Lösningar till tentamensskrivning i Matematisk Analys 2, 2003-10-16

1. Hjälpekvationen $r^2-3r+2=0$ har enkelrötterna $r_1=1$ och $r_2=2$. (Eftersom e^{3x} i högerledet svarar mot $r=3$, och $x=xe^{0x}$ svarar mot $r=0$, föreligger ingen 'resonans'.) Således får vi homogena lösningar $y_h=C_1e^x+C_2e^{2x}$; $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.
Man beräknar lämpligen två olika partikulärlösningar, och adderar. För ekvationen $y''-3y'+2y=e^{3x}$ kan man ansätta $y=Ae^{3x}$, vilket ger $9Ae^{3x}-9Ae^{3x}+Ae^{3x}=e^{3x}$, och $A=\frac{1}{2}$, och alltså $y_{p1}=\frac{1}{2}e^{3x}$.
Slutligen ansätter man $y=Bx+C$ i $y''-3y'+2y=x$, och får $0-3B+2(Bx+C)=x$, vilket ger $B=\frac{1}{2}$ och $C=\frac{3}{2}B=\frac{3}{4}$, och alltså $y_{p2}=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$.
Svar: $\underline{y=\frac{1}{2}e^{3x}+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}+C_1e^x+C_2e^{2x}}$; $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

2. (1): *Randundersökning*: $\partial D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=1\}$ undersöks lättast genom att man övergår till polära koordinater. Sätt därför $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=r^2(\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)=r^2(1+\cos\theta\sin\theta)$. På ∂D är $r=1$; så vi söker maximum och minimum av $h(\theta):=g(\theta,\theta)=1+\cos\theta\sin\theta$. $h'(\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta$, så $h'(\theta)=0\iff\cos\theta=\pm\sin\theta$, vilket ger θ-värdena $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ och $\frac{7\pi}{4}$, d. v. s. punkterna $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ (i vanliga x- och $y$koordinater) att undersöka.
Eftersom $f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{3}{2}$, och $f(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=f(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{2}$, är minsta respektive största värdet på randen $\frac{1}{2}$ respektive $\frac{3}{2}$.
(2): *Undersökning av det inre*: f är differentierbar överallt i det inre av D, så eventuella extremvärden kan bara antas där de partiella derivatorna är 0. Eftersom
$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y\quad\text{och}\quad\frac{\partial f}{\partial y}=x+2y\,,$$
så gäller detta precis när $\begin{cases}2x+y=0\\x+2y=0\end{cases}$, d. v. s. när $x=y=0$. Punkten $(0,0)$ ligger också i det inre av D, och $f(0,0)=0$ är alltså ett möjligt extremvärde.
Svar: Största värdet är $\frac{3}{2}$, och minsta värdet är 0.

3. Man ser att området $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: 2\le x\le 4,\ x+2\le y\le x^2$. (Av datatekniska skäl utgår tyvärr bilden.) Alltså kan integralen skrivas som
$$\int_2^4\Big(\int_{x+2}^{x^2}\frac{x+1}{(y-1)^2}\,dy\Big)dx=\int_2^4\Big[-\frac{x+1}{y-1}\Big]_{y=x+2}^{x^2}dx=\int_2^4-\frac{x+1}{x^2-1}+\frac{x+1}{x+1}dx=\int_2^4 1-\frac{1}{x-1}dx=$$
$$=\big[x-\ln(x-1)\big]_2^4=4-\ln 3-2+\ln 1=\underline{2-\ln 3}\,.$$

4. Låt $s=s(x)$ vara längden av kurvstycket från $(1,\frac{1}{4})$ till (x,y), där $1\le x\le 2$ och $y=y(x)=\frac{1}{4}(x^2-2\ln x)$. Då är
$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=\left(\frac{dx}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\big(\tfrac{1}{2}(x-\frac{1}{x})\big)^2=\frac{4x^2+(x^4-2x^2+1)}{4x^2}=\frac{x^4+2x^2+1}{4x^2}\,,$$

(*V.G.V.*)

och alltså $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$.

a) Längden av kurvstycket är $\int_1^2 \frac{ds}{dx} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 x + \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{2}[\frac{x^2}{2} + \ln x]_1^2 = \frac{1}{2}(2 + \ln 2 - \frac{1}{2}) = \underline{\frac{3+2\ln 2}{4}}$ $(= \frac{3}{4} + \ln\sqrt{2})$.

b) Ytans area är

$$\int_1^2 2\pi y(x)\frac{ds}{dx}\, dx = \frac{\pi}{4}\int_1^2 (x^2 - 2\ln x)(x + \frac{1}{x})\, dx = \frac{\pi}{4}\int_1^2 x^3 + x - 2x\ln x - \frac{2\ln x}{x}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\big[\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^2 - (x^2\ln x - \tfrac{1}{2}x^2) - (\ln x)^2\big]_1^2 = \underline{\big(\tfrac{27}{16} - \ln 2 - \tfrac{(\ln 2)^2}{4}\big)\pi}\,.$$

5. Vi använder att $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$, $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^5)$, och $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$, och får

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1 + x^3 - \sin(e^x - 1)}{e^x - 1 - x\sqrt{1+x}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+(x-\frac{1}{6}x^3+\mathcal{O}(x^5))+\frac{1}{2}(x+\mathcal{O}(x^3))^2+\frac{1}{6}(x+\mathcal{O}(x^3))^3+\mathcal{O}(x^4)-1+x^3-(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\mathcal{O}(x^4))+\frac{1}{6}\big(x+\mathcal{O}(x^2)\big)^3}{1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\mathcal{O}(x^4)-1-x(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\mathcal{O}(x^3))} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - 1 + x^3 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^4)}{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \mathcal{O}(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + \mathcal{O}(x^4)}{\frac{7}{24}x^3 + \mathcal{O}(x^4)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\mathcal{O}(x)}{\frac{7}{24}+\mathcal{O}(x)} = \underline{\frac{24}{7}}\,.$$

6. f är differentierbar; och $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (e^{2x} + e^y) + (x+y)\cdot 2e^{2x}$, och $\dfrac{\partial f}{\partial y} = (e^{2x} + e^y) + (x+y)e^y$. Alltså är $\nabla f = (8e^2, 5e^2)$ i punkten $(x, y) = (1, 2)$. Eftersom gradienten är vinkelrät mot tangenten till nivåkurvan genom punkten, har tangenten en riktningsvektor $(5, -8)$ och alltså en ekvation $5x - 8y + c = 0$. Insättning av $(x, y) = (1, 2)$ ger $c = 11$.
Svar: T. ex. $5x - 8y + 11 = 0$.