MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik

Tentamensskrivning i
Kombinatorik pk
2002-01-10

1. a) Antalet partitioner av 7 i högst 3 termer söks. Möjligheterna är $7 = 6+1 = 5+2 = 5+1+1 = 4+3 = 4+2+1 = 3+3+1 = 3+2+2$ så svaret är 8. p

   b) Oordnat urval med upprepning (av 7 ur 3), ger $\binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$ möjligheter. p

   c) Använd resultatet från nästa deluppgift, och dividera: Den enda möjligheten med alla bollar i samma låda motsvarar tre möjligheter i deluppgift d). I varje annat fall innehåller minst två lådor (olika) bollar, vilket gör att varje låda urskiljs av sitt innehåll. Därför svarar varje sådant fall mot 3! olika d)-fall (genom att man kan etikettera lådorna på 3! olika sätt), vilket betyder att man har $\frac{2187-3}{3!} = \frac{2184}{6} = 364$ sådana fall. Totalt alltså $1 + 364 = 365$ möjligheter. p

   d) Ordnat urval med upprepning (av 7 ur 3) ger $3^7 = 2187$ möjligheter. p

2. **Ett** sätt är att först direkt resonera sig fram till en sluten form för a_n, så här:

   Kalla **a** och **b** för låga bokstäver, och **c** och **d** för höga. Kalla vidare **a** och **c** för blå bokstäver, och **b** och **d** för röda. Villkoret är, att bokstaven efter en hög bokstav måste vara hög. Det är nu klart att varje tillåtet ord w av längd n måste börja med noll eller flera låga bokstäver, föjda av noll eller flera höga. Låt $h(w) = i$, där den i:te positionen är den första där det står en hög bokstav, om det finns någon; men $h(w) = n + 1$ om det inte gör det. Då bestäms w fullständigt av $h(w)$ och av färgen (blått eller rött) i varje position. Alltså är $a_n = (n + 1)2^n$.

   Härav följer direkt att den genererande funktionen är $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^n x^n = \frac{1}{(1-2x)^2}$. p

3. **BANANER** består av 2 **A**, 2 **N**, och 1 vardera av **B**, **E** och **R**; så den exponentiella genererande funktionen för ord bildade av dessa bokstäver är $(1+x+\frac{1}{2}x^2)^2(1+x)^3 = 1+5x+11x^2+14x^3+11\frac{1}{4}x^4+5\frac{3}{4}x^5+1\frac{3}{4}x^6+\frac{1}{4}x^7 = 1+5x+22x^{(2)}+84x^{(3)}+270x^{(4)}+690x^{(5)}+1260x^{(6)}+1260x^{(7)}$ (där $x^{(n)}$ betecknar den 'delade potensen' $\frac{x^n}{n!}$). Således är antalet ord man kan bilda av längd k 1, 5, 22, 84, 270, 690, 1260 och 1260, när $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ respektive 7. p

4. Varje sådan permutation σ motsvaras av att man ställer ut ett torn på varje rad på ett 6×6-bräde, på så sätt att tornet på rad i ställs i kolonn $\sigma(i)$. Villkoren på σ innebär att följande 11 positioner är förbjudna: (1,1), (2,2), ..., (6,6), och (1,2), (2,3), ..., (5,6). Eftersom antalet förbjudna positioner är väsentligt större än antalet tillåtna, är det enklast att först bestämma tornpolynomet $r(C, x)$ för konfigurationen C av förbjudna polynom. Låter vi vidare $C_1 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3)\}$, $C_2 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3)\}$, $C_3 = \{(1,1),(1,2)\}$ och $C_4 = \{(1,1)\}$, och hela tiden väljer att utmärka positioner som ligger så centralt som möjligt i konfigurationen, så får vi raskt:

   $r(C,x) = r(C_1,x)^2 + xr(C_2,x)^2$ (med (3,4) utmärkt); $r(C_1,x) = r(C_3,x)^2 + xr(C_4,x)^2 = (1+2x)^2+x(1+x)^2 = 1+5x+6x^2+x^3$ (med (2,2) utmärkt); $r(C_2,x) = r(C_3,x)r(C_4,x)+xr(C_4,x) = (1+2x)(1+x)+x(1+x) = 1+4x+3x^2$ (dito); och alltså $r(C,x) = (1+5x+6x^2+x^3)^2+x(1+4x+3x^2)^2 = 1+11x+45x^2+84x^3+70x^4+21x^5+x^6$; så det sökta antalet permutationer är $6!-11\cdot 5!+45\cdot 4!-84\cdot 3!+70\cdot 2!-21\cdot 1!+0! = 720-1320+1080-504+132-21+1 = 96$. p

5. a) Se figur 1 (där 12 är förkortning av $\{1, 2\}$, o. s. v.). p

   b) Låt $S \in E_n$. Enligt antagandet är då $S \neq \emptyset$, sådet finns något $i \in S$. Då är $|\{i\} \cap S| = |\{i\} \cap \{1, \ldots, n\}| = |\{i\}| = 1$ udda, så vi har en stig $(S, \{i\}, \{1, \ldots, n\})$ mellan S och $\{1, \ldots, n\}$. Alla hörn ligger alltså i samma komponent som hörnet $\{1, \ldots, n\}$, så G_n är sammanhängande. p

c) G_2 har Eulerpromenaden $(\{1\},\{1,2\},\{2\})$ (se figur 1).
Om $n \geq 3$, så har G_n inte någon Eulerpromenad, därför att varje hörn $\{1\}$, $\{2\}$, ..., $\{n\}$ då har valens $2^{n-1}-1$ och alltså är udda, så att det finns fler än två udda hörn i grafen. (S är ju en granne till $\{i\}$ precis om $S \neq \{i\}$ men $|S \cap \{i\}|$ är udda, vilket senare gäller omm $|S \cap \{i\}| = 1$, d. v. s. omm $i \in S$. Således är grannarna till $\{i\}$ precis mängderna $\{i\} \cup S'$, där S' är godtyckliga icketomma delmängder av $\{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n\}$.)
Alltså får vi svaret: Bara för $n = 2$. p

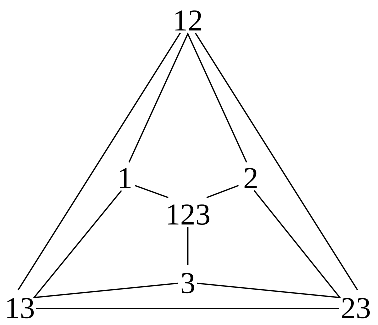
d) $G_2 \simeq K_{2,1}$ är bipartit (se figur ?).
Om $n \geq 3$, så innehåller G_n 3-cykeln $(\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\})$, och är alltså då inte bipartit. p

6. a) Se figur 2. p

b) T. ex. $ADGIFKNOP$ (eller någon annan stig av längd 23). p

c) (Se Grimaldi, avsnitt 13.1.) p

Figure 1:



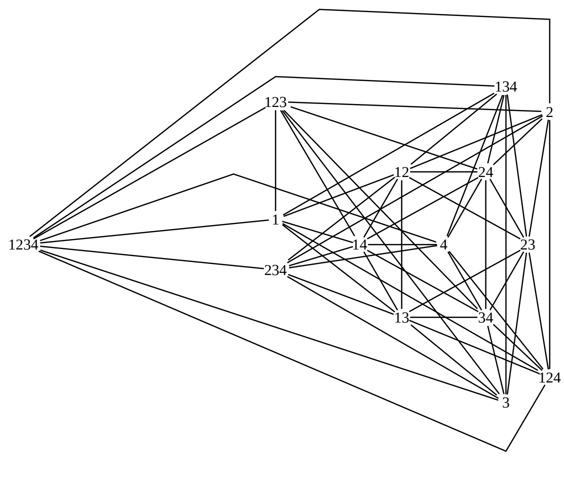


Figure 2: