|s+l}_{0,1}(L) \arrow[d, "\varphi_*"] \\ \Omega S(\mathcal{M}) \arrow[r] & F^{r|s}(\mathcal{M}) \arrow[r] & D^{r|s}_{0,1}(\mathcal{M}) \end{tikzcd} \tag{6.262}$$

2) *отображения* $\varphi_*^{(a)}$ *и* $\varphi_*^{(b)}$ *коммутируют с* $\Omega P(\mathcal{M})$*-действием* (очевидно, что $\varphi^*(\Omega P(\mathcal{M})) \subseteq \Omega P(\mathcal{L})$ действует на объекты из $\mathcal{L}$);

3) $\varphi_*^{(a)}$ *и* $\varphi_*^{(b)}$ *коммутируют с* d.

Доказательство. Как и в п. 6.6.6б, мы можем предположить, что $\mathcal{L} = \mathcal{U} \times \mathcal{V}$. Пусть функция $f \in \widetilde{\Omega}S(\mathcal{L})$ такова, что $\operatorname{supp} f \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — компакт в $\mathcal{V}$, а x и y — координаты на $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ соответственно. Положим

$$\varphi_*^{(a)}(f(x,\, y,\, \hat{x},\, \hat{y})) = \int\limits_{\mathcal{V}} \operatorname{vol}_{y,\hat{y}} f(x,\, y,\, \hat{x},\, \hat{y}). \tag{6.263}$$

Очевидно, что преобразование быстро убывающих псевдодифференциальных форм в плотности переводит $\varphi_*^{(a)}$ в φ_*. Это устанавливает единственность отображения $\varphi_*^{(a)}$.

Кроме того, если $f \in \widetilde{\Omega}S(\mathcal{L})$ определяет нулевую $(r+k|s+l)$-плотность на $\mathcal{L}$, то $\varphi_*^{(a)} f$ определяет согласно формуле (6.258) нулевую $r|s$-плотность на $\mathcal{M}$, а следовательно, $\varphi_*^{(a)}$ можно спустить на $\widetilde{F}^{*|*}(\mathcal{L})$.

Утверждения 2 и 3 для $\varphi_*^{(a)}$ следуют из явной формулы, а для $\varphi_*^{(b)}$ — из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\Omega}S(L) \arrow[rr, "\varphi_*^{(a)}"] \arrow[dr, "d"] \arrow[dd] & & \widetilde{\Omega}S(M) \arrow[dr, "d"] \arrow[dd] & \\
& \widetilde{\Omega}S(L) \arrow[rr, "\varphi_*^{(a)}"] \arrow[dd] & & \widetilde{\Omega}S(M) \arrow[dd] \\
F^{r+k|s+l}(L) \arrow[rr, "\varphi_*^{(b)}"] \arrow[dr, "d"] & & F^{r|s}(M) \arrow[dr, "d"] & \\
& F^{r+k+1|s+l}(L) \arrow[rr, "\varphi_*^{(b)}"] & & F^{r+1|s}(M)
\end{tikzcd} \tag{6.264}$$

и аналогичной диаграммы для $\Omega P(\mathcal{M})$-действия. ☐

6.6.6г. Упражнение. Пусть $\varphi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ — такой же морфизм, как и в п. 6.6.6а, $(\alpha,\, \beta) = (0,\, 1)$ и в $\mathcal{L}$ выделено подсупермногообразие с границей $(\mathcal{N},\, \partial\mathcal{N})$, такое что φ субмерсивно во всех точках границы $\partial\mathcal{N}$, а для любой точки $t \in \mathcal{M}$ множество $\varphi^{-1}(t) \cap \mathcal{N}$ — компакт.

Сформулируйте и докажите аналоги предложений из п. 6.6.6б и 6.6.6в.

§ 6.7. Комментарии

6.7.0. Мы собрали в этом параграфе разнообразные сведения, для которых не нашлось места в соответствующих параграфах. Номер **6.7.a.b** означает b-е утверждение по поводу параграфа a.

6.7.1.1. Утверждение о том, что интеграл любой псевдодифференциальной формы сохраняется под действием диффеоморфизмов, сохраняющих (1, 1)-полуориентацию, сформулирован в других терминах в статье [BL2]. Пространства $\operatorname{Vol}(\mathcal{M})_{a,b}$ введены в статье [VZ2], в которой также утверждается, что для интегрирования форм из $\operatorname{Vol}(\mathcal{M})_{0,1}$ требуется полная ориентируемость супермногообразия $\mathcal{M}$, что неверно.

6.7.2.1. Все содержание § 6.2 стандартно, за исключением явных вычислений производной Ли и прослеживания ориентаций.

6.7.2.2. Использование семейств здесь и ниже часто абсолютно необходимо, например в п. 6.6.2 или в § 6.2, для того чтобы автоматически получить тождество $\int\limits_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_D \rho = 0$ для любой функции $\rho \in \operatorname{Vol}_c(\mathcal{M})$. Однако иногда использование семейств лишь удлиняет изложение, не вводя ничего существенно нового. В таких случаях мы старались избегать семейств, давая читателю возможность самостоятельно произнести обычное заклинание.

6.7.2.3. Если $\mathcal{M}$ вполне ориентируемо, то, фиксируя ориентацию на $\mathcal{M}$, мы автоматически устанавливаем изоморфизмы суперпространств всех типов, и под действием этих изоморфизмов интегралы, конечно, совпадают.

6.7.3.1. Понятие подсупермногообразия с границей заимствовано из статьи [BL1], где оно называется *суперобластью с границей*.

Перечислим вкратце отличные от описанного выше подходы по преодолению трудностей, связанных с примером Рудакова. А. Роджерс (см. [Rog]) предложила конструкцию, которая, если ее перевести на язык представляющих функторов, сводится к тому, что мы не разрешаем нечетным переменным участвовать в заменах четных переменных. Как ясно из доказательства теоремы из п. 6.5.4, в этом случае любое подмногообразие N с границей в подстилающем многообразии M единственным образом оснащено структурой подсупермногообразия с границей: имеется каноническая проекция $\operatorname{cpr}\colon \mathcal{M} \to M$, и N переходит в $(\operatorname{cpr}^{-1} N,\, \operatorname{cpr}^{-1} \partial N)$. В координатах это означает, что уравнение $f(u) = 0$ на подстилающем многообразии принимает в $\operatorname{cpr}^* f(x) = 0$ на $\mathcal{M}$, где $\operatorname{cpr}^*(u_i) = u_i$. Поэтому конструкция Роджерс является вариантом конструкции Бернштейна—Лейтеса, но с дополнительными ограничениями непонятной ценности.

М. Ротштейн (см. [Rot]) пошел по дороге, намеченной Ф. А. Березиным (см. например, посмертную книгу [Бер]), который показал, что под действием замены координат интеграл от формы объема, носитель которой некомпактен, приводит к дополнительным членам в виде распределения с носителем на границе области интегрирования. Ротштейн рассматривал

$C^\infty(\mathcal{M})$-модули $\Omega(M) \otimes_{C^\infty(\mathcal{M})} D(\mathcal{M})$, где $D(\mathcal{M})$ — свободный $C^\infty(\mathcal{M})$-модуль дифференциальных операторов на $\mathcal{M}$, а $C^\infty(\mathcal{M})_{\bar{1}}$ действует на $\Omega(M)$ нулем: каждый элемент из $\Omega^n(\mathcal{M}_{\mathrm{rd}}) \otimes D(\mathcal{M})$ единственным образом представляется в локальных координатах (u, ξ) в виде

$$h = du_1 \ldots du_n \otimes \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \circ \ldots \circ \frac{\partial}{\partial \xi_m} \circ \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)^{\alpha_1} \circ \ldots \circ \left(\frac{\partial}{\partial u_n}\right)^{\alpha_n} \circ f_\alpha\right), \tag{6.265}$$

где $f_\alpha \in C^\infty(\mathcal{M})$, а $\circ$ означает композицию операторов. Если N — подмногообразие в M, то по N и h мы строим распределение на $\mathcal{M}$, спаривание которого с пробной функцией из $g \in C^\infty(\mathcal{M})$ есть число

$$\underbrace{\int \ldots \int}_{n} du_1 \ldots du_n \frac{\partial}{\partial \xi_1} \ldots \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{m_\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial u_n}\right)^{\alpha_n} (f_\alpha g). \tag{6.266}$$

Для замены переменных в $\Omega^n(M) \otimes D(\mathcal{M})$ Ротштейн смог вывести формулу и таким образом получить указанные Березиным конечные члены. Действительно, в фиксированной системе координат члены h, для которых $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \neq 0$, дают распределение с носителем на границе области интегрирования N, а значение формы $du_1 \ldots du_n \otimes \dfrac{\partial}{\partial \xi_1} \ldots \dfrac{\partial}{\partial \xi_m} f_0$ на g равно интегралу Березина от $g f_0 \operatorname{vol}_x$.

Такая конструкция позволяет получить аналог теоремы Стокса.

Существование двух разных подходов к интегрированию на супермногообразиях можно объяснить следующим образом.

Чтобы корректно определить интеграл формы объема ρ по области интегрирования $\mathcal{N}$, необходимо, как показывает пример Рудакова, обладать дополнительной информацией; назовем ее X. Если предположить, что X касается супермногообразия $\mathcal{N}$, то из того обстоятельства, что интеграл корректно определен, мы получаем, варьируя ρ, что X — это структура супермногообразия с границей на $\mathcal{N}$ (т. е. структура подсупермногообразия на $\partial\mathcal{N}$).

Если же мы предположим, что X касается формы ρ и мы хотим сохранить структуру $C^\infty(\mathcal{M})$-модуля на новых «формах», то мы получим пространство обобщенных функций с множеством $C^\infty(\mathcal{M})$ в качестве пробных функций. Если не вводить нечетные параметры, то второй подход приведет нас к пространству $\Omega^n(M^n) \otimes D(\mathcal{M})$.

Ротштейн не рассматривал нечетные параметры, и конструкция, которая требует выделить $\mathcal{M}$, не выживет, если нечетные параметры ввести. Чтобы исправить этот недостаток, надо, видимо, заменить $\Omega(M^n) \otimes D(\mathcal{M})$ на замечательный комплекс $\Omega(\mathcal{M}) \otimes_{C^\infty(\mathcal{M})} D(\mathcal{M})$, который изучал И. Пенков и который (комплекс, а не Пенков) был для Ротштейна исходным пунктом. Оба подхода (см. [BL1, BL2] и [Rot]) разумны и до некоторой степени равноправны, хотя лично мне (*В. Ш.*) подход из статей [BL1, BL2] представляется более авантажным в двух аспектах.

1) Когда $\mathcal{N}$ фиксировано, мы получаем из элементов пространства $\Omega^n(\mathcal{M}) \otimes D(\mathcal{M})$ класс распределений, далеко не каждое из которых можно получить из какой бы то ни было формы объема с помощью интеграла Березина.

2) Абсолютно непонятно, дает ли подход Ротштейна (см. [Rot]) что-нибудь кроме того, что предложено в § 4–6 этой главы: из соображений размерности следует, что все регулярные плотности суть аналоги интегральных и дифференциальных форм. Хотя $\Omega(M) \otimes D(\mathcal{M})$ является $C^\infty(\mathcal{M})$-модулем бесконечного ранга, он $\mathbb{Z}$-градуирован, и каждая его компонента конечномерна (в отличие от $F^{r|s}(\mathcal{M})$ при $s < m$).

Кроме того, конструкции из статьи [Rot] кажутся мне не очень геометричными, в то время как идея, что граница супермногообразия — это подсупермногообразие коразмерности $1|0$, довольно естественная: разумная четная функция f задает нам разложение границы области на супермногообразии, выделенном неравенством $f < 0$, в произведении границы, заданной уравнением $f = 0$, на область в $R^{1|0}$, и, таким образом, граница является в некотором роде «производной» от супермногообразия.

Утверждение, что *продолжения интеграла Березина на компактное многообразие нумеруются структурами подсупермногообразий с границей на этом компакте*, содержится, в сущности, в статьях [BL1, BL2], поскольку основное его содержание — это утверждение о корректности интеграла по подсупермногообразию с границей (теорема из п. 6.3.4 или [BL1, BL2]).

6.7.3.6. Рецепт вычисления интеграла взят из статьи [Sha4].

6.7.3.7. Я мог бы ограничиться рассмотрением суперобластей с границей, как это сделали И. Н. Бернштейн и Д. А. Лейтес, и таким образом сократить изложение, а также упростить формулировку теоремы 6.3.7. Я пошел по более трудному пути по двум причинам: невозможность интегрировать по квадрату в $\mathbb{R}^2$ сильно раздражает, а произведение суперобластей с границей является цепью, а не суперобластью с границей.

6.7.3.8. Предложение из п. 6.3.8 — это, в сущности, описание всех форм объема, интегралы которых по данному компакту корректно определены.

6.7.4.1. Определение плотности в чисто четном случае сформулировано, например, в работе [GG]. На супермногообразия это понятие было перенесено М. А. Барановым и А. С. Шварцем (см. [BSc]), которые рассматривали чуть более общий класс плотностей.

А именно, согласно Баранову—Шварцу $r|s$-плотностью ранга g на $(n|m)$-мерном супермногообразии с координатами x называется функция от переменных x и $a_k^{i_1\dots i_l}$, где $k\in\{1,\,\dots,\,n+m\}$ и $i_1,\,\dots,\,i_l\in\{1,\,\dots,\,r+s\}$, $l\leqslant g$, такая что для любого вложения $(r|s)$-мерного подсупермногообразия, заданного в координатах параметрическими формулами $x_i=x_i(t)$, где t — координаты на $\mathcal{R}^{r|s}$, формы объема

$$\operatorname{vol}_t\cdot F\Big(x(t),\ \frac{\partial^l x(t)}{\partial_{t_{i_1}}\dots\partial_{t_{i_l}}}\Big) \tag{6.267}$$

на $\mathcal{R}^{r|s}$ не зависят от системы координат на $\mathcal{R}^{r|s}$ (здесь $\dfrac{\partial^l x_k(t)}{\partial_{t_{i_1}}\dots\partial_{t_{i_l}}}$ подставлены в F вместо $a_k^{i_1\dots i_l}$). Нетрудно видеть, что плотности из § 6.4 отвечают плотностям Баранова—Шварца ранга 1.

Чтобы описать плотности ранга $k>1$ инвариантно, нам надо бы построить вместо $T^{r|s}(\mathcal{M})$ совершенно аналогичное суперрасслоение, отвечающее сумме Уитни r экземпляров касательного пространства и s экземпляров того же расслоения со сдвинутой четностью.

Для общих плотностей Баранов и Шварц ввели понятие *замкнутой плотности* [BSc], но как определить дифференциал на плотностях, неизвестно. Это — *открытая проблема*. (А скорее — вопрос, учитывая, что никаких примеров плотностей ранга больше 1 пока неизвестно.)

Плотности Воронова—Зорича, замкнутые относительно дифференциала, замкнуты также, если их рассматривать как плотности Баранова—Шварца; см. [VZ1].

6.7.4.2. Ю. И. Манин (см. [МаКП]) определяет плотности с помощью грассманианов на супермногообразии. Это означает, что он рассматривает (возможно, непродолжаемые) плотности из $\Xi^{r|s}(\mathcal{M})$, где $r|s\leqslant m|n=\dim\mathcal{M}$. Этот подход исключает возможность интерпретировать дифференциальные формы степеней больше m как плотности.

6.7.5.1. Псевдодифференциальные формы и супермногообразие $\widehat{\mathcal{M}}$ построены И. Н. Бернштейном и Д. А. Лейтесом в статье [BL2]. Алгебра $\Omega H(\mathcal{M})$ введена в статье [Sha5]. Суперпространства $S(\mathcal{R}^{n|m})$ и $\Omega S(\mathcal{M})$ прежде специально не рассматривались.

Большая часть п. 6.5.1 и 6.5.3 — это переформулировка работы [BL2].

6.7.5.2. Супермногообразие $\widehat{\mathcal{M}}$ — это один из примеров супермногообразий с выделенной формой объема. Несколько других примеров рассмотрены в книге [МаКП]. Более общим образом, если $\mathcal{M}^{p|q}$ — супермногообразие с $\mathcal{G}$-структурой, где супергруппа $\mathcal{G}$ содержится в $\mathbb{SL}(p|q)$, то на $\mathcal{M}$, конечно же, имеется выделенная форма объема. Таковы, в частности, случаи, когда $\mathcal{G}$ является произвольной группой Ли, алгебра Ли которой проста, и когда $\mathcal{G}=\mathcal{G}\mathrm{Q}(n)$.

6.7.5.3. Доказательство леммы Пуанкаре из статьи [БЛ] применимо и к пространству $\Omega S(\mathcal{U})$. Что касается когомологий в пространстве $\Omega H(\mathcal{M})$, они несут ответственность за нетривиальность векторного расслоения, с которым ассоциировано супермногообразие $\mathcal{M}$. Если $\mathcal{M}\cong M\times\mathcal{R}^{0|m}$, то $\operatorname{Ker}d=\operatorname{Im}d$ на $\Omega H(\mathcal{M})$, поскольку если форма $\omega\in\Omega S$ замкнута, то

$$\omega=d\Big(\Big(\sum\xi_i d\hat{\xi}_i\Big)\frac{\omega}{\sum(d\hat{\xi}_i)^2}\Big), \tag{6.268}$$

где ξ — координаты на $\mathcal{R}^{0|m}$.

6.7.7.1. Обобщенные функции. Пусть $F(\mathbb{R}^n)$ — алгебра функций какого-то типа (класса C^∞, с компактным носителем, быстроубывающих и т. д.). Очевидно, что любой «разумный» класс имеет свой суперreprésentation $F(\mathcal{R}^{n|m})$, определенный буквально теми же словами.

Поскольку функции любого из этих классов аналитические, а также гладкие, а также полиномиальные по нечетным переменным,

$$F(\mathcal{R}^{n|m})\cong F(\mathbb{R}^n)\otimes_{\mathbb{R}}F(\mathcal{R}^{0|m}),\quad \text{где } F(\mathcal{R}^{0|m})=\Lambda(m) \text{ в каждом случае.} \tag{6.269}$$

Как и для многообразий, имеется вложение множества регулярных (т. е. пробных) функций в множество обобщенных функций, рассматриваемых как функционалы $f\in F(\mathcal{R}^{n|m})^*$, такие что

$$(f,\,g)=\int fg\operatorname{vol}_x \quad \text{для любой функции } g\in F(\mathcal{R}^{n|m}), \tag{6.270}$$

и определения пространств F и F^* должны быть согласованы, чтобы интеграл существовал.

Это согласование нужно производить только на $\mathbb{R}^n=(R^{n|m})_{\mathrm{rd}}$, а на $\mathcal{R}^{n|m}$ оно продолжается автоматически.

Следствие. *Имеет место изоморфизм*

$$C^\infty(\mathcal{R}^{0|m})\cong(C^\infty(\mathcal{R}^{0|m}))^*, \tag{6.271}$$

поскольку $\dim C^\infty(\mathcal{R}^{0|m})=2^m<\infty$.

Другими словами, все обобщенные функции на $\mathcal{R}^{0|m}$ регулярны! Следующее упражнение — хороший пример.

Упражнение. Докажите, что на $\mathcal{R}^{0|m}$ с координатами $\xi=(\xi_1,\,\dots,\,\xi_m)$ роль δ-функции с носителем в начале координат выполняет функция $\xi_1\dots\xi_m$.

Наконец, мы видим, что

$$(F(\mathcal{R}^{n|m}))^*=(F(\mathbb{R}^n))^*\otimes_{\mathbb{R}}C^\infty(\mathcal{R}^{0|m}) \quad \text{для любого класса } F. \tag{6.272}$$

Литература

[БаШв] *Баранов М. А., Шварц А. С.* Когомологии супермногообразий // Функц. анализ и его прил. 1984. Т. 18, вып. 2. С. 53–54.

[Бер] *Березин Ф. А.* Введение в суперанализ. 2-е изд., испр. и доп. / Под ред. Д. А. Лейтеса. М.: МЦНМО, 2013.

[БЛ] *Бернштейн И. Н., Лейтес Д. А.* Инвариантные дифференциальные операторы и неприводимые представления суперзлгебы Ли векторных полей // Сердика (Журнал болгарского математического общества). 1981. Т. 7, №. 4. С. 320–334.

[БЛ1] *Бернштейн И. Н., Лейтес Д. А.* Интегральные формы и формула Стокса на супермногообразиях// Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11, вып. 1. С. 55–56.

[БЛ2] *Бернштейн И. Н., Лейтес Д. А.* Как интегрировать дифференциальные формы на супермногообразиях // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11, вып. 3. С. 70–71.

[ВоЗо1] *Воронов Ф. Ф., Зорич А. В.* Комплекс форм на супермногообразии // Функц. анализ и его прил. 1986. Т. 20, вып. 2. С. 58–59.

[ВоЗо2] *Воронов Ф. Ф., Зорич А. В.* Интегральные преобразования псевдодифференциальных форм // Успехи матем. наук. 1986. Т. 41, № 6 (252). С. 167–168.

[ГГГ] *Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И.* Интегральная геометрия в аффинном и проективном пространствах // Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1980. (Современные проблемы математики. Т. 16.) С. 53–226.

[ГМ] *Гельфанд С. И., Манин Ю. И.* Методы гомологической алгебры. Т. 1. М.: Наука, 1988.

[ГМШа] *Гельфанд И. М., Минахин В. В., Шандер В. Н.* Интегрирование в супермногообразиях и суперпреобразование Радона // Функц. анализ и его прил. 1986. Т. 20, вып. 4. С. 67–69.

[ГроЛе] *Грозман П. Я., Лейтес Д. А.*, Неголономные тензоры Римана и Вейля для многообразий флагов // Теор. и матем. физ. 2007. Т. 153, №. 2. С. 186–219; `arXiv: math.DG/0509399`

[МаКП] *Манин Ю. И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984.

[МШа] *Минахин В. В., Шандер В. Н.* Некоторые свойства параметрического интергрирования на супермногообразиях // Теоретико-групповые методы в физике. Т. 1. М.: Наука, 1986. С. 164–169.

[Хирш] *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.

[Ша1] *Шандер В. Н.* Векторные поля и дифференциальные уравнения на супермногообразиях // Функц. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 91–92.

[GLS] *Grozman P., Leites D., Shchepochkina I.*, Invariant differential operators on supermanifolds and The Standard Model // Multiple facets of quantization and supersymmetry. Michael Marinov Memorial Volume / M. Olshanetsky, A. Vainstein (eds.). River Edge, NJ: World Sci. Publishing, 2002. P. 508–555; `arXiv: math.RT/0202193`

[Pa] *Palamodov V. P.* Cogitations over Berezin's integral // F. A. Berezin memorial volume / Dobrushin R. L., Minlos R. A., Shubin M. A., Vershik A. M. (eds.) Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. P. 177–189. (Contemporary mathematical physics. V. 175. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2.)

[Rog] *Rogers A.* Consistent superspace integration // J. Math. Phys. 1985. V. 26, № 3. P. 385–392.

[Rot] *Rothstein M.* Integration on non-compact supermanifolds // Trans. AMS. 1987. V. 299, № 1. P. 387–396.

[SoS] Seminar on supermanifolds 1977–1990 / Leites D. (ed.) // Reports of Dept. of Math. of Stockholm Univ. № 1–35. Stockholm University, 1986–90; № 36–37. MPIM-Bonn, 2002.

Глава 7

Градуированные алгебры и группы Брауэра (по М. Финкельбергу)

§ 7.1. Введение

Теория полупростых алгебр и групп Брауэра является одной из наиболее красивых и в то же время простых тем в общей алгебре[1].

7.1.1. Напоминания. Всюду ниже основное поле k будет при необходимости уточнено, а слово «алгебра» означает «ассоциативная алгебра с единицей».

Пусть q — квадратичная форма на пространстве k^2 с матрицей Π_2, и пусть форма

$$Q_1 \oplus Q_2 \text{ на пространстве } V_1 \oplus V_2 \tag{7.1}$$

есть *прямая сумма квадратичных форм* Q_1 на V_1 и Q_2 на V_2. Напомним, что квадратичные формы P и Q называются Витт-*эквивалентными*, если существуют натуральные числа m и n, такие что $P \oplus mq \cong Q \oplus nq$, где $nq = q \oplus \ldots \oplus q$ (n слагаемых)— форма на k^{2n}.

Ассоциативная алгебра A называется *центральной*, если ее центр изоморфен полю k. Центральные простые алгебры A и B называются *Морита-эквивалентными* (мы будем писать $A \sim B$), если

$$\text{категория } A\text{-модулей эквивалентна категории } B\text{-модулей.} \tag{7.2}$$

Это требование можно выразить в виде эквивалентного условия, которое легче проверить:

$$A \otimes \mathrm{Mat}(m) \cong B \otimes \mathrm{Mat}(n) \quad \text{для некоторых } m,\ n > 0. \tag{7.3}$$

Доказательство эквивалентности условий (7.2) и (7.3) см., например, в [BW].

---

[1] Ниже приводится с минимальными изменениями и дополнениями перевод препринта М. Финкельберга, опубликованный в [SoS], № 14. Раньше и независимо (еще в досуперную эпоху) некоторые из этих результатов сформулировал С. Т. С. (Терри) Уолл (Wall), но о его статье мы узнали, когда работа М. Финкельберга (содержащая гораздо больше) была почти закончена; современное изложение результатов Уолла см. в лекции Делиня в книге [QFS]. Ни общий градуированный, ни частный супераспекты этой темы никогда раньше не излагались. — *Прим. ред.*

Пусть Witt(k) — группа классов Витт-эквивалентных невырожденных форм. Эта группа называется *группой Витта*.

Пусть Br(k) — группа классов Морита-эквивалентных центральных простых алгебр. Эта группа называется *группой Брауэра* поля k.

Цель этой главы — вычислить группы Witt(k) и Br(k), определенные с *соответствующими изменениями* для G-градуированных алгебр, где G — коммутативная группа. Одно время такие алгебры стали называть «цветными» алгебрами, но эта мода, к счастью, проходит.

Наиболее интересный случай соответствует $G=\mathbb{Z}/2$, т. е. супералгебрам.

Заметим, что, как хорошо известно, алгебра Клиффорда Cliff($2n$) является центральной простой, в то время как Cliff($2n+1$) не является ни центральной, ни простой, но является прямой суммой центральных простых алгебр. Описание алгебр Клиффорда становится естественным, если алгебру Клиффорда рассматривать как супералгебру относительно естественной $\mathbb{Z}/2$-градуировки: она является центральной простой для любого (во всяком случае, конечного) числа образующих. Более того, прямая сумма квадратичных форм соответствует супертензорному произведению супералгебр Клиффорда, определенных этими формами.

Мы скажем, что супералгебра A *центральна*, если ее центр изоморфен полю $k \subset A_{\bar{0}}$. Мы скажем, что центральные простые супералгебры A и B *супер Морита-эквивалентны*, если условие (7.2) выполняется для супермодулей. Это требование можно выразить в виде эквивалентного условия, которое несложно проверить:

$$A \otimes \mathrm{Mat}(m|l) \cong B \otimes \mathrm{Mat}(r|s) \quad \text{для некоторых } l,\ m,\ r,\ s > 0, \tag{7.4}$$

где тензорное умножение понимается как супертензорное.

Упражнение. На категории $\mathsf{A}\text{-}\mathsf{Mod}$ есть инволюция Π. Определение (7.2) различает модули M и $\Pi(M)$. Опишите, как изменятся результаты этой главы, если вместо вышеприведенного определения Морита-эквивалентности мы используем одно из следующих определений:

1) $A \sim B$, если $A \otimes \mathcal{A} \simeq B \otimes \mathcal{B}$, где $\mathcal{A} \in \mathrm{Q}(a)$, а $\mathcal{B} \in \mathrm{Q}(b)$ для некоторых $a,\ b \geqslant 0$;

2) $A \sim B$, если $\mathcal{A} \simeq B \otimes \mathcal{B}$, где либо $\mathcal{A} \in \mathrm{Q}(a)$, либо $\mathcal{A} \in \mathrm{Mat}(m|n)$, и либо $\mathcal{B} \in \mathrm{Q}(b)$, либо $\mathcal{B} \in \mathrm{Mat}(r|s)$ для некоторых $a,\ b,\ l,\ m,\ r,\ s \geqslant 0$.

Пусть Witt(k) — группа классов Витт-эквивалентности невырожденных квадратичных форм, и пусть WBr(k) — группа классов по модулю супер Морита-эквивалентности центральных простых супералгебр. Мы назовем группу WBr(k) *группой Уолла—Брауэра* поля k.

Заметим, что алгебра Клиффорда Cliff(q) стандартной гиперболической формы q на k^2 является матричной супералгеброй Mat($1|1$), откуда следует (см. [W]) что конструкция алгебр Клиффорда определяет гомоморфизм групп

$$\mathrm{Cliff}\colon\ \mathrm{Witt}(k) \longrightarrow \mathrm{WBr}(k). \tag{7.5}$$

Гомоморфизм Cliff вместе с вычислением группы WBr($\mathbb{R}$) дает объяснение известной 8-периодичности Ботта вещественных алгебр Клиффорда (см. также [QFS, W]).

7.1.2. Структурная теория полупростых и простых G-алгебр. Пусть G — коммутативная группа, 0 — ее единица. Всюду ниже G-градуированные понятия будут использоваться с приставкой G- (за исключением случая $G=\mathbb{Z}/2$, когда используется приставка «супер»), чтобы отличить их от неградуированных объектов. Назовем G-градуированную алгебру A *центральной*, если ее G-центр — это $k \subset A_0$. Когда все определения обобщены должным образом (см. § 7.2), результат оказывается буквально таким же, как и в классическом случае. Более точно, мы докажем следующую теорему.

7.1.2a. Теорема. 1) *Каждая полупростая G-алгебра изоморфна прямому произведению простых G-алгебр.*

2) *Каждая простая G-алгебра изоморфна алгебре эндоморфизмов свободного модуля над G-телом.*

Определение G-тела может показаться странным, но из G-леммы Шура (см. п. 7.2.7) и структурной теоремы (см. п. 7.4.4) следует, что оно правильно отвечает ситуации. Отметим, что структурные теоремы теряют немного общности по сравнению с их классическими аналогами: последние верны над произвольными артиновыми *кольцами*. Дело в том, что для определения эндоморфизмов нам нужно правило знаков, а следовательно, «антисимметрический бихарактер» на градуирующей группе G. Только в частном случае

$$G = (\mathbb{Z}/2)^a \oplus \mathbb{Z}^b \tag{7.6}$$

область значений бихарактера — множество $\{-1,\ 1\}$, и мы можем иметь дело с кольцами, а не с алгебрами, и результаты верны для любых артиновых колец, как и в обычной неградуированной теории.

Предложения из § 7.2–7.3 близко следуют книге [B], глава «Полупростота».

7.1.3. Общая G-брауэрова теория. Мы разовьем эту теорию в § 7.4, а более конкретные результаты получены в § 7.5. Определение *G-группы Брауэра* G-Br(k) близко к классическому: это группа классов центральных простых G-алгебр над полем k относительно G-тензорного произведения, которое мы скоро определим, где центральные простые G-алгебры A и B считаются *эквивалентными* ($A \sim B$), если существуют G-k-модули (т. е. просто G-градуированные линейные пространства) M и N, такие что

$$A \otimes_G \mathrm{End}_{G\text{-}k}(M) \cong B \underset{G}{\otimes} \mathrm{End}_{G\text{-}k}(N)). \tag{7.7}$$

Оказывается, для любой группы G и поля k группа G-$\mathrm{Br}(k)$ содержит классическую группу Брауэра поля k в качестве подгруппы.

Одним из главных результатов здесь является следующее утверждение.

7.1.3a. Теорема. *Группа* G-$\mathrm{Br}(k)$ *порождена своей подгруппой* $\mathrm{Br}(k)$ *и классами G-полей над* k.

G-поля определены в п. 7.2.1. Это понятие может показаться даже еще более странным на первый взгляд, чем понятие G-тел, но его происхождение становится ясным, когда мы переходим к изучению супералгебр (см. классификацию из п. 7.2.2).

7.1.4. Суперслучай. Этот случай исследован в оставшейся части работы. Исторически это был первый наиболее интересный случай. Практически все общие результаты о группах Уолла—Брауэра принадлежат Уоллу (см. [W]). Его замечательная работа была опубликована в досуперную эпоху, а сейчас мы можем перевести его результаты на соответствующий язык. Однако сформулированная ниже «настоящая» задача до сих пор открыта.

Задача. Определить не просто группу Уолла—Брауэра, а **супер**группу Брауэра.

Основной результат этой главы — первый шаг в решении этой задачи, а именно теорема из п. 7.6.5, которая описывает отношения между суперполями по модулю классической группы Брауэра.

Поскольку и $\mathrm{Br}(k)$, и множество суперполей допускают когомологическое описание, теорема из п. 7.6.9 позволяет нам дать чисто когомологическое описание группы $\mathrm{WBr}(k)$ (см. п. 7.6.9). Точнее, мы опишем подгруппу в $\mathrm{WBr}(k)$, введенную Уоллом в работе [W], которую в его честь мы назовем $\mathrm{Wall}(k)$. Эта подгруппа индекса 2 состоит из классов центральных простых алгебр, расщепляющихся над алгебраическим замыканием $\bar{k}$ поля k.

Переписывая результаты Уолла (см. [W]), мы дадим несколько новых доказательств, а именно:

- элементарное (по модулю теоремы Брауна [B, гл. IV.6.6]) доказательство основных теорем из п. 7.6.4 и 7.6.5; наше доказательство гораздо короче, чем доказательство Уолла.
- чисто когомологическое доказательство чисто когомологической теоремы из п. 7.6.9; мы еще раз докажем теорему из п. 7.6.4 на пути к доказательству теоремы из п. 7.6.9 (см. пп. 7.6.6—7.6.8), и это доказательство будет даже еще более коротким, чем предыдущее.

7.1.5. Группы Уолла—Брауэра локальных полей. Эти группы вычислены в § 7.7, см. [S4]. Первый пример, а именно $\mathrm{WBr}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/8$, отражает уже упомянутую хорошо известную периодичность вещественных алгебр Клиффорда, см. [W].

В случае p-адических полей k мы получаем следующее описание группы Уолла—Брауэра $\mathrm{WBr}(k)$ и группы $\mathrm{Wall}(k)$ (чтобы таблица уместилась, образующие даны для всех слагаемых, кроме $\mathbb{Q}/\frac{1}{2}\mathbb{Z}$):

Таблица 7.1

$\mathrm{WBr}(\mathbb{Q}_2)$	$\mathbb{Q}/\frac{1}{2}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$
образующие	$\mathbb{Q}_2(\sqrt{1})$, $\mathbb{Q}_2(\sqrt{1}) \oplus \mathbb{Q}_2(\sqrt{-5})$, $\mathbb{Q}_2(\sqrt{1}) \oplus \mathbb{Q}_2(\sqrt{-2})$
$\mathrm{Wall}(\mathbb{Q}_2)$	$\mathbb{Q}/\frac{1}{2}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$
$\mathrm{WBr}(\mathbb{Q}_p)$, $p = 4k+3$	$\mathbb{Q}/\frac{1}{2}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/4$
образующие	$\mathbb{Q}_p(-1)$, $\mathbb{Q}_p(-1) \oplus \mathbb{Q}_p(p)$
$\mathrm{Wall}(\mathbb{Q}_p)$, $p = 4k+3$	$\mathbb{Q}/\frac{1}{2}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4$
$\mathrm{WBr}(\mathbb{Q}_p)$, $p = 4k+1$	$\mathbb{Q}/\frac{1}{2}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$
образующие	$\mathbb{Q}_p(\gamma)$ для всех γ
$\mathrm{Wall}(\mathbb{Q}_p)$, $p = 4k+1$	$\mathbb{Q}/\frac{1}{2}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$

В § 7.6 мы исследуем дальнейшие подробности взаимоотношений между $\mathrm{WBr}(k)$ и $\mathrm{Witt}(k)$.

7.1.6. Нереализованные идеи и открытые проблемы.

7.1.6a. Задача. Дать когомологическое описание группы G-$\mathrm{Br}(k)$ для произвольной группы G (в стиле описания, данного в теореме из п. 7.6.9), по крайне мере для алгебраически замкнутых полей k.

Частичным результатом в этом направлении является следующий: *множество классов изоморфизма полных* (*т. е. имеющих ненулевые элементы в каждой степени*) *G-полей можно отождествить с* $H^2(G; k^\times)$.

Действительно, выберем однородный k-базис $\{a_g \mid g \in G\}$ G-поля k и положим $c(g, h) = a_g a_h a_{g+h}^{-1}$. Ясно, что $c(g, h)$ является 2-коциклом на G с коэффициентами в k, и непосредственная проверка показывает, что его когомологический класс не зависит от выбора базиса.

7.1.6б. Существует далеко идущее обобщение G-модулей и G-алгебр, а именно понятие «категорий симметрий» или «категорий Янга—Бакстера» (см. [Lu]).

Задача. Для данной категории Янга—Бакстера S вычислить S-симметричную группу Брауэра $\mathrm{Br}_S(k)$, в частности «квантовую группу Брауэра».

Основная трудность здесь заключается в том, что наиболее интересные S-алгебры бесконечномерны, а в этом случае определение группы $\mathrm{Br}_S(k)$ отсутствует.

7.1.6в. Теперь, когда мы знаем $\mathrm{WBr}(\mathbb{Q}_p)$ для всех p, было бы здорово решить следующую задачу.

Задача. Определить суперзакон взаимности, а стало быть, вычислить $\mathrm{WBr}(\mathbb{Q})$.

Основные трудности здесь следующие:

1) вместо одного типа локальных групп Брауэра, как в обычном случае, у нас теперь три типа локальных групп Уолла—Брауэра;

2) каждое суперполе над $\mathbb{Q}$ не локально расщеплено в бесконечном множестве точек.

Тем не менее, $\mathrm{WBr}(\mathbb{Q})$ вложено в прямое произведение $\prod\limits_p \mathrm{WBr}(\mathbb{Q}_p)$ очевидным образом (это тривиальное следствие классического закона взаимности), и это дает нам надежду, что можно доказать аналог теоремы Минковского—Хассе следующим образом: если квадратичная форма Q над $\mathbb{Q}$ локально расщеплена всюду, то элемент $\mathrm{Cliff}(\mathbb{Q})$ тривиален (см. п. 7.7.4а и 7.7.5).

Достаточно было бы доказать, что гомоморфизм Cliff инъективен. Основная трудность здесь заключается в том, что он, увы, не инъективен. Например, $\mathrm{Witt}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$, в то время как $\mathrm{WBr}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/8$.

Напомним (см. [S4]), что, отождествив $\mathbb{Z}/2$ с подгруппой в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, мы делаем сумму в следующем условии корректно определенной:

$$\mathrm{Br}(\mathbb{Q}) = \{x = (x_0, x_2, x_3, x_5, \ldots) \in \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \ldots \mid \sum x_i = 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\}. \quad (7.8)$$

7.1.7. Соглашение. Простые утверждения, которые любой читатель непременно сможет проверить самостоятельно, названы упражнениями. Начиная с § 7.6 мы предполагаем, что $\mathrm{char}\, k \neq 2$.

§ 7.2. Общие факты

7.2.1. Пусть G — абелева группа, а 0 — ее единица. Пространство V называется *G-градуированным пространством*, если его аддитивная группа есть прямая сумма подгрупп V_g, индексированных элементами группы G. Множество $\{g \in G \mid V_g \neq 0\}$ называется *носителем* G-градуировки пространства V.

Кольцо A называется *G-кольцом*, если оно является G-градуированным пространством и

$$A_{g_1} \cdot A_{g_2} \subset A_{g_1+g_2} \quad \text{для любых } g_1,\, g_2. \qquad (7.9)$$

Ненулевые элементы пространства A_g называются *однородными степени g* (обозначение $a \in A_g \iff \deg a = g$). Если $a = \sum\limits_{g \in G} a_g$, где $\deg a_g = g$, то мы скажем, что a_g — *однородная компонента* степени g элемента a.

Пусть A — G-кольцо, а M — A-модуль. Пространство M называется *G-градуированным A-модулем* или просто *G-A-модулем*, если

$$M = \bigoplus_{g \in G} M_g \quad \text{и} \quad A_{g_1} M_{g_2} \subset M_{g_1+g_2} \quad \text{для любых } g_1,\, g_2 \in G. \qquad (7.10)$$

Всюду ниже k означает основное поле, а все кольца и модули рассматриваются над k, в то время как k предполагается G-градуированным с носителем в степени 0. Обозначим через $\langle \cdot\,, \cdot \rangle \colon G \times G \longrightarrow k^\times$ функцию, которая является гомоморфизмом по каждой переменной и удовлетворяет условию

$$\langle g,\, h \rangle = \langle h,\, g \rangle^{-1} \quad \text{для любых } g,\, h \in G. \qquad (7.11)$$

Другими словами, $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ — аналог антисимметричной формы.

Пусть символ $\mathrm{End}_{G\text{-}A}(M) = \bigoplus\limits_{g \in G} (\mathrm{End}_{G\text{-}A}(M))_g$ обозначает G-пространство G-A-гомоморфизмов, где линейный оператор $F \in \mathrm{Hom}(M,\, M)$, действующий на G-A-модуле M называется *однородным G-A-гомоморфизмом степени $f \in G$*, если

$$aFm = \langle h,\, f \rangle Fam \quad \text{для любых } a \in A_h \text{ и } m \in M. \qquad (7.12)$$

Гомоморфизмы степени 0 называются *морфизмами* в категории G-градуированных пространств.

7.2.2. Всюду ниже мы будем пользоваться следующим обобщением **Правила Знаков**:

> *если что-то степени p движется мимо чего-то степени q, то выскакивает коэффициент $\langle p,\, q \rangle$, где p, $q \in G$, а $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ — антисимметричный бигомоморфизм* (7.11).

Как и в суперслучае ($G = \mathbb{Z}/2$), мы будем молчаливо предполагать, что формулы, определенные лишь на однородных элементах, распространены на произвольные элементы по линейности.

7.2.2. Примеры непосредственного применения правила знаков: G-скобка, G-коммутативность, G-центр, G-алгебра Ли, G-правило Лейбница и т. д. Например, ассоциативная G-алгебра A с новым умножением, заданным G-скобкой, является G-алгеброй Ли, которая обозначается $A_{G\text{-}L}$.

7.2.4. Упражнение. Докажите, что $\mathrm{End}_{G\text{-}A}(M)$ является G-алгеброй относительно композиции (здесь мы используем лишь то, что $\langle\cdot,\cdot\rangle$ аддитивна по каждому переменному). Заметим, что тогда $\mathrm{End}_{G\text{-}A}(M)$ изоморфна неградуированной алгебре $\mathrm{End}_A(M)$ тогда и только тогда, когда $A = A_0$.

7.2.5. Пусть M и N суть G-A-модули. Алгебра A-подмодуль N называется G-A- *подмодулем*, если $N_g = N \cap M_g$.

Мы можем рассматривать данное G-кольцо A и как левый G-A-модуль, и как правый G-A-модуль по отношению к умножению на элемент слева или справа. Соответственно G-A-подмодули кольца A называются *левыми G-идеалами* или *правыми G-идеалами*, а G-идеалы, одновременно являющиеся левыми и правыми, называются просто *G-идеалами*. Наконец, G-A-модуль M без собственных G-A-подмодулей называется *простым G-A-модулем*, а G-кольцо B без собственных G-идеалов называется *простым G-кольцом*.

7.2.6. G-алгебра D называется *G-телом*, если каждый ее ненулевой элемент обратим.

7.2.7. Теорема (*G*-градуированный аналог леммы Шура). *Пусть M — простой G-A-модуль. Тогда $\mathrm{End}_{G\text{-}A}(M)$ является G-телом.*

Доказательство. Пусть E — однородный ненулевой необратимый G-A-эндоморфизм модуля M. Тогда у него есть либо нетривиальное ядро, либо нетривиальный образ, который является собственным G-A-подмодулем. ☐

7.2.8. Пусть A есть G-кольцо. Левый G-идеал $I \subset A$ называется *максимальным*, если нет никакого собственного левого G-идеала, содержащего I.

Предложение. *Идеал I — максимальный левый G-идеал тогда и только тогда, когда A/I — простой G-A-модуль.*

Доказательство. $\Longrightarrow$ Если N есть собственный G-подмодуль в A/I, то его прообраз является левым G-идеалом, содержащим I, и он содержится в A, причем все включения строгие.

$\Longleftarrow$ В предыдущих рассуждениях замените прообраз на образ. ☐

7.2.9. Определим G-аналог классического *радикала Джекобсона* G-кольца A как пересечение всех максимальных левых G-идеалов кольца A. Если такой G-радикал Джекобсона равен нулю, то G-кольцо A называется *полупростым*. Дальнейшие подробности см. в § 7.3.

7.2.10. Определим *G-тензорное произведение* $A \underset{G}{\otimes} B$ G-алгебр A и B следующим образом. Его пространство — $A \underset{k}{\otimes} B$ с естественной G-градуировкой, заданной формулой

$$(A \underset{G}{\otimes} B)_h = \bigoplus_{g'+g''=h} A_{g'} \underset{G}{\otimes} B_{g'}, \tag{7.13}$$

и умножением, заданным по Правилу Знаков:

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = \langle \deg b_1,\, \deg a_2 \rangle a_1 a_2 \otimes b_1 b_2. \tag{7.14}$$

Важно отметить, что G-алгебры $A \underset{G}{\otimes} B$ и $B \underset{G}{\otimes} A$ изоморфны относительно следующего скручивающего гомоморфизма

$$a \otimes b \mapsto \langle \deg a,\, \deg b \rangle b \otimes a. \tag{7.15}$$

§ 7.3. Структура полупростых алгебр

7.3.1. В дополнение к предыдущему определению из п. 7.2.9 имеется и другое (категорное) определение полупростоты: G-алгебра называется *полупростой*, если категория G-A-модулей полупроста. Напомним, что абелева категория называется *полупростой*, если каждый ее подобъект является прямым слагаемым.

Так что давайте прежде всего выясним взаимоотношения этих двух определений. Доказательства утверждений этого пункта стандартны (см. [Lam], глава «Полупростота») и поэтому опущены.

7.3.1а. Лемма. *Для G-алгебры A и G-A-модуля M следующие свойства эквивалентны*:

а) *$M = \oplus M_i$, где M_i — простые G-подмодули*;

б) *$M = +M_i$, где M_i — простые G-подмодули*;

в) *любой G-подмодуль $N \subset M$ является прямым слагаемым, т. е. существует G-подмодуль N', такой что $M = N \oplus N'$.*

Если выполнено любое из условий а)—в), то модуль M называется *полупростым*.

7.3.1б. Следствие. *Любые G-под- или G-фактормодули полупростого модуля полупросты.*

7.3.1в. Следствие. *Если G-алгебра A полупроста как (левый) G-A-модуль, то G-A-модуль M полупрост.*

Доказательство. Любой модуль M является G-фактором некоторого свободного модуля. ☐

Свойство алгебры A быть полупростой как G-A-модуль назовем *категорной полупростотой*.

Мы покажем, что полупростота эквивалентна категорной полупростоте. Перечислим теперь несколько первых полезных свойств G-радикала Джекобсона.

7.3.1г. Предложение. *Пусть A есть G-алгебра, а R — ее G-радикал Джекобсона. Тогда*

а) $a \in R \iff aM = 0$ *для любого простого G-A-модуля M*;
б) R *является G-идеалом* (*а не просто левым G-идеалом*);
в) A/R *является полупростой G-алгеброй.*

Доказательство. Утверждение а) является немедленным следствием из п. 7.2.8.

Утверждение б) следует из того, что $aM = 0$ для любого простого $M \Longrightarrow abM = 0$ для любого $b \in A$ и простого M.

Докажем утверждение в). Благодаря а) имеется следующее естественное взаимно однозначное соответствие между множествами:

$$\{\text{простые } G\text{-}A\text{-модули }\} \longleftrightarrow \{\text{ простые } G\text{-}A/R\text{-модули}\}. \tag{7.16}$$

Теперь воспользуемся утверждением а) еще раз. ☐

7.3.1д. Теорема. *Пусть A — полупростая G-алгебра. Тогда она категорно полупроста.*

Доказательство. Первым делом докажем, что существует конечное множество максимальных левых G-идеалов $I_1, \ldots, I_n$, таких что $I_1 \cap \ldots \cap I_n = 0$. Чтобы это доказать, мы должны упорядочить множества максимальных левых G-идеалов $I_1, I_2, \ldots$ и индуктивным образом выбирать идеалы I_{i_k} так, чтобы выполнялось неравенство

$$\dim(I_{i_k} \cap I_{i_{k-1}} \cap \ldots \cap I_{i_1}) < \dim(I_{i_{k-1}} \cap \ldots \cap I_{i_1}). \tag{7.17}$$

По предположению индукции и благодаря тому, что $\dim A < \infty$, процесс закончится через конечное число шагов с требуемым результатом. Теперь предложение из п. 7.3.1г означает, что естественный морфизм $A \longrightarrow \bigoplus\limits_{1\leqslant i\leqslant n} A/I_i$ является вложением. Но каждое слагаемое является полупростым G-A-модулем, так что A является полупростым G-A-модулем благодаря п. 7.3.1б. ☐

Обратное утверждение тоже верно.

7.3.1е. Теорема. *Пусть A — категорно полупростая G-алгебра. Тогда она полупроста.*

Доказательство. Пусть $A = \oplus I_i$ — разложение алгебры A в прямую сумму простых левых G-идеалов (т. е. простых G-подмодулей), и пусть $e = \sum e_i$ — соответствующее разбиение единицы. Теперь если $a \in R$ и $ae_i = 0$ при всех i (см. 7.2.4), то $a \cdot e = 0$, следовательно, $a = 0$. ☐

Таким образом, мы можем (и будем) работать только с определением полупростоты из п. 7.2.9.

7.3.2. G-аналог теоремы Джекобсона о плотности. Этот аналог нам не нужен для доказательства структурной теоремы, однако мы приведем его для полноты картины.

Пусть M — полупростой G-A-модуль. Положим $K = \mathrm{End}_{G\text{-}A}(M)$ и рассмотрим $\mathrm{End}_{G-K}(M)$. (Ясно, что M является G-K-модулем $Ex = E(x)$.) Очевидно, имеется естественный G-гомоморфизм $A \longrightarrow \mathrm{End}_{G-K}(M)$, т. е. морфизм алгебр, сохраняющий градуировку ($a \mapsto l_a$, где $l_a(x) = ax$).

Приняв эти обозначения, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема (о плотности). *Пусть M — полупростой G-A-модуль, $K = \mathrm{End}_{G\text{-}A}(M)$, а $f \in \mathrm{End}_{G\text{-}K} M$. Пусть $x_1, \ldots, x_n \in M_0$. Тогда существует элемент $a \in A$, такой что $ax_i = f(x_i)$ при всех i.*

Доказательство. Прежде всего рассмотрим частный случай $n = 1$.

В силу утверждения в) леммы из п. 7.3.1а существует G-подмодуль $F \subset M$, такой что $M = Ax_1 \oplus F$, где $Ax_1 = \{ax_1 \mid a \in A\}$ является G-подмодулем. Пусть $\pi\colon M \to Ax_1$ — проекция. Тогда $\pi \in K_0$, и, следовательно, $f(x_1) = f(\pi x_1) = \pi(f(x_1))$, т. е. $f(x_1) \in Ax_1$ или $f(x_1) = ax_1$ для некоторого $a \in A$.

Рассмотрим теперь общий случай. Мы сведем его к вышеописанному частному случаю классическим «диагональным приемом».

Пусть $M^{(n)} = \underbrace{M \oplus \ldots \oplus M}_{n\text{ раз}}$ с естественной G-градуировкой и структурой A-модуля; пусть $f^{(n)} = (f, \ldots, f)$, т. е. $f^{(n)}(y_1, \ldots, y_n) = (f(y_1), \ldots, f(y_n))$. Положим $K^{(n)} = \mathrm{End}_{G\text{-}A}(M^{(n)})$. Ясно, что $f^{(n)} \in \mathrm{End}_{G\text{-}K^{(n)}} M^{(n)}$. Но $M^{(n)}$ — полупростой G-A-модуль, так что мы оказались в ситуации нашего частного случая: возьмем элемент $a \in A$, такой что

$$(ax_1, \ldots, ax_n) = (f(x_1), \ldots, f(x_n)). \quad ☐ \tag{7.18}$$

7.3.3. Подготовительные результаты для структурной теоремы. G-A-модули M и N назовем *квазиизоморфными*, что обозначим символом $M \simeq_S N$ (где S от слова «shift»), если существует обратимый гомоморфизм $f\colon M \to N$, такой что

$$\begin{aligned} &f(M_g) \subset N_{g+g_0} \ \ \text{при любых } g \in G \text{ и фиксированном } g_0 \text{ и} \\ &af = \langle \deg a,\, g_0 \rangle fa \ \ \text{при всех } a \in A. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Таким образом, любой квазиизоморфизм является композицией изоморфизма и сдвига градуировки. Его частным случаем является «нечетный изоморфизм» суперпространств. Заметим, что $\mathrm{End}_{G\text{-}A}(M) \cong \mathrm{End}_{G\text{-}A}(N)$ тогда и только тогда, когда $M \simeq_S N$.

Лемма. *Пусть A — G-алгебра, M — простой G-A-модуль, $L \subset A$ — простой (как модуль) левый G-идеал. Тогда либо $L \simeq_S M$ (как модули), либо $LM = 0$.*

Доказательство. Так как $ALM = LM$, мы заключаем (поскольку модуль M прост), что либо $LM = 0$, либо $LM = M$. Предположим, что $LM = M$. Пусть y — однородный элемент из M, такой что $Ly \neq 0$. Тогда $Ly = M$, поскольку Ly — G-подмодуль в M. Морфизм $L \to M$, $\alpha \mapsto \alpha y$, является эпиморфизмом. Он будет также и квазиизоморфизмом, поскольку модуль L прост. □

Через некоторое время мы покажем, что следующее определение — еще один вариант определения простоты G-алгебры. Это определение даст нам возможность немедленно доказать структурную теорему, а потом мы должны будем только ее переформулировать.

7.3.4. G-алгебра A называется *элементарной*, если она полупроста и все ее простые левые G-идеалы квазиизоморфны друг другу.

Теорема (структурная теорема для полупростых G-алгебр). *Пусть A — полупростая G-алгебра. Имеется лишь конечное число с точностью до квазиизоморфизма простых левых G-идеалов. Назовем их, скажем, $L_1, \ldots, L_s$. Пусть A^i — сумма всех простых левых G-идеалов квазиизоморфных L_i.*

Тогда A^i — G-идеал, а также и G-алгебра (т.е. содержит единицу) и $A \cong \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant s} A^i$. Каждая алгебра A^i является элементарной G-алгеброй. Пусть e_i — единица в A^i. Тогда $l = e_1 + \ldots + e_s$, где $e_ie_j = \delta_{ij}e_i$, т.е. e_i суть ортогональные идемпотенты.

Доказательство. Из леммы 7.3.3 следует, что $A^i \cdot A^j = 0$ при $i \neq j$. Заметим, что A^i — левый G-идеал, а A — сумма алгебр A^i, поскольку A — сумма простых левых идеалов (см. п. 7.3.1а.) Следовательно, для любого $j \in I$, где I — множество классов квазиизоморфных простых левых G-идеалов, имеем

$$\begin{aligned} A^j \subset \text{ (поскольку } A \text{ содержит единицу) } \subset A^j \cdot A = \\ = A^j \cdot A^j \subset \text{ (поскольку } A \text{ — левый } G\text{-идеал) } \subset A^j. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Это значит, что A^j является также и правым G-идеалом, т.е. G-идеалом.

Представим единицу $1 \in A$ в виде суммы $1 = \sum\limits_{i\in I} e_i$, где $e_i \in A^i$. Эта сумма конечна и пробегает, скажем, индексы $i = 1, \ldots, s$. Заметим, что все элементы e_i могут быть выбраны принадлежащими A_0, где 0 — единица в группе G.

Аналогичным образом разложим произвольный элемент $x \in A$. Мы начинаем с произвольного разложения

$$x = \sum_{i\in I} x_i, \quad x_i \in A^i. \tag{7.21}$$

Для каждого $i = 1, \ldots, s$ имеем $e_ix = e_ix_i$, а также

$$x_i = 1 \cdot x_i = e_1x_i + \ldots + e_sx_i = e_ix_i. \tag{7.22}$$

Окончательно получаем $x = e_1x + \ldots + e_sx$. Отсюда следует, что все элементы в разложении (7.21), за исключением тех, которые отвечают индексам $1, \ldots, s$, равны нулю, а i-слагаемое x_i однозначно определено равенством $x_i = e_ix$. Следовательно, $A = A^1 + \ldots + A^s$ — прямая сумма и e_i — единица в A^i, т.е. A^i — алгебра и $A = \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant s} A^i$, $A^i \cdot A^j = 0$ при $i \neq j$. □

7.3.4а. Следствие (структурная теорема для модулей). *В обозначениях предыдущего пункта пусть $A = \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant s} A^i$ — полупростая G-алгебра, а M — ненулевой G-A-модуль. Тогда $M = \bigoplus\limits_{1\leqslant i\leqslant s} A^iM = \bigoplus\limits_{1\leqslant i\leqslant s} e_iM$ и A^iM есть G-подмодуль, равный сумме всех простых G-подмодулей, квазиизоморфных подмодулю L_i.*

Доказательство. Пусть M^i — сумма всех простых G-подмодулей, квазиизоморфных модулю L_i. Если V — простой G-подмодуль, то $AV = V$, откуда следует, что $L_iV = V$ при некотором i. Но это значит, что $L_i \simeq_S V$ благодаря лемме из п. 7.3.3. Следовательно, $M = M^1 \oplus \ldots + M^s$. Ясно, что $A^iM = M^i$. □

7.3.5. Следствие. 1) *Пусть A — полупростая G-алгебра. Тогда каждый простой G-A-модуль квазиизоморфен одному из простых левых G-идеалов.*

2) *У элементарной G-алгебры имеется один, с точностью до квазиизоморфизма, простой G-A-модуль.*

7.3.6. Наша ближайшая цель — показать, что для алгебр понятие «элементарный» и «простой» — синонимы. Прежде всего каждая простая G-алгебра A полупроста, поскольку ее радикал есть G-идеал, см. п. 7.3.1г. Теперь очевидно, что алгебра A элементарна. Обратное тоже верно:

Теорема. *Пусть A — элементарная G-алгебра. Тогда*

а) *A — конечная прямая сумма левых простых G-идеалов;*

б) *A не содержит G-идеалов, кроме 0 и A;*

в) *для любых простых G-идеалов L и M существует однородный элемент $a \in A$, такой что $La = M$;*

г) $LA = A$.

Доказательство. Прежде всего ясно, что в) $\Longrightarrow$ б), г).

Лемма. *Каждый однородный G-A-эндоморфизм E G-алгебры A имеет вид*

$$E(x) = \langle \deg a,\, \deg x\rangle xa \quad \textit{для некоторого однородного элемента } a \in A. \tag{7.23}$$

Доказательство леммы. По определению

$$E(x) = E(x \cdot 1) = x\langle \deg E,\, \deg x\rangle E(1). \tag{7.24}$$

Теперь положим $a = E(1)$. □

Продолжим доказательство теоремы. Осталось доказать п. в). Существует левый идеал L', такой что $A = L \oplus L'$ (см. утверждение в) леммы из п. 7.3.1а. Пусть $\pi\colon A \to L$ — проекция на L. Конечно, π является G-A-эндоморфизмом. Теперь рассмотрим любой квазиизоморфизм $\sigma\colon L \to M$, существующий в силу пункта 2 следствия 7.3.5. Тогда $\sigma \circ \pi\colon A \to A$ — однородный G-A-эндоморфизм. По лемме из п. 7.3.6 существует однородный элемент $a \in A$, такой что

$$\sigma \circ \pi(x) = \langle \deg a,\, \deg x\rangle xa \quad \text{при всех } x. \tag{7.25}$$

Взяв $x \in L$, мы получим $\sigma(x) = \langle \deg a,\, \deg x\rangle xa$. □

7.3.7. Теорема (структурная теорема). *Каждая полупростая G-алгебра является прямым произведением простых G-алгебр.*

Доказательство. Объедините теоремы из п. 7.3.1 и теорему из п. 7.3.6 □

§ 7.4. Структура простых *G*-алгебр

Структурные теоремы из этого параграфа являются точными аналогами классических. (Это и является косвенным свидетельством того, что данное определение G-тела разумно.) Прежде всего нам потребуется одна лемма.

7.4.1. A-модуль M называется *точным*, если из того, что $am = 0$ следует, что $a = 0$ для любого $a \in A$ и ненулевого $m \in M$.

Лемма. *Пусть A — простая G-алгебра, L — простой G-идеал, а M — простой G-A-модуль. Тогда $LM = M$ и модуль M — точный модуль.*

Доказательство. Во-первых, отметим, что

$$LM = L(AM) = (LA)M = AM = M.$$

Предположим, что $aM = 0$ для некоторого $a \in A$. Тогда $a_gM = 0$ для каждой однородной компоненты элемента a. Тогда $Aa_gAM = Aa_gM = 0$ для любого g, но Aa_gA — G-идеал, а следовательно, $Aa_gA = 0$, т. е. $a_g = 0$ при всех g, так что $a = 0$ и M точен. □

7.4.2. Теорема (структурная теорема для простых G-алгебр). *Любая простая G-алгебра A изоморфна $\mathrm{End}_{G\text{-}D}(L)$, где L — простой левый G-идеал, а D есть G-тело его G-A-эндоморфизмов.*

Доказательство. Согласно G-лемме Шура (см. п. 7.2.7) мы видим, что $\mathrm{End}_{G\text{-}A}(L)$ является G-телом. Теперь рассмотрим естественный G-гомоморфизм $l\colon A \to \mathrm{End}_{G\text{-}D}(L)$. Ясно, что $\ker l$ есть G-идеал в силу инъективности отображения l. Имеем также $LA = A$, поэтому $l(L)l(A) = l(A)$. Для любых $x,\, y \in L$ и $f \in \mathrm{End}_{G\text{-}D}(L)$ имеем

$$f(\langle \deg y,\, \deg x\rangle xy) = \langle \deg f,\, \deg y\rangle \cdot (\langle \deg y,\, \deg f(x)\rangle f(x)y), \tag{7.26}$$

поскольку $x \mapsto \langle \deg y,\, \deg x\rangle xy$ является G-A-эндоморфизмом степени $\deg y$ G-A-модуля L. Из свойств отображения $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ следует, что

$$f(xy) = f(x)y \quad \text{для любых } f \text{ и } x,\, y \in L. \tag{7.27}$$

Следовательно, $l(L)$ — левый G-идеал в $A' = \mathrm{End}_{G\text{-}D}(L)$, т. е.

$$A' = A'l(A) = A'l(L)l(A) = l(L)l(A) = l(A). \tag{7.28}$$

□

Следующая теорема в некотором смысле обратна предыдущей.

7.4.3. Теорема. *Пусть D есть G-тело, M — G-D-модуль, а $A = \mathrm{End}_{G\text{-}D}(M)$. Тогда*

а) *A — простая G-алгебра;*
б) *M — простой G-A-модуль;*
в) $D = \mathrm{End}_{G\text{-}A}(M)$.

Доказательство. Покажем, что M прост. Пусть v_1 — ненулевой однородный элемент модуля M. Мы можем дополнить его до базиса $v_1, \ldots, v_n$ G-D-модуля M. Поэтому для данного $m \in M$ существует $a \in A$, такой что $a(v_1) = m$, откуда следует, что модуль M прост. Ясно, что M также и точен как G-A-модуль.

Из существования точного простого G-A-модуля немедленно следует полупростота алгебры A (см. п. а) предложения из п. 7.3.1г) и, более того, тот факт, что A — элементарная алгебра (см. п. 7.2.5).

Теперь воспользуемся утверждением б) теоремы из п. 7.3.6. Осталось показать, что $D = \mathrm{End}_{G\text{-}A}(M)$. Поскольку D — G-тело, M — полупростой G-D-модуль. Мы можем поэтому воспользоваться теоремой из п. 7.3.2.

Пусть $\varphi \in \mathrm{End}_{G\text{-}A}(M)$ и $v \in M$ — однородные элементы. Тогда существует $d \in D$, такой что $\varphi(v) = dv$. Легко видеть, что можно выбрать элемент d так, чтобы он был однородным степени $\deg\varphi$. Пусть $w \in M$ — однородный элемент. Тогда существует однородный элемент $f \in A$, такой что $f(v) = w$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\varphi(w) = \varphi(f(v)) = \langle\deg\varphi,\, \deg f\rangle f(\varphi(v)) = \langle\deg\varphi,\, \deg f\rangle f(dv) = \\ = \langle\deg\varphi,\, \deg f\rangle \cdot \langle\deg f,\, \deg d\rangle df(v) = dw.\end{aligned} \tag{7.29}$$

Это значит, что $\varphi(w) = dw$ для любых (не обязательно однородных) элементов $w \in M$, $\varphi \in D$. □

Следующая теорема суммирует результаты этого параграфа для удобства ссылок.

7.4.4. Теорема. *Следующие свойства G-алгебры A эквивалентны*:

а) *A проста*,

б) *A элементарна* (*см. п.* 7.3.4),

в) $A = \mathrm{End}_{G\text{-}D}(M)$, *где D есть G-тело, а M есть G-D-модуль.*

§ 7.5. *G*-тензорные произведения и *G*-группа Брауэра

7.5.1. Мы увидим, что G-тензорное произведение двух центральных простых G-алгебр — снова центральная простая G-алгебра (см. п. 7.5.5 и 7.5.6). Предложение 7.5.4 показывает, что классы изоморфизма центральных простых G-алгебр — абелева полугруппа относительно G-тензорного произведения. Эта полугруппа содержит подполугруппу, состоящую из центральных простых G-алгебр вида $\mathrm{End}\, M$, где M — G-k-модуль (см. п. 7.5.4 и 7.5.3).

Чудесным образом оказывается, что факторполугруппа является группой (см. п. 7.5.7). Эта группа, зависящая от групп G, $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ и k, называется *G-группой Брауэра поля k*; мы обозначаем ее символом G-$\mathrm{Br}(k)$.

7.5.2. Предложение. *Пусть M — G-k-модуль. Тогда* $Z(\mathrm{End}_{G\text{-}k}(M)) = k$.

Доказательство. Вспомним утверждение в) теоремы 7.4.3. Если $a \in Z(\mathrm{End}_{G\text{-}k}(M))$, то умножение на a является G-$\mathrm{End}_{G\text{-}k}(M)$-эндоморфизмом модуля $\mathrm{End}_{G\text{-}k}(M)$. Следовательно, $a \in k$. □

7.5.3. Предложение. *Пусть M, N — G-k-модули. Тогда*

$$\psi\colon\ \mathrm{End}_{G\text{-}k}(M) \otimes_G \mathrm{End}_{G\text{-}k}(N) \longrightarrow \mathrm{End}_{G\text{-}k}(M \otimes_G N), \tag{7.30}$$

где

$$\psi(E \otimes F)(x \otimes y) = \langle\deg F,\, \deg x\rangle E(x) \otimes F(y) \tag{7.31}$$

— *изоморфизм.*

Упражнение. Докажите это.

7.5.4. Предложение. *Пусть A и B — центральные G-алгебры. Тогда $A \otimes_G B$ тоже центральная G-алгебра.*

Доказательство. Пусть $x = a_1 \otimes b_1 + \ldots + a_k \otimes b_k$ — элемент из $Z(A \otimes_G B)$, причем все b_i линейно независимы. Ясно, что x и $a \otimes 1$ коммутируют при любом $a \in A$ тогда и только тогда, когда $a_i \otimes b_i$ коммутирует с $a \otimes 1$ при любом i. Однако

$$(a_i \otimes b_i) \cdot (a \otimes 1) = \langle\deg b_i,\, \deg a\rangle (a_i \cdot a) \otimes b_i \tag{7.32}$$

и $(a \otimes 1) \cdot (a_i \otimes b_i) = aa_i \otimes b_i$.

Итак, $a_i \otimes b_i$ и $a \otimes 1$ коммутируют тогда и только тогда, когда

$$\langle\deg b_i,\, \deg a\rangle a_i \cdot a = \langle\deg a_i + \deg b_i,\, \deg a\rangle a \cdot a_i, \tag{7.33}$$

т. е. когда a и a_i коммутируют. Но a — произвольный элемент, поэтому $a_i \in k$ при всех i. Дальнейшие аргументы очевидны. □

7.5.5. Переформулируем утверждение в) теоремы 7.4.4 для наших тензорных целей. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — однородный D-базис в модуле M, а $\widehat{M}$ есть G-k-модуль, натянутый над $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$ на k. Для каждого G-тела D положим

$$\widehat{D} = \mathrm{End}_{G\text{-}D}(D). \tag{7.34}$$

Из G-леммы Шура следует, что D — простой G-D-модуль, а $\widehat{D}$ — простой G-D-модуль.

Существует изоморфизм

$$\varphi\colon\ \mathrm{End}_{G\text{-}D}(M) \cong \widehat{D} \otimes_G \mathrm{End}_{G\text{-}k}(\widehat{M}), \tag{7.35}$$

заданный формулой

$$\varphi(F \otimes E)(d \otimes x) = \langle\deg E,\, \deg d\rangle F(d) \otimes E(x) \tag{7.36}$$

для любых $F \in \mathrm{End}_{G\text{-}D}(D)$, $E \in \mathrm{End}_{G\text{-}k}(\widehat{M})$, $d \in D$, и $x \in M$.

Заметим, что $M \cong D \otimes_G \widehat{M}$, а $D \cong \widehat{\widehat{D}}$.

7.5.6. Предложение. *Пусть A и B — центральные простые G-алгебры. Тогда их G-тензорное произведение тоже простая G-алгебра.*

Доказательство. С помощью предыдущих рассуждений и результатов п. 7.4.4 мы представим наши алгебры в виде $A = D_1 \otimes_G \mathrm{End}_{G\text{-}k}(M_1)$, $B = D_2 \otimes_G \mathrm{End}_{G\text{-}k}(M_2)$. Теперь из коммутативности и ассоциативности G-тензорных произведений (см. предложение из п. 7.5.4) мы можем свести всю задачу к случаю $A = D_1$, $B = D_2$.

Вот пример применения предыдущих рассуждений: A — центральная простая G-алгебра, поэтому алгебра

$$\begin{aligned} &A \otimes_G \mathrm{End}_{G\text{-}k}(N) = D \otimes_G \mathrm{End}_{G\text{-}k}(M) \otimes_G \mathrm{End}_{G\text{-}k}(N) = \\ &\qquad = D \otimes_G \mathrm{End}_{G\text{-}k}(M \otimes_G N) = \mathrm{End}_{G-\widehat{D}}(\widehat{D} \otimes_G M \otimes_G N) \end{aligned} \tag{7.37}$$

проста.

Итак, пусть A и B — G-тела. Пусть $R \subset A \otimes_G B$ — собственный G-идеал. Выберем однородный элемент $x \in R$, $x = a_1 \otimes b_1 + \ldots + a_s \otimes b_s$, с минимальным числом слагаемых s. Легко видеть, что $s \geqslant 2$ для собственного идеала R. Умножая на $\mathrm{const} \cdot a_1^{-1} \otimes b_1^{-1}$, мы получаем новый элемент

$$1 + a'_2 \oplus b'_2 + \ldots + a'_s \otimes b'_s = y \in R. \tag{7.38}$$

Существует однородный элемент $a \otimes b \in A \otimes_G B$, который не G-коммутирует с y, см. п. 7.5.4. Но тогда $[a \otimes b, y]_G \neq 0$ и $[a \otimes b, y] \in R$, поскольку R является G-идеалом и соответствующее число слагаемых в нем меньше, чем в x, по крайней мере на одно. Это противоречие. ☐

7.5.7. Теперь мы хотим построить центральную простую G-алгебру, обратную к данной центральной простой алгебре A относительно умножения в полугруппе Брауэра, см. п. 7.5.2. Это докажет, что эта полугруппа на самом деле группа.

По данной G-алгебре A определим *обратную* алгебру $\hat{A}$ как копию алгебры A но с умножением $\widehat{\cdot}$, заданным формулой

$$a \,\widehat{\cdot}\, b = \langle \deg a, \deg b \rangle b \cdot a. \tag{7.39}$$

Ясно, что $\hat{A}$ — центральная простая алгебра тогда и только тогда, когда A — центральная простая алгебра. Заметим, что обозначение $\widehat{D}$ не случайное: $\mathrm{End}_{G\text{-}A}(A) \cong \hat{A}$ для любой G-алгебры A. Действительно,

$$a \mapsto \hat{a} = a(\cdot), \quad \text{где } a(x) = \langle \deg a, \deg x \rangle x \cdot a \quad \text{для любых } a, x \in A, \tag{7.40}$$

Предложение. *Пусть A — центральная простая G-алгебра. Тогда $A \underset{G}{\otimes} \hat{A} \cong \mathrm{End}_{G\text{-}k}(A)$, где изоморфизм устанавливается по формуле*

$$\varphi(a \otimes \hat{a})(x) = \langle \deg \hat{a}, \deg x \rangle a \cdot x \cdot \hat{a} \tag{7.41}$$

(*в правой части элемент $\hat{a}$ рассматривается как элемент из A*).

Доказательство. 1) **Упражнение.** Покажите, что φ — G-гомоморфизм.

2) Из результатов п. 7.5.4–7.5.4 следует, что $A \otimes_G \hat{A}$ — центральная простая G-алгебра, так что $\mathrm{Ker}\,\varphi$, будучи G-идеалом, тривиально. Совпадение k-размерностей алгебр $A \otimes_G \hat{A}$ и $\mathrm{End}_{G\text{-}k}(A)$) завершает доказательство. ☐

7.5.8. Как G-Br(k) зависит от G и k. Эта зависимость описывается до некоторой степени гомоморфизмами

$$\begin{gathered} G\text{-}\mathrm{Br}(k) \xrightarrow{\otimes K} G\text{-}\mathrm{Br}(K) \quad \text{для любого} \\ \text{алгебраического расширения } K \text{ поля } k \end{gathered} \tag{7.42}$$

и

$$\begin{gathered} HBr(k) \xrightarrow{\tau_*} G - \mathrm{Br}(k) \quad \text{для любого вложения } \tau\colon H \longrightarrow G, \\ \text{такого что} \langle \cdot, \cdot \rangle_H = \tau_* \langle \cdot, \cdot \rangle_G, \end{gathered} \tag{7.43}$$

т. е. $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ является ограничением функции $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$.

7.5.8а. Предложение. *Пусть K — алгебраическое расширение поля k, A — центральная простая G-алгебра над k. Тогда $A \otimes_G K$ — центральная простая G-алгебра над K, где K рассматривается как G-k-модуль степени* 0).

Доказательство. Замените B на K в п. 7.5.5 и 7.5.6 и буквально повторите доказательство. ☐

Теперь легко видеть, что $A \mapsto A \otimes_G K$ корректно определяет гомоморфизм $G\text{-}\mathrm{Br}(k) \longrightarrow G\text{-}\mathrm{Br}(k)$.

7.5.8б. Элементы ядра гомоморфизма

$$G\text{-}\mathrm{Br}(K) \longrightarrow G\text{-}\mathrm{Br}(k) \tag{7.44}$$

называются *центральными простыми G-алгебрами расщепимыми над K*. Обозначения для этого ядра: $\mathrm{Ker}(\otimes K)$ или $G\text{-}\mathrm{Br}(K/k)$.

7.5.9. Предположим, что H — подгруппа в G, а $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ — ограничение функции $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ на H. По данной H-алгебре $A = \bigoplus\limits_{h \in H} A_h$ построим G-алгебру $\tau_* A$ следующим образом: как алгебра $\tau_* A$ совпадает с A, а

$$(\tau_* A)_g = \begin{cases} A_h, & \text{если } g = h \in H; \\ 0, & \text{если } g \notin H. \end{cases} \tag{7.45}$$

Очевидно, мы получили корректно определенный гомоморфизм

$$\tau_*\colon HBr(k) \longrightarrow G\text{-}\mathrm{Br}(k), \qquad A \mapsto \tau_* A. \tag{7.46}$$

Предложение. *Гомоморфизм* τ_* *инъективен.*

Доказательство. Мы собираемся проверить, что если

$$\tau_*(A)\otimes_G \mathrm{End}_{G\text{-}k}(M)\cong \tau_*B\underset{G}{\otimes}\mathrm{End}_{G\text{-}k}(N) \qquad (7.47)$$

для некоторых центральных простых H-алгебр A и B и G-k-модулей M и N, то существуют H-k-модули M_H и N_H, такие что

$$A\otimes_H \mathrm{End}_{H\text{-}k}(M_H)\cong B\otimes_H \mathrm{End}_{H\text{-}k}(N_H). \qquad (7.48)$$

Но это же очевидно: положим $(M_H)_h = M_{\tau(h)}$ и $(N_H)_h = N_{\tau(h)}$. ☐

Ясно, что $\{0\}$-$\mathrm{Br}(k)$ — это просто $\mathrm{Br}(k)$, т. е. классическая группа Брауэра.

Следствие. *Группа* G-$\mathrm{Br}(k)$ *содержит* $\mathrm{Br}(k)$ *в качестве подгруппы.*

§ 7.6. Суперслучай

7.6.1. Заметим с самого начала, что для любой группы G имеется взаимно однозначное соответствие между множеством классов изоморфизма центральных G-тел над k и множеством классов G-Морита-эквивалентности G-$\mathrm{Br}(k)$, а именно

$$A\longleftrightarrow \mathrm{End}_{G\text{-}A}(L), \qquad (7.49)$$

где L — произвольный G-левый идеал центральной простой G-алгебры A.

В этом параграфе $\mathrm{char}\, k\neq 2$, $G=\mathbb{Z}/2$, $\langle g, h\rangle = (-1)^{hg}$, где $h, g\in G$. Мы обозначаем группу $\mathbb{Z}/2$-$\mathrm{Br}(k)$ символом $\mathrm{WBr}(k)$.

7.6.2. Итак, мы начнем с исследования *центральных супертел над фиксированным полем* k.

Имеется альтернатива:

а) центральное супертело чисто четно $D=D_{\bar 0}$. Тогда D — центральное тело над k. Соответствующие классы Брауэра образуют подгруппу группы $\mathrm{WBr}(k)$, а именно $\mathrm{Br}(k)$.

б) $D=P\oplus\Gamma P$, где P — тело, а Γ — нечетный элемент, так что $D_{\bar 0}=P$ и $D_{\bar 1}=\Gamma P$. Как мы сейчас увидим, этот случай гораздо более интересный.

Введем суперполя — главные персонажи этого параграфа.

Пусть G — произвольная группа; тогда G-k-тело D назовем *G-полем*, если $\dim_k D_g\leqslant 1$ при всех $g\in G$.

С этого момента мы обозначаем $\mathbb{Z}/2$ буквой G, если не оговорено противное.

Прежде всего классифицируем все центральные суперполя, а затем перейдем к супертелам. Центральное суперполе F — это либо k, либо $k\oplus\Gamma k$. Легко видеть, что $\Gamma^2\in k^\times$ и образ γ элемента Γ^2 в $k^\times/k^{\times 2}$ однозначно определяет суперполе F с точностью до изоморфизма.

Если $\gamma=1$, то F называется *странным полем* (обозначение $F=$ $=k(\sqrt{1})$).). Опытный читатель, конечно же, узнал в F кольцо двойных чисел.

Если $\gamma\neq 1$, то F изоморфно, как алгебра, полю $k(\sqrt{\gamma})$. Это обстоятельство и мотивировало термин «суперполе». Обозначение: $F=k(\sqrt{\gamma})$.

Вернемся к утверждению.

Мы покажем, что этот случай распадается на два:

1) $D=P\otimes_G k(\sqrt{\gamma})$, если P — центральное тело над k, и в этом случае можно выбрать Γ так, что $\Gamma^2\in k^\times$ и γ есть образ элемента Γ^2 в $k^\times/k^{\times 2}$;

2) $D=Q\otimes_G k(\sqrt{\gamma_1})\otimes_G k(\sqrt{\gamma_2})$, где Q — некоторое центральное тело над k.

Предположим, что P центрально. Тогда $\Gamma^2\in k^\times$. Действительно, легко видеть, что $x\mapsto \Gamma x\Gamma^{-1}$ — автоморфизм поля P. По теореме Сколема—Нётера этот автоморфизм внутренний, скажем,

$$x\mapsto x_0xx_0^{-1} \quad \text{при некотором } x_0\in P. \qquad (7.50)$$

Теперь заменим Γ на $x_0^{-1}\Gamma=\Gamma'$. Оказывается, Γ' коммутирует с каждым элементом $x\in P$, следовательно, коммутирует и Γ'^2, а значит, $\Gamma'^2\in k$. Теперь утверждение п. 1 очевидно.

Пусть K — центр тела P. Тогда отображение $x\mapsto\Gamma x\Gamma^{-1}$ является автоморфизмом σ поля K над k. Поскольку тело D центрально, множество σ-инвариантов имеет вид $K^\sigma=k$, откуда в свою очередь следует, что группа $\mathrm{Gal}(K/k)$ циклическая, порожденная элементом σ. Но $\sigma^2=1$, поскольку $\Gamma^2\in P$, так что $K=k(\sqrt{\gamma})$ для некоторого $\gamma\in k^\times$ и $\Gamma\sqrt{\gamma}=-\sqrt{\gamma}\Gamma$.

Нам потребуется когомологическая техника расширений. Дело в том, что мы хотим доказать, что $P=Q\otimes_k K$ для некоторого тела Q и, более того, что оператор сопряжения с помощью элемента Γ', т. е.

$$\mathrm{conj}(\Gamma')(x)=\Gamma' x\Gamma'^{-1}, \qquad (7.51)$$

есть оператор вида $\mathrm{id}\otimes\sigma$ для подходящего элемента σ. Это делается так же, как и в [B, ch. IV, 6.6].

С помощью теоремы Сколема—Нётера мы получаем точную последовательность

$$1\longrightarrow \mathrm{Int}(P)\longrightarrow \mathrm{Aut}_k(P)\longrightarrow \mathbb{Z}/2\longrightarrow 0, \qquad (7.52)$$

где $\mathrm{Int}(P)$ — группа внутренних автоморфизмов тела P; $\mathrm{Aut}_k(P)$ — группа всех автоморфизмов тела P над k, а группа $\mathbb{Z}/2$ порождена образом σ элемента $\mathrm{conj}(\Gamma)^{-1}$.

Положим $\mathrm{Out}_k(P)=\mathrm{Aut}_k(P)/\,\mathrm{Int}(P)$. Итак, $\mathrm{Out}_k(P)=\mathbb{Z}/2$.

Достаточно доказать, что $\mathrm{Aut}_k(P) = \mathrm{Int}(P) \ltimes \mathbb{Z}/2$ — полупрямое произведение относительно действия, заданного формулой

$$\sigma\,\mathrm{conj}(d)\sigma^{-1} = \mathrm{conj}(\sigma d \sigma^{-1}) \quad \text{для любого } d \in P. \tag{7.53}$$

Доказав полурасщепление, мы полагаем $0 = P^{\sigma}$ (вспомним, что теперь σ — корректно определенный элемент группы $\mathrm{Aut}_k(P)$, а элемент Γ' определен из уравнения $\sigma = \mathrm{conj}(\Gamma')^{-1}$.

Что касается полурасщепления, то оно немедленно следует из работы [B, ch. IV, 6.6], поскольку центр группы $\mathrm{Int}(P)$ тривиален и, следовательно, $H^2(\mathbb{Z}/2; Z(\mathrm{Int}(P)) = \{0\}$.

Теперь конец доказательства не за горами. Во-первых, умножив при необходимости Γ' на $\sqrt{\gamma}$, мы добиваемся того, что $\Gamma'^2 \in k$. Пусть γ' — образ элемента Γ'^2 в $k^{\times}/k^{\times 2}$.

Упражнение. Докажите, что $D = Q \otimes_G k(\sqrt{\gamma'}) \underset{G}{\otimes} k(\sqrt{-\gamma/\gamma'})$.

Суммируя результаты п. 7.6.2, мы получаем следующую теорему.

7.6.3. Теорема (структурная теорема для центральных супертел). *Пусть D — центральное супертело. Тогда может иметь место одна из следующих трех возможностей*:

а) *$D = Q$, где Q — центральное тело над k*;

б) *если $D_{\bar{0}}$ — центральное тело, то $D = Q \underset{G}{\otimes} k(\gamma)$, где Q — центральное тело над k*;

в) *если у $D_{\bar{0}}$ есть нетривиальный центр, то*

$$D = Q \underset{G}{\otimes} k(\sqrt{\gamma_1}) \otimes_G k(\sqrt{\gamma_2}), \quad \text{где } Q \text{ — центральное тело над } k.$$

Следствие. *Группа $\mathrm{WBr}(K) = \mathbb{Z}/2$ порождена телом $K(\sqrt{1})$ для алгебраически замкнутого поля K.*

Доказательство. Над K нет тел (см. [VdW]) и $K^{\times}/K^{\times 2} = \{1\}$. ☐

В силу результатов п. 7.5.1 мы немедленно выводим отсюда еще одно следствие.

7.6.4. Теорема. *Группа* $\mathrm{WBr}(k)$ *порождена своей подгруппой* $\mathrm{Br}(k)$ (*см. следствие* 7.5.9) *и классами супертел над k.*

Более того, мы теперь можем вывести и все соотношения между суперполями по модулю $\mathrm{Br}(k)$! Начиная с этого момента мы будем обозначать композицию в группе $\mathrm{WBr}(k)$ аддитивно, символом $+$.

Пусть $H(\alpha\beta, \alpha\gamma)$ — классическая четырехмерная алгебра кватернионов с образующими j и l и соотношениями

$$j^2 = -\alpha\beta \cdot 1, \quad l^2 = -\alpha\gamma \cdot 1, \quad jl = -lj. \tag{7.54}$$

Согласно результатам книги [VdW, § 93], эта алгебра есть

$$\begin{cases} \text{центральное тело,} & \text{если квадратичная форма} \\ & x_0^2 + \alpha\beta x_1^2 + \alpha\gamma x_2^2 + \beta\gamma x_3^2 \\ & \text{не представляет нуль над } k, \\ \text{матричная алгебра } \mathrm{Mat}(2) & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{7.55}$$

7.6.5. Теорема. *Единственные соотношения в* $\mathrm{WBr}(k)/\mathrm{Br}(k)$ *следующие*:

$$k(\sqrt{\gamma}) + k(\sqrt{-\gamma}) = 0; \tag{7.56}$$

$$k(\sqrt{\alpha}) + k(\sqrt{\beta}) + k(\sqrt{\gamma}) + k(\sqrt{\alpha\beta\gamma}) = H(\alpha\beta, \alpha\gamma). \tag{7.57}$$

Доказательство. Соотношение (7.56) очевидно: $\widehat{k(\sqrt{\gamma})} = k(\sqrt{-\gamma})$.

Докажем соотношение (7.57). Непосредственными вычислениями (неплохое упражнение) можно показать, что

$$k(\sqrt{\alpha}) \otimes_G k(\sqrt{\beta}) \underset{G}{\otimes} k(\sqrt{\gamma}) \cong H(\alpha\beta, \alpha\gamma) \underset{G}{\otimes} k(\sqrt{-\alpha\beta\gamma}). \tag{7.58}$$

Полнота нашей системы соотношений практически немедленно вытекает из теоремы из п. 7.6.3. ☐

Следствие. *Для нечетного q выполняется соотношение*

$$\mathrm{WBr}(\mathbb{F}_q) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2, & \text{если } -1 \text{ — квадрат;} \\ \mathbb{Z}/4 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{7.59}$$

Доказательство. Над $\mathbb{F}_q$ нет нетривиальных центральных тел, поскольку все конечные тела коммутативны (см. [VdW, § 112]). А $\mathbb{F}_q^{\times}/\mathbb{F}_q^{\times 2} = \mathbb{Z}/2$, поскольку $\mathbb{F}_q^{\times}$ — циклическая группа (см. [VdW, § 43]). ☐

В следующем параграфе будут даны более замысловатые примеры.

7.6.6. К описанию группы $\mathrm{WBr}(k)$ имеется еще один независимый подход, а именно классификация форм с помощью некоммутативных когомологий Галуа, см. [S1, ch. III.1]. Нам не хочется застрять в деталях, поэтому мы предполагаем, что читатель опытный, и в оставшейся части этого параграфа приведем только наброски доказательств.

Пусть M — G-k-модуль. Мы начнем с исследования центральных простых супералгебр над алгебраически замкнутым полем K. Из п. 7.6.3 и 7.5.6 следует, что любая центральная простая супералгебра имеет вид либо $\mathrm{Mat}(m|n)$, либо $K(\sqrt{1}) \otimes_G \mathrm{Mat}(m|n)$.

Лемма. *Пусть* $\deg\Gamma = \bar{1}$, $\Gamma^2 = 1$, $\Gamma A\Gamma^{-1} = A$ *для любой матрицы* $A \in Mat(m+n|0)$. *Тогда*

$$\begin{aligned} K(\sqrt{1}) \otimes_G \mathrm{Mat}(m|n) \cong K(\sqrt{1}) \otimes_G Mat(m+n|0) \cong \\ \cong \mathrm{Mat}(m+n|0) \oplus \Gamma\,\mathrm{Mat}(m+n|0) = Q(m+n). \end{aligned} \tag{7.60}$$

Доказательство. Формула (7.60) есть интерпретация того, что все G-K-модули данной суперразмерности изоморфны. □

Итак, существует лишь одна с точностью до изоморфизма центральная простая супералгебра суперразмерности $n^2|n^2$, а из предложения 7.5.8а следует, что центральные простые супералгебры суперразмерности $n^2|n^2$ над произвольным полем k — это формы алгебры $\mathrm{Q}(n;\, K)$.

7.6.7. Теперь общая теория требует вычислить $\mathrm{Aut}_{\bar{k}}(\mathrm{Q}(n))$, где $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k.

Лемма. *Справедливо соотношение*

$$\mathrm{Aut}_{\bar{k}}(Q(n)) = \mathrm{PGL}(n) \ltimes \mathbb{Z}/2.$$

Доказательство. Все автоморфизмы алгебры $\mathrm{Q}(n)_{\bar{0}} = \mathrm{Mat}(n)$ внутренние и образуют группу $\mathrm{Q}(n)_{\bar{0}} = \mathrm{Mat}(n)$. Пусть Σ — автоморфизм алгебры $\mathrm{Q}(n)$. Ограничивая его на $\mathrm{Q}(n)_{\bar{0}}$, получаем элемент $\sigma \in \mathrm{PGL}(n)$. Ясно, что $\Sigma(\Gamma)$ коммутирует с элементами из $\mathrm{Mat}(n)$ и $(\Sigma(\Gamma))^2 = 1$, как и раньше. Следовательно $\Sigma(\Gamma) = \pm\Gamma$, поскольку $Z(\mathrm{Mat}(n)) = \bar{k}$. Пусть τ — автоморфизм супералгебры $\mathrm{Q}(n)$, равный тождественному автоморфизму на $\mathrm{Mat}(n)$ и переводящий Γ в $-\Gamma$. Определим действие группы $\mathrm{PGL}(n) \ltimes \mathbb{Z}/2$ на $\mathrm{Q}(n)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &(\sigma \times \bar{0})(E + \Gamma F) = \sigma E + \Gamma\sigma F; \\ &(\sigma \times \bar{1})(E + \Gamma F) = \sigma E - \Gamma\sigma F, \quad \text{где } E,\, F \in \mathrm{Mat}(n). \end{aligned} \tag{7.61}$$

Теперь требуемый изоморфизм очевиден. □

7.6.8. Итак, мы получили, что

$$\begin{aligned} \left\{\bar{k}/k \text{ — формы алгебры } \mathrm{Q}(n)\right\} \cong \left\{H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k);\, \mathrm{Aut}_{\bar{k}}(\mathrm{Q}(n))\right\} = \\ = \left\{H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k);\, \mathrm{PGL}(n))\right\} \times \left\{H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k);\, \mathbb{Z}/2)\right\}. \end{aligned} \tag{7.62}$$

Первый изоморфизм установлен в книге [S1, гл. 3], а второй очевиден по предыдущей лемме. Согласно [S1, гл. 3], мы видим, что

$$\begin{aligned} H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k);\, \mathrm{PGL}(n)) = \{&\text{классы изоморфизмов } n^2\text{-мерных} \\ &\text{центральных простых алгебр над } k\} \end{aligned} \tag{7.63}$$

и

$$\begin{aligned} H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k);\, \mathbb{Z}/2) = \{&\text{классы изоморфизмов} \\ &1|1\text{-мерных суперполей над } k\}. \end{aligned} \tag{7.64}$$

Таким образом, очень похоже, что $n^2|n^2$-мерные центральные простые супералгебры над k являются G-тензорными произведениями $1|1$-мерных суперполей и n^2-мерных центральных простых алгебр степени 0. Более того, если это правда, мы можем заменить здесь G-тензорное произведение обычным тензорным произведением. Ожидаемый результат немедленно вытекает из следующей леммы. Вспомним, что структура алгебры на пространстве V есть не что иное, как тензор валентности $(1, 2)$, который задает умножение.

Лемма. 1) *Пусть* A, B — *алгебры, заданные тензорами* α *и* β *соответственно. Тогда алгебра* $A \otimes_k B$ *задана тензором* $\alpha \otimes \beta$.

2) *Имеет место изоморфизм* $\mathrm{Aut}(\alpha \otimes \beta) \cong \mathrm{Aut}(\alpha) \times \mathrm{Aut}(\beta)$ *для любых тензоров* α *и* β, *а тензорное произведение* $\bar{k}/k$*-форм тензоров* α *и* β *соответствует произведению соответствующих коциклов.*

Доказательство. Оба утверждения очевидны. □

7.6.9. Когомологическое описание группы Уолла (по Уоллу; см. [W]). Заметим, что $\mathrm{WBr}(k)$ имеет естественную $\mathbb{Z}/2$-градуировку: $(\mathrm{WBr}(k))_{\bar{0}} = \mathrm{Wall}(k)$ и $(\mathrm{WBr}(k))_{\bar{1}} = k(\sqrt{1})$. Заметим, что $(\mathrm{WBr}(k))_{\bar{1}} = k(\sqrt{1})$ не подгруппа.

Прежде всего из теоремы 7.6.3 следует, что любой элемент группы $\mathrm{Wall}(k)$ представи́м либо в виде

$$Q, \quad \text{где } Q \text{ — центральное тело,} \tag{7.65}$$

либо в виде

$$Q \otimes_G k(\sqrt{-1}) \otimes_G k(\sqrt{\gamma}). \tag{7.66}$$

(Чтобы это проверить, нужно к рассматриваемому элементу добавить $k(\sqrt{1})$.)

Итак, любой элемент $D \in \mathrm{Wall}(k)$ можно представить в одном из двух видов:

$$D = \begin{cases} (Q,\, \varnothing) & \text{в случае (7.65),} \\ (Q,\, k(\sqrt{\gamma})) & \text{в случае (7.66).} \end{cases} \tag{7.67}$$

Вспомним теперь, что имеет место классический канонический изоморфизм

$$\mathrm{Br}(k) = H^2(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)k;\, \bar{k}^{\times}) \quad \text{(см. [C, гл. 5]),} \tag{7.68}$$

а вышеприведенное соответствие дает отождествление

$$H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k);\, \mathbb{Z}/2) = \{1|1\text{-мерные тела}\}. \tag{7.69}$$

Итак, любой элемент $D \in \mathrm{Wall}(k)$ можно представить в виде $D = (\delta,\, \mu)$, где μ — либо 0, либо принадлежит $H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k);\, \mathbb{Z}/2)$, а $\delta \in H^2(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k);\, \bar{k}^{\times})$.

Теорема. *В предыдущих обозначениях закон композиции выглядит следующим образом*:

1) $(\delta,\, 0) + (\varepsilon,\, \mu) = (\delta + \varepsilon,\, \mu)$;

2) $(\delta,\, \nu) + (\varepsilon,\, -\nu) = (\delta + \varepsilon - \nu \times \nu,\, 0)$, *если* $\nu \neq 0$, *где* «$\times$» *означает сквозное отображение*

$$H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k);\, \mathbb{Z}/2) \times H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k);\, \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\substack{\textit{(внутреннее}\\ \textit{произведение)}}} \tag{7.70}$$

$$\longrightarrow H^2(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k);\, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow (\{1,\, -1\} \hookrightarrow \bar{k}^{\times}) \longrightarrow H^2(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k);\, \bar{k}^{\times});$$

3) $(\delta,\, \nu) + (\varepsilon,\, \mu) = (\delta + \varepsilon + \nu \times \mu,\, \nu + \mu)$ *если либо* $\nu \neq 0$ *(а тогда и* $\mu \neq 0$*), либо* $\nu \neq -\mu$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой из п. 7.6.5 и явным видом вышеописанных отождествлений. □

7.6.10. Замечание. Теорема из п. 7.6.4 верна для любой группы G, поскольку группа G-$\mathrm{Br}(k)$ порождена множеством $\mathrm{Br}(k)$ и G-полями. Доказательство в сущности такое же, как гомологическое доказательство теоремы 7.6.4, см. п. 7.6.6–7.6.8. Напомним основные шаги.

1) Если F — *полное* (т. е. $\dim F_g = 1$ при всех $g \in G$) G-тело над алгебраически замкнутом полем K, то существует единственный с точностью до изоморфизма G-F-модуль данной размерности. Следовательно, существует единственное с точности до изоморфизма представление тела F в данной размерности, а именно $F(n)$.

2) Имеем $\mathrm{Aut}_K(F(n)) = \mathrm{PGL}(n) \times \widehat{G}$, где $\widehat{G}$ — есть группа характеров группы G, т. е. группа гомоморфизмов $G \to K^{\times}$. Поскольку G — конечная абелева группа, группа $\widehat{G}$ изоморфна, хотя и не канонически, группе G.

3) См. п. 7.6.8 при подстановке $\mathrm{char}(G) \longleftrightarrow \mathbb{Z}/2$.

§ 7.7. Примеры вычислений групп WBr (*k*), Wall (*k*) и Witt (*k*)

Вспомним прежде всего следствия из п. 7.6.3 и 7.6.5.

7.7.1. Теорема. *Справедливы соотношения*

$$\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/8; \quad \mathrm{Wall}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/4.$$

Доказательство. Единственным центральным телом над $\mathbb{R}$ является тело кватернионов $\mathbb{H}$, а кроме того, $\mathbb{R}^{\times}/\mathbb{R}^{\times 2} = \{\pm 1\}$. Теперь нужный результат следует либо из теоремы 7.6.5, либо из теоремы 7.6.9.

Чуть более подробно: $\mathbb{R}(\sqrt{-1})$ является образующей, и $4\mathbb{R}(\sqrt{-1}) = \mathbb{H}$. Нетрудно видеть, что $\mathbb{R}(\sqrt{-1}) \otimes_G \mathbb{R}(\sqrt{-1})$ изоморфно $\mathbb{H}$ как алгебра. □

7.7.2. Теорема. *Пусть* $K = \mathbb{Q}_p$ *— поле* p*-адических чисел. Тогда группы* $\mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p)$, $\mathrm{Wall}(\mathbb{Q}_p)$ *и их образующие описаны в таблице* 7.1.

Доказательство. Существует единственное тело кватернионов над $\mathbb{Q}_p$. Оно обозначается символом $\mathbb{H}_p$. Имеется канонический изоморфизм $\mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\mathrm{inv}_p} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (см. [С, гл. 7]); $\mathrm{inv}_p(\mathbb{H}_p) = \dfrac{1}{2}$. Мы также знаем, что (см. [S2])

$$\begin{aligned} &\mathbb{Q}_p^{\times}/\mathbb{Q}_p^{\times 2} = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 && \text{с образующими } -1,\, 5,\, 2 \text{ при } p \neq 2,\\ &\mathbb{Q}_2^{\times}/\mathbb{Q}_2^{\times 2} = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 && \text{при } p = 2. \end{aligned} \tag{7.71}$$

Наконец, -1 является квадратом при $p = 4k + 1$ и не является квадратом при $p = 4k + 3$.

Из результатов п. 7.6.5 читатель легко и непосредственно выведет необходимый результат. □

Указание. При исследовании того, представляет ли форма

$$x_0^2 + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \alpha\beta x_3^2$$

нуль над $\mathbb{Q}_p$ или нет, сто́ит использовать символ Гильберта $(\alpha,\, \beta)_p$ (см. [S2]). Он равен 1 тогда и только тогда когда соответствующая форма представляет нуль.

7.7.3. О связи между WBr (*k*) и Witt (*k*). Напомним (см. [VdW]), что определение группы $\mathrm{Witt}(k)$ очень похоже на определение группы $\mathrm{Br}(k)$. Действительно, рассмотрим абелеву полугруппу W классов изоморфизма невырожденных квадратичных форм над k. Пусть U — подполугруппа, порожденная формой (7.1). Оказывается, факторполугруппа W/U является в действительности группой, которая обозначается символом $\mathrm{Witt}(k)$.

Напомним хорошо известную конструкцию клиффордовых алгебр $\mathrm{Cliff}_Q(V)$, заданных квадратичной формой Q, и определим индуцированный гомоморфизм

$$\mathrm{Cliff}\colon \mathrm{Witt}(k) \longrightarrow \mathrm{WBr}(k). \tag{7.72}$$

По невырожденной квадратичной форме Q, полярная билинейная форма которой на k-пространстве V есть $B := B_Q$, т. е. B есть единственная симметрическая билинейная форма на V, которой соответствует квадратичная форма Q, определим $\mathrm{Cliff}_Q(V)$ как фактор $\mathbb{Z}$-градуированной тензорной алгебры $T(V)$ по модулю двустороннего идеала, порожденного элементами

$$v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 - B(v_1,\, v_2) \quad \text{при любых } v_1,\, v_2 \in V. \tag{7.73}$$

Поскольку образующие этого идеала однородны относительно четности, хотя и не однородны относительно степени, $\mathrm{Cliff}_Q(V)$ наследует $\mathbb{Z}/2$-градуировку.

7.7.4. Теорема. *Алгебра* $\mathrm{Cliff}_Q(V)$ *— центральная простая супералгебра над* k *для любой невырожденной квадратичной формы* Q.

Доказательство вытекает из следующих трех лемм (всюду ниже G — это $\mathbb{Z}/2$).) ☐

7.7.4а. Лемма. *Пусть* Q *и* P *— невырожденные квадратичные формы на* V *и* W *соответственно. Тогда отображение* χ, *заданное на образующих формулами*

$$v\otimes 1\overset{\chi}{\longmapsto}(v,\,0);\quad 1\otimes w\overset{\chi}{\longmapsto}(0,\,w) \text{ при любых } v\in V \text{ и } w\in W, \tag{7.74}$$

устанавливает изоморфизм $\mathrm{Cliff}_Q(V)\otimes_G \mathrm{Cliff}_P(W)\cong \mathrm{Cliff}_{Q\oplus P}(V\oplus W)$.

Доказательство. Во-первых, отображение χ корректно определено, поскольку

$$(v\otimes 1)\cdot(1\otimes w)+(1\otimes w)\cdot(v\otimes 1)=0 \tag{7.75}$$

по определению G-тензорного произведения. (Напомним, что из того факта, что $(V,\,0)\perp(0,\,W)$, следует, что $(v,\,0)\cdot(0,\,w)+(0,\,w)\cdot(v,\,0)=0$.) Кроме того, отображение χ сюръективно, поскольку любая образующая алгебры $\mathrm{Cliff}_{Q\oplus P}(V\oplus W)$ принадлежит образу отображения χ. Совпадение суперразмерностей рассматриваемых супералгебр завершает доказательство. ☐

7.7.4б. Лемма. *Пусть* K *— алгебраическое расширение поля* k, *и пусть* Q *— невырожденная квадратичная форма на* k*-пространстве* V, *а* $Q(K)$ *— соответствующая форма на* K*-пространстве* $V\otimes_k K$. *Тогда* $\mathrm{Cliff}_Q(V)\otimes_G K\cong \mathrm{Cliff}_{Q(K)}(V\otimes_k K)$.

Доказательство очевидно. ☐

7.7.4в. Лемма. *Имеет место изоморфизм* $\mathrm{Cliff}_q(k^2)\cong \mathrm{Mat}(1|1)$.

Доказательство. Пусть v_1, v_2 — базис в k^2. Полярная форма B имеет вид

$$B((x_1v_1+y_1v_2),\,(x_2v_1+y_2v_2))=x_1y_2+x_2y_1. \tag{7.76}$$

Отсюда вытекает явный изоморфизм:

$$1\mapsto\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad v_1\mapsto\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad v_2\mapsto\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad v_1v_2\mapsto\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}. \tag{7.77}$$

☐

Упражнение. Если $Q(x)=x^2$ на k, то $\mathrm{Cliff}_Q(k)=k(\sqrt{1})$.

Доказательство теоремы 7.7.4. Пусть сперва K — алгебраически замкнутое поле. Хорошо известно, что любая невырожденная форма Q является прямой суммой нескольких экземпляров форм q плюс, возможно, форма x^2 на K.

Поэтому из лемм из п. 7.7.4а и 7.7.4в следует, что $\mathrm{Cliff}_Q(V)$ есть G-тензорное произведение нескольких экземпляров алгебры $\mathrm{Mat}(1|1)$ (возможно, умноженное на $k(\sqrt{1})$), т. е. центральная простая супералгебра (см. п. 7.5.6, 7.5.5).

Из леммы из п. 7.7.4б следует теперь, что $\mathrm{Cliff}_Q(V)$ является формой (в смысле п. 7.6.6) центральной простой супералгебры $Q(n)$ над $\bar{k}$ при любом k. ☐

7.7.5. Мы видим, что отображение $Q\mapsto \mathrm{Cliff}(Q)$ корректно определяет гомоморфизм $\mathrm{Cliff}\colon \mathrm{Witt}(k)\longrightarrow \mathrm{WBr}(k)$, который и объясняет известную 8-периодичность вещественных алгебр Клиффорда.

Следствие. *Любая вещественная невырожденная квадратичная форма задается с точностью до изоморфизма числами* p, q *ее положительных и отрицательных квадратов, т. е. мы можем обозначать вещественные алгебры Клиффорда символом* $\mathrm{Cliff}(p,\,q)$. *В предыдущих обозначениях мы видим, что*

$$\mathrm{Cliff}(p+8,\,q)=\mathrm{Cliff}(p,\,q+8)=\mathrm{Cliff}(p,\,q)\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Mat}(8). \tag{7.78}$$

§ 7.8. Несколько вопросов редактора

7.8.1. Вопрос. Надо бы точно понять что в вышеприведенном тексте действительно зависит от квадратичных форм, а что — от билинейных. И перенести акцент на билинейные формы. Примером такого переноса служит недавний результат А. Лебедева (см. [BGLL] и ссылки), который в процессе поиска новых простых алгебр Ли, описал классы эквивалентности невырожденных билинейных форм над алгебраически замкнутыми полями характеристики 2. В частности, результат А. Лебедева, хотя и похож на известную классификацию квадратичных форм, не имеет с ней ничего общего: в характеристике 2 соответствие

$$\text{квадратичные формы}\longleftrightarrow\text{билинейные формы} \tag{7.79}$$

НЕ взаимно однозначно; обе стрелки в (7.79) не «на» и имеют ядра.

Обобщим конструкцию супералгебры $\mathrm{Cliff}_Q(W)$, точнее $\mathrm{Cliff}_{B_Q}(W)$, следующим образом. Пусть W — суперпространство с невырожденной антисимметрической билинейной формой B, а $\mathfrak{hei}(W)$ — супералгебра Ли (*супералгебра Гейзенберга*), пространство которой есть $W\oplus\Pi^{p(B)}(k)$ с единственным отличным от нуля соотношением вида

$$[v,\,w]=B(v,\,w)z, \tag{7.80}$$

где z — образующая одномерного центра $\Pi^{p(B)}(k)$. Пусть $\mathrm{Weyl}(W, B) = U(\mathfrak{hei}(W))$ — обертывающая алгебра супералгебры Ли $\mathfrak{hei}(W, B)$.

Если форма B четна, положим

$$\mathrm{Cliff}_{\hbar}(W, B) = \mathrm{Weyl}(W, B)/(z - \hbar 1) \quad \text{для любого ненулевого } \hbar \in k. \tag{7.81}$$

Как хорошо известно, $\mathrm{Cliff}_a(W, B) \cong \mathrm{Cliff}_b(W, B)$ при $ab \neq 0$[1]; так что мы можем предположить, что $\hbar = 1$, и писать попросту $\mathrm{Cliff}(W, B)$.

Если W — пространство, а не суперпространство (т. е. $W_{\bar{1}} = 0$), то алгебра Ли $\mathfrak{hei}(W, B)$ — это привычная (лиева) алгебра Гейзенберга и $\mathrm{Weyl}(W, B)$ — есть привычная (ассоциативная) алгебра Вейля.

Мы будем отличать *супер*алгебры Вейля от *супер*алгебр Клиффорда, хотя в случае $W_{\bar{1}} = 0$ то, что мы обозначили символом $\mathrm{Cliff}(W, B)$, обычно тоже называется алгеброй Вейля, и это вносит невообразимую путаницу.

Факторизация алгебры $\mathrm{Weyl}(W, B)$, которая проводит к алгебре $\mathrm{Cliff}(W, B)$, обычно мотивирована нуждами теории представлений супералгебры Ли $\mathfrak{hei}(W, B)$, когда мы интересуемся неприводимыми представлениями, на которых (одномерный) центр должен действовать как скалярный оператор. В физике этот скаляр отождествляется с (кратным) постоянной Планка $\hbar$, отсюда и наше обозначение.

Если же $p(B) = \bar{1}$, то аналога супералгебры $\mathrm{Cliff}(W, B)$, по крайней мере над k, не существует, а вот аналог супералгебры Вейля определен всегда.

Чтобы не перепутать случай четной формы B с нечетным случаем, обозначим аналоги супералгебр $\mathfrak{hei}(W, B)$ и $\mathrm{Weyl}(W, B)$ для нечетной формы B символами $\mathfrak{ab}(W, B)$ и $\mathrm{Sch}(W, B)$ соответственно, и назовем их *антискобочной супералгеброй* (это *лиева* супералгебра) и *супералгеброй Схоутена* (это *ассоциативная* супералгебра).

Функториальный подход предлагает определять аналог алгебры $\mathrm{Cliff}(W, B)$ для нечетной формы B как функтор, который «произвольной» (скажем, конечнопорожденной) суперкоммутативной супералгебре C сопоставляет еще одну супералгебру, а именно *супералгебру Бюттэн* (Buttin)

$$\mathrm{But}_C(W, B) = \mathrm{Sch}(W, B) \otimes C)/(z - \hbar 1) \quad \text{при любом } 0 \neq \hbar \in C_{\bar{1}}. \tag{7.82}$$

Ясно, что если форма B четна, то функториальный подход сводится к тензорному умножению на C и поэтому ничего нового не добавляет, поскольку симплектические и периплектические формы расщепимы.

Мы лишь немного добавили к конструкции группы Уолла—Брауэра из § 7.1–7.6, однако получили не так мало: эта группа является на самом деле *кольцом* с умножением индуцированным тензорным произведением суперпространств, которые порождают алгебры Cliff и But.

---

[1] Легко видеть, что это правда: если размерность пространства W четна, то обе алгебры реализуются дифференциальными операторами на алгебре Грассмана от $\frac{1}{2}\dim W$ образующих, т. е. изоморфны $\mathrm{Mat}(\Lambda(V))$, где мы представили W в виде $W = V \oplus V^*$. Если же $W = V \oplus V^* \oplus V_0$, где $\dim V_0 = 1$, то обе алгебры изоморфны алгебре $\mathrm{Q}(\Lambda(V))$.

Даже в рамках вышеприведенных определений (в которых, мне кажется, чего-то не хватает) мы получаем следующее расширение группы $\mathrm{WBr}(k)$, которая, как я надеюсь, может привести к интересной арифметике над супералгебрами.

Пусть e и Π суть элементы множества $\mathrm{WBr}(k)$, отвечающего алгебре $\mathrm{Weyl}(W, B)$ и $\mathrm{Sch}(W, B)$ соответственно. Тогда для любых $f, g \in \mathrm{WBr}(k)$ выполняются следующие соотношения:

$$e\Pi = \Pi, \quad f\Pi = \Pi, \quad \Pi^2 = 1, \quad ef = 1, \quad fg = e, \tag{7.83}$$

где 1 — единица группы $\mathrm{WBr}(k)$.

7.8.2. Вопрос. Как определить Морита-эквивалентность для бесконечномерных алгебр, например для разных версий алгебры $\mathfrak{gl}(\lambda)$, где $\lambda \in k$, (см. [GL, XS])?

Литература

[АлТЧ] Алгебраическая теория чисел / Под ред. Касселса Дж. и Фр■лиха А. М.: Мир, 1969.

[ВдВ] *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1976.

[Срр1] *Серр Ж.-П.* Когомологии Галуа. М.: Мир, 1968.

[Срр2] *Серр Ж.-П.* Курс арифметики. М.: Мир, 1972.

[BGLL] *Bouarroudj S.*, *Grozman P.*, *Lebedev A.*, *Leites D.* Divided power (co)homology. Presentations of simple finite dimensional modular Lie superalgebras with Cartan matrix // Homology, Homotopy, and Applications. 2010. V. 12, № 1. P. 237–278; `arXiv:0911.0243`

[Brow] *Brown K. S.* Cohomology of groups. Berlin e.a.: Springer, 1982.

[BW] *Bursztyn H.*, *Weinstein A.* Poisson geometry and Morita equivalence // Poisson geometry, deformation quantisation and group representations / Gutt S., Rawnsley J., Sternheimer D. (eds.) Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005. P. 1–78. (London Math. Soc. Lecture Note. Ser. 323.); `arXiv:math.SG/0402347`

[GL] *Grozman P.*, *Leites D.*, Lie superalgebras of supermatrices of complex size. Their generalizations and related integrable systems // Proc. Internatnl. Symp. Complex Analysis and related topics (Mexico, 1996) / E. Ramírez de Arellano, M. Shapiro, L. Tovar and N. Vasilevski (eds.) Birkhäuser Verlag, 1999. P. 73–105; `arXiv:math.RT/0202177`

[Lam] *Lam T. Y.* The algebraic theory of quadratic forms. Reading, MA: Addison-Westley, 1973.

[Lu] *Lyubashenko V.* Vectorsymmetries // [SoS], 15/1987-19; краткое изложение: Алгебры Хопфа и вектор-симметрии // Успехи матем. наук. 1986. Т. 41, № 5 (251). С. 185–186.

[QFS] Quantum fields and strings: a course for mathematicians. V. 1, 2 / Deligne P. et al (eds.) Princeton, NJ: Institute for Advanced Study (IAS), 1999. V. 1, 2.

[SoS] Seminar on supermanifolds 1977–1990 / Leites D. (ed.) // Reports of Dept. of Math. of Stockholm Univ. № 1–35. Stockholm University, 1986–90; № 36–37. MPIM-Bonn, 2002.

[Srr4] *Serre J.-P.* Applications algébriques de la cohomologie des groupes II: théorie des algèbres simples // Sem. H. Cartan, 1959/51, Exp. 6-7.

[Wall] *Wall C. T. C.* Graded Brauer Groups // J. Reine Angew. Math. 1963/64. V. 213. P. 187–199.

[XuS] *Xu Y.*, *Shum K.-P.* Morita equivalence for infinite matrix rings // Comm. Algebra. 1999. V. 27, № 4. P. 1751–1782.

Дополнения

§ Д.1. Описание автоморфизмов алгебры Грассмана

Пусть R — коммутативное кольцо с единицей. По определению *алгебра Грассмана* $\Lambda := \Lambda(n)$ с образующими $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, где, быть может, $n = \infty$, является свободной ассоциативной алгеброй с образующими ξ над R и соотношениями

$$\xi_i\xi_j + \xi_j\xi_i = 0 \quad \text{для всех } i,\ j, \tag{Д.1}$$

в частности,

$$\xi_i^2 = 0 \quad \text{для всех } i. \tag{Д.2}$$

Если умножение на 2 инъективно в R, то ясно, что уравнения (Д.1) и (Д.2) эквивалентны. Если же $\operatorname{char} R = 2$, то определяющие соотношения надо задавать формулой (Д.2), а формула (Д.1) следует из формулы (Д.2).

Замечание. Алгебры Грассмана обычно рассматривают над полем $\mathbb{K}$ (и пишут $\Lambda_{\mathbb{K}}$ для ясности). Мы рассмотрим суперкоммутативные супералгебры вида $\Lambda_{\mathbb{K}} \otimes R$, где R — коммутативная $\mathbb{K}$-алгебра, как алгебры Грассмана над R, благодаря легко устанавливаемому изоморфизму

$$\Lambda_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} R \simeq \Lambda_R. \tag{Д.3}$$

Многие свойства алгебр Грассмана над полями верны и для алгебр Грассмана над более широким классом коммутативных колец.

Например, *для любого кольца R, алгебра $\Lambda_R(n)$, рассматриваемая как R-модуль, является свободным 2^n-мерным R-модулем с базисом, состоящим из мономов*

$$1 \quad \text{и} \quad \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k}, \quad \text{где } 1 \leqslant k \leqslant n \text{ и } i_1 < \ldots < i_k, \tag{Д.4}$$

благодаря естественному (по $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$) изоморфизму, где

$$\Lambda_R(n) \simeq \Lambda(R\langle\xi_1, \ldots, \xi_n\rangle),$$

где $\Lambda(R\langle\xi\rangle)$ — внешняя алгебра свободного R-модуля $R\langle\xi\rangle$, порожденного всеми векторами ξ_i.

Полагая $p(\xi_i) = \bar{1}$ при всех i, мы превращаем Λ_R в суперкоммутативную супералгебру. Это суперструктура на Λ_R будет называться *стандартной*. Мы увидим, что вообще говоря, существуют другие суперструктуры на Λ_R, превращающие Λ_R в суперкоммутативную супералгебру. За парой исключений[1] все эти структуры *изоморфны стандартной*.

Автоморфизмы *супер*алгебры Λ_R описаны в [B3]. Здесь мы опишем автоморфизмы алгебры Λ_R с проигнорированной суперструктурой. Хотя Ф. А. Березин заявил в [B3], что он описал **все** автоморфизмы, он никогда не думал ни о каких автоморфизмах, кроме тех, которые сохраняют четность и был поражен моим (*Д.Л.*) примером «дополнительных автоморфизмов»: пусть $n < \infty$ четно и для фиксированных $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ рассмотрим автоморфизм

$$\xi_i \mapsto \xi_i + a_i\xi_1 \ldots \xi_n.$$

Я не смог, однако, описать **все** автоморфизмы и первым, по-видимому, кто получил правильный ответ, был Л. Макар-Лиманов в 1975 году (процесс эмиграции задержал публикацию ответа [M-L]); его результат чуть позже был переоткрыт А. Вайнтробом (частное сообщение). Однако самое первое опубликованное доказательство принадлежит Джоковичу [Dj]. (Оно, очевидно, проигнорировано широкой массой читающей публики, также, впрочем, как и его вклад в классификацию простых конечномерных супералгебр Ли, см. [**?**].)

Пусть $\mathbb{E}$ — внешняя алгебра векторного пространства V над полем $\mathbb{K}$ характеристики $\neq 2$. Она $\mathbb{Z}/2$-градуирована: $\mathbb{E} = \mathbb{E}_{\bar{0}} \oplus \mathbb{E}_{\bar{1}}$, где $\mathbb{E}_{\bar{0}} = \bigoplus\limits_{i \geqslant 0} \mathbb{E}^{2i}$, а $\mathbb{E}_{\bar{1}} = \bigoplus\limits_{i \geqslant 0} \mathbb{E}^{2i+1}$, а $\mathbb{E}^i$ есть i-я внешняя степень пространства V. Джокович показал, что алгебра Ли $\mathbb{D}$ дифференцирований **супер**алгебры $\mathbb{E}$ тоже $\mathbb{Z}_2$-градуирована: $\mathbb{D} = \mathbb{D}_{\bar{0}} \oplus \mathbb{D}_{\bar{1}}$, где $\mathbb{D}_a$ — подпространство в $\mathbb{D}$, состоящее из дифференцирований D, таких что $D(\mathbb{E}_b) \subset \mathbb{E}_{a+b}$, где $a,\ b \in \mathbb{Z}/2$.

Удивительно, что $\mathbb{D}_{\bar{1}}$ является идеалом внутренних дифференцирований супералгебры $\mathbb{E}$, за исключением случая $\dim V = \aleph_0$.

Джокович также описал группу A автоморфизмов алгебры $\mathbb{E}$, когда V — конечномерное пространство, и вывел, что A есть полупрямое произведение $A = N_1 \rtimes A_0$, где A_0 — подгруппа в A, состоящая из автоморфизмов σ, таких что $\sigma(\mathbb{E}_a) = \mathbb{E}_a$, где $a \in \mathbb{Z}/2$, а нормальный делитель N_1 есть группа внутренних автоморфизмов алгебры $\mathbb{E}$.

Ниже следует исправленное В. Молотковым доказательство из первого издания книги [**?**], при этом расширенное на чуть более широкий класс колец R, чем в [Dj].

Пусть I — идеал в Λ_R, порожденный элементами $\xi_1, \ldots \xi_n$.

---

[1] Чтобы их описать, заметим, что если рассмотреть Λ_R как коммутативную *алгебру* (что возможно в двух случаях: если $n = 1$ (при любой характеристике) или если $\operatorname{char} R = 2$), то на Λ_R существует суперструктура не изоморфная стандартной, а именно, тривиальная суперструктура, для которой $p(\xi_i) = \bar{0}$ при всех i.

Ясно, что *для любого k идеал I^k — свободный R-модуль, а мономы степени $\geqslant k$ из* (Д.4) *образуют базис пространства I^k.*

Д.1.1. Лемма. а) *Пусть C — ассоциативная R-алгебра с единицей. Пусть $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — набор элементов из C, такой что*

$$\eta_i\eta_j + \eta_j\eta_i = 0 \quad \textit{для всех } i,\ j \tag{Д.5}$$

и, в частности,

$$\eta_i^2 = 0 \quad \textit{для всех } i. \tag{Д.6}$$

Тогда существует в точности один морфизм R-алгебр $f_\eta\colon \Lambda_R \to C$, такой что $f_\eta(\xi_i) = \eta_i$ при всех $i \leqslant n$.

б) *Пусть $C = \Lambda_R$, а в R нет нильпотентов. Тогда $\eta_i \in I$ для каждого i, т. е. имеется единственное разложение*

$$\eta_i = \sum_j a_i^j \xi_j + \mu_i, \tag{Д.7}$$

где $a_i^j \in R$ и $\mu_i \in I^2$. Эндоморфизм $f_\eta\colon \Lambda_R \to \Lambda_R$ является автоморфизмом тогда и только тогда, когда матрица (a_i^j) обратима.

Доказательство. а) Если такой морфизм R-алгебр существует, то он однозначно определяется своими значениями на базисных элементах (Д.4). Из ассоциативности алгебры C очевидным образом следует, что

$$\begin{aligned} &f_\eta(1) = 1, \\ &f_\eta(\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k}) = \eta_{i_1} \ldots \eta_{i_k} \quad \text{для всех } 1 \leqslant k \leqslant n \text{ и } i_1 < \ldots < i_k. \end{aligned} \tag{Д.8}$$

Осталось показать, что R-линейное отображение, заданное формулой (Д.8), является на самом деле морфизмом R-алгебр. В силу R-линейности достаточно доказать, что

$$f_\eta((\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k})(\xi_{j_1} \ldots \xi_{j_m})) = f_\eta(\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k}) f_\eta(\xi_{j_1} \ldots \xi_{j_m}) \tag{Д.9}$$

для любых $i_1 < \ldots < i_k$ и $j_1 < \ldots < j_m$. Равенство (Д.9) эквивалентно, благодаря (Д.8), равенству

$$f_\eta(\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k} \xi_{j_1} \ldots \xi_{j_m}) = \eta_{i_1} \ldots \eta_{i_k} \eta_{j_1} \ldots \eta_{j_m}. \tag{Д.10}$$

Если у множеств $\{i_1, \ldots, i_k\}$ и $\{j_1, \ldots, j_m\}$ непустое пересечение, то очевидно, что обе части равенства (Д.10) обращаются в нуль. Поэтому предположим, что эти множества не пересекаются. Теперь применим «правила знаков» (Д.1) и (Д.5), чтобы переставить индексы, как в левой, так и в правой частях равенства (Д.10) в восходящем порядке, а потом применим (Д.8) к левой части.

б) Предположим, что $\eta_i = r + n$, где $r \in R$ и $n \in I$. Тогда из формулы (Д.6) следует, что $0 = \eta_i^2 = r^2 + n'$ для некоторого $n' \in I$. Разлагая над I,

получаем $r^2 = 0$, откуда следует, что $r = 0$, поскольку в R нет нильпотентов. Итак, мы доказали формулу (Д.7).

Заметим, что из формулы (Д.7) следует, что $f_\eta(I^k) \subset I^k$ для любых k. Отсюда, в свою очередь, следует, что f_η пропускается через Λ_R/I^k для любых k, т. е. существует в точности одно отображение $f_k\colon \Lambda_R/I^k \longrightarrow \Lambda_R/I^k$, делающее диаграмму

$$\begin{tikzcd} \Lambda_R \arrow[r, "f_\eta"] \arrow[d] & \Lambda_R \arrow[d] \\ \Lambda_R/I^k \arrow[r, "f_k"] & \Lambda_R/I^k \end{tikzcd}$$

коммутативной.

Пусть f_η — автоморфизм. Тогда ясно, что $f_\eta(I) = I$, откуда следует, что $f_\eta(I^k) = I^k$ при любых k. Другими словами, для каждого k эндоморфизм f_k является автоморфизмом. В частности, из обратимости эндоморфизма f_2 следует, что матрица $A = (a_i^j)$ обратима, поэтому это условие необходимо для обратимости отображения f_η.

Чтобы доказать, что оно достаточно, заметим, что *обратимость отображения f_η эквивалентна следующему условию*:

$$\text{набор } \eta_1, \ldots, \eta_n \text{ является множеством образующих алгебры } \Lambda_R. \tag{Д.11}$$

Действительно, из условия (Д.11) очевидно следует, что отображение f_η сюръективно. Из этого, в свою очередь, следует, что $\ker f_\eta = 0$, поскольку алгебра Λ_R конечномерна. Следовательно, отображение f_η биективно. А из биективности отображения f_η следует, что отображение f_η^{-1} — морфизм R-алгебр.

Чтобы доказать, что набор $\eta_1, \ldots, \eta_n$ является множеством образующих алгебры Λ_R, достаточно найти представление любого «канонического» образующего ξ_i в виде полинома от $\eta_1, \ldots, \eta_n$. Выразим (Д.7) в векторной форме:

$$\eta = A\xi + \mu. \tag{Д.12}$$

Пусть $B := A^{-1}$. Тогда, очевидно, равенство (Д.12) эквивалентно равенству

$$\xi = B(\eta - \mu). \tag{Д.13}$$

Для любого элемента $\lambda \in \Lambda_R$ и для любого набора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ элементов Λ_R обозначим через $\lambda(x)$ элемент алгебры Λ_R, полученный подстановкой x_i вместо ξ_i в разложении λ в ряд по ξ:

$$\lambda = r + \sum_{i_1 < \ldots < i_k} c^{i_1 \ldots i_k} \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k} \quad (r,\ c^{i_1 \ldots i_k} \in R).$$

Другими словами,

$$\lambda(x) := r + \sum_{i_1<\ldots<i_k} c^{i_1\ldots i_k} x_{i_1}\ldots x_{i_k}. \tag{Д.14}$$

Для любого $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где $\lambda_i \in R$, положим

$$\lambda(x) := (\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x)). \tag{Д.15}$$

Очевидно, что $\lambda = \lambda(\xi)$, так что формулу (Д.13) можно переписать в виде

$$\xi = B(\eta - \mu(\xi)). \tag{Д.16}$$

Рассмотрим формулу (Д.16) как уравнение на ξ. Мы решим это уравнение методом итераций, положив рекуррентно

$$\xi^{(0)} := 0, \quad \xi^{(1)} := B\eta, \quad \xi^{(k)} := B(\eta - \mu(\xi^{(k-1)})) \ \text{ для } k > 1. \tag{Д.17}$$

Ясно, что $\xi^{(k)}$ — многочлен от η при каждом k. Осталось доказать, что последовательность $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(k)}, \ldots$ «сходится» к ξ, т. е., существует число k, такое что $\xi^{(k)} = \xi^{(k+1)}$ и, более того, $\xi = \xi^{(k)}$.

Для любого $k \geqslant 1$ положим

$$\delta^{(k)} := \xi^{(k+1)} - \xi^{(k)} = B(\mu(\xi^{(k)}) - \mu(\xi^{(k-1)})). \tag{Д.18}$$

Докажем, что $\delta^{(k)} \in I^{k+1}$. Ясно, что это верно при $k = 1$, поскольку $\eta_i \in I$ и $\mu_i \in I^2$ при любом i. Предположим, что $\delta_i^{(k-1)} \in I^k$ при всех i. Докажем, что $\delta_i^{(k)} \in I^{k+1}$ при всех i. Мы представим (Д.18) в виде

$$\delta^{(k)} = B(\mu(\xi^{(k-1)} + \delta^{(k-1)}) - \mu(\xi^{(k-1)})). \tag{Д.19}$$

Теперь, поскольку $\xi_i^{(k-1)} \in I$, $\mu_i \in I^2$ и $\delta_i^{(k-1)} \in I^k$, то $\delta_i^{(k)} \in I^{k+1}$ в силу того, что в разложении выражения (Д.19) в ряд по η все члены степени $\leqslant k$ очевидным образом равны нулю, а сами элементы η_i принадлежат I.

Мы доказали, что последовательность элементов $\xi^{(k)}$ стабилизируется, поскольку $I^{n+1} = 0$ и, следовательно, $\xi^{(n+1)} = \xi^{(n)}$.

Пусть $\delta := \xi - \xi^{(n)}$. Осталось доказать, что $\delta = 0$. Мы видим, что

$$\delta = B(\mu(\xi) - \mu(\xi(n))) = B(\mu(\xi^{(n)} + \delta) - \mu(\xi^{(n)})), \tag{Д.20}$$

откуда следует, что $\delta_i \in I^2$ при каждом i. Применяя те же самые аргументы, что и при доказательстве того, что $\delta_i^{(k)} \in I^{k+1}$, мы видим, что если в правой части формулы (Д.20) все δ_i принадлежат I^k, то и в левой части формулы (Д.20) все δ_i принадлежат I^{k+1}. Следовательно $\delta = 0$. □

Прежде чем двигаться дальше, мы суммируем основные свойства отображения подстановки (Д.14) в следующем утверждении.

Д.1.2. Предложение. *Пусть* $\lambda, \lambda' \in \Lambda_R$, *а* η *и* η' *— наборы из* n *элементов алгебры* Λ_R. *Тогда*

а) $(\lambda + \lambda')(\eta) = \lambda(\eta) + \lambda'(\eta)$;

б) *если* η *удовлетворяет формулам* (Д.5) *и* (Д.6), *где эндоморфизм* f_η *определен в утверждении* а) *леммы* Д.1.1, *то*

$$\lambda(\eta) = f_\eta(\lambda), \tag{Д.21}$$

$$(\lambda\lambda')(\eta) = \lambda(\eta)\lambda'(\eta); \tag{Д.22}$$

в) *если, сверх того,* η' *удовлетворяет условиям* (Д.5) *и* (Д.6), *то*

$$f_\eta f_{\eta'}(\lambda) = \lambda(\eta')(\eta) = \lambda(\eta'(\eta)) = f_{\eta'(\eta)}(\lambda). \tag{Д.23}$$

Доказательство. а) очевидно.

б) Заметим, что эндоморфизм f_η существует благодаря утверждению а) леммы Д.1.1. Ясно также, что условие (Д.21) выполнено, если λ — элемент базиса (Д.4), в силу определений (Д.8) и (Д.14). Для произвольного λ это следует из утверждения а).

Очевидно, что условие (Д.22) эквивалентно тому, что

$$f_\eta(\lambda\lambda') = f_\eta(\lambda)f_\eta(\lambda'), \quad f_\eta(\lambda\lambda') = f_\eta(\lambda)f_\eta(\lambda'),$$

что, в свою очередь, верно, поскольку f_η является морфизмом R-алгебр.

в) Мы видим, что благодаря условию (Д.21),

$$f_\eta f_{\eta'}(\lambda) = f_\eta(f_{\eta'}(\lambda)) = f_\eta(\lambda(\eta')) = \lambda(\eta')(\eta).$$

С другой стороны, образом образующих ξ под действием $f_\eta f_{\eta'}$ является, очевидно, $\eta'(\eta)$: действительно, глядя на композицию $\xi \xmapsto{f_{\eta'}} \eta' \xmapsto{f_\eta} \eta'(\eta)$, мы видим, что $f_\eta f_{\eta'} = f_{\eta'(\eta)}$, откуда следует условие (Д.23). □

Начиная с этого места, мы предполагаем, что в кольце R *нет делителей нуля.* Для таких колец R мы скажем, что $\operatorname{char} R = 0$ (соответственно $\operatorname{char} R = p$ для некоторого простого числа p), если образ кольца $\mathbb{Z}$ в R относительно канонического отображения $\mathbb{Z} \to R$, $(z \mapsto z1)$ изоморфен $\mathbb{Z}$ (соответственно конечному полю $\mathbb{Z}/p$).

Автоморфизм f_η $(\xi \mapsto \eta)$ алгебры Λ_R назовем *элементарным*, если

$$\eta = \xi + \lambda, \ \text{ где } \lambda \text{ — набор из } n \text{ четных элементов идеала } I^2. \tag{Д.24}$$

Если $\operatorname{char} R = 2$, то алгебра Λ_R, очевидно, коммутативна. Более того, для любого $\lambda \in I$ имеем $\lambda^2 = 0$. Действительно, пусть

$$\lambda = \sum_i c^i b_i \tag{Д.25}$$

есть разложение элемента λ по базису (Д.4). Тогда

$$\lambda^2 = \sum_{i\neq j} 2c^i c^j b_i b_j + \sum_i (c^i)^2 {b_i}^2 = 0.$$

По лемме Д.1.1 отсюда следует, что формула (Д.24) задает элементарный автоморфизм для *любого* набора из n четных элементов алгебры Λ_R.

Если $\operatorname{char} R \neq 2$, то пусть $\mu \in \Lambda_{R\bar{1}}$ — любой ненулевой элемент. Ясно, что элементы $\eta_i = \xi_i(1+\mu(\xi))$ удовлетворяют условию (Д.5), а, следовательно, задают элементарный автоморфизм f_η по утверждению б) леммы Д.1.1.

Д.1.3. Теорема. 1) *Отображение* $\xi_i \mapsto \eta_i$ (при $i = 1, \ldots, n$) *продолжается до четного автоморфизма алгебры* Λ_R *тогда и только тогда, когда*

$$\eta_i = \sum_j a_i^j \xi_j + \sum_{j_1 j_2 j_3} a_i^{j_1 j_2 j_3} \xi_{j_1}\xi_{j_2}\xi_{j_3} + \ldots, \tag{Д.26}$$

где матрица (a_i^j) *обратима.*

2) *Отображение* $\xi_i \mapsto \theta_i$ *при* $i = 1, \ldots, n$ *продолжается до неоднородного изоморфизма алгебры* Λ_R *тогда и только тогда, когда*

$$\theta_i = \begin{cases} \eta_i(1+\mu(\xi)) \text{ для некоторого } \mu \in (I^2)_{\bar{1}}, & \text{если } \operatorname{char} R \neq 2 \\ \eta_i + \varphi_i(\xi) \text{ для некоторых четных } \varphi_i \in (I^2)_{\bar{0}}, & \text{если } \operatorname{char} R = 2, \end{cases} \tag{Д.27}$$

где η_i *описаны в пункте* 1.

Любой автоморфизм f_θ *можно однозначно представить как композицию*

$$f_\theta = f_\eta f_\zeta \tag{Д.28}$$

четного автоморфизма f_η *и элементарного автоморфизма* f_ζ, *где*

$$\zeta_i = \begin{cases} \xi_i(1+\mu) \text{ для некоторого } \mu \in (I^2)_{\bar{1}}, & \text{если } \operatorname{char} R \neq 2, \\ \xi_i + f_\eta^{-1}(\varphi_i) \text{ для некоторых четных } \varphi_i \in (I^2)_{\bar{0}}, & \text{если } \operatorname{char} R = 2. \end{cases}$$

3) *Если* $\operatorname{char} R \neq 2$, *то множество* N *всех элементарных автоморфизмов является нормальной абелевой подгруппой в группе всех автоморфизмов* [1].

---

[1] Если $\operatorname{char} R = 2$, то множество N не является даже группой, вообще-то говоря. Например, пусть $\eta_i = \xi_i + \xi_1\xi_2$ и $\eta_i' = \xi_i + \xi_3\xi_4$. Легко видеть, что

$$f_\eta f_{\eta'}(\xi_i) = \xi_i + \xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4 + \xi_1\xi_2(\xi_3+\xi_4),$$

т. е. композиция $f_\eta f_{\eta'}$ двух элементарных автоморфизмов алгебры $\Lambda_R(4)$ не является элементарным автоморфизмом.

Следствие. *Если* $\operatorname{char} R \neq 2$, *то подпространство* $\Lambda_{R\bar{0}}$ *не зависит от выбора системы образующих.*

А вот дополнение к $\Lambda_{R\bar{0}}$ — пространство $\Lambda_{R\bar{1}}$ — НЕ инвариантно (относительно автоморфизмов), что очевидно из определения (Д.24) элементарных автоморфизмов. Таким образом,

> **четные функции — вещь инвариантная, а нечетные зависят от выбора координат, т. е., образующих алгебры Λ_R. Говоря неформально, «бозон— он и в Африке бозон», а вот фермион ли данная частица, зависит от точки зрения (координат = образующих).**

Доказательство следствия. И $\Lambda_{R\bar{0}}$, и $\Lambda_{R\bar{1}}$, очевидно, инвариантны относительно четных автоморфизмов и любой автоморфизм является, благодаря условию (Д.27), композицией четного автоморфизма и элементарного. Поэтому нам осталось доказать инвариантность относительно элементарных автоморфизмов $\xi_i \mapsto \zeta_i = \xi_i(1+\mu)$. Поскольку $\mu^2 = 0$, получаем

$$\zeta_i\zeta_j = \xi_i(1+\mu)\xi_j(1+\mu) = \xi_i\xi_j, \tag{Д.29}$$

а мономы $\xi_i\xi_j$ очевидно порождают все пространство $\Lambda_{R\bar{0}}$ за исключением констант. □

Доказательство теоремы. 1) Элементы η_i очевидно удовлетворяют как условию (Д.5), так и (Д.6), а, стало быть, задают автоморфизм f_η тогда и только тогда, когда матрица $A = (a_i^j)$ обратима (по утверждению б) леммы Д.1.1).

2) Пусть теперь некоторые элементы θ_i удовлетворяют условиям (Д.5) и (Д.6) и порождают алгебру Λ_R, таким образом задавая автоморфизм f_θ. Пусть

$$\theta_i = \eta_i + \varphi_i, \quad \text{где } \eta_i \in \Lambda_{R\bar{1}} \text{ и } \varphi_i \in \Lambda_{R\bar{0}},$$

— разложение по однородным компонентам.

Мы доказали в п.1), что η задает автоморфизм f_η, такой что $f_\eta(\xi) = \eta$. Отсюда следует, что для любого i существует элемент $\lambda_i \in \Lambda_{R\bar{0}}$, такой что $\varphi_i = f_\eta(\lambda_i)$ (вспомним, что f_η сохраняет четность). Итак, $\theta_i = f_\eta(\xi_i + \lambda_i)$.

Теперь заметим, что элементы $\zeta_i := \xi_i + \lambda_i$, будучи прообразами элементов θ_i относительно автоморфизма f_η, являются антикоммутирующими образующими алгебры Λ_R, так что существует некий автоморфизм f_ζ, такой что $f_\zeta(\xi) = \zeta$. Автоморфизм f_ζ элементарен, так что мы представили произвольный автоморфизм f_θ алгебры Λ_R в виде композиции

$$f_\theta = f_\eta f_\zeta$$

элементарного автоморфизма и четного. Очевидно, что такое представление единственно.

Таким образом мы свели доказательство утверждения 2) теоремы к задаче описания всех элементарных автоморфизмов. Мы уже видели, что если $\operatorname{char} R = 2$, то на элементы λ_i нет никаких ограничений, кроме требования, чтобы они были четными.

Осталось рассмотреть элементарные автоморфизмы, когда $\operatorname{char} R \neq 2$. Пусть $\xi_i \mapsto \zeta_i = \xi_i + \lambda_i$ — произвольный элементарный автоморфизм. Поскольку при любых i, j имеем

$$0 = \zeta_i\zeta_j + \zeta_j\zeta_i = 2(\xi_i\lambda_j + \lambda_i\xi_j + \lambda_i\lambda_j), \tag{Д.30}$$

то, принимая во внимание, что умножение на 2 инъективно при $\operatorname{char} R \neq 2$, заключаем, что при $i = j$ имеет место равенство

$$2\xi_i\lambda_i = -\lambda_i^2. \tag{Д.31}$$

Поскольку левая и правая части равенства (Д.31) имеют разную четность, это возможно лишь, если обе они равны нулю. Следовательно,

$$\lambda_i = \xi_i\mu_i, \quad \text{где } \mu_i \in \Lambda_{R\bar{1}}. \tag{Д.32}$$

Из равенства (Д.30) следует, что

$$\xi_i\xi_j(\mu_j - \mu_i - \mu_i\mu_j) = 0, \tag{Д.33}$$

а, значит, в разложении элемента $\mu_i - \mu_j - \mu_i\mu_j$ по каноническому базису (Д.4) выживают только члены, пропорциональные ξ_i или ξ_j. Другими словами,

$$\mu_i - \mu_j = \lambda'_i\xi_i - \lambda'_j\xi_j \tag{Д.34}$$

для некоторых нечетных элементов λ'_i. В частности, элемент

$$\mu := \mu_i - \lambda'_i\xi_i = \mu_j - \lambda'_j\xi_j \tag{Д.35}$$

не зависит от i. Ясно, что $\lambda_i = \xi_i\mu$ при всех i.

3) Из условия (Д.29) следует, что элементарные автоморфизмы сохраняют не только подпространство $\Lambda_{R\bar{0}}$, но и каждый его элемент. Из этого, в свою очередь, следует, что элементарный автоморфизм $\xi \mapsto \zeta = \xi(1 + \mu)$ отправляет любой нечетный элемент λ в

$$f_\zeta(\lambda) = \lambda(\zeta) = \lambda(1 + \mu). \tag{Д.36}$$

Пусть $\xi \mapsto \zeta' = \xi(1 + \mu')$ другой элементарный автоморфизм. Имеем

$$f_\zeta f_{\zeta'}(\xi) = f_\zeta(\xi + \xi\mu') = f_\zeta(\xi) + f_\zeta(\xi\mu') = \xi + \xi\mu + \xi\mu' = \xi(1 + \mu + \mu')$$

в силу (Д.36) и (Д.29). Следовательно, элементарные автоморфизмы образуют абелеву группу[1)].

[1)] Если 2 обратима в R, то очевидно, что

$$\xi(1 + \mu) = \left(1 - \tfrac{1}{2}\mu\right)\xi\left(1 + \tfrac{1}{2}\mu\right),$$

Осталось доказать, что подгруппа N элементарных автоморфизмов нормальна. Благодаря разложению (Д.28), достаточно доказать, что для любого четного автоморфизма f_ξ автоморфизм $f_\xi^{-1}f_\zeta f_\xi$ элементарный. И правда,

$$f_\xi^{-1}f_\zeta f_\xi(\xi) = f_\xi^{-1}f_\zeta(\xi) = f_\xi^{-1}(\xi(1 + \mu)) = \xi(1 + f_\xi^{-1}(\mu)) = \xi(1 + \mu'),$$

где $\mu' := f_\xi^{-1}(\mu)$ четен, поскольку f_ξ — четный автоморфизм. Теорема доказана. ☐

Д.1.4. Автоморфизмы четности. Определим автоморфизмы четности Pty, положив

$$\mathrm{Pty}(f) = (-1)^{p(f)}f \quad \text{для любого однородного элемента } f \in \Lambda_R.$$

Если характеристика основного поля равна 2, мы определим Pty как нетождественный автоморфизм алгебры Λ_R, такой что

$$\mathrm{Pty}^2 = \mathrm{id} \quad \text{и } \mathrm{Pty}|_{\Lambda_{R\bar{0}}} = \mathrm{id}.$$

Не надо думать, что четность элемента суперлагебры — это что-то фиксированное раз и навсегда. Поскольку мы можем выбрать новые образующие $\eta_i = \xi_i(1 + \mu(\xi))$, где $\mu \in \Lambda_{R\bar{1}}$, то автоморфизмы четности Pty нумеруются элементами $\mu \in \Lambda_{R\bar{1}}$ и образуют таким образом **даже не векторное, а аффинное пространство**. Конечно, это аффинное пространство нужно рассматривать функториально: как линейное супермногообразие, которое представляет функтор $C \mapsto (C \otimes \Lambda_R)_{\bar{1}}$, и тогда мы сможем подобрать потерявшиеся в предыдущем рассуждении нечетные параметры, занумерованные элементами пространства $(C \otimes \Lambda_R)_{\bar{0}}$.

Д.1.5. Над-группа автоморфизмов алгебры Λ_R и аналог ее алгебры Ли. Заметим, что множество C-точек (где C — суперкоммутативная супералгебра) супергруппы автоморфизмов алгебры Λ_R составляет группу

$$\mathrm{Aut}_C(\Lambda_R \otimes C)$$

(где тензорное произведение берется над основным полем) C-линейных автоморфизмов не самой алгебры Λ_R, как в первых подпунктах этого параграфа, а алгебры $\Lambda_R \otimes C$. Произвольный сохраняющий четность автоморфизм имеет теперь вид

$$\eta_i = \sum_j a_i^j\xi_j + \sum_{j_1j_2j_3} a_i^{j_1j_2j_3}\xi_{j_1}\xi_{j_2}\xi_{j_3} + \ldots + a_i + \sum_{j_1j_2j_3} a_i^{j_1j_2j_3}\xi_{j_1}\xi_{j_2}\xi_{j_3} + \ldots, \tag{Д.37}$$

где $a_i^{j_1\ldots j_{2k+1}} \in \Lambda_{R\bar{1}}$ и a_i, $a_i^{j_1\ldots j_{2k}} \in \Lambda_{R\bar{1}}$ при всех k.

т. е., элементарные автоморфизмы являются внутренними и наоборот: все внутренние автоморфизмы элементарны (ср. с соответствующим результатом в [Dj]).

В соответствии с этим, произвольный C-линейный автоморфизм алгебры $\Lambda_R \otimes C$ имеет вид

$$\eta_i = \xi_i(1+\mu), \quad \text{где } \mu \in (\Lambda_R \otimes C)_{\bar 1}. \tag{Д.38}$$

Обозначим через $\mathcal{A}ut_{\bar 0}(\Lambda_R)$ супергруппу морфизмов алгебры Λ_R, чьи C-точки имеют вид (Д.37), а через $\mathcal{A}ut^{nh}(\Lambda_R)$ — виртуальную супергруппу всех неоднородных (inhomogeneous) автоморфизмов алгебры Λ_R, чьи C-точки имеют вид (Д.38). Итак, каждый автоморфизм является композицией автоморфизма T_a вида (Д.37) и автоморфизма T_μ вида (Д.38). Очевидно, что

$$(\mathrm{id},\, T_\mu) \circ (\mathrm{id},\, T_\nu) = (T_{L(1+\mu\nu)},\, T_{\mu+\nu}),$$

где

$$T_{L(1+\mu\nu)}(\xi_i) = \xi_i(1+\mu\nu).$$

Таким образом, группа $\mathcal{A}ut^{od}(\Lambda_R)$, порожденная на уровне C-точек элементами (id, T_μ), не является нормальной подсупергруппой в супергруппе $\mathcal{A}ut^{ih}(\Lambda_R)$, и представление супергруппы $\mathcal{A}ut^{ih}(\Lambda_R)$ как (полупрямого) произведения супергрупп $\mathcal{A}ut_{\bar 0}(\Lambda_R)$ и $\mathcal{A}ut^{od}(\Lambda_R)$ зависит от выбора автоморфизма четности Pty или, что то же самое, от выбора (исходной) системы переменных ξ.

Ситуация напоминает разные реализации элементов суперелгебры Ли (или C-точек группы Ли) суперматрицами разных форматов, где переход от одного формата к другому производится неоднородными преобразованиями (за редкими исключениями, когда эти преобразования чисто нечетные).

§ Д.2. Определения для полей произвольной характеристики

В этом параграфе k — произвольное коммутативное кольцо, а слово «пространство» означает k-модуль. Модифицируем определения и теоремы гл. 1, чтобы приспособить их к полям произвольной характеристики. Случай характеристики 2 особо интересен; например, результаты А. Лебедева, использованные в [BGLL], войдут, несомненно, в стандартные учебники по линейной алгебре.

Д.2.1. Суперкоммутативные супералгебры. Супералгебра C называется *суперкоммутативной*, если

а) $[a, b] = 0$ при любых $a, b \in C$ и

б) $a^2 = 0$ при любых $a \in C_{\bar 1}$.

Замечание. Если 2 обратима, то а) влечет б); а если $\mathrm{char}\, k = 2$, то б) — независимое условие.

Д.2.2. Принцип переноса. Пусть $I = \{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$ — множество многочленов из суперкоммутативной супералгебры $\mathbb{Z}[u, \xi]$, где $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, таких что Q_1 и Q_2 четны. Мы скажем, что *тождество I выполняется над суперкоммутативной супералгеброй C, если*

$$P_1(a, \delta)/Q_1(a, \delta) = P_2(a, \delta)/Q_2(a, \delta) \tag{Д.39}$$

при любой подстановке элементов u и ξ вместо a и δ соответственно при условии, что $Q_1(a, \delta)$ и $Q_2(a, \delta)$ обратимы в C, где $a_i \in C_{\bar 0}$ и $\delta_j \in C_{\bar 1}$.

Предложение (принцип переноса). *Если данное тождество I выполняется над любой суперкоммутативной супералгеброй C над полем k нулевой характеристики, то оно выполняется и над произвольной суперкоммутативной супералгеброй C над любым полем K любой характеристики.*

Очевидно, что поле K должно быть k-алгеброй: иначе I не определено над C.

Доказательство. Мы можем считать, что $\mathrm{cpr}(Q_1)$ и $\mathrm{cpr}(Q_2)$ — обратимые элементы из $\mathbb{Z}[u_1, \ldots, u_n]$: в противном случае $Q_1(a, \delta)$ и $Q_2(a, \delta)$ не могут быть обратимы при любой подстановке. Теперь осталось проверить лишь, что $P_2Q_1 = P_1Q_2$.

Вложим $\mathbb{Z}[u, \xi]$ в $C = \mathbb{Q}(u)[\xi]$. Очевидно, $\mathrm{cpr}(Q_1(u, \xi))$ и $\mathrm{cpr}(Q_2(u, \xi))$ обратимы, а, следовательно, благодаря пункту 1.6.5, обратимы $Q_1(u, \xi)$ и $Q_2(u, \xi)$. Поскольку тождество I выполняется над C, то

$$(P_1/Q_1)(u, \xi) = (P_2/Q_2)(u, \xi),$$

и поэтому $P_1Q_2 = P_2Q_1$. ☐

Примеры. 1) **Суперцентр** $Z(A)$ ассоциативной супералгебры A определяется формулой

$$Z(A) = \{a \in A \mid [a, b] = 0 \text{ для любых } b \in A \text{ и } a^2 = 0 \text{ при } a \in A_{\bar 1}\}. \tag{Д.40}$$

2) **Суперследы**. Пусть tr — это str или qtr. В дополнение к условию $\mathrm{tr}([X, Y]) = 0$, которое следует из принципа переноса, потребуем чтобы

$$\begin{aligned} \mathrm{str}\, X^2 &= 0 \quad \text{при всех } X \in \mathrm{Mat}(p|q;\, C)_{\bar 0},\\ \mathrm{qtr}\, X^2 &= 0 \quad \text{при всех } X \in Q(M;\, C)_{\bar 0}. \end{aligned} \tag{Д.41}$$

3) **Супердетерминанты**. Тождество $\mathrm{Ber}\, X = 1$ при всех $X \in \mathrm{GQ}(u;\, C)$ следует из принципа переноса.

Пусть $S \in \mathrm{Mat}(n;\, C)$ — матрица с нечетными элементами, а $r > 0$ — нечетное число. Положим,

$$S(i_1, \ldots, i_r) = S_{i_1 i_2} S_{i_2 i_3} \ldots S_{i_r i_1}. \tag{Д.42}$$

Ясно, что

$$\operatorname{str} S^r = \sum S(i_1, \ldots, i_r), \tag{Д.43}$$

где сумма берется по всем наборам индексов $1 \leqslant i_1, \ldots, i_r \leqslant n$.

Раз элементы S_{ij} нечетны, то $S(i_1, \ldots, i_r)$ не меняется при циклических перестановках индексов, а если циклическая перестановка переводит набор индексов $(i_1, \ldots, i_r)$ в себя, то $S(i_1, \ldots, i_r) = 0$. Положим

$$F_r(S) = \sum S(i_1, \ldots, i_r), \tag{Д.44}$$

где сумма берется по всем классам эквивалентности индексов с точностью до циклических перестановок. Таким образом,

$$rF_r = \operatorname{str} S^r.$$

Д.2.3. Ограниченные супералгебры Ли. Принцип переноса определяет супералгебры Ли над любыми суперкоммутативными супералгебрами k, если $\operatorname{char} k \neq 2, 3$ (в этих характеристиках нужно слегка изменить привычные определения). Однако, если характеристика проста, то у супералгебры Ли может быть больше структур, чем над полем характеристики 0. Перечислим некоторые из них.

Пусть A — алгебра, а $D \in \mathfrak{der} A$. Из правила Лейбница следует, что

$$D^n(ab) = \sum_l \binom{n}{l} D^l(a) D^{n-l}(b) \quad \text{для любых } a, b \in A. \tag{Д.45}$$

Таким образом, если $\operatorname{char} k = p$, то D^p — дифференцирование алгебры A.

Пусть теперь $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Если для каждого элемента $g \in \mathfrak{g}$ оператор $(\mathrm{ad}_g)^p$ является внутренним, т. е., $(\mathrm{ad}_g)^p = \mathrm{ad}_{g^{[p]}}$ для некоторого элемента $g^{[p]}$, то отображение (однозначно определенное на простых алгебрах Ли)

$$[p]\colon g \mapsto g^{[p]}. \tag{Д.46}$$

называется *p-структурой* на $\mathfrak{g}$, а алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с p-структурой называется *ограниченной* алгеброй Ли.

Переходя к супералгебрам, мы для любого нечетного $D \in \mathfrak{der} A$ и любых $a, b \in A$ имеем

$$D^{2n}(ab) = \sum \binom{n}{l} D^{2l}(a) D^{2n-2l}(b). \tag{Д.47}$$

Поэтому если $\operatorname{char} k = p$, то D^{2p} — дифференцирование. Это видно также из того, что $D^2 = \frac{1}{2}[D, D]$ — четное дифференцирование.

Поскольку в универсальной обертывающей алгебре любой супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ выполняется тождество

$$[X, X] = 2X^2 \quad \text{для любых } X \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}, \tag{Д.48}$$

то имеется отображение $\mathrm{sq}\colon S^2(\mathfrak{g}_{\bar{1}}) \to \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ — *квадрирование*, которое при $p \neq 2$ можно задать формулой

$$\mathrm{sq}(X) = \frac{1}{2}[X, X] \quad \text{для любых } X \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}. \tag{Д.49}$$

Замечание. Казалось бы, благодаря этому отображению любая *p-структура на* $\mathfrak{g}$ полностью определяется p-структурой на $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, и нет нужды задавать $2p$-структуру на нечетных элементах. Однако, это неверно, даже если $\mathfrak{g}$ проста, но в $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ есть центр. Случай $p = 2$ приносит еще больше неожиданностей; подробности см. в [L1].

Квадрирование нечетных элементов

$$x^2 = \frac{1}{2}[x, x] \quad \text{для любого } x \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}. \tag{Д.50}$$

задает скобку, поскольку

$$[x, y] = (x + y)^2 - x^2 - y^2 \quad \text{для любых } x, y \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}. \tag{Д.51}$$

В случае характеристики $p = 2$ *супералгебра Ли* — это такое суперпространство $\mathfrak{g}$, четная часть $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ которого является алгеброй Ли, а нечетная часть $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ является $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-модулем (двусторонним по симметрии) с дополнительной структурой: на $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ задано *квадрирование* (условно говоря, половина скобки) со значениями в $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$:

$$\begin{aligned} &x \mapsto x^2, \quad \text{так что } (ax)^2 = a^2x^2 \text{ для любых } x \in \mathfrak{g}_{\bar{1}} \text{ и } a \in \mathbb{K},\\ &\text{отображение } (x, y) \mapsto (x + y)^2 - x^2 - y^2 \text{ билинейно и}\\ &\mathfrak{g}_{\bar{0}}\text{-инвариантно:. } [y^2, x] = (\mathrm{ad}_y)^2(x) \text{ для всех } x \in \mathfrak{g}_{\bar{0}} \text{ и } y \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}. \end{aligned} \tag{Д.52}$$

Тогда скобка (т. е. умножение в супералгебре Ли $\mathfrak{g}$) двух нечетных элементов определяется формулой (Д.51).

Тождество Якоби для трех нечетных элементов заменяется следующим соотношением:

$$[x, x^2] = 0 \quad \text{для любого } x \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}. \tag{Д.53}$$

Если основное поле отлично от $\mathbb{Z}/2$, то определение на этом заканчивается. Если же основное поле — $\mathbb{Z}/2$, то следует добавить еще одно условие:

$$[y^2, x] = (\mathrm{ad}_y)^2(x) \quad \text{для любых } x \in \mathfrak{g} \text{ и } y \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}, \tag{Д.54}$$

которое делает условие (Д.53) излишним и заменяет и его, и последнюю строку в (Д.52).

Если $p = 3$, то возникает другой феномен. Дело в том, что тождество Якоби для трех нечетных элементов эквивалентно (если $p \neq 2, 3$) тождеству

$$3[X, [X, X]] = 0. \tag{Д.55}$$

Поэтому при $p = 3$ мы определяем супералгебры Ли, требуя выполнения не условия (Д.55), а условия

$$[X, [X, X]] = 0. \tag{Д.56}$$

Если $p = 2$, то возникает несколько неожиданных феноменов. Например, в присоединенном представлении **простой** супералгебры Ли могут быть нетривиальные подмодули (отличные от 0 и всей супералгебры). Написанного выше достаточно, чтобы понять почему такое возможно, причем лишь для супералгебр Ли и только в характеристике 2, а пример см. [**?**].

Алгебры Ли векторных полей. Выбрав $\mathbb{Z}$-базис в алгебре многочленов от m переменных $\mathbb{C}[x]$, состоящий из *разделенных степеней*

$$u_i^{(r_i)} := \frac{x_i^{r_i}}{r_i!}\ , \tag{Д.57}$$

получим семейство аналогов алгебры многочленов, обозначаемых (для обрезающего вектора $\underline{N} = (N_1, \ldots, N_m) \in (\mathbb{Z}_+)^m$)

$$\mathcal{O}(m;\ \underline{N}) := \mathbb{K}[u;\ \underline{N}] := \operatorname{Span}_{\mathbb{K}}(u^{(\underline{r})} \mid r_i < p^{N_i} \text{ для всех } i). \tag{Д.58}$$

Заметим, что из этих многочисленных алгебр разделенных степеней только одна порождается заявленными переменными — , а именно, та, для которой $N_i = 1$ для всех i. В противном случае в список образующих к u_i нужно добавить $u_i^{(p^{k_i})}$ для всех i и всех k_i, таких что $1 < k_i < N_i$. Поскольку любое дифференцирование алгебры определяется своими значениями на образующих, то, как мы видим, алгебра Ли $\mathfrak{der}(\mathcal{O}[m;\ \underline{N}])$ всех дифференцирований алгебры $\mathcal{O}[m;\ \underline{N}]$ имеет больше, чем m функциональных параметров (коэффициентов при аналогах частных производных), если $N_i \neq 1$ хотя бы для одного i. Определим *выделенные частные производные*, положив

$$\partial_i(u_j^{(k)}) = \delta_{ij} u_j^{(k-1)} \quad \text{для всех } k < p^{N_j}.$$

Алгебра Ли всех дифференцирований $\mathfrak{der}(\mathcal{O}[m;\ \underline{N}])$ оказывается менее интересной, чем ее подалгебра выделенных дифференцирований, обозначаемая $\mathfrak{vect}(m;\ \underline{N})$, общая векторная алгебра выделенных дифференцирований

$$\mathfrak{der}_{dist}\mathbb{K}[u;\ \underline{N}] = \operatorname{Span}_{\mathbb{K}}(u^{(\underline{r})}\partial_k \mid r_i < p^{N_i} \text{ при } i \leqslant m), \tag{0.59}$$

и называемая *общей векторной алгеброй*. Супералгебра Ли выделенных дифференцирований супералгебры $\mathcal{O}(m;\ N|n)$ определяется очевидным образом и обозначается $\mathfrak{vect}(m;\ \underline{N}|n)$.

Раз есть разделенные аналоги алгебры многочленов, а дифференциалы нечетных переменных четны, то естественно попытаться определить разделенные аналоги супералгебры внешних форм и надеяться на то, что имеются и соответствующие теории (ко)гомологий. Соответствующие определения, первые результаты, и интересные задачи см. в [BGLL].

§ 0.3. Существует ли цветная (анти)коммутативность или лиевость?

(В. Молотков по Е. Неклюдовой и М. Шейнерту)

0.3.1. Цветные алгебры. Пусть G — коммутативная (абелева) группа с операцией $+$ и единичным элементом 0. Пусть R — нетривиальное (т. е. $1 \neq 0$) коммутативное кольцо. *G-градуированной* (или *G-цветной*) *R-алгеброй* называется R-алгебра C вместе с семейством $\{C_i\}_{i\in G}$ подмодулей модуля C, таким что

$$C_i \cap C_j = \{0\}, \quad C_iC_j \subset C_{i+j}, \quad C \simeq \bigoplus_{i\in G} C_i \quad \text{для любых } i,\ j \in G.$$

Пусть C есть G-градуированная R-алгебра, а C' есть G'-градуированная R-алгебра. *Морфизм* из C в C' — это пара (φ, f), где $\varphi\colon G \to G'$ — морфизм групп, а $f\colon C \to C'$ — морфизм R-алгебр, такой что $f(C_i) \subset C_{\varphi(i)}$ при всех $i \in G$. Любой морфизм вида (φ, f) будет также называться φ-морфизмом.

Вышеприведенные определения задают «большу́ю» категорию $*$-$\mathbf{Alg}_R$ всех градуированных алгебр. Фиксируя абелеву группу G, мы определяем ее полную подкатегорию G-градуированных алгебр. Для последней категории более удобно рассматривать лишь Id-морфизмы, т. е., морфизмы вида (Id, f), которые, допуская вольность речи, мы будем отождествлять с морфизмами f.

Обозначим через G-$\mathbf{Alg}_R$ — категорию всех G-градуированных алгебр и Id-морфизмов.

Пусть $\varphi\colon G \to G'$ — морфизм абелевых групп. Определим *переградуирующий функтор* $\varphi_*\colon G\text{-}\mathbf{Alg}_R \longrightarrow G'\text{-}\mathbf{Alg}_R$ следующим образом. Для любой G-градуированной R-алгебры C положим $\varphi_*(C) = C$, и для любого элемента $i \in G'$ положим

$$(\varphi_*(C))_i := R\Big\langle \bigcup_{j\in\varphi^{-1}(i)} C_j \Big\rangle \simeq \bigoplus_{j\in\varphi^{-1}(i)} C_j,$$

где $R\langle S\rangle$ есть R-линейная оболочка множества S. Ясно, что морфизм G-градуированных R-алгебр $f\colon C \to C'$ можно рассматривать также как морфизм G'-градуированных R-алгебр $\varphi_* f := f\colon \varphi_*(C) \longrightarrow \varphi_*(C')$, так что отображение

$$C \longrightarrow \varphi_*(C), \qquad f \longmapsto \varphi_* f$$

действительно является функтором.

0.3.1а. Предложение. а) *Для любых гомоморфизмов* $\varphi\colon G \to G'$ *и* $\varphi'\colon G' \to G''$ *выполняется тождество* $(\varphi'\varphi)_* = \varphi'_*\varphi_*$. *Другими словами, отображение*

$$G \mapsto G\text{-}\mathbf{Alg}_R, \quad \varphi \mapsto \varphi_*$$

является функтором из категории абелевых групп в категорию G*-градуированных* R*-алгебр.*

б) *Для любой* G*-градуированной* R*-алгебры* C *и любого гомоморфизма* $\varphi\colon G \to G'$ *пара* (φ, Id) *является морфизмом в категории* $*\text{-}\mathbf{Alg}_R$.

в) *Пусть* $(\varphi, f)\colon C \to C'$ *— морфизм* G*-градуированной* R*-алгебры* C *в* G'*-градуированную* R*-алгебру* C'. *Пара* (Id, f) *задает морфизм* $\varphi_*(C) \to C'$ *в категории* $G'\text{-}\mathbf{Alg}_R$ *и диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "(\varphi{,}f)"] \arrow[dr, "(\varphi{,}\mathrm{Id})"'] & & C' \\
& \varphi_* C \arrow[ur, "(\mathrm{Id}{,}f)"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство очевидно. □

Пусть C — G-градуированная R-алгебра, а V — G-градуированный R-модуль. R-билинейное отображение

$$C \times V \longrightarrow V \quad ((c, v) \longmapsto cv),$$

такое что $C_iV_j \subset V_{i+j}$ при любых $i, j \in G$, будет называться (G*-градуированным*) *левым действием* алгебры C на V. *Морфизмом из* G*-градуированного левого действия* $C \times V \longrightarrow V$ *в* G'*-градуированное левое действие* $C' \times V' \to V'$ называется согласованная пара

$$\tilde{f} = (\varphi, f)\colon C \longrightarrow C', \quad g\colon V \longrightarrow V',$$

где согласованность означает, конечно, что

$$g(V_i) \subset V'_{\varphi(i)} \text{ при всех } i \in G, \text{ а } g(cv) = f(c)g(v) \text{ для любых } c \in C \text{ и } v \in V.$$

Обозначим категорию всех градуированных левых действий символом $\mathbf{LAct}_*$.

Полагая в этом определении $C' = C$ и $\tilde{f} = \mathrm{Id}_C$, мы задаем категорию $\mathbf{LAct}_C$ левых C-действий.

Мы оставляем читателю задачу определить *градуированные правые* действия и категорию $\mathbf{RAct}_*$ всех правых действий, а также категорию $\mathbf{RAct}_C$ правых C-действий для любой G-алгебры C.

Пусть $\varphi\colon G \to G'$ — морфизм абелевых групп. Ниже нам потребуется *функтор, переградуирующий модули*. Мы обозначим его

$$\varphi_*\colon \mathbf{LAct}_C \longrightarrow \mathbf{LAct}_{\varphi_* C},$$

а определение функтора φ_* почти дословно копирует соответствующее определение функтора φ_* для алгебр, и мы оставляем читателю задачу дать его точную формулировку.

Мы резервируем термин «левый C-модуль» (или «правый C-модуль») для специальных случаев G-градуированных R-алгебр — ассоциативных или лиевых, которые мы сейчас определим. В этих специальных случаях на левые (соответственно правые) действия приходится наложить дополнительные условия с тем, чтобы превратить их в правые (соответственно левые) C-модули.

Здесь хорошо то, что хотя понятия модулей различаются для разных многообразий градуированных алгебр, понятие морфизма остается одним и тем же. Оно совпадает с определением морфизма левых действий.

Замечание. Все определения и результаты этого параграфа остаются верными, если заменить градуирующую абелеву группу на градуирующий моноид, т. е. полугруппу с единицей, не обязательно коммутативную. Однако в дальнейшем мы ограничимся случаем абелевых градуирующих групп.

0.3.2. Цветные ассоциативные алгебры. Обозначим символом $*\text{-}\mathbf{AssAlg}_R$ (соответственно $G\text{-}\mathbf{AssAlg}_R$) полную подкатегорию категории $*\text{-}\mathbf{Alg}_R$ (соответственно $G\text{-}\mathbf{Alg}_R$), состоящую из градуированных (соответственно G-градуированных) ассоциативных R-алгебр. Для любого морфизма групп $\varphi\colon G \to G'$ функтор φ_*, очевидно, сохраняет ассоциативность, так что предложение 0.3.1а остается верным, если заменить в нем $*\text{-}\mathbf{Alg}_R$ на $*\text{-}\mathbf{AssAlg}_R$, а $G\text{-}\mathbf{Alg}_R$ на $G\text{-}\mathbf{AssAlg}_R$.

Пусть C есть G-градуированная ассоциативная R-алгебра. Отображение $C \times V \longrightarrow V$ (соответственно $V \times C \longrightarrow V$) называется левым (соответственно правым) C-действием, а V называется левым (соответственно правым) C-модулем, если для любых $c, c' \in C$ и $v \in V$ выполняется равенство

$$(cc')v = c(c'v) \quad (\text{соответственно } v(cc') = (vc)c').$$

Обозначим символом $\mathbf{LMod}_C$ (соответственно $\mathbf{RMod}_C$) полную подкатегорию категории $\mathbf{LAct}_C$ (соответственно $\mathbf{RAct}_C$), состоящую из всех левых (соответственно правых C-модулей.

Структура левого C-модуля $C \times V \longrightarrow V$ на V называется *согласованной* со структурой правого C-модуля $V \times C \longrightarrow V$ на V, если

$$(cv)c' = c(vc') \text{ при любых } c, c' \in C, \ v \in V.$$

G-градуированный R-модуль V, снабженный согласованной парой левой и правой модульных структур называется C-*бимодулем*. Если V' является C'-бимодулем, то $(\varphi, f)\colon V \to V'$ называется *морфизмом бимодулей*, если он является морфизмом как левых, так и правых модулей

$$f(cv) = \varphi(c)f(v) \quad \text{и} \quad f(vc) = f(v)\varphi(c) \quad \text{при всех } c \in C, \ \ v \in V.$$

Категория всех (би)модулей будет обозначаться символом $\mathbf{Mod}_*$, а ее подкатегорию, состоящую из всех C-(би)модулей и морфизмов типа (Id, f) мы обозначим символом $\mathbf{Mod}_C$.

0.3.3. Цветно-коммутативные алгебры. Пусть C — G-градуированная ассоциативная R-алгебра. Похоже, что наиболее естественный способ обобщить коммутативность — это потребовать выполнение следующего условия (см. (0.61)), где $\lambda\colon G \times G \longrightarrow R^\times$ — некоторая функция, такая что:

$$c_i c_j = \lambda(i, j) c_j c_i \ \ \text{для любых } c_i \in C_i, \ i \in G. \tag{0.60}$$

До открытия цветов у кварков (и еще лет 15 спустя) G-градуированные алгебры, удовлетворяющие условию (0.60), назывались **градуировано-коммутативными**, но в последнее время они стали известны под именем *цветно-коммутативных алгебр*.

Из ассоциативности умножения следует, что отображение λ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &(1)\ \lambda(i, j) = \lambda^{-1}(j, i), \ \ \text{в частности, } (\lambda(i, i))^2 = 1; \\ &(2)\ \lambda(i, 0) = \lambda(0, i) = 1; \\ &(3)\ \lambda(i, j_1)\lambda(i, j_2) = \lambda(i, j_1 + j_2) \text{ и } \lambda(i_1, j)\lambda(i_2, j) = \lambda(i_1 + i_2, j). \end{aligned} \tag{0.61}$$

Вообще-то, свойство (2) следует из свойства (3) (положите $j_1 = j_2 = 0$) и добавлено для удобства.

Отображение λ со свойствами (1)–(3) будет называться (вслед за [Sch1]) *коммутационным множителем* (на G).

Замечание. В аддитивных обозначениях (+ вместо · и 0 вместо 1) для группы $R^\times$ обратимых элементов из R свойство (1) означает, что λ антисимметрично, а свойство (3) означает, что отображение λ би-аддитивно (т. е. $\mathbb{Z}$-билинейно).

Мы будем часто использовать эти термины в «мультипликативном» контексте в том числе, хотя в таком контексте «бимультипликативный», похоже, более подходящий синоним слову «би-аддитивный».

Если группа G конечна, то из свойств (1)–(3) следует, что $\lambda^{|G|} = 1$, и для фиксированного элемента i_0 отображение $\lambda(i_0, j)\colon G \to R^\times$ является характером на G со значениями в корнях $|G|$-й степени из единицы в кольце R.

Обозначим символом G-λ-$\mathbf{CommAlg}_R$ полную подкатегорию категории G-градуированных ассоциативных R-алгебр, состоящую из всех алгебр, удовлетворяющих условию (0.60). Алгебры, принадлежащие этой категории, будут называться *G-градуированно λ-коммутативными*, или просто *λ-коммутативными*, а градуирующая группа G неявно определена самим отображением λ.

Пусть C — λ-коммутативная алгебра, а V — левый C-модуль. Легко проверить, что формула

$$v_i c_j := \lambda(i, j) c_j v_j \ \text{для любых } v_i \in V_i, \ \ c_j \in C_j$$

задает на V структуру правого C-модуля. Эта структура согласована с исходной структурой левого C-модуля.

Таким образом, для любой λ-коммутативной алгебры C понятия левого и правого модуля совпадают с понятием модуля:

$$\mathbf{LMod}_C \simeq \mathbf{RMod}_C \simeq \mathbf{Mod}_C.$$

Пусть $\varphi\colon G \to G'$ — гомоморфизм групп. Возникает естественный вопрос, как ведет себя категория G-λ-$\mathbf{CommAlg}_R$ по отношению к переградуирующему функтору φ_*:

Всегда ли существует отображение

$$\lambda'\colon G' \times G' \longrightarrow R^\times$$

такое, что G'-градуированная алгебра $\varphi_*(C)$ является λ'-коммутативной для любой λ-коммутативной алгебры C?

Очевидно, что ответ отрицательный. Например, любая суперкоммутативная супералгебра рассматриваемая как алгебра, очень редко является коммутативной.

Пусть $\lambda\colon G \times G \longrightarrow R^\times$ и $\lambda'\colon G' \times G' \longrightarrow R^\times$ — коммутационные множители. Мы скажем, что отображение λ' *φ-согласовано* с λ, если $\varphi_*(G\text{-}\lambda\text{-}\mathbf{CommAlg}_R) \subset G'\text{-}\lambda'\text{-}\mathbf{CommAlg}_R$.

Предложение. *Отображение λ' является φ-согласованным с λ тогда и только тогда, когда*

$$\lambda = \lambda' \circ (\varphi \times \varphi).$$

Доказательство. Очевидно, что это условие достаточно. Чтобы доказать, что оно также и необходимо, рассмотрим свободную ассоциативную алгебру C', порожденную семейством $\{X_i\}_{i \in G}$. Превратим C' в G-градуированную алгебру, положив $X_i \in C'_i$ при всех $i \in G$. Фактор C алгебры C' по модулю соотношений (0.60) — свободная λ-коммутативная алгебра. Теперь возьмем фактор алгебры C, убив все тройные произведения $X_i X_j X_k$. Осталось доказать, что все попарные произведения $X_i X_j$

выживают эту факторизацию и, более того, R-подмодуль, порожденный всеми произведениями X_iX_j свободен. Детали мы оставляем читателю. □

Следствие. *Для любого гомоморфизма* $\varphi\colon G\to G'$ *и любого коммутационного множителя* $\lambda'\colon G'\times G'\longrightarrow R^\times$ *отображение* λ' *является* φ*-согласованным с* $\varphi_*(\lambda'):=\lambda'\circ(\varphi\times\varphi)$.

Хотя переградуирующие функторы φ_* редко отображают λ-коммутативные алгебры в λ'-коммутативные, мы увидим чуть ниже, что вообще говоря, существует много отображений λ', таких что категории G-λ-$\mathbf{CommAlg}_R$ и G-λ'-$\mathbf{CommAlg}_R$ естественно эквивалентны.

Пусть $\lambda\colon G\times G\longrightarrow R^\times$ — коммутационный множитель, а C — λ-коммутативная алгебра. Определим на C новое умножение $*$, которое отличается от старого (которое никак не обозначается, просто сомножители стоят рядом) на обратимый множитель, зависящий от градуировки:

$$c_i*c_j=\gamma(i,\,j)c_ic_j, \tag{0.62}$$

где $\gamma\colon G\times G\longrightarrow R^\times$ — произвольная функция. Обозначим алгебру C с новым умножением символом C_{new}. Умножение в C_{new} удовлетворяет следующему новому коммутационному соотношению

$$c_i*c_j=\lambda_{new}(i,\,j)c_j*c_i,\quad\text{где }\lambda_{new}(i,\,j)=\lambda(i,\,j)\gamma(i,\,j)\gamma^{-1}(j,\,i). \tag{0.63}$$

Мы часто будем писать $\mathrm{I}_\gamma C$ вместо C_{new} и λ^γ вместо λ_{new}, чтобы подчеркнуть зависимость от γ.

Чтобы C_{new} была ассоциативной, следующее условие, очевидно, необходимо и достаточно:

$$\gamma(i,\,j+k)\gamma(j,\,k)=\gamma(i+j,\,k)\gamma(i,\,j). \tag{0.64}$$

Этому условию, очевидно, удовлетворяет любая би-аддитивная функция γ, а также любая би-аддитивная функция, умноженная на произвольную обратимую ненулевую константу.

Заметим, что вышеприведенная конструкция очевидно функториальна: любой морфизм $f\colon C\to C'$ λ-коммутативных алгебр является в то же время морфизмом $f\colon \mathrm{I}_\gamma C\longrightarrow \mathrm{I}_\gamma C'$. Более того, если γ удовлетворяет условию (0.64), то γ обеспечивает **естественную эквивалентность (и даже изоморфизм) категории G-λ-$\mathbf{CommAlg}_R$ λ-коммутативных ассоциативных G-цветных алгебр с категорией G-λ^γ-$\mathbf{CommAlg}_R$ λ^γ-коммутативных ассоциативных G-цветных алгебр:**

$$\mathrm{I}_\gamma\colon G\text{-}\lambda\text{-}\mathbf{CommAlg}_R\simeq G\text{-}\lambda^\gamma\text{-}\mathbf{CommAlg}_R.$$

Более того, легко проверить, что имея λ-коммутативную цветную ассоциативную алгебру C и C-модуль V, действие

$$c_i*v_j=\gamma(i,\,j)c_iv_j=\lambda^\gamma(i,\,j)v_j*c_i$$

превращает V в $\mathrm{I}_\gamma C$-модуль относительно нового умножения в C_{new}, если γ удовлетворяет условию ассоциативности (0.64). Мы обозначаем этот модуль символом $\mathrm{I}_\gamma V$. Морфизмы модулей тоже сохраняются. Итак, **соответствующие категории модулей естественно эквивалентны (и даже**

изоморфны). В частности, для любой λ-коммутативной алгебры C имеется изоморфизм $\mathbf{Mod}_C \simeq \mathbf{Mod}_{\mathrm{I}_\gamma C}$ категорий.

Всюду ниже γ предполагается би-аддитивной функцией.

Коммутационные множители $\lambda\colon G \times G \longrightarrow R^\times$ и $\lambda'\colon G \times G \longrightarrow R^\times$ назовем *эквивалентными*, и обозначим этот факт символом $\lambda \sim \lambda'$, если существует би-аддитивная функция $\gamma\colon G \times G \longrightarrow R^\times$, такая что $\lambda' = \lambda^\gamma$. Очевидно, что отношение $\sim$ является отношением эквивалентности и, как сказано выше, эквивалентность функций λ и λ' влечет изоморфизм категории λ-коммутативных алгебр с категорией λ'-коммутативных алгебр.

В следующем предложении собраны вместе некоторые легко проверяемые свойства отношения эквивалентности $\sim$ и соответствия $\lambda \mapsto \lambda^\gamma$, которые потребуются в доказательстве «суперизационной» теоремы 0.3.3б (теоремы Неклюдовой).

Предложение. а) *Пусть λ — коммутационный множитель на G, а функции γ, $\gamma'\colon G \times G \longrightarrow R^\times$ би-аддитивны. Тогда*

$$\lambda^{\gamma\gamma'} = (\lambda^\gamma)^{\gamma'} \quad \text{и} \quad \mathrm{I}_{\gamma\gamma'} = \mathrm{I}_\gamma \mathrm{I}_{\gamma'}. \tag{0.65}$$

б) *Пусть $\varphi\colon G \to G'$ — гомоморфизм групп, а $\lambda \sim \lambda'$ — коммутационные множители на G'. Пусть $\gamma\colon G' \times G' \longrightarrow R^\times$ — би-аддитивное отображение, такое что $\lambda' = \lambda^\gamma$. Тогда*

$$\varphi_*(\lambda) \sim \varphi_*(\lambda') \quad \text{и} \quad \varphi_*(\lambda') = (\varphi_*(\lambda)^{\varphi_*(\gamma)}, \tag{0.66}$$

а диаграмма

$$\begin{tikzcd}
G\text{-}\varphi_*\lambda\text{-}\mathbf{CommAlg}_R \arrow[r, "\mathrm{I}_{\varphi_*\gamma}"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & G\text{-}\varphi_*\lambda'\text{-}\mathbf{CommAlg}_R \arrow[d, "\varphi_*"'] \\
G'\text{-}\lambda\text{-}\mathbf{CommAlg}_R \arrow[r, "\mathrm{I}_\gamma"] & G'\text{-}\lambda'\text{-}\mathbf{CommAlg}_R
\end{tikzcd} \tag{0.67}$$

коммутативна.

0.3.3а. Лемма. *Пусть G — конечно-порожденная абелева группа. Тогда в G найдется базис над $\mathbb{Z}$, т. е. набор элементов $g_1, \ldots, g_n$, такой что они*

1) *порождают G как $\mathbb{Z}$-модуль;*

2) *если $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i g_i = 0$, где $a_i \in \mathbb{Z}$ при всех i, то $a_i g_i = 0$ при каждом i.*

Доказательство. Представим G в виде $\mathbb{Z}^r \bigoplus \bigoplus\limits_p G_p$, где G_p подгруппа элементов, чей аннулятор — степень простого числа p. Каждая группа G_p, также как и $\mathbb{Z}$, является локальным модулем, для которой требуемый базис очевидно существует. $\square$

Ясно, что значения би-аддитивной (т. е. $=\mathbb{Z}$-билинейной) функции f на G в базисе, чье существование установлено в лемме 0.3.3а, однозначно определяют функцию f.

0.3.3б. Теорема (Е. Неклюдова). *Пусть G — конечнопорожденная абелева группа. Пусть $\lambda\colon G \times G \longrightarrow R^\times$ — коммутационный множитель. Существует би-аддитивная функция $\gamma\colon G \times G \longrightarrow R^\times$ и перерадуировка $\varphi\colon G \to \mathbb{Z}/2$, такие что для любой G-градуированной λ-коммутативной алгебры C алгебра $\varphi_*(\mathrm{I}_\gamma C)$ является либо коммутативной алгеброй, либо суперкоммутативной супералгеброй.*

Другими словами, существует точный функтор

$$G\text{-}\lambda\text{-}\mathbf{CommAlg}_R \xrightarrow{\mathrm{I}_\gamma} G\text{-}\lambda^\gamma\text{-}\mathbf{CommAlg}_R \xrightarrow{\varphi_*} \mathbf{Scommsalgs}. \tag{0.68}$$

где **Scommsalgs** *— категория суперкоммутативных супералгебр.*

Говоря неформально, мы доказали следующее утверждение (*теорема Неклюдовой*):

> **Любая** *градуированно-коммутативная алгебра C может быть сведена* (*с помощью преобразований* (0.62) *и в подходящей перерадуировке* φ) *к алгебре C_{new}, которая либо коммутативная алгебра* (*если* $\operatorname{Im} \varphi_* = 0$), *либо суперкоммутативная супералгебра, если* ($\operatorname{Im} \varphi_* \neq 0$).

Доказательство. По лемме 0.3.3а существует базис $g_1, \ldots, g_n$ в G (напомним, что G конечно порождена). Положим

$$\gamma'(g_m, g_n) = \begin{cases} -\lambda(g_m, g_n) & \text{при } m < n, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lambda^{\gamma'}(g_m, g_n) &:= \lambda(g_m, g_n) + \gamma'(g_m, g_n) - \gamma'(g_n, g_m) = \\ &= \begin{cases} \lambda(g_m, g_m) & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

Всюду ниже мы заменили мультипликативные обозначения для композиции в $R^\times$ на аддитивные. Поскольку $2\lambda^{\gamma'} = 0$, мы можем считать, что $\lambda^{\gamma'}$ принимает значения в $\mathbb{Z}/2$. Положим

$$H = \operatorname{Ker} \lambda^{\gamma'} := \{h \in G \mid \lambda^{\gamma'}(h, g) = 0 \text{ для любых } g \in G\}.$$

Ясно, что H — группа, порожденная всеми элементами g_m базиса, такими что $\lambda^{\gamma'}(g_m, g_m) = 0$, а также всеми элементами $2g_k$ для оставшихся элементов базиса. Следовательно, группа G/H является на самом-то деле конечномерным векторным пространством над полем $\mathbb{Z}/2$.

Из того, что $\lambda^{\gamma'}$ — кососимметрическая функция, следует, что она пропускается через $G/H \times G/H$, т. е. существует (в точности одно) отображение $\lambda' \colon G/H \times G/H \longrightarrow R^{\times}$, такое что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[rr, "\lambda^{\gamma'}"] \arrow[dr, "\varphi' \times \varphi'"'] & & R^* \\
& G/H \times G/H \arrow[ur, "\lambda'"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна; здесь $\varphi' \colon G \longrightarrow G/H$ — каноническая проекция.

Поэтому $\varphi'_*(\mathrm{I}_{\gamma'}C)$ — G/H-градуированная λ'-коммутативная алгебра.

Пусть $\bar{G} = G/H$. Нам надо только рассмотреть случай, когда $\bar{G} \neq 0$. Обозначим через $i_1, \ldots, i_k$ базис группы $\bar{G}$ над $\mathbb{Z}$, состоящий из образов тех элементов g_m базиса группы G, которые выживают при факторизации по H. Тогда

$$\lambda'(i_m, i_n) = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Перейдем к новому базису

$$j_1 = i_1, \quad j_2 = i_1 + i_2, \quad \ldots, \quad j_k = i_{k-1} + i_k.$$

Мы получили, что

$$\lambda'(j_n, j_n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 1, \\ 0 & \text{при } n > 1. \end{cases}$$

Полагая снова

$$\tilde{\gamma}(j_m, j_n) = \begin{cases} -\lambda'(j_m, j_n) & \text{при } m < n, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

мы получаем в конце концов функцию

$$\tilde{\lambda}(i, j) := \lambda'^{\tilde{\gamma}}(i, j) = \lambda'(i, j) + \tilde{\gamma}(i, j) - \tilde{\gamma}(j, i),$$

такую что группа $\bar{H} = \operatorname{Ker} \tilde{\lambda}$ порождена элементами $j_2 \ldots, j_k$, а стало быть, $\bar{G}/\bar{H} = \mathbb{Z}/2$. Итак, мы видим, что градуирующая группа сводится к $\widetilde{G} = \mathbb{Z}/2$ и стандартной градуирующей функции (четности) $\tilde{\lambda} \colon \widetilde{G} \times \widetilde{G} \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ на $C_{new} := \varphi''_*(\mathrm{I}_{\tilde{\gamma}}\varphi'_*(\mathrm{I}_{\gamma'}C))$, где $\varphi'' \colon \bar{G} \to \mathbb{Z}/2$ — каноническая проекция.

Теперь мы видим, что

$$\varphi''_* \circ \mathrm{I}_{\tilde{\gamma}} \circ \varphi'_* \circ \mathrm{I}_{\gamma'} = \varphi''_* \circ \varphi'_* \circ \mathrm{I}_{\varphi'^*\tilde{\gamma}} \circ \mathrm{I}_{\gamma'} = (\varphi''\varphi')_* \circ \mathrm{I}_{(\varphi'^*\tilde{\gamma})\gamma'},$$

где первое равенство следует из (0.67), а второе — из (0.65).

Полагая $\varphi = \varphi''\varphi'$ и $\gamma = (\varphi'^*\tilde{\gamma})\gamma'$, мы окончательно получаем, что $C_{new} = (\varphi_* \circ \mathrm{I}_{\gamma})C$.

Возвращаясь обратно от G к группе корней из единицы в $R^{\times}$, мы получаем стандартную $\mathbb{Z}/2$-градуировку на C_{new}. □

Замечания. 1) Формулировка и доказательства этой теоремы воспроизводят с небольшими изменениями и уточнениями теорему, доказанную Е. Неклюдовой (примерно в 1976 году) и процитированную в [?]. В ее первоначальной формулировке группа G предполагалась конечной, но доказательства без изменений проходят и для конечно-порожденных групп.

2) Такая же конструкция очевидно приводит (для конечно-порожденных групп G) к *стирающему функтору из категории модулей над G-градуированными ассоциативными λ-коммутативными алгебрами в категорию супермодулей над суперкоммутативными ассоциативными супералгебрами.*

3) Возникает естественный вопрос: верно ли, что функторы I_{γ} и φ_* в формуле (0.68) единственные?

Прежде всего, функция γ не единственная, а стало быть, и функтор I_{γ} не единственный. Если заменить γ на $\gamma\delta$, где $\delta \colon G \times G \longrightarrow R^{\times}$ — симметричное билинейное отображение, то ясно, что $\lambda' := \lambda^{\gamma} = \lambda^{\gamma\delta}$.

Можно доказать изоморфизм функторов

$$\begin{gathered}
\mathrm{I}_{\gamma} \colon G\text{-}\lambda\text{-}\mathbf{CommAlg}_R \longrightarrow G\text{-}\lambda'\text{-}\mathbf{CommAlg}_R, \\
\mathrm{I}_{\gamma\delta} \colon G\text{-}\lambda\text{-}\mathbf{CommAlg}_R \longrightarrow G\text{-}\lambda'\text{-}\mathbf{CommAlg}_R.
\end{gathered}$$

Но что можно сказать о единственности отображения λ' и функтора φ_*?

Глядя на доказательства теоремы Неклюдовой, можно увидеть, что подгруппа $\bar{H}$ группы $\bar{G} = (\mathbb{Z}/2)^k$ состоит из всех элементов группы $\bar{G}$, у которых число ненулевых компонент в первоначальном базисе $i_1, \ldots, i_k$ четно, т. е. не зависит от выбора нового базиса $j_1, \ldots, j_k$.

Отсюда следует, что коммутационный множитель $\lambda' = \lambda^{\gamma}$, а также и гомоморфизм $\varphi \colon G \to \mathbb{Z}/2$ не зависят от выборов, участвующих в доказательстве теоремы Неклюдовой 0.3.3б.

Более того, Шейнерт доказал в [Sch1], что λ' и φ единственным образом определяются следующим условием

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{i \in G \mid \lambda(i, i) = 1\}, \quad \lambda' = \varphi_*(\lambda_0), \tag{0.69}$$

где $\lambda_0 \colon \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ — стандартный (т. е. единственный нетривиальный) коммутационный множитель на $\mathbb{Z}/2$.

Строго говоря, в [Sch1] соответствующий факт был доказан в контексте цветных *лиевых* алгебр. Но в следующем подпункте мы увидим, что многие результаты о цветных алгебрах Ли можно автоматически перевести в контекст цветных коммутативных алгебр и наоборот.

4) Нетрудно показать, что казалось бы, более общее определение обобщенной коммутативности, а именно требование, чтобы

$$\mu(i, j)a_i a_j - \mu(j, i)a_j a_i = 0 \ \text{ для функции } \mu \colon G \times G \longrightarrow R$$

эквивалентно выше приведенному после замены $\lambda(i,\,j)=\dfrac{\mu(j,\,i)}{\mu(i,\,j)}$, если выполняется следующее естественное предположение:

$$\mu(i,\,j) \text{ и } \mu(j,\,i) \text{ не обращаются в нуль одновременно для всех } i,\,j. \qquad (0.70)$$

Вопрос (Е. Неклюдова). Следующее обобщение коммутативности приходит на ум: фиксируем $n\geqslant 2$ и потребуем, чтобы для любых $i_{\sigma(1)},\,\ldots\, i_{\sigma(n)}\in G$ выполнялось соотношение

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mu(i_{\sigma(1)},\,\ldots,\,i_{\sigma(n)})a_{i_{\sigma(1)}}\cdot\ldots\cdot a_{i_{\sigma(n)}}=0,$$

где по крайней мере один из коэффициентов не обращается в ноль. Исследуйте, куда это определение (или его модификация) могут привести.

0.3.4. Цветные алгебры Ли. Аналогом теоремы Неклюдовой о цветно-коммутативных алгебрах является следующий результат о цветных алгебрах Ли, принадлежащий Шейнерту [Sch1].

Пусть снова $\lambda\colon G\times G\longrightarrow R^\times$ — коммутационный множитель, т. е., функция, удовлетворяющая условиям (0.61). G-градуированная R-алгебра L с умножением, которое мы обозначим $[\cdot\,,\cdot]$, называется λ-*алгеброй Ли*, если для любых $x_i\in L_i$, $x_j\in L_j$ и $x_k\in L_k$ она удовлетворяет следующим двум условиям:

$$[x_i,\,x_j]=-\lambda(i,\,j)[x_j,\,x_i]; \qquad (0.71)$$

$$\lambda(i,\,j)[x_i,\,[x_j,\,x_k]]+\lambda(j,\,k)[x_j,\,[x_k,\,x_i]]+\lambda(k,\,i)[x_k,\,[x_i,\,x_j]]=0. \qquad (0.72)$$

Обозначим символом G-λ-$\mathbf{LieAlg}_R$ полную подкатегорию категории G-$\mathbf{Alg}_R$, состоящую из всех λ-лиевых алгебр.

Пусть L есть лиева алгебра, а $L\times V\overset{\bullet}{\longrightarrow}B$ — левое L-действие на V. Пространство V называется *левым L-модулем*, если для любых $g_i\in L_i$, $g_j\in L_j$ и $v\in V$ выполняется следующее соотношение:

$$[g_i,\,g_j]\cdot v=g_i\cdot(g_j\cdot v)-\lambda(i,\,j)g_j\cdot(g_i\cdot v).$$

Правые L-модули определяются аналогично. Заметим, что так же, как и в случае λ-коммутативных алгебр, для любого левого L-модуля V существует согласованная правая структура L-модуля, заданная формулой

$$v_i\cdot g_j:=\lambda(i,\,j)g_j\cdot v_i \text{ для любых } v_i\in V_i,\quad g_j\in L_j.$$

Итак, мы можем определить модули над λ-лиевыми алгебрами тем же способом, что и в случае λ-коммутативных алгебр. Категория левых (соответственно правых) L-модулей будет обозначаться символом $\mathbf{LMod}_L$ (соответственно $\mathbf{RMod}_L$)

Пусть $\lambda\colon G\times G\longrightarrow R^\times$ — коммутационный множитель, а L — λ-лиева алгебра. Так же, как и в случае λ-коммутативных алгебр, определим на L новое умножение $[\cdot\,,\cdot]_*$, которое отличается от старого $[\cdot\,,\cdot]$ обратимым коэффициентом, зависящим от градуировки:

$$[c_i,\,c_j]_*=\gamma(i,\,j)[c_i,\,c_j],$$

где $\gamma\colon G\times G\longrightarrow R^\times$ — произвольная (пока) функция. Обозначим алгебру L с новым умножением символом L_{new}. Умножение в L_{new} удовлетворяет следующему коммутационному соотношению:

$$[c_i,\,c_j]_*=\lambda_{new}(i,\,j)[c_j,\,c_i]_*,\quad \text{где } \lambda_{new}(i,\,j)=\lambda(i,\,j)\gamma(i,\,j)\gamma^{-1}(j,\,i). \qquad (0.73)$$

Всюду ниже мы будем часто писать, также как и в случае λ-коммутативных алгебр, $\mathrm{I}_\gamma L$ вместо L_{new} и λ^γ вместо λ_{new}, чтобы подчеркнуть зависимость от γ.

М. Шейнерт доказал в [Sch1], что необходимым и достаточным условием на отображение γ для того, чтобы C_{new} стала λ_{new}-лиевой алгеброй, является, как это ни удивительно, условие (0.64).

Это позволяет перевести результаты теории λ-коммутативных алгебр на язык λ-лиевых алгебр и наоборот, если в доказательствах используются лишь свойства коммутационных множителей, как в теореме 0.3.3б.

В частности, для данной би-аддитивной функции $\gamma\colon G\times G\longrightarrow R^\times$ существует функтор $\mathrm{I}_\gamma\colon G$-$\lambda$-$\mathbf{LieAlg}_R\longrightarrow G$-$\lambda^\gamma$-$\mathbf{LieAlg}_R$, действующий тождественно на λ-лиевых алгебрах и морфизмах, который устанавливает изоморфизм соответствующих категорий.

Таким образом, мы немедленно получаем следующий аналог теоремы 0.3.3б.

Теорема (Шейнерт). *Пусть G — конечно-порожденная абелева группа, а $\lambda\colon G\times G\longrightarrow R^\times$ — коммутационный множитель. Существуют би-аддитивная функция $\gamma\colon G\times G\longrightarrow R^\times$ и переградуировка $\varphi\colon G\to\mathbb{Z}/2$, такая что для любой G-градуированной λ-лиевой алгебры L алгебра $\varphi_*(\mathrm{I}_\gamma L)$ является либо супералгеброй Ли, либо алгеброй Ли.*

Другими словами, существует точный функтор

$$G\text{-}\lambda\text{-}\mathbf{LieAlg}_R\xrightarrow{\mathrm{I}_\gamma}G\text{-}\lambda^\gamma\text{-}\mathbf{LieAlg}_R\xrightarrow{\varphi_*}\textbf{супералгебры Ли}. \qquad (0.74)$$

Говоря неформально, мы доказали следующее утверждение (*теорема Шейнерта*):

С помощью преобразования (0.74) *и подходящей переградуировки φ*
любую *цветную алгебру Ли L можно перевести в алгебру L_{new},*
которая является либо алгеброй Ли (*если* $\operatorname{Im}\varphi=0$),
либо супералгеброй Ли (*если* $\operatorname{Im}\varphi\neq 0$).

Эта теорема немного слабее, чем теорема 2 в [Sch1]. Добавив к ней характеризацию отображения λ^γ и переградуирующего отображения φ

(см. (0.69)) мы получаем адекватный перевод теоремы 2 из [Sch1] на наш язык).

В статье [Sch1] содержатся, кроме пересказанной выше теоремы Шейнерта, обобщения теорем Пуанкаре—Биркгофа—Витта и Адо на цветные алгебры Ли. Очевидно, что благодаря теореме Шейнерта **доказывать** эти теоремы для цветных алгебр Ли нет необходимости: достаточно рассмотреть два случая — алгебр и супер алгебр.

Вопрос. Есть ли такие теоремы, которые осмысленно доказывать для цветных (анти)коммутативных алгебр, или можно всегда ограничиться просто (анти)коммутативны алгебрами или просто супералгебрами?

§ 0.4. Геометрическая интерпретация модуля $\mathrm{Vol}\,(M)$

Ниже в обозначениях $\mathrm{Vol}_C(M)$ и т. п. мы опускаем индекс C.

Пусть C — суперкоммутативная супералгебра, а M — свободный C-модуль суперранга $r|s$. Если $s=0$, то C-модуль $E^r(M)$ — свободный C-модуль ранга ε^r, и естественное действие ρ группы $\mathrm{GL}(M)$ на $E^r(M)$ определено формулой

$$\rho(X)\,\mathrm{vol}_M = \det X\cdot \mathrm{vol}_M\,. \tag{0.75}$$

Другими словами, $E^r(M)$ совпадает с $\mathrm{Vol}(M)$.

Дадим аналогичную интерпретацию при $s\neq 0$.

Всюду ниже мы пишем просто $S(M)$ вместо $S^\bullet(M)$ и $E(M)$ вместо $E^\bullet(M)$.

Пусть $g\in \mathrm{GL}(M)$. Обозначим через $S(g)$ автоморфизм C-алгебры $S(M)$ однозначно определенный требованием, чтобы он действовал на $S^1(M)$ как g. Обозначим символом $S^*(g)$ автоморфизм C-алгебры $S(M^*)$, однозначно определенный требованием, чтобы он действовал на M^* как $(g^*)^{-1}$. Мы аналогично определяем $\mathrm{GL}(M)$-действия на $E(M)$, $E(M^*)$ и на тензорных произведениях этих алгебр. Пусть ρ — любое такое действие.

Пусть $X\in\mathfrak{gl}(M)$. Обозначим через $\rho_L(X)$ дифференциал действия ρ группы $\mathrm{GL}(M)$ на C-алгебрах $S(M)$, $S(M^*)$, $E(M)$, $E(M^*)$, однозначно определенный требованием, чтобы на M, M^*, $\Pi(M)$ и $\Pi(M^*)$ он действовал как X, $-X^*$, $\Pi(X)$ и $-\Pi(X^*)$, соответственно. Теперь ясно, что ρ_L есть соответствующее представление ρ супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(M)$.

Пусть $N=E(M)\otimes S(M^*)$. В M выберем базис $\mathfrak{M}=\{m_1,\,\ldots,\,m_{r+s}\}$ стандартного формата, а в M^* — левый двойственный базис $\mathfrak{M}^*=\{m_1^*,\,\ldots,\,m_{r+s}^*\}$; положим

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_{\mathfrak{M}}&=\iota(m_1)\ldots\iota(m_r)i(m_{r+1})\ldots i(m_{r+s}),\\ \mathrm{vol}_{\mathfrak{M}^*}&=\iota(m_1^*)\ldots\iota(m_r^*)i(m_{r+1}^*)\ldots i(m_{r+s}^*),\end{aligned}\tag{0.76}$$

где $i\colon M\longrightarrow S^1(M)$ и $\iota\colon \Pi(M)\longrightarrow E^1(M)$ суть канонические изоморфизмы. Положим

$$V=\rho_L(U(\mathfrak{gl}(M)))\,\mathrm{vol}_{\mathfrak{M}}\,. \tag{0.77}$$

Этот модуль V является по построению минимальным ρ_L-инвариантным подмодулем в N, содержащим $\mathrm{vol}_{\mathfrak{M}}$. Положим

$$V^-=\{v\in V\mid \langle \mathrm{vol}_{\mathfrak{M}^*},\,v\rangle=0\}.$$

Теорема. а) *Подпространства V и V^- инвариантны относительно ρ_L и ρ. Они не зависят от выбора базиса $\mathfrak{M}$.*

б) *V/V^- — свободный модуль с одной образующей*

$$\mathrm{vol}_M:=\mathrm{vol}_{\mathfrak{M}}\pmod{V^-}, \tag{0.78}$$

а $\mathrm{GL}(M)$-и $\mathfrak{gl}(M)$-действия на V/V^- — такие же, как на $\mathrm{Vol}(M)$:

$$\rho(g)\,\mathrm{vol}_M=(\mathrm{Ber}\,g)\,\mathrm{vol}_M,\qquad \rho_L(X)\,\mathrm{vol}_M=\mathrm{str}\,X\cdot\mathrm{vol}_M\,. \tag{0.79}$$

0.4.1. Когомологическая интерпретация модуля $\mathrm{Vol}\,(M)$. В [?], см. также [?], показано, что последовательность модулей, двойственных к членам комплекса де Рама, не точна в одном члене. А именно, пусть $\mathrm{sdim}\,M=p|q$. Тогда последовательность

$$\ldots\xrightarrow{d^*}\Sigma_{-p-1}(M)\xrightarrow{d^*}\Sigma_{-p}(M)\xrightarrow{d^*}\Sigma_{-p+1}(M)\xrightarrow{d^*}\ldots$$
$$\ldots\xrightarrow{d^*}\Sigma_0(M)=\mathrm{Vol}(M)\longrightarrow 0 \tag{0.80}$$

точна во всех членах, кроме $\Sigma_{-p}(M)$, и гомологии дифференциала d^* натянуты (над основным полем) на

$$\hat\theta_1\ldots\hat\theta_q\frac{\partial}{\partial\hat x_1}\ldots\frac{\partial}{\partial\hat x_p}\,\mathrm{vol}(x,\,\theta), \tag{0.81}$$

где $x_1,\,\ldots,\,x_p$ — четные, а $\theta_1,\,\ldots,\,\theta_q$ — нечетные элементы базиса модуля M.

Делинь сформулировал это кратко и по-научному: *пусть M — свободный C-модуль супер-ранга $p|q$ над суперкоммутативной супералгеброй C. Тогда*

$$\mathrm{Ext}^i_{S^\bullet_C(M)}(C,\,S^\bullet_C(M))\simeq\begin{cases}0, & \text{если } i\neq p,\\ \mathrm{Vol}(\Pi(M)), & \text{если } i=p.\end{cases} \tag{0.82}$$

§ 0.5. Супералгебры Клиффорда—Вейля и спинорные супергруппы

В этом параграфе мы воспроизведем результаты Серова [6] с «идеологически нечетными» добавками. Основное поле — $\mathbb{R}$, а C — конечно-порожденная суперкоммутативная супералгебра.

0.5.1. Суперлгебры Клиффорда—Вейля. Пусть V — свободный C-модуль суперранга $2n|m$. Согласно п. 1.7.8, каждую антисимметрическую невырожденную четную билинейную форму B на V можно представить в некотором базисе суперматрицей

$$B = \begin{pmatrix} J_{2n} & 0 \\ 0 & S^r_m \end{pmatrix}. \tag{0.83}$$

Определим *супералгебру Клиффорда—Вейля* $\mathrm{CW}_B(V)$ или просто $\mathrm{CW}(V)$ как фактор тензорной супералгебры $T(V)$ по двустороннему идеалу I, порожденному элементами

$$x \otimes y = (-1)^{p(x)p(y)} y \otimes x - B(x, y) \quad \text{для любых } x,\, y \in V. \tag{0.84}$$

В частности, если V — модуль над полем, то $\mathrm{CW}(V_{\bar 0})$ — это обычная *алгебра Вейля*, а $\mathrm{CW}(V_{\bar 1})$ — обычная *алгебра Клиффорда*, однако, рассматриваемая как супералгебра.

Естественными образующими алгебры $\mathrm{CW}(V)$ являются элементы канонического базиса пространства V, т. е., те элементы базиса, в которых матрица формы B принимает канонический вид. Очевидно, что $\mathrm{CW}(V)$ — не суперкоммутативная супералгебра, однако $\mathrm{CW}(V)/C \cdot 1$ является таковой.

Теорема. *Центр супералгебры Клиффорда—Вейля описывается следующим образом*:

$$Z(\overline{\mathrm{CW}(V)}) = Z(\mathrm{CW}(V)) = \begin{cases} C_{\bar 0}, & \text{если } m \text{ четно},\\ \mathrm{Span}_{C_{\bar 0}}(1,\, w_1 \cdot \ldots \cdot w_m), & \text{если } m \text{ нечетно}, \end{cases} \tag{0.85}$$

где элементы $w_1, \ldots, w_m$ *составляют базис пространства* $V_{\bar 1}$, *а* $\overline{\mathrm{CW}(V)}$ — *пополнение алгебры* $\mathrm{CW}(V)$ *относительно* (V)*-адической фильтрации.*

Доказательство. Пусть $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ — базис пространства $V_{\bar 0}$, такой что

$$B(p_i, q_j) = \delta_{ij}; \quad B(p_i, p_j) = B(q_i, q_j) = 0.$$

Мы выразим каждый элемент алгебры CW в виде ряда

$$f = \sum_{a_i, b_i \in \mathbb{Z}_+,\ \alpha_j \in \mathbb{Z}_2} f_{a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_n \alpha_1 \ldots \alpha_m} \prod p_i^{a_i} \prod q_i^{b_i} \prod w^{\alpha_j}, \tag{0.86}$$

где $f_{a,b,\alpha} \in C$. Ясно, что

$$[p_i, q_i] = 1, \quad [p_i, q_i^2] = 2q_i \quad \text{для всех } i. \tag{0.87}$$

По индукции мы доказываем, что для любого $f \in Z(\overline{\mathrm{CW}(V)})$ имеет место следующее:

$$[p_i, f] = \sum f_{a, b_1, \ldots, b_i - 1, \ldots, \alpha} b_i q_1^{b_1} \ldots q_i^{b_i - 1} \ldots q_n^{b_n} w^{\alpha}. \tag{0.88}$$

Поэтому $b_i = 0$ для каждого i, и, по соображениям симметрии, $a_i = 0$ при каждом i. Если $m = 0$, то все доказано, а в противном случае $f \in Z(\overline{\mathrm{CW}(V_1)})$, а для этого случая ответ известен (см. например, [3])). ☐

0.5.2. Инволюция в CW(*V*). Линейное отображение $\sigma\colon T(V) \longrightarrow T(V)$ определим, положив

$$\sigma(x \otimes y) = -(-1)^{p(x)p(y)} y \otimes x \quad \text{для любых } x,\, y \in V. \tag{0.89}$$

Ясно, что $\sigma(I) \subset I$, где I — идеал, определяющий $\mathrm{CW}(V)$. Обозначим индуцированную инволюцию на $\mathrm{CW}(V)$ таким же символом σ.

Пусть $\mathrm{CW}_{\bar 0}(V)$ — подсупералгебра в $\mathrm{CW}(V)$ элементов четной степени относительно стандартной градуировки (а именно, $\deg v = 1$ для любого $v \in V$). Очевидно, что σ индуцирует инволютивный антиавтоморфизм супералгебры $\mathrm{CW}_{\bar 0}(V)$. Символом $\mathrm{CW}(V)^\times$ обозначим группу обратимых элементов из $\mathrm{CW}(V)$. Группа

$$\mathrm{Spin}\, V = \{w \in \mathrm{CW}_{\bar 0}(V) \cap \mathrm{CW}(V)^\times \mid wVw^{-1} = V \text{ и } \sigma(w)w = 1\} \tag{0.90}$$

называется *спинорной группой* пространства V.

0.5.3. Трансвекции и симметрии. Очевидно, что элемент

$$\exp(cx^2) = 1 + cx^2 + \frac{cx^2}{2!} + \ldots \quad \text{для любых } x \in V \text{ и } c \in C_{\bar 0} \tag{0.91}$$

обратим в $\mathrm{CW}_{\bar 0}(V)$, а $(\exp(cx^2))^{-1} = \exp(-cx^2)$. Определим оператор $\mathrm{Ad}_a\colon V \to V$, положив

$$\mathrm{Ad}_a(x) = axa^{-1} \quad \text{для любого } a \in \mathrm{CW}(V)^\times. \tag{0.92}$$

Утверждение. *Если* $a \in \mathrm{Spin}(V)$, *то* Ad_a — *линейный оператор, сохраняющий форму* B.

Симлектической трансвекцией в направлении $a \in V_{\bar 0}$ называется отображение $t_{a,c}\colon V \to V$, заданное формулой

$$t_{a,c}(x) = x + 2cB(a, x)a \quad \text{для любого параметра } c \in C_{\bar 0}. \tag{0.93}$$

Лемма. $t_{a,c} = \mathrm{Ad}_{\exp(ca^2)}$.

Доказательство. Воспользуемся следующим тождеством из книги [5]:

$$\exp(x) \cdot z \cdot \exp(-x) = (\exp(\mathrm{Ad}_x))(z) = z + [x, z] + \frac{1}{2!}[x, [x, z]] + \ldots \tag{0.94}$$

Мы получаем

$$\mathrm{Ad}_{\exp(ca^2)}(y) = \exp(\mathrm{Ad}_{ca^2})(y). \tag{0.95}$$

Поскольку $p(a) = \bar{0}$, то

$$B(a, y)a = aya - ya^2 = a(ay - B(a, y)) - ya^2 = a^2y - ya^2 - aB(a, y), \tag{0.96}$$

и поэтому

$$[a^2, y] = 2B(a, y)a. \tag{0.97}$$

Раз

$$ca^2[ca^2, y] - [ca^2, y]ca^2 = 0, \tag{0.98}$$

то мы окончательно получаем

$$\mathrm{Ad}_{\exp(ca^2)}(y) = y + cB(a, y)a = t_{c,a}(y). \tag{0.99}$$

□

Утверждение. $t_{a,c} \circ t_{a,b} = t_{a,c+b}$.

Для любого элемента $v \in V_{\bar{1}}$, такого что $B(v, v) \in C^{\times}$, определим *симметрию в* v, положив

$$s_v(x) = (-1)^{p(x)} \mathrm{Ad}_v(x). \tag{0.100}$$

Утверждение. *Отображение* s_v *является линейной изометрией пространства* V, *и* $s_v^2 = \mathrm{id}$. *Пусть* s_v *и* s_w *определены. Элементы* vw *и* wv *принадлежат группе* $\mathrm{Spin}\, V$ *тогда и только тогда, когда*

$$B(v, v) = B(w, w) = -2 \tag{0.101}$$

и при этом

$$s_v \cdot s_w = \mathrm{Ad}_v \mathrm{Ad}_w = \mathrm{Ad}_{vw}\,. \tag{0.102}$$

0.5.4. Связь между $\mathrm{Spin}\, V$ и группой изометрий пространства (V, B). Пусть $s_i := s_{v_i}$ и $B(v_i, v_i) = -2$. Пусть $t_k := t_{u_k,c_k}$ и

$$\mathrm{Iso}(V) = \left\{ \prod t_k \prod_{1 \leqslant j \leqslant 2r} s_j \right\}. \tag{0.103}$$

Тогда очевидно, $\mathrm{Iso}(V)$ является группой, а Ad отображает $\mathrm{Spin}(V)$ на $\mathrm{Iso}(V)$ и $\ker \mathrm{Ad} = \{-1, 1\}$.

Обозначим символом $\mathrm{OSp}(V, B)$ или $\mathrm{OSp}(V)$ или $\mathrm{OSp}(2n|m;\ C)$ группу линейных операторов в $(V \otimes C)_{\bar{0}}$, сохраняющих B.

Теорема. $\mathrm{OSp}(V) = \mathrm{Iso}(V)$.

Доказательство следует тем же путем, что и в [4]: индукцией по $\mathrm{rk}\, V$. □

Итак, точна последовательность

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(V) \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{OSp}(V) \longrightarrow 1.$$

0.5.5. Алгебра Схоутена. «Идеологически нечетным» аналогом супералгебры Клиффорда—Вейля является *супералгебра Схоутена*, определенная следующим образом: пусть V — свободный C-модуль суперранга $n|n$, а B — **нечетная** антисимметричная невырожденная билинейная форма на V. Определим *супералгебру Схоутена* $\mathrm{Sch}_B(V)$ или просто $\mathrm{Sch}(V)$ как фактор алгебры $T(V) \otimes_C C[\tau]$, где $p(\tau) = \bar{1}$ и $\tau^2 = 0$, по двустороннему идеалу I, порожденного элементами

$$x \otimes y = (-1)^{p(x)p(y)} y \otimes x - B(x, y)\tau \quad \text{для любых } x,\ y \in V. \tag{0.104}$$

0.5.5а. Задача. 1) Описать аналог спинорной группы для невырожденных нечетных билинейных форм B.

2) Описать спинорные супергруппы, группы C-точек которых описаны в этом параграфе. Описать также спинорные супергруппы для невырожденных нечетных билинейных форм B.

Литература

[AS] Agrachev, A.; Sachkov, Yu. *Control theory from the geometric viewpoint*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 87. Control Theory and Optimization, II. Springer-Verlag, Berlin, 2004. xiv+412 pp

[AM] Atiyah M., Macdonald I. *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969, ix+128 pp.

[AW] Atiyah M., Borel A., Chaitin G. J., Friedan D., Glimm J., Gray J., Hirsch M., Mac Lane S., Mandelbrot B., Ruelle D., Schwarz A., Uhlenbeck K., Thom R., Witten E., Zeeman C., Responses to: A. Jaffe and F. Quinn, *Theoretical mathematics: toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 29 (1993), no. 1, 1–13; Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 30 (1994), no. 2, 178–207.

[BJ1] Baez J., Anyons and Braids,
http://math.ucr.edu/home/baez/braids/node2.html

[BGV] Berlin N., Getzler E., Vergne M., *Heat kernels and Dirac operators*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 298. Springer-Verlag, Berlin, 1992, viii+369 pp.

[B1] Berezin F. *The method of second quantization*. Second edition. Edited and with a preface by M. K. Polivanov. “Nauka”, Moscow, 1986. 320 pp. (Russian)

[B2] Расширенный перевод: Berezin F., *Introduction to superanalysis*. Edited and with a foreword by A. A. Kirillov. With an appendix by V. I. Ogievetsky. Translated from the Russian by J. Niederle and R. Kotecký. Translation edited by D. Leites. Mathematical Physics and Applied Mathematics, 9. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. xii+424 pp.

В этой посмертной книге есть несколько глубоких идей, до сих пор не понятых и не оцененных, но она не для первого чтения. О Березине и дальнейшем развитии некоторых из его идей, см. [DMSV].

[BL0] Berezin F. A., Leites D. A., *Supermanifolds*. Sov. Math. Doklady, v. 16, 1975, 1218-1222.

[BS] Расширенный перевод: Berezin, F. A.; Shubin, M. A. *The Schrödinger equation*. Translated from the 1983 Russian edition by Yu. Rajabov, D. A. Leites and N. A. Sakharova and revised by Shubin. With contributions by G. L. Litvinov and Leites. Mathematics and its Applications (Soviet Series), 66. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991. xviii+555 pp.

[BoMa] Borisov A. B., Mamaev I. S., (eds.) *Nonholonomic dynamical systems*, Inst. Computer Studies, Moscow–Izhevsk, 2002, 327 pp (in Russian)

[BG] Boyer Ch. P., Gitler S., *The theory of G^∞-supermanifolds*. Trans. Amer. Math. Soc. 285 (1984), no. 1, 241–267.

[BHKV] Brink L., Hansson T. H., Konstein S., Vasiliev M. A., *The Calogero model-anyonic representation, fermionic extension and supersymmetry*. Nuclear Phys. B 401 (1993), no. 3, 591–612

[Car] Cartier P., *A mad day's work: from Grothendieck to Connes and Kontsevich*. The evolution of concepts of space and symmetry, Inst. Hautes Études Sci., 1998, Translated from the French by Roger Cooke. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 38 (2001), no. 4, 389-408

[ChSt] Chinn W. G., Steenrod N. E. *First concepts of topology. The geometry of mappings of segments, curves, circles, and disks*. New Mathematical Library, Vol. 18 Random House, New York; The L. W. Singer Co., Syracuse, N.Y., 1966, viii+160 pp.

[Co] Connes A., *Noncommutative geometry*. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994. xiv+661 pp.

[Dav] Davis H., *Superforce*, Touchstone Books, 1985

[Del] Deligne P., Etingof P., Freed D., Jeffrey L., Kazhdan D., Morgan J., Morrison D., Witten E. (eds.) *Quantum fields and strings: a course for mathematicians*. Vol. 1, 2. Material from the Special Year on Quantum Field Theory held at the Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, 1996–1997. American Mathematical Society, Providence, RI; Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ, 1999. Vol. 1: xxii+723 pp.; Vol. 2: pp. i-xxiv and 727–1501.

[DdSH] Dias da Silva, J. A.; Hamidoune, Y. O. Cyclic spaces for Grassmann derivatives and additive theory. Bull. London Math. Soc. 26 (1994), no. 2, 140–146.

[DMSV] Dobrushin R. L., Minlos R. A., Shubin M. A., Vershik A. M. (eds.). *Contemporary mathematical physics*. F. A. Berezin memorial volume. American Mathematical Society Translations, Series 2, 175. Advances in the Mathematical Sciences, 31. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. x+236 pp.

id., *Topics in statistical and theoretical physics*. F. A. Berezin memorial volume. American Mathematical Society Translations, Series 2, 177. Advances in the Mathematical Sciences, 32. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. x+223 pp.

[DBS] Duplij S., Bagger J., Siegel W. (eds.) *Concise Encyclopedia of Supersymmetry and Noncommutative Structures in Mathematics and Physics*, Kluwer, Dordreht, 2003

[E] Enos M. (ed.) *Dynamics and control of mechanical systems: The falling cat and related problems* (Fields institute communications n. 1) AMS, 1993

[Ef] Efetov K., *Supersymmetry in disorder and chaos*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. xiv+441 pp.;

Efetov, K. B. *Supersymmetry and theory of disordered metals*. Adv. in Phys. 32 (1983), no. 1, 53–127

[GIOS] Galperin A. S., Ivanov E. A., Ogievetsky V. I., Sokatchev E. S., *Harmonic superspace*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. xiv+306 pp. [MR1865518 (2003d:81280)]

[GM] Gelfand S., Manin Yu., *Methods of homologic algebra*. v.1, Nauka, Moscow, 1988 (in Russian; English translation: Springer-Verlag, Berlin, 1996. xviii+372 pp.)

[Gen] Gendenshtein, L. E.; Krive, I. V. *Supersymmetry in quantum mechanics*. Soviet Phys. Uspekhi 28 (1985), no. 8, 645-666 (1986); translated from Uspekhi Fiz. Nauk 146 (1985), no. 4, 553-590 (Russian)

[Gin] Gindikin S. *Tales on physicists and mathematicians*, Translated from the Russian and with a note by Alan Shuchat. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1988. xii+157 pp.; 3rd expanded ed. MCCME, IUM, Moscow, 2001, 443 pp. (in Russian)

[GPS] Gomis J., Paris J., Samuel S., *Antibracket, Antifields and Gauge-Theory Quantization*. Phys. Rept. 259 (1995) 1–191

[GL1] Grozman P., Leites D., From supergravity to ballbearings. In: Wess J., Ivanov E. (eds.) *Procedings of the Internatnl seminar in the memory of V. Ogievetsky*, Dubna 1997, Springer Lect. Notes in Physics, v. 524, 1999, 58–67.

[GSW] Green M., Schwarz J., Witten E., *Superstring theory*, vv. 1, 2. Second edition. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1988. x+470 pp.; xii+596 pp.

Как и все прочие работы Уиттена по суперсимметрии эта книга входит в обязательный минимум.

[Ha] Halmos P., *How to write mathematics*. Enseignement Math. (2) 16, 1970, 123-152

[Her] Herstein I. N. *Topics in algebra*. Second edition. Xerox College Publishing, Lexington, Mass.–Toronto, Ont., 1975. xi+388 pp.

[Hz] Hertz H., *The principles of mechanics*. Preface by H. von Helmholtz. Translation by D. E. Jones and J. T. Walley. Introduction by Robert S. Cohen. Dover Publications, Inc., New York, 1956. xlii+274 pp.

[J] Johnstone P. T., *Topos theory*. London Mathematical Society Monographs, Vol. 10. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London–New York, 1977. xxiii+367 pp.;

Johnstone, P., *Sketches of an elephant*: *a topos theory compendium*. Vol. 1. Oxford Logic Guides, 43. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2002. xxii+468+71 pp.

[Kaku] Kaku M., *Hyperspace*: *A Scientific Odyssey Through Parallel Universes*, *Time Warps and the Tenth Dimension*, Anchor, 1995

[KakuS] Kaku M., *Introduction to superstrings*. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer-Verlag, New York, 1988. xvi+568 pp.;
Kaku, M., *Introduction to superstrings and M-theory*. Second edition. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer-Verlag, New York, 1999. xviii+587 pp.
Kaku, M., *Strings*, *conformal fields*, *and M-theory*. Second edition. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer-Verlag, New York, 2000. xvi+531 pp.

[Kem] Kemer A. R. Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 48 (1984), no. 5, 1042–1059; see further

[Koz] Kozlov V., *The heat equilibrium after Hibbs and Poincaré*. Institute of computer studies, Moscow–Izhevsk, 2002, 320 pp.

[KN] Kobayashi Sh., Nomizu K., *Foundations of differential geometry*. Vol. I. Reprint of the 1963 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996. xii+329 pp. Vol. II. Reprint of the 1969 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996. xvi+468 pp.

[Lang] Lang S., *Algebra*. Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics, 211. Springer-Verlag, New York, 2002. xvi+914 pp.

[L0] Лейтес Д.А. Спектры градуированно-коммутативных колец. Успехи матем. наук. 1974. Т. 29, № 3. С. 209–210.

[L1] Лейтес Д.А. Введение в теорию супермногообразий. Успехи матем. наук. 1980. Т. 35, № 1. С. 3–53.

[Leit] Лейтес Д.А. Теория супермногообразий. Карельский филиал АН СССР, Петрозаводск, 1983, 200 с.

[L] Leites D., *The Riemann tensor for nonholonomic manifolds*. Homology Homotopy Appl. 4 (2002), no. 2, part 2, 397-407; `arXiv:math.RT/0202213`

[LSe] Leites, D., Serganova, *Symmetries wider than supersymmetries*. In: S. Duplij and J. Wess (eds.) *Noncommutative structures in mathematics and physics*, Proc. NATO Advanced Research Workshop, Kiev, 2000. Kluwer, 13–30

[LR] Löfwall C., Roos J.-E., *A nonnilpotent* 1-2*-presented graded Hopf algebra whose Hilbert series converges in the unit circle*. Adv. Math. 130 (1997), no. 2, 161–200.

[McC] McCrimmon, K., *A taste of Jordan algebras*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2004. xxvi+562 pp

[McL] Mac Lane S. *Categories for the working mathematician*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 5. Springer-Verlag, New York, 1998. xii+314 pp.

[Mde] Mandel G., *Einheitliche Theorie des elektromagnetischen und des gravitationsfeldes*. In: Kagan V. F. (ed.) *Mémoir du Seminair pour l'Analyse vectorielle et tensorielle et pour ses Applications à la Géometries*, *à la Mécanique et à la Physique*, v. 4, ONTI NKTP SSSR, Moscou-Leningrad, 1937, 61–69; see also Uchenye zapiski LGU, ser. phys., t. 1, vyp. 2, 1936.

[Man1] Manin Yu. I., *Lectures on algebraic geometry* (1966-68), Moscow Univ. Press, Moscow, 1968 (in Russian)

[Man2] Manin Yu. I., *Lectures on algebraic geometry*. Part 1. Moscow Univ. Press, Moscow, 1970 (in Russian)

[MaE] Manin Yu. I., *Lectures on algebraic geometry*. (English translation of [Man1, Man2].)

[MaT] Manin Yu. *Topics in noncommutative geometry*. Princeton Univ. Press, 1991.

[MaG] Manin Yu. *Gauge field theory and complex geometry*. Translated from the 1984 Russian original by N. Koblitz and J. R. King. Second edition. With an appendix by Sergei Merkulov. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 289. Springer-Verlag, Berlin, 1997. xii+346 pp.

[MaQ] Manin Yu. *Quantum groups and noncommutative geometry*, CRM, Montreal, 1988.

[ManAG] Манин Ю. И. Аффинные схемы и квантовые группы. М. МЦНМО, 200??????

[ME] Математическая энциклопедия. Том 5. Слу–Я. Под ред. И. М. Виноградова. Советская энциклопедия, М., 1985.

[Mont] Montgomery R., *Isoholonomic problem and some applications*, Comm. Math. Phys. 128: 3, 1990, 565–592;
Montgomery R., *A tour of subriemannian geometries*, *their geodesics and applications*. Mathematical Surveys and Monographs, 91. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. xx+259 pp.

[Poi] Пуанкаре А. *Идеи Герца в механике* // [Hz], ???-???

[Ro1] Rosenberg A., *Noncommutative algebraic geometry*. 317 pp. [SoS, 26/1988-8] A version: *Noncommutative algebraic geometry and representations of quantized algebras*. Mathematics and its Applications, 330. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1995. xii+315 pp.; позднейшие добавки: препринты MPIM-Bonn [1999-83, -84, 2003-110, 111, 112] (www.mpim-bonn.mpg.de)

[Ro2] Rosenberg A., *Almost quotient categories*, *sheaves and localization*. 181 pp. In: [SoS, 25/1987-7]

[Prs] Prasolov, V. V. *Problems and theorems in linear algebra*. Translated from the Russian manuscript by D. A. Leites. Translations of Mathematical Monographs, 134. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. xviii+225 pp.

[Reid] Reid M., *Undergraduate commutative algebra*. London Mathematical Society Student Texts, 29. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. xiv+153 pp.

[RS] Rubakov, V. A.; Spiridonov, V. P. Parasupersymmetric quantum mechanics. Modern Phys. Lett. A 3 (1988), no. 14, 1337–1347

[RF] Rokhlin V. A., Fuchs D. B. *Introductory course of topology*. *Geometric chapters*. Nauka, Moscow, 1977 (Russian) = English translation by Springer, 1983

[Q] Quillen, D., *Superconnections and the Chern character*. Topology 24 (1985), no. 1, 89–95
Quillen D., *Superconnection character forms and the Cayley transform*. Topology 27 (1988), no. 2, 211–238.
Mathai V., Quillen, D., *Superconnections*, *Thom classes*, *and equivariant differential forms*. Topology 25 (1986), no. 1, 85–110.

[Shk] Scherk, J. *Antigravity*: *a crazy idea*? Phys. Lett. B 88 (1979), no. 3–4, 265-267.

[SeTh] Seifert H., Threlfall W., *Seifert and Threlfall*: *a textbook of topology*. Translated from the German edition of 1934 by Michael A. Goldman. With a preface by Joan S. Birman. With “Topology of 3-dimensional fibered spaces” by Seifert. Translated from the German by Wolfgang Heil. Pure and Applied Mathematics, 89. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1980. xvi+437 pp.

[Serg] Sergeev V., *The limits of rationality*. (*A thermodynamical approach to market economy*), Fasis, Moscow, 1999, v+144 Перевод на англ. яз. с дополнениями: [Serg1]

[Serg1] Sergeev V., *The Thermodynamic Approach to Markets* (edited by Leites D., with appendix by Vershik A.), 200 pp. MPIMiS preprint 81/2006

[Shu] Shubin M. A., *Semiclassical asymptotics on covering manifolds and Morse inequalities*. Geom. Funct. Anal. 6 (1996), no. 2, 370–409

[SoS] Leites D. (ed.), *Seminar on supermanifolds*, no. 1–34, 2100 pp. Reports of Dept. of Math. of Stockholm Univ., 1977–1990; no. 36–37, MPIM-Bonn, 2002.

[V-L] Vaughan-Lee M., Superalgebras and dimensions of algebras. Internat. J. Algebra Comput. 8 (1998), no. 1, 97–125

[vdW] van der Waerden, B. L. *Algebra*. Vol. I. Based in part on lectures by E. Artin and E. Noether. Translated from the seventh German edition by Fred Blum and John R.

Schulenberger. Springer-Verlag, New York, 1991. xiv+265 pp; Vol. II. Based in part on lectures by E. Artin and E. Noether. Translated from the fifth German edition by John R. Schulenberger. Springer-Verlag, New York, 1991. xii+284 pp.

[Ver] Vershik A. M., *Classical and nonclassical dynamics with constraints*. In: Yu. Borisovich, Yu. Gliklikh (eds.), *Geometry and topology in global nonlinear problems*, Novoe Global. Anal., Voronezh. Gos. Univ., Voronezh, 1984, 23–48. Перевод на англ. яз. с дополнениями: [Serg1]
Vershik A. M., Gershkovich V. Ya., . Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 172 (1989), Differentsialnaya Geom. Gruppy Li i Mekh. Vol. 10, 21–40, 169
id., Nonholonomic manifolds and nilpotent analysis. J. Geom. Phys. 5 (1988), no. 3, 407–452

[Wel] Wells R. O., Jr. *Differential analysis on complex manifolds*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 65. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980. x+260 pp.

[WZ] Wess J., Zumino B., *Supergauge Transformations in Four Dimensions. Nuclear Phys.* **B70** (1974), 39–50;

[WB] Wess J., Bagger J., *Supersymmetry and supergravity*. Second edition. Princeton Series in Physics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992. x+259 pp.

[Ad] Адамс Дж. Лекции по группам Ли. Перевод с англ. Н. Р. Камышанского. Прил. А. Л. Онищика. М. Наука, 1979, 144 с.

[B2] Berezin F., *Introduction to superanalysis*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. xii+424 pp.

[BL] Bernstein J.N., Leites D.A., Invariant differential operators and irreducible representations of Lie superalgebra of vector fields. Serdica 7 (1981), no. 4, 320–334 (1982)

[BLq] Bernstein J. N., Leites D. A., *The superalgebra* $Q(n)$, *the odd trace and the odd determinant*. C. R. Acad. Bulgare Sci. 35 (1982), no. 3, 285–286.

[Gel] Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре ???(Russian) [Lectures on linear algebra] Fourth edition, augmented. Nauka, Moscow, 1971. 271 pp.

[GM] Гельфанд С., Манин Ю. И. *Методы гомологической алгебры*. Т.1, М. Наука, 1988

[Gr] Grozman P., `SuperLie`, `http://www.equaonline.com/math/SuperLie`

[Dz] Dzhumadildaev A., 10-commutators, 13-commutators, and odd derivations, J. Nonlinear Mathem. Physics, to appear. Preprint 2006-30 MPIM-Bonn.

[Her] Herstein, I. N. *Abstract algebra*. Third edition. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 1996. xviii+249 pp.
Herstein, I. N. *Topics in algebra*. Second edition. Xerox College Publishing, Lexington, Mass.-Toronto, Ont., 1975. xi+388 pp.

[Lang] Lang S., *Algebra*. Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics, 211. Springer-Verlag, New York, 2002. xvi+914 pp.

[Luk] Lukierski J. Complex and quaternionic supergeometry. - Supergravity Proc. Workshop, Stony Brook, 1975, Amsterdam ea. 1979, p. 85-92.

[MaG] Manin Yu. *Gauge field theory and complex geometry*. Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 1997. xii+346 pp.

[ManAG] Манин Ю. И. Аффинные схемы и квантовые группы. М. МЦНМО, 200??????

[Prs] Prasolov, V. V. *Problems and theorems in linear algebra*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. xviii+225 pp.

[Sh] Shoikhet B., Kontsevich formality and PBW algebras, `arXiv:arXiv:0708.1634`

[ShM] Shchepochkina I., Maximal subalgebras of the classical linear Lie superalgebras. In: C. Duval, L. Guieu and V. Ovsienko (eds.) *The orbit method in geometry and physics* (*Marseille*, 2000): *in honor of A. A. Kirillov*, Progress in Mathematics, Birkhäuser, 2003, 445–472 (hep-th/9702122)

[Ser] Serganova, V. V., Classification of simple real Lie superalgebras and symmetric superspaces. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 17 (1983), no. 3, 46–54. English translation: Functional Anal. Appl. 17 (1983), no. 3, 200–207

[Se2] Sergeev A., Tensor algebra of the identity representation as a module over the Lie superalgebras $\mathfrak{gl}(n,\ m)$ and $\mathfrak{q}(n)$. (Russian) Mat. Sb. (N.S.) 123 (165) (1984), no. 3, 422–430.

[Serr] Serre J.-P., *Galois cohomology*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002. x+210 pp.

[vdW] van der Waerden, B. L. *Algebra*. Vol. I. Springer-Verlag, New York, 1991. xiv+265 pp; Vol. II. Springer-Verlag, New York, 1991. xii+284 pp.

[A] Artin E. *Geometric algebra*, Reprint of the 1957 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988. x+214 pp.

[B2] Berezin F., *Introduction to superanalysis*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. xii+424 pp.

[B3] Berezin F., Automorphisms of a Grassmann algebra. (Russian) Mat. Zametki, v. 1, 1967, 269–276.

[BL] Bernstein J., Leites D., Invariant differential operators and irreducible representations of Lie superalgebras of vector fields. Sel. Math. Sov., v. 1, N 2, 1981, 143–160

[Dj] Djokovič D. Derivations and automorphisms of exterior algebras. Canad. J. Math. 30 (1978), no. 6, 1336–1344

[Do] Domokos, M., Cayley-Hamilton theorem for 2 × 2 matrices over the Grassmann algebra. Ring theory (Miskolc, 1996). J. Pure Appl. Algebra 133 (1998), no. 1-2, 69–81

[GG] Goto M., Grosshans F., *Semisimple Lie algebras*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 38. Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, 1978. vii+480 pp.

[GPS] Gurevich, D. I.; Pyatov, P. N.; Saponov, P. A. The Cayley-Hamilton theorem for quantum matrix algebras of GL$(m|n)$ type. (Russian) Algebra i Analiz 17 (2005), no. 1, 160–182; translation in St. Petersburg Math. J. 17 (2006), no. 1, 119–135

[KT] Kantor, I., Trishin, I., On the Cayley-Hamilton equation in the supercase. Comm. Algebra 27 (1999), no. 1, 233–259;
Trishin, I. On representations of the Cayley-Hamilton equation in the supercase. Comm. Algebra 27 (1999), no. 1, 261–287.

[KhV] Khudaverdian, H. M.; Voronov, Th. Th., Berezinians, exterior powers and recurrent sequences. Lett. Math. Phys. 74 (2005), no. 2, 201–228

[MaG] Manin Yu. *Gauge field theory and complex geometry*. Translated from the 1984 Russian original by N. Koblitz and J. R. King. Second edition. With an appendix by Sergei Merkulov. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 289. Springer-Verlag, Berlin, 1997. xii+346 pp.

[M-L] Makar-Limanov L., On Grassmann algebras of graphs. J. Algebra, 87 (1984), no. 2, 283–289.

[P] Postnikov M. M. *Lie groups and Lie algebras*, *Lecturas on geometry*, *Semester* 5, Mir, Moscow, 1986, 440 pp.

[Sch1] Scheunert M., Generalized Lie algebras. J. Math. Phys. 20 (1979), no. 4, 712–720

[Sch2] Scheunert M., Graded tensor calculus. J. Math. Phys. 24 (1983), no. 11, 2658–2670

[S] Serov A. A., The Clifford–Weil algebra and the spinor group. In: Onishchik A. (ed.) *Questions of group theory and homologic algebra*, Yaroslavl Univ. Press, Yaroslavl, 1985, 143–145, 166. (in Russian)

[Sz] Szigeti, J. On the characteristic polynomial of supermatrices. Israel J. Math. 107 (1998), 229–235.

[Ya] Ястребов А. В. Теоремы Крамера и Гамильтона-Кэли для матриц наж супералгеброй В: Онищик А. Л. (ред.) Проблемы теории групп и гомологической алгебры, Ярослав. гос. унив., Ярославль, 1988. С. 130—141.

[AM] Atiyah M., Macdonald I. *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969, ix+128 pp.

[Bla] Blass, A., Existence of bases implies the axiom of choice. Axiomatic set theory (Boulder, Colo., 1983), 31–33, Contemp. Math., 31, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.

[Bb1] Bourbaki N., *Commutative algebra*, Springer, NY, 1988

[Bb2] Bourbaki N., *Éléments d'histoire mathématiques*, Hermann, Paris, 1969

[BCD] Bocharov, A. V.; Chetverikov, V. N.; Duzhin, S. V.; Khor'kova, N. G.; Krasilshchik, I. S.; Samokhin, A. V.; Torkhov, Yu. N.; Verbovetsky, A. M.; Vinogradov, A. M. *Symmetries and conservation laws for differential equations of mathematical physics*. Edited and with a preface by Krasilshchik and Vinogradov. Translated from the 1997 Russian original by Verbovetsky and Krasilshchik. Translations of Mathematical Monographs, 182. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. xiv+333 pp.

[BCG] Bryant R. L., Chern S. S., Gardner R. B., Goldschmidt H. L., Griffiths P. A., *Exterior differential systems*. Mathematical Sciences Research Institute Publications, 18. Springer-Verlag, New York, 1991. viii+475 pp.

[BG] Boyer Ch. P., Gitler S., *The theory of* G^{∞}*-supermanifolds*. Trans. Amer. Math. Soc. 285 (1984), no. 1, 241–267.

[BSh] Borevich Z., Shafarevich I., *Number theory*, Acad. Press, NY, 1966 (see revised third edition: Теория чисел. (Russian) [The theory of numbers] Nauka, Moscow, 1985. 504 pp.)

[CE] Cartan H., Eilenberg S., *Homological algebra*. With an appendix by David A. Buchsbaum. Reprint of the 1956 original. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999. xvi+390 pp.

[Ch] Chebotaryev N. G., *Theory of Algebraic Functions*, OGIZ, Moscow–Leningrad, 1948, 396 pp.

[Cohn1] Cohn P. M., Fractions. Bull. London Math. Soc. 16 (1984), no. 6, 561–574

[Cohn2] Cohn P. M., *Principles of noncommutative algebraic geometry*. In: Kaya R., Peter Plaumann P., Strambach K. (eds.) *Rings and geometry*. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held in Istanbul, September 2–14, 1984. NATO Advanced Science Institutes Series C: Mathematical and Physical Sciences, 160. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1985, 3–37.

[Conn] Connes A., *Noncommutative geometry*. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994. xiv+661 pp.

[Da] Daletskii Yu. L., Tsygan B. L., *Operations on Hochschild and cyclic complexes*. Methods Funct. Anal. Topology 5 (1999), no. 4, 62–86

[DeW] DeWitt B., *Supermanifolds*. Second edition. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1992. xviii+407 pp.

[E1] Eisenbud D., Harris J., *The geometry of schemes*. Graduate Texts in Mathematics, 197. Springer-Verlag, New York, 2000. x+294 pp.

[E2] Eisenbud D., *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer-Verlag, New York, 1995. xvi+785 pp.

[E3] Eisenbud, D., Harris, J., *Schemes. The language of modern algebraic geometry*. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1992. xii+157 pp.

[EM] *Encyclopedia of mathematics*, Kluwer, 1987–1992

[FFG] Fomenko A., Fucks D., Gutenmakher V., *Homotopic topology*, Academiai Kiadó, 1987

[Gab] Gabriel P., *Categories abeliénnes*, Bull. Soc. Math. France, 1962

[Gel] Gelfand I., Raikov D.A., Shilov G.E., *Commutative normed rings* (Russian), Fizmatgiz, Moscow, 1960; English transl.: Chelsea, New York, 1964.
Shreider, Yu. A. The structure of maximal ideals in rings of measures with convolution. (Russian) Mat. Sbornik N.S. 27(69), (1950). 297–318
Plamenevskii, B. A., Senichkin, V. N., Solvable operator algebras. (Russian) Algebra i Analiz 6 (1994), no. 5, 1–87; translation in St. Petersburg Math. J. 6 (1995), no. 5, 895–968
Nikolski N., In search of the invisible spectrum. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 49 (1999), no. 6, 1925–1998.

[GM] Gelfand S., Manin Yu. *Methods of homological algebra*. Translated from the 1988 Russian original. Springer-Verlag, Berlin, 1996. xviii+372 pp.

[Go] Golan J., *Structure sheaves over a noncommutative ring*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 56. Marcel Dekker, Inc., New York, 1980. xv+170 pp
Golan J., *Semirings and affine equations over them: theory and applications*. Mathematics and its Applications, 556. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003. xiv+241 pp.

[Gor] Gorenstein D., *Finite simple groups. An introduction to their classification*. University Series in Mathematics. Plenum Publishing Corp., New York, 1982. x+333 pp.

[GH] Griffiths P., Harris J., *Principles of algebraic geometry*, A. Wiley, NY e.a., 1978

[GRS] Gaiduk A, V. Romanov, A. Shvarts, Supergravity and field space democracy. Comm. Math. Phys. 79 (1981), no. 4, 507–528;

[EGA] Grothendieck, A.*Éléments de géométrie algébrique*. IV. (French) I. Le langage des schémas. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 4, 1960 228 pp.;
II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 8, 1961 222 pp.;
Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 28 1966 255 pp.;
IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 32, 1967 361 pp.

[Hs] Halmos P., *Naive set theory*, Van Nostrand, 1960

[H] Hartshorn R., *Algebraic geometry*, Springer, NY e.a. 1977

[J] Johnstone, P. T. *Topos theory*. London Mathematical Society Monographs, Vol. 10. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1977. xxiii+367 pp.

[Kap] Kapranov M., Noncommutative geometry based on commutator expansions. J. Reine Angew. Math. 505 (1998), 73–118

[KaS] Kashiwara M., Schapira P., *Sheaves on manifolds*. With a chapter in French by Christian Houzel. Corrected reprint of the 1990 original. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 292. Springer-Verlag, Berlin, 1994. x+512 pp.

[Ke] http://www.math.jussieu.fr/ keller/publ/

[K] Kelley, John L. *General topology*. Reprint of the 1955 edition [Van Nostrand, Toronto, Ont.]. Graduate Texts in Mathematics, No. 27. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1975. xiv+298 pp.

[KLV] Krasilshchik, I. S.; Lychagin, V. V.; Vinogradov, A. M. *Geometry of jet spaces and nonlinear partial differential equations*. Translated from the Russian by A. B. Sosinskiĭ. Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 1. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1986. xx+441 pp.

[Kz] Kunz E., *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*. Translated from the German by Michael Ackerman. With a preface by David Mumford. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985. xi+238 pp.

[Lang] Lang S., *Algebra*. Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics, 211. Springer-Verlag, New York, 2002. xvi+914 pp.

[L0] Leites D., Spectra of graded-commutative rings, Uspehi Matem. Nauk, **29**, no. 3, 1974, 157–158 (in Russian)

[L1] Лейтес Д.А. Введение в теорию супермногообразий. Успехи матем. наук. 1980. Т. 35, № 1. С. 3–53.

[SoS] Leites D. (ed.), *Seminar on supermanifolds*, no. 1–34, 2100 pp. Reports of Dept. of Math. of Stockholm Univ., 1986–1990

[L3] Leites D., *The index theorem for homogeneous differential operators on supermanifolds*. In: E. Ivanov et. al. (eds.) *Supersymmetries and Quantum Symmetries* (SQS'99, 27–31 July, 1999), Dubna, JINR, 2000, 405–408; math-ph/0202024

[LS] Leites D., Shchepochkina I., How to quantize the antibracket, Theor. and Math. Physics, v. 126, 2001, no. 3, 339–369; `arXiv: math-ph/0510048`

[M] Macdonald, I. G. *Algebraic geometry. Introduction to schemes*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1968, vii+113 pp.

[McL] Mac Lane S. *Categories for the working mathematician*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 5. Springer, New York, 1998. xii+314 pp.

[Man1] Manin Yu.I., *Lectures on algebraic geometry* (1966–68), Moscow Univ. Press, Moscow, 1968

[Man2] Manin Yu.I., *Lectures on algebraic geometry*. Part 1. Moscow Univ. Press, Moscow, 1970

[MaE] Manin Yu. I., *Lectures on algebraic geometry*. (English translation of [Man1, Man2].)

[Ma3] Manin Yu.I., Lectures on K-functor in algebraic geometry. Russian Math. Surveys, v. 24, 1969, no. 5, 1–89

[Ma4] Manin Yu.I., *A course in mathematical logic*, Translated from the Russian by Neal Koblitz. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 53. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1977., xiii+286 pp.

[MaD] Manin Yu., *New dimensions in geometry*. (Russian) Uspekhi Mat. Nauk 39 (1984), no. 6(240), 47–73. English translation: Russian Math. Surveys 39 (1984), no. 6, 51–83.

[MaDim] Manin Yu., The notion of dimension in geometry and algebra, `arXiv: math.AG/0502016`

[MaT] Manin Yu. *Topics in noncommutative geometry*. Princeton Univ. Press, 1991.

[MaG] Manin Yu. *Gauge field theory and complex geometry*. Translated from the 1984 Russian original by N. Koblitz and J. R. King. Second edition. With an appendix by Sergei Merkulov. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 289. Springer-Verlag, Berlin, 1997. xii+346 pp.

[MaQ] Manin Yu. *Quantum groups and non-commutative geometry*, CRM, Montreal, 1988.

1 [ManAG] Манин Ю. И. Аффинные схемы и квантовые группы. М. МЦНМО, 200?[1]

[MaV] Manin Yu., Penkov I., Voronov A., *Elements of supergeometry*. Itogi Nauki i Tekhniki, Current problems in mathematics. Newest results, Vol. 32, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1988, 3–25 (Russian) Translated in J. Soviet Math. 51 (1990), no. 1, 2069–2083.

[MM] Milnor J., Moore J., *On the structure of Hopf algebras*. Ann. of Math. (2) 81, 1965, 211–264

[M1] Mumford D., *Lectures on curves on an algebraic surface*. With a section by G. M. Bergman. Annals of Mathematics Studies, No. 59 Princeton University Press, Princeton, N.J., 1966, xi+200 pp.

[M2] Mumford D., *Picard groups of moduli problems*. Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963), 1965, Harper & Row, NY, 33–81

[M3] Mumford D., *The red book of varieties and schemes*. Lecture Notes in Mathematics, 1358. Springer-Verlag, Berlin, 1988. vi+309 pp.

[NJ] Неструев Д. Гладкие многообразия и наблюдаемые. М.: МЦНМО, 2000.

[OV] Onishchik A., Vinberg E., *Lie groups and algebraic groups*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. xx+328 pp.

[Pr] Prasolov, V. *Polynomials*. Translated from the 2001 Russian second edition by Dimitry Leites. Algorithms and Computation in Mathematics, 11. Springer, Berlin, 2004. xiv+301 pp

[Reid] Reid M., *Undergraduate commutative algebra*. London Mathematical Society Student Texts, 29. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. xiv+153 pp

[RF] Rokhlin V.A., Fuchs D.B. *Introductory course of topology. Geometric chapters*. Nauka, Moscow, 1977 (Russian) = English translation by Springer, 1983

[Ro1] Rosenberg A., *Noncommutative algebraic geometry*. 317 pp. [SoS, 26/1988-8] A version: *Noncommutative algebraic geometry and representations of quantized algebras*. Mathematics and its Applications, 330. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1995. xii+315 pp.; позднейшие добавки: препринты [MPIM-Bonn 1999-83, -84, 2003-110, 111, 112] (www.mpim-bonn.mpg.de)

[Ro2] Rosenberg A., *Almost quotient categories, sheaves and localization*. 181 pp. In: [SoS, 25/1987-7]

[Ru] Rudakov A., Marked trees and generating functions with odd variables. Normat 47 (1999), no. 2, 66–73, 95.

[Sh0] Shafarevich I. *Basic algebraic geometry*. 1. *Varieties in projective space*. Second edition. Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid. Springer-Verlag, Berlin, 1994, xx+303 pp.; *Basic algebraic geometry*. 2. *Schemes and complex manifolds*. Second edition. Translated from the 1988 Russian edition by Miles Reid. Springer-Verlag, Berlin, 1994. xiv+269 pp.

[Sh1] Shafarevich, I. R. *Basic notions of algebra*. Translated from the Russian by M. Reid. Reprint of the 1990 translation [Algebra. I, Encyclopaedia Math. Sci., 11, Springer, Berlin, 1990; MR 90k:00010]. Springer-Verlag, Berlin, 1997. iv+258 pp

[Sh2] Shafarevich, I. R. *Number theory. I. Fundamental problems, ideas and theories*. A translation of Number theory. 1 (Russian), Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1990 [MR 91j:11001a]. Translation edited by A. N. Parshin and I. R. Shafarevich. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 49. Springer-Verlag, Berlin, 1995. iv+303 pp.

[Su] Suslin A. Algebraic K-theory of fields. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 222–244, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987

[VvO] van Oystaeyen F., Verschoren A. H., *Non-commutative algebraic geometry*, Springer Lect. Notes Math. 887 (1981);
García M., Márquez Hernández C. M., Verschoren A., Structure sheaves and noncommutative topologies. J. Algebra 194 (1997), no. 1, 224–244

[vdW] van der Waerden, B. L. *Algebra*. Vol. I. Based in part on lectures by E. Artin and E. Noether. Translated from the seventh German edition by Fred Blum and John R. Schulenberger. Springer-Verlag, New York, 1991. xiv+265 pp; Vol. II. Based in part on lectures by E. Artin and E. Noether. Translated from the fifth German edition by John R. Schulenberger. Springer-Verlag, New York, 1991. xii+284 pp.

[Vr] Voronov A., *Maps of supermanifolds*. (Russian) Teoret. Mat. Fiz. 60 (1984), no. 1, 43–48, English translation: Theoret. and Math. Phys. 60 (1984), no. 1, 660–664

[We] Weil, A., *Théorie des points proches sur les variétés différentiables*. (French) Géométrie différentielle. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg, 1953, pp. 111–117. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953.

[ZS] Zariski O., Samuel P. *Commutative algebra*. v.1, Springer, Berlin e.a., 1979

[BL] Bernstein J.N., Leites D.A., Invariant differential operators and irreducible representations of Lie superalgebra of vector fields. (in Russian) Serdica 7 (1981), no. 4, 320–334 (1982)

[Gr] Grozman P., `SuperLie`, `http://www.equaonline.com/math/SuperLie`

[GLS] Grozman P., Leites D., Shchepochkina I., Invariant differential operators on supermanifolds and The Standard Model. In: M. Olshanetsky, A. Vainstein (eds.) *Multiple facets of quantization and supersymmetry. Michael Marinov Memorial Volume*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002, 508–555. `arXiv:math.RT/0202193`

[MaG] Manin Yu., *Gauge field theory and complex geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1997. xii+346 pp.

[Sha3] Shander V., Analogues of the Frobenius and Darboux theorems for supermanifolds. C. R. Acad. Bulgare Sci. 36 (1983), no. 3, 309–312

[Wel] Wells R. O., Jr. *Differential analysis on complex manifolds*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 65. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980. x+260 pp.

[Zh] Zhitomirsky M., Typical singularities of differential 1-forms and Pfaffian equations, 1–285 (Translations of Mathematical Monographs, 113. American Mathematical Society, Providence, RI; in cooperation with Mir Publishers, Moscow, 1992. xii+176 pp.)

[Ba] Batchelor M. The structure of supermanifolds. Trans. A.M.S., 1979, 235, 329–338

[BL0] Berezin F. A., Leites D. A., Supermanifolds, Sov. Math. Doklady, v. 16, 1975, 1218–1222.

[BGV] Berlin, N., Getzler E., Vergne M., *Heat kernels and Dirac operators*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 298. Springer-Verlag, Berlin, 1992, viii+369 pp.

[L0] Leites D., Spectra of graded commutative rings. Uspehi Matem. Nauk, v. 30, 1974, no. 3, 209–210 (in Russian) MR 53# 2966

[LInd] Leites D., The index theorem for homogeneous differential operators on supermanifolds. In: E. Ivanov et. al. (eds.) *Supersymmetries and Quantum Symmetries* (SQS'99, 27–31 July, 1999), Dubna, JINR, 2000, 405–408; math-ph/0202024

[Q1] Quillen, D., Superconnections and the Chern character. Topology 24 (1985), no. 1, 89–95

[Q2] Mathai V., Quillen, D., Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms. Topology 25 (1986), no. 1, 85–110.

[Q3] Quillen D., Superconnection character forms and the Cayley transform. Topology 27 (1988), no. 2, 211–238.

[We] Weil, A., *Théorie des points proches sur les variétés différentiables*. (French) Géométrie différentielle. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg, 1953, pp. 111–117. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953.

[Ar1] Arnold V. *Ordinary differential equations*. Translated from the third Russian edition by Roger Cooke. Springer Textbook. Springer-Verlag, Berlin, 1992. 334 pp.

[B2] Berezin F., *Introduction to superanalysis*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. xii+424 pp.

[BM] Berezin F., Marinov M., Particle spin dynamics as the Grassmann variant of classical mechanics, Ann. Phys. (NY) 104 (1977) 336–362

[KK] Kats G. I., Koronkevich A. I., The Frobenius theorem for functions of commuting and anticommuting arguments. (Russian) Funkcional. Anal. i Priložen. 5 (1971), no. 1, 78–80. English translation: Functional Anal. Appl. 5 (1971), no. 1, 65–67

[God] Godbillion C. *Géométrie differentielle et méchanique analytique*. Hermann, Paris, 1969

[GLS] Grozman P., Leites D., Shchepochkina I., Invariant differential operators on supermanifolds and The Standard Model. In: M. Olshanetsky, A. Vainstein (eds.) *Multiple facets of quantization and supersymmetry. Michael Marinov Memorial Volume*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002, 508–555. [math.RT/0202193; ESI preprint 1111 (2001)]

[OH] Khudaverdian O., Odd invariant semidensity and divergence-like operators on an odd symplectic superspace. Comm. Math. Phys. 198 (1998), no. 3, 591–606

[HV1] Khudaverdian H., Voronov Th., On complexes related with calculus of variations. J. Geom. Phys. 44 (2002), no. 2-3, 221–250

[KMS] Kolář I., Michor P., Slovák J., *Natural operations in differential geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1993. vi+434 pp.

[HV2] Voronov F., Khudaverdyan O., Geometry of differential operators, and odd Laplace operators. (Russian) Uspekhi Mat. Nauk 58 (2003), no. 1, 179–180

[LPet] Leites D., *Supermanifold theory*. Karelia Branch of the USSR Acad. of Sci., Petrozavodsk, 1983, 200 pp. (in Russian)

[Lev] Levin, A. M. Integration on (1|1)-dimensional supermanifolds. (Russian) Uspekhi Mat. Nauk 41 (1986), no. 3(249), 189–190 English translation: Functional Anal. Appl. 41 (1986), no. 3, 217–218

[MaT] Manin Yu. *Topics in noncommutative geometry*. Princeton Univ. Press, 1991.

[Pal] Palamodov V. P., Cogitations over Berezin's integral. In: Dobrushin R., Minlos R., Shubin M., Vershik A. (Eds.) *F. A. Berezin memorial volume*. Translated from the original Russian manuscripts. Translation edited by A. B. Sossinsky. Contemporary mathematical physics, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 175, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 177–189

[P] Penkov I. *D*-modules on supermanifolds. Inv. Math., 1983, 71, 501–512

[Sha1] Shander V., Vector fields and differential equations on supermanifolds. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 14 (1980), no. 2, 91–92. English translation: Functional Anal. Appl. 14 (1980), no. 2, 160–162

[Sha2] Shander, V. N., Complete integrability of ordinary differential equations on supermanifolds. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 17 (1983), no. 1, 89–90. English translation: Functional Anal. Appl. 17 (1983), no. 1, 74–75.

[Sha3] Shander V., Analogues of the Frobenius and Darboux theorems for supermanifolds. C. R. Acad. Bulgare Sci. 36 (1983), no. 3, 309–312

[RS] Retakh V., Shander V., The Schwarz derivative for noncommutative differential algebras. In: Fuchs D. (ed.) *Unconventional Lie algebras*, 139–154, Adv. Soviet Math., 17, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[Shch] Shchepochkina I., How to realize Lie algebras by vector fields. Theoret. Mat. Fiz., v. 147, 2006, no. 3., 450–469; `arXiv: math.RT/0509472`

[Va] Vaintrob, A. Yu. *Lie algebroids and homological vector fields*. (Russian) Uspekhi Mat. Nauk 52 (1997), no. 2(314), 161–162; translation in Russian Math. Surveys 52 (1997), no. 2, 428–429

[Va1] Vaintrob A., *Normal forms of homological vector fields*. Algebra, 3. J. Math. Sci. 82 (1996), no. 6, 3865–3868

[Va2] Vaintrob A., *Darboux theorem and equivariant Morse lemma*. J. Geom. Phys. 18 (1996), no. 1, 59–75

[VG1] Vershik A., Gershkovich V. Nonholonomic dinamical systems. In: Fundamental trends, VINITI, Moscow, 1987, 5–85 (translated by Springer in Sov. Math. Encyclop. series "Dynamical systems-7")

[VG2] Vershik, A. M.; Gershkovich, V. Ya. A bundle of nilpotent Lie algebras over a nonholonomic manifold (nilpotentization). (Russian) Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 172 (1989), Differentsialnaya Geom. Gruppy Li i Mekh. Vol. 10, 21–40, 169 translation in J. Soviet Math. 59 (1992), no. 5, 1040–1053

[BSc] Баранов М. А., Шварц А. С. Когомологии супермногообразий // Функцион. анализ и его прил. 1984. Т. 18, вып. 2. С. 53–54.

[B2] Berezin F., *Introduction to superanalysis*. Edited and with a foreword by A. A. Kirillov. With an appendix by V. I. Ogievetsky. Translated from the Russian by J. Niederle and R. Kotecký. Translation edited by D. Leites. Mathematical Physics and Applied Mathematics, 9. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. xii+424 pp.

[BerL] Березин Ф. А., Лейтес Д. А. Супермногообразия// ДАН СССР. 1975. Т. 224, № 3. С. 505–508.

[BL] Bernstein J.N., Leites D.A. Инвариантные дифференциальные операторы и неприводимые представления суперaлгебры Ли векторных полей. Selecta Math. Soviet. 1 (1981), no. 2, 143–160.

[BL1] Бернштейн И. Н., Лейтес Д. А. Интегральные формы и формула Стокса на супермногообразиях// Функцион. анализ и его прил. 1977. Т. 11, вып. 1. С. 55–56.

[BL2] Бернштейн И. Н., Лейтес Д. А. Как интегрировать дифференциальные формы на супермногообразиях // Функцион. анализ и его прил. 1977. Т. 11, вып. 3. С. 70–71.

[BdW] DeWitt, B., *Supermanifolds*. Second edition. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1992. xviii+407 pp.

[GHS] Gaiduk A., Khudaverdyan O., Shvarts A., Integration over surfaces in superspace. Teoret. Mat. Fiz. 52 (1982), no. 3, 375–383.

[GG] Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И. ?? // Современные проблемы математики. Т. 16. М.: ВИНИТИ, 1980. С. 53–226.

[GGSh] Гельфанд И. М., Граев М. И., Шапиро З. Я. ?? // Функцион. анализ и его прил. 1970. Т. 4, вып. 1. С. 14–32.

[GLS] Grozman P., Leites D., Shchepochkina I., Invariant differential operators on supermanifolds and The Standard Model. In: M. Olshanetsky, A. Vainstein (eds.) *Multiple facets of quantization and supersymmetry. Michael Marinov Memorial Volume*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002, 508–555. `arXiv: math.RT/0202193`

[H] Hirsch, M. W. *Differential topology*. Corrected reprint of the 1976 original. Graduate Texts in Mathematics, 33. Springer-Verlag, New York, 1994. x+222 pp

[Ka] Kato, D. The vanishing problem for cohomology of superspaces. In: Maeda Y., Tose N., Miyazaki N., Watamura S., Sternheimer D. (eds) *Noncommutative geometry and physics*. Proceedings of the COE International Workshop held at Keio University, Yokohama, February 26–March 3, 2004, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005, 245–252

[Kh] Khudaverdian O., Odd invariant semidensity and divergence-like operators on an odd symplectic superspace, Comm. Math. Phys., **198**, Nr. 3 (1998), 591–606.

[KhN] Khudaverdian O., Nersessian A., Batalin-Vilkovisky formalism and integration theory on manifolds, J. Math. Phys., **37**, Nr. 8 (1996), 3713–3724.

[L1] Лейтес Д. А. Теория супермногообразий. Петрозаводск, Изд. Карельск. филиала АН СССР, 1983, 200 с.

[L] Leites, D. A. Cohomology of Lie superalgebras. (Russian) Funkcional. Anal. i Priložen. 9 (1975), no. 4, 75–76

[MaG] Манин Ю. И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984.

[MV] Manin Yu. I., Voronov A. A., Shubert supercells, *Funktsional Anal. i Prilozhen*, **18**, Nr.4, (1984), ???

[P] Penkov I. ?? // Inv. Math. 1983. V. 71. P. 501–512.

[Rog] Rogers A., Consistent superspace integration. J. Math. Phys., 1985, 26, No. 3, 385–392

[Rot] Rothstein M., Integration on non-compact supermanifolds. Trans. AMS., 1987, 299, No. 1, 387–396

[Sha1] Shander V., Vector fields and differential equations on supermanifolds. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 14 (1980), no. 2, 91–92.

[Sha4] Минахин В. В., Шандер В. Н. Some properties of parametric integration on supermanifolds// Теоретико-групповые методы в физике. Т. 1. М.: Наука, 1986. С. 164–169.

[Sha5] Gelfand I. M., Minakhin V. V., Shander V. N. Integration in supermanifolds and the Radon supertransform. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 20 (1986), no. 4, 67–69

[Sha6] V. Shander, Orientations of supermanifolds. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 22 (1988), no. 1, 91–92;

[St] Sternberg S. *Lectures on differential geometry*, 2nd ed, Chelsey, 1985

[Vi1] Victoria C. M, Symmetric and antisymmetric tensors over free supermodules, New Zealand J. Math., **27**, Nr.3 (1998) 277–291

[Vi2] Victoria C. M., Cohomology ring of supermanifolds, New Zealand J. Math., **27**, Nr.1 (1998) 123–144

[V0] Voronov T., A complex genrated by variational derivatives. Lagrangian formalism of infinite order and a generalization of the Stokes formula, Uspechi Mat. Nauk, **51**, Nr.6 (1996) 195–196

[V1] Voronov, Th., Supermanifold forms and integration. A dual theory. In: Buchstaber V., Novikov S. (eds.) *Solitons, Geometry, and Topology: On the crossroad*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 179, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 153–171

[V2] Voronov Th., Geometric integration theory on supermanifolds. Soviet Scientific Reviews, Section C: Mathematical Physics Reviews, 9, Part 1. Harwood Academic Publishers, Chur, 1991. iv+138 pp.

[V3] Voronov Th., Quantization on supermanifolds and an analytic proof of the Atiyah-Singer index theorem. Itogi Nauki i Tekhniki, Current problems in mathematics. Newest results, Vol. 38 (Russian), 186, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1990, 3–118

[V4] Voronov F. F., Characteristic classes of infinite-dimensional vector bundles. Uspekhi Mat. Nauk 46 (1991), no. 3(279), 185–186;

[V5] Voronov Th., A class of integral transforms that are induced by morphisms of vector bundles. Mat. Zametki 44 (1988), no. 6, 735–749; (Russian) translation in Math. Notes 44 (1988), no. 5-6, 886–896

[V6] Voronov Th. (ed.) *Quantization, Poisson brackets and beyond*. Papers from the London Mathematical Society Regional Meeting held July 6, 2001 and the Workshop on Quantization, Deformations, and New Homological and Categorical Methods in Mathematical Physics held at the University of Manchester, Manchester, July 7–13, 2001. Contemporary Mathematics, 315. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. viii+278

[V7] Voronov T., The Cartan calculus for dual forms, Uspekhi Mat. Nauk, **56**, Nr.2 (2001) 211–212

[V8] Voronov T., Dual forms on supermanifolds and Cartan calculus, Commun.Math.Phys. **228**, Nr.1 (2002) 1–16

[VZ1] Воронов Ф. Ф., Зорич А. В.Complex of forms on a supermanifold. // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 20, вып. 2. С. 58–59.

[VZ2] Voronov F., Zorich A.V., Integral transforms of the pseudodifferential forms. Uspekhi Mat. Nauk 41 (1986), no. 6(252), 167–168;

[VZ3] Voronov F., Zorich A.V., Theory of bordisms and homotopy properties of supermanifolds. Funktsional. Anal. i Prilozhen. 21 (1987), no. 3, 77–78; (Russian)English translation: Functional Anal. Appl. 21 (1987), no. 3, 237–238

[VZ4] Voronov F., Zorich A.V., Cohomology of supermanifolds, and integral geometry. Dokl. Akad. Nauk SSSR 298 (1988), no. 3, 528–533; (Russian)translation in Soviet Math. Dokl. 37 (1988), no. 1, 96–101

[VZ5] Voronov F., Zorich A.V., Integration on vector bundles. Funktsional. Anal. i Prilozhen. 22 (1988), no. 2, 14–25, 96; (Russian)translation in Funct. Anal. Appl. 22 (1988), no. 2, 94–103

[Z1] Zorich, A. V., Integration of pseudodifferential forms and inversion of integral transforms of Radon transform type. Uspekhi Mat. Nauk 42 (1987), no. 4(256), 185–186. (Russian)English translation: Russian Math. Surveys 42 (1987), no. 4, 151–152

[2] Kac V. G. Lie superalgebras. Advances in Mathematics, 1977, v. 26, No.1, p. 8–96.

[5] Parker M. Classification of real simple Lie superalgebras of classical type. Journal of Mathematical Physics, 1980, v. 21, No. 4, p. 689–697.

[6] Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. - М.: Мир, 1964.

[7] Лейтес Д. А. Серганова В. В., Фейгин Б. Л. Супералгебры Каца—Муди. В кн.: Теоретико-групповые методы в физике. - М. Наука, 1984, т. 1, с. 285-288.

[FH] Fulton, W., Harris, J., *Representation theory. A first course*. Graduate Texts in Mathematics, 129. Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991. xvi+551 pp.

[Helg] Helgason S., *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. Pure and Applied Mathematics, 80. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978. xv+628 pp.

[OV] Onishchik A. L., Vinberg É. B. *Lie groups and algebraic groups*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. xx+328 pp.

[Wo] Woit P., *Not Even Wrong: The Failure of String Theory And the Search for Unity in Physical Law*. Basic Books, 2007, 291 pp. Краткая версия: String Theory: An Evaluation, `arXiv:physics/0102051`

[Zb] Nonnenmacher S., Zirnbauer M. R. Det-Det correlations for quantum maps: dual pair and saddle-point analyses. J. Math. Phys. 43 (2002), no. 5, 2214–2240

Mirlin A., Müller-Groeling A., Zirnbauer M., Conductance fluctuations of disordered wires: *Fourier analysis on supersymmetric spaces. Ann. Physics* 236 (1994), *no.* 2, 325–373;

Zirnbauer M., Supersymmetry for systems with unitary disorder: circular ensembles. J. Phys. A 29 (1996), no. 22, 7113–7136.

Zirnbauer M., Super Fourier analysis and localization in disordered wires. Phys. Rev. Lett. 69 (1992), no. 10, 1584–1587

http://www.thp.uni-koeln.de/zirn/publikationen.htm

[B] Brown K.S. *Cohomology of groups*, Springer, Berlin e.a., 1982

[BW] Bursztyn, H.; Weinstein, A. Poisson geometry and Morita equivalence. In: Gutt S., Rawnsley J., Sternheimer D. (eds.). *Poisson geometry, deformation quantisation and group representations*, Lectures from the EuroSchool (PQR2003) held at the UniversitĹibre de Bruxelles, Brussels, June 13–17, 2003. London Math. Soc. Lecture Note Ser., 323, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005, 1–78; math.SG/0402347

[C] Cassels J.W.S., Frohlich A. (eds.) *Algebraic Number Theory*, Academic Press. London and NY, 1968

[Del] Deligne P. et al (eds.) *Quantum fields and strings: a course for mathematicians*. Vol. 1, 2. Material from the Special Year on Quantum Field Theory held at the Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, 1996–1997. AMS, Providence, RI; Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ, 1999. Vol. 1: xxii+723 pp.; Vol. 2: pp. i–xxiv and 727–1501

[Dj2] Djoković, D. Superlinear algebra or two-graded algebraic structures. J. Reine Angew. Math. 305 (1979), 65–76

[GL] Grozman P., Leites D., Lie superalgebras of supermatrices of complex size. Their generalizations and related integrable systems. In: E. Ramírez de Arellano, M. Shapiro, L. Tovar and N. Vasilevski (eds.) *Proc. Internatnl. Symp. Complex Analysis and related topics*, Mexico, 1996, Birkhäuser Verlag, 1999, 73–105 math.RT/0202177

[Her] Herstein, I. N. *Abstract algebra*. Third edition. With a preface by Barbara Cortzen and David J. Winter. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 1996. xviii+249 pp.

Herstein, I. N. *Topics in algebra*. Second edition. Xerox College Publishing, Lexington, Mass.-Toronto, Ont., 1975. xi+388 pp.

[J] Józefiak, T. Semisimple superalgebras. In: Algebra — some current trends (Varna, 1986), 96–113, Lecture Notes in Math., 1352, Springer, Berlin, 1988.

[Kon] Konstein S. E., Vasiliev M. A., Supertraces on the algebras of observables of the rational Calogero model with harmonic potential. J. Math. Phys. 37 (1996), no. 6, 2872–2891

Konstein S. E., An example of simple Lie superalgebra with several invariant bilinear forms, `arXiv:math-ph/0112063`

Konstein S. E., Supertraces on the Superalgebra of Observables of Rational Calogero Model based on the Root System, `arXiv:math-ph/9904032`

[Lam] Lam T.Y. *The algebraic theory of quadratic forms*, Addison-Westley, Reading, MA, 1973

[Lang] Lang S., *Algebra*. Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics, 211. Springer-Verlag, New York, 2002. xvi+914 pp.

[LS] Leites D., Shchepochkina I., How to quantize antibracket; Theor. and Math. Physics, v. 126, no. 3, 339–369

[Lu] Lyubashenko V. Vectorsymmetries. In: Leites D. (ed.) *Seminar on supermanifolds*, 15/1987-19, 77p; краткое изложение: Алгебры Хопфа и вектор-симметрии. Uspekhi Mat. Nauk 41 (1986), no. 5(251), 185–186

[M1] Merkurjev A.S., K_2 of fields and the Brauer group. *Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory*, Proc. AMS-IMS-SIAM Joint Summer Res. Conf., Boulder/Colo. 1983, Part II, Contemp. Math. 55 (1986), 529–546

[M2] Merkurjev A. S., Brauer groups of fields. Comm. Algebra, 11 (1983), no. 22, 2611–2624

[SMon] Montgomery S. Constructing simple Lie superalgebras from associative graded algebras. J. Algebra 195 (1997), no. 2, 558–579.

Bahturin Yu., Fischman D., Montgomery S., On the generalized Lie structure of associative algebras. Israel J. Math. 96 (1996), part A, 27–48

[OV] Oystaeyen F. Van, Verschoren A., (eds.) *Brauer groups in ring theory and algebraic geometry*. Proceedings of the Workshop held at the University of Antwerp, Wilrijk, August 17–28, 1981. Edited by Freddy M. J. van Oystaeyen and Alain H. M. J. Verschoren. Lecture Notes in Mathematics, 917. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982. viii+300 pp.;

Caenepeel S., Verschoren A., (eds.), *Rings, Hopf algebras, and Brauer groups*. Proceedings of the Fourth Week on Algebra and Algebraic Geometry (SAGA 4) held at the University of Antwerp, Antwerp, September 12–13, 1996, and at the Free University of Brussels, Brussels, September 16–17, 1996. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 197. Marcel Dekker, Inc., New York, 1998. x+332 pp.;

Caenepeel S., Oystaeyen F. Van, *Brauer groups and the cohomology of graded rings*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 121. Marcel Dekker, Inc., New York, 1988. xii+261 pp

[Sch] Scharlau W. *Quadratic and Hermitian forms*, Springer, Berlin, 1985

[S1] Serre J. P. *Galois cohomology*. Translated from the French by Patrick Ion and revised by the author. Springer-Verlag, Berlin, 1997. x+210 pp.

[S2] Serre J. P. *Cours d'arithmétique*. (French) Deuxième édition revue et corrigée. Le Mathématicien, No. 2. Presses Universitaires de France, Paris, 1977. 188 pp.

[S3] Serre J. P. *Représentations linéaires des groupes finis*. (French) [Linear representations of finite groups] Third revised edition. Hermann, Paris, 1978. 182 pp.; Translated from the second French edition by Leonard L. Scott. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. x+170 pp.

[S4] Serre J. P. Applications algébriques de la cohomologie des groupes II: théorie des algèbres simples. Sem. H. Cartan, 1959/51, Exp. 6-7.

[VdW] Waerden B. L. Van der, *Algebra*, Springer, Berlin e.a. 1967

[W] Wall C. T. C., Graded Brauer Groups, J. für die reine und angew. Mathematik, Band 302, 1965, ???.

[We] Weil A. Sur certaines groups d'operateur unitaires. Acta Math. 111 (1964) 1143–211 or Collected papers, v. 3, 1–69.

[XS] Xu Y., Shum K.-P., Morita equivalence for infinite matrix rings. Comm. Algebra 27 (1999), no. 4, 1751–1782

[A] Arnold V. I., Gusein-Zadeh S. M., Varchenko A. N., *Singularities of Differentiable Maps*. V.1, 2, Birkhäuser, Boston e.a., 1985.

[G2] Bryant R., Some remarks on G_2-structures, math.DG/0305124.
Wang Sung Ho, Morse functions on the moduli space of G_2 structures, math.DG/0210054
Karigiannis S., Deformations of G_2 and $Spin(7)$ structures on manifolds, math.DG/0301218
Noyvert B., Unitary minimal models of $SW(3/2, 3/2, 2)$ superconformal algebra and manifolds of G_2 holonomy, hep-th/0201198
Movshev M.V., The structure of a symplectic manifold on the space of loops of 7-manifold, math.SG/9911100
Acharya B. S., O'Loughlin M., Spence B., Higher dimensional Analogues of Donaldson-Witten theory, hep-th/9705138; Nucl.Phys. B503 (1997) 657–674

[D1] Dynkin E.B. Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras. Matem. Sbornik, 1952, v.30 (72), 349–462 (Russian) = English transl. in Moscow Math. Soc. Translations Ser. 2, v.6, 111–244

[GE] Egorov G., Invariants of the trivector of a nine-dimensional space. In: Onishchik A. (ed.) *Problems in group theory and homological algebra*, Yaroslav. Gos. Univ., Yaroslavl, 1981, 127–131 (Russian)

[GL] Грозман П., Лейтес Д. А. Неголономные тензоры Римана и Вейля для флаговых многообразий // Теор. и матем. физика. Т. 153, №. 2 (2007), 186–219

[K] Katanova A. A., Explicit form of certain multivector invariants. In: Vinberg, É. B. (ed.) *Lie groups, their discrete subgroups, and invariant theory*, Adv. Soviet Math., 8, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 87–93
(Основываясь на [Vi], Катанова явно описала множество свободных образующих в каждом из трэ случаев:
(i) SL(8)-действия на $\wedge^4(\mathbb{C}^8)$;
(ii) Sp(8)-действия на $\wedge^4_0(\mathbb{C}^8)$ (пространство 4-векторов в 8-мерном симплектическом пространстве имеет нулевую свертку а метрическим тензором);
(iii) SL(9)-действия на $\wedge^3(\mathbb{C}^9)$. Случай (iii) был ранее решен Г. В. Егоровым [GE] другим способом.
Аргументы Катановой используют вложение данных модулей в качестве прямых слагаемых в исключительные алгебры Ли E_7, E_6 и E_8, соответственно.)

[LSS] Лейтес Д. А, Савельев М., Серганова В. Вложения $\mathfrak{osp}(N|2)$ и вполне интегрируемые системы // M. Markov, V. Man'ko (ред.) *Теоретико-групповые методы в физике. Труды международной конференции*, Юрмала, май 1985. Наука, Москва, 1986, 377–394

[Sr] Serganova V., On generalizations of root systems. Comm. Algebra 24 (1996), no. 13, 4281–4299

[Sh] Shander V., Differential equations on supermanifolds. Funct. Anal. Appl. (1980), v. 14, no. 2, 91–92;
Shander V., Complete integrability of ordinary differential equations on supermanifolds. Funct. Anal. Appl. (1983), v. 17, no. 1, 89–90. English translation: Functional Anal. Appl. 17 (1983), no. 1, 74–75. For detailed version, see [L].

[SW] Serganova, V.; Waintrob, A. Simple singularities of functions on supermanifolds. Math. Scand. 64 (1989), no. 2, 251–284.

[vdJ1] Van der Jeugt, J., Regular subalgebras of Lie superalgebras and extended Dynkin diagrams. J. Math. Phys. 28 (1987), no. 2, 292–301

[vdJ2] Van der Jeugt, J., Principal five-dimensional subalgebras of Lie superalgebras. J. Math. Phys. 27 (1986), no. 12, 2842–2847

[V] Vaintrob A., Deformations of complex structures on supermanifolds. Funct. Anal. Appl. (1984) v. 18, N2, 59–60.

Два немного разных подробных изложения см. в:
1) "Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 32. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР, 1988, 125-211; Engl. transl. by J. Sov. Math. 51 (1990), no. 1, 2140–2188.
2) [SoS]-24.

[Vi] Vinberg, É. B. The Weyl group of a graded Lie algebra. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 40 (1976), no. 3, 488–526

[VE] Vinberg É. B., Elashvili A., Classification of 3-vectors in 9-dimensional space, Proc. Seminar on tensor analysis, Moscow Univ. Press, Moscow, v. 18, 1976, ??pp

[1] Leites D., Spectra of graded-commutative rings, Uspehi Matem. Nauk, **29**, no. 3, 1974, 157–158

[2] Berezin F., Leites D., Supermanifolds, Sov. Math. Doklady, v. 16, 1975, 1218–1222.

[3] Berezin F., Lie Supergroups, preprint ITEP-78 (1977), see Berezin F., *Introduction to superanalysis*. Edited and with a foreword by A. A. Kirillov. With an appendix by V. I. Ogievetsky. Translated from the Russian by J. Niederle and R. Kotecký. Translation edited by D. Leites. Mathematical Physics and Applied Mathematics, 9. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. xii+424 pp.

[4] Leites D. Introduction to the supermanifold theory. Russian Math. Surveys, v. 35, 1980, no. 1, 3–53

[5] Leites D., *The Supermanifold Theory* (in Russian), Karelia Branch of the USSR Acad. Sci., Petrozavodsk, 1983, 199 pp.

[6] Kostant B., Graded Manifolds, Graded Lie Theory and Prequantization, In: Lect. Notes in Math., vol.570, 177–306, Springer Verlag, Berlin, 1977.

[7] Schubert S., *Categories*, Springer Verlag, Berlin e.a., 1972.

[8] Lowvere R. Functorial Semantics of Algebraic Theories, Proc. Nat. Ac. Sci., 50, 869–872 (1963).

[9] Schaefer H. *Topological vector spaces*. Third printing corrected. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 3. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971. xi+294 pp.
Schaefer, H. H., Wolff, M. P., *Topological vector spaces*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 3. Springer-Verlag, New York, 1999. xii+346 pp.

[10] Molotkov V., Sheaves of Automorphisms and Invariants of Banach Supermanifolds, In: Proc. of the XV Spring Conf. of the Union of Bulgarian Mathematicians, Sunny Beach, 271–383, 1986.

[11] Batchelor M., The Structure of Supermanifolds, Trans. AMS, 253, 329–338 (1979).

[12] Palamodov V., Invariants of Analytic Zz-manifolds, Funkz. Anal i Priloj., **17**, no.1, 83–84 (1983).

[13] Manin Yu., Grassmannians and Flags in Supergeometry, In: Palev Ch. (ed.) Proc. of XI Intern. Conf. on DGM in Phys., Varna, Bulgaria, 1982. See also: Manin Yu. *Gauge field theory and complex geometry*. Translated from the 1984 Russian original by N. Koblitz and J. R. King. Second edition. With an appendix by Sergei Merkulov. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 289. Springer-Verlag, Berlin, 1997. xii+346 pp.

[14] Bourbaki N., *Variétés différentielles et analytiques* (*fascicule de résultats*), Hermann, Paris, 1967, 1971.

[15] Batchelor M., Two Approaches to Supermanifolds, Trans. AMS, 258, (1980) 257–270

[16] Rogers A., A Global Theory of Supermanifolds, J. Math. Phys., **21**, (1980) 1352–1365

[17] Jadczyk A., Pilch K., Superspaces and Supersymmetries, Comm. Math. Phys., **78**, (1981) 373–390

[18] Molotkov B., Glutoses: a Generalization of Topos Theory, `arXiv:CT/9912060`

[19] Bourbaki N., *Groupes et algébres de Lie*, Ch. III, Hermann, Paris, 1972.

[20] Hamilton R.S., The Inverse Function Theorem of Nash and Moser, Bull. AMS, **7**, n.1, (1982) 65–222

[21] Cohn, P. M. *Universal algebra*. Second edition. Mathematics and its Applications, 6. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht-Boston, Mass., 1981. xv+412 pp.

[22] Шварц А. С., Об определении суперпространства, ТМФ **60** (1984), по.1, стр. 37–42.

[23] Воронов А. А., Отображения супермногообразий, ТМФ **60** (1984), по.1, стр. 43–48.

[24] Witten E., An interpretation of the classical Yang-Mills theory, Phys. Lett 78B (1978), 394–398.

[Ba] Baranov, A. A. Volichenko algebras and nonhomogeneous subalgebras of Lie superalgebras. (Russian) Sibirsk. Mat. Zh. 36 (1995), no. 5, 998–1009; translation in Siberian Math. J. 36 (1995), no. 5, 859–868

[Bea] Beckers J., Debergh N., Quesne C., Parasupersymmetric quantum mechanics with generalized deformed parafermions, Helv. Phys. Acta 69,1996, 60–68; hep-th/9604132; Beckers J., Debergh N., Nikitin A.G., On parasupersymmetries and relativistic description for spin one particles. 1, 2. Fortsch.Phys. 43, 1995, 67–96; id., More on parasupersymmetry of the Schroedinger equation, Mod. Phys. Lett. A8,1993, 435–444; Beckers J., Debergh N., From relativistic vector mesons in constant magnetic fields to nonrelativistic (pseudo)supersymmetries, Int. J. Mod. Phys. A10, 1995, 2783–2797

[B] Berezin F., *Introduction to superanalysis*. Edited and with a foreword by A. A. Kirillov. With an appendix by V. I. Ogievetsky. Translated from the Russian by J. Niederle and R. Kotecký. Translation edited by Dimitri Leites. Mathematical Physics and Applied Mathematics, 9. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. xii+424 pp.

[B1] Berezin F.A. Automorphisms of the Grassmann algebra. Mat. Zametki 1, 1967, 269–276 (in Russian)

[BL] Berezin F.A., Leites D.A. Supermanifolds. Sov. Math. Doklady 16 (1975), 1976, 1218–1222

[BeL] Bernstein J., Leites D., The superalgebra $Q(n)$, the odd trace and the odd determinant. C. R. Acad. Bulgare Sci. 35 (1982), no. 3, 285–286

[BM] Bokut' L. A., Makar-Limanov L. G., A base of the free metabelian associative algebra, Sib. Math. J. 1991, v. 32, 6, 910–915

[Bu] Buchweitz R.-O. Cohen-Macauley modules and Tate-cohomology over Gorenstein rings. Univ. Toronto, Dept. Math. preprint, 1988

[CNS] Corwin L., Ne'eman Y., Sternberg S., Graded Lie algebras in mathematics and physics. Rev. Mod. Phys. 47, 1975, 573–609

[Co] Connes A., *Noncommutative geometry*. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994. xiv+661 pp.

[Coh] P.M. Cohn: *The Universal Algebra*, Harper & Row Publ. (1965).

[D] Drinfeld V.G., Quantum groups. Proc. Int. Congress Math., Berkeley, v.1, 1986, 798–820

[Del] Deligne P., Etingof P., Freed D., Jeffrey L., Kazhdan D., Morgan J., Morrison D., and Witten E. (eds.) *Quantum fields and strings*: *a course for mathematicians*. Vol. 1, 2. Material from the Special Year on Quantum Field Theory held at the Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, 1996–1997.American Mathematical Society, Providence, RI; Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ, 1999. Vol. 1: xxii+723 pp.; Vol. 2: pp. i–xxiv and 727–1501

[Dj] Djoković, D. Derivations and automorphisms of exterior algebras. Canad. J. Math. 30 (1978), no. 6, 1336–1344

[DR] Doplicher S., Roberts J.E., Why is there a field algebra with compact gauge group describing the superselection structure in particle physics, Commun. Math. Phys. 131, 1990, 51–107

[FIK] Filippov A. T., Isaev A. P., Kurdikov A. B., Para-Grassmann analysis and quantum groups. Modern Phys. Lett. A 7, no. 23, 1992, 2129–214;
id., Para-Grassmann differential calculus. Teoret. Mat. Fiz. 94, no. 2, 1993, 213–231; translation in Theoret. and Math. Phys. 94, no. 2, 1993,150–165;

id., Para-Grassmann extensions of the Virasoro algebra. Internat. J. Modern Phys. A 8,1993, no. 28, 4973–5003

[FRS] Fredenhagen K., Rehren K.H., Schroer B., Superselection sectors with braid statistics and exchange algebras, Commun. Math. Phys. 125, 1989, 201–226

[FLS] Feigin B., Leites D., Serganova V., Kac–Moody superalgebras. In: Markov M. et al (eds.) *Group–theoretical methods in physics* (Zvenigorod, 1982), v. 1, Nauka, Moscow, 1983, 274–278 (Harwood Academic Publ., Chur, 1985, Vol. 1–3 , 631–637)

[GL1] Grozman P., Leites D., From supergravity to ballbearings. In: J. Wess, E. Ivanov (eds.), *Supersymmetries and quantum symmetries*, (SQS'97, 22–26 July, 1997), Lecture Notes in Phys., 524, 1999, 58–67

[GL2] Grozman P., Leites D., Lie superalgebras of supermatrices of complex size. Their generalizations and related integrable systems. In: E. Ramirez de Arellano, M. Shapiro, L. Tovar and N. Vasilevski (eds.) *Proc. Internatnl. Symp. Complex Analysis and related topics*, Mexico, 1996, Birkhauser Verlag, 1999, 73–105

[I] Iyer U.N., Differential Operators on Hopf algebras and some functorial properties, Manuscripta math. 109 (2002), 121–129

[IM] Iyer U.N., McCune T.C., Quantum differential operators on $K[x]$, International Journal of Mathematics, Vol.13, No.4 (2002), 395–413

[IM2] Iyer U.N., McCune T.C., Volichenko differential operators,

[LR] Lunts V.A., Rosenberg A.L., Differential operators on noncommutative rings, Selecta Math.(N.S) **3**, 335–359 (1997).

[JGW] Jing N., Ge Mo-Lin, Wu Yong-Shi, New quantum groups associated with a «nonstandard» braid group representation, Lett. Math. Phys., 21, 1991, 193–204

[K1] Kac V., Lie superalgebras, Adv. Math., 26, 1977, 8–96

[Ke1] Kemer A. R. On nonmatrix varieries. Algebra and logic, 1980, v. 19, No. 3, 255–283. English translation: Algebra and Logic 19 (1980), no. 3, 157–178 (1981)

[Ke2] Kemer A. R. Varieties of $\mathbb{Z}$-graded algebras. Math. USSR Izvestiya, 1984, v. 48, No. 5, 1042–1059. (English transl. in Math. USSR-Izv. 25 (1985).

[KW] Kinyon M., Weinstein A., Leibniz Algebras, Courant Algebroids, and Multiplications on Reductive Homogeneous Spaces, Amer. J. Math. 123 (2001), no. 3, 525–550; math.DG/0006022

[KL] Kochetkov Yu., Leites D., Simple Lie algebras in characteristic 2 recovered from superalgebras and on the notion of a simple finite group. Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 2 (Novosibirsk, 1989), 59–67, Contemp. Math., 131, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992

[KR] Krakowski D., Reyev A. The polynomial identities of the Grassmann algebra. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, v. 181, 429–438.

[La] Latyshev V.N. On selecting a base of a T-ideal. Siberian Math., 1963, v. 4, No. 5, 1122–1127. (Russian).

[L1] Leites D., Spectra of graded-commutative rings. Uspehi Matem. Nauk, v. 29, no. 3, 1974, 157–158 (in Russian)

[L2] Leites D., Introduction to supermanifold theory. Russian Math. Surveys. 35, 1980, 1, 1-57. An expanded version is: Supermanifold theory, Karelia Branch of the USSR Acad. of Sci., Petrozavodsk, 1983, 200p. (in Russian, an expanded version in English is [L3])

[L3] Leites D. (ed.), Seminar on supermanifolds, nos. 1–34, 2100 pp. Reports of Dept. of Math. of Stockholm Univ., 1986–1990.

[L4] Leites D., Selected problems of supermanifold theory. Duke Math. J. v. 54, no. 2, 1987, 649–656

[L5] Leites D., Lie superalgebras. Modern Problems of Mathematics. Recent developments, v. 25, VINITI, Moscow, 1984, 3–49 (Russian; English transl. in: J. Soviet Math. v. 30 (6), 1985, 2056).

[LSc] Leites D., Shchepochkina I., Classification of the simple Lie superalgebras of vector fields, preprint MPIM-2003-28 (www.mpim-bonn.mpg.de)

[LS] Leites D., Serganova I., Metasymmetry and Volichenko algebras, Phys. Lett. B, 1990, 252, no. 1, 91–96;
id. Symmetries wider than supersymmetries. In: S. Duplij and J. Wess (eds.) *Noncommutative structures in mathematics and physics*, Proc. NATO Advanced Research Workshop, Kiev, 2000. Kluwer, 13–30

[Mj] Majid S. Quasitriangular Hopf algebras and Yang-Baxter equations, Int. J. Mod. Phys. A5, 1990, 1–91

[Mn1] Manin Yu. *Quantum groups and non-commutative geometry*, CRM, Montreal, 1988

[Mn2] Manin Yu. *Topics in non-commutative geometry*, Rice Univ., 1989

[OV] Onishchik A., Vinberg E., *Seminar on algebraic groups and Lie groups*, Nauka, Moscow, 1988 (in Russian) = English translation: Springer, 1990

[Q] Quesne C., Vansteenkiste N. C_λ-extended oscillator algebra and parasupersymmetric quantum mechanics. Czechoslovak J. Phys. 48 (1998), no. 11, 1477–1482; Beckers J., Debergh N., Quesne C., Parasupersymmetric quantum mechanics with generalized deformed parafermions. Helv. Phys. Acta 69 (1996), no. 1, 60–68

[Ro] Rosenberg A., *Noncommutative algebraic geometry and representations of quantized algebras*. Mathematics and its Applications, 330. Kluwer, Dordrecht, 1995. xii+315 pp.

[RS] Rubakov V., Spiridonov V., Parasupersymmetric quantum mechanics, Mod. Phys. Lett. A, v. 3, no. 14, 1988, 1337–1347

[S1] Serganova V., Classification of real forms of simple finite-dimensional Lie superalgebras and symmetric superspaces. Funct. Anal Appl. 1983, v. 17, no. 3, 46–54

[S2] Serganova V., Automorphisns of Lie superalgebras of string theories. Funct. Anal Appl. 1985, v. 19, no.3, 75–76

[S3] Serganova V., Simple Volichenko algebras. Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 2 (Novosibirsk, 1989), 155–160, Contemp. Math., 131, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992

[Sh] Shander V., Vector fields and differential equations on supermanifolds. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 14 (1980), no. 2, 91–92

[Sp] Spiridonov V., Dynamical parasypersymmetries in Quantum systems. In: Tavkhelidze et. al. (eds.) Proc. Int. Seminar «Quarcs 1990» , Telavi, May 1990, World Sci., 1991

[V] Volichenko I.B. Non-homogeneous subalgebras of commutative superlalgebras. Preprint No. 26 (235), The Byelorussian Academy of Sciences Mathematical Institute. Minsk, 1985. (Russian).

[Be] Berezin F. *Introduction to superanalysis*. Edited and with a foreword by A. A. Kirillov. With an appendix by V. I. Ogievetsky. Translated from the Russian by J. Niederle and R. Kotecký. Translation edited by Dimitri Leites. Mathematical Physics and Applied Mathematics, 9. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht-Boston, MA, 1987, xii+424 pp. Есть краткая версия по-русски.

[BL] Bernstein J., Leites D., Irreducible representations of type Q, the odd trace and odd determinant. C.r. acad. Bulg. Sci., v. 35, N3, 285286

[F] Fuks (Fuchs) D., *Cohomology of infinite dimensional Lie algebras*. Consultants Bureau, NY, 1987. Есть расширенная версия по-русски.

[FL] Fuchs, D. B., Leites, D. A., Cohomology of Lie superalgebras. C. R. Acad. Bulgare Sci. 37 (1984), no. 12, 15951596

[G] Gantmakher F. *Teoriya matrits*. (Russian) [Theory of matrices] Second supplemented edition. With an appendix by V. B. Lidskii Izdat. Nauka, Moscow 1966, 576 pp; *Théorie des matrices*. Tome 1: Théorie générale. (French) Traduit du Russe par Ch. Sarthou. Collection Universitaire de Mathématiques, No. 18 Dunod, Paris 1966 xiii+370 pp.; Tome 2: Questions spéciales et applications. (French) Traduit du Russe par Ch. Sarthou. Collection Universitaire de Mathématiques, No. 19 Dunod, Paris 1966 xii+268 pp.

[Gr] Gruson, C., Sur l'idéal du cone autocommutant des super algébres de Lie basiques classiques et étranges. (French) [On the ideal of the self-commuting cone of basic classical and strange Lie superalgebras], Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **50** (2000), no. 3, 807–831

[Ka] Kac V.G., Characters of typical representations of classical Lie superalgebras. Commun. Alg. v. 5, 1977, 889–897

[KN1] Khudaverdyan O., Nersessyan A., Even and odd symplectic and Kählerian structures on projective superspaces. J. Math. Phys. 34 (1993), no. 12, 5533–5548;

[KN2] Khudaverdyan O., Nersessyan A., Canonical Poisson brackets of different gradings and strange superalgebras. J. Math. Phys. 32 (1991), no. 7, 19381941

[Kh] Khudaverdian O. M., Geometry of superspace with even and odd brackets. J. Math. Phys. 32 (1991), no. 7, 1934–1937

[NK] Nersesyan A. P., Khudaverdyan O. M., Superspaces with two canonical 2-forms of different parities, and the strange superalgebra $U\tilde{Q}(N)$. (Russian) Izv. Akad. Nauk Armyan. SSR Ser. Fiz. 24 (1989), no. 6, 288–294 (1990)

[M] Macdonald I. G., *Symmetric functions and Hall polynomials*. Second edition. With contributions by A. Zelevinsky. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995. x+475 pp. Есть перевод первого издания.

[Po] Poletaeva E., Analogues of Riemann tensors for the odd metric on supermanifolds. Acta Appl. Math. 31 (1993), no. 2, 137–169;
Poletaeva E., Structure functions on the usual and exotic symplectic and periplectic supermanifolds. Differential geometric methods in theoretical physics (Rapallo, 1990), 390–395, Lecture Notes in Phys., 375, Springer, Berlin, 1991
Poletaeva E., The analogs of Riemann and Penrose tensors on supermanifolds. preprint MPI-2003-19 (www.mpim-bonn-mpg.de); math.RT/0510165

[RS] Riesz F., Sz-Nady B. *Leçons d'analyse fonctionelle*. Budapest, 1952

[S] Sergeev A., Invariant functions and Laplace-Casimir operators on Lie superalgebras. In: [SoS], no.32; см. гл. 2[2] $\boxed{2}$?

[Se1] Sergeev A., The invariant polynomials on simple Lie superalgebras. Represent. Theory 3 (1999), 250–280;

[Se2] Sergeev A., An analog of the classical invariant theory for Lie superalgebras. I, II. Michigan Math. J. 49 (2001), no. 1, 113–146, 147–168; math.RT/9810113, math.RT/9904079 см. гл. 2[3] $\boxed{3}$?

[Se] Serre J.-P., *Faisceaux algebriques coherent*. Ann. Math., 1955, 61, 197–278

[Sh] Shander V., Orbits and invariants of the supergroup GQ_n. Funktsional. Anal. i Prilozhen. 26 (1992), no. 1, 69–71 (translation in Funct. Anal. Appl. 26 (1992), no. 1, 55–56); an expanded version math.RT/9810112

[Va] Vaintrob A., Almost complex structures on supermanifolds, In: [SoS], no. 24;
id. Deformations of complex superspaces and of the coherent sheaves on them. (Russian) Current problems in mathematics. Newest results, Vol. 32, 125–211, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1988

[V] Volkov D. V., Pashnev A. I., Soroka V. A., Tkach V. I., Hamiltonian dynamical systems with even and odd Poisson brackets. (Russian) Teoret. Mat. Fiz. 79 (1989), no. 1, 117–126; translation in Theoret. and Math. Phys. 79 (1989), no. 1, 424–430

[W] Weyl H., *The classical groups. Their invariants and representations*, Princeton, Princeton Univ. Press, 1939

Предметный указатель

Бернштейн Иосиф Наумович
Лейтес Дмитрий Александрович
Молотков Владимир Васильевич
Шандер Владимир Наумович

СЕМИНАР ПО СУПЕРСИММЕТРИЯМ

Т. 1. Алгебра и анализ: основные факты

Подписано в печать 25.08.2011 г. Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 25,5. Тираж 400 экз. Заказ

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.