Lösningar till tentamensskrivning i Matematisk Analys 2, 2003-10-16

1. Hjälpekvationen $r^2 - 3r + 2 = 0$ har enkelrötterna $r_1 = 1$ och $r_2 = 2$. (Eftersom e^{3x} i högerledet svarar mot $r = 3$, och $x = xe^{0x}$ svarar mot $r = 0$, föreligger ingen 'resonans'.) Således får vi homogena lösningar $y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Man beräknar lämpligen två olika partikulärlösningar, och adderar. För ekvationen $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$ kan man ansätta $y = Ae^{3x}$, vilket ger $9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} + Ae^{3x} = e^{3x}$, och $A = \frac{1}{2}$, och alltså $y_{p1} = \frac{1}{2}e^{3x}$.
Slutligen ansätter man $y = Bx + C$ i $y'' - 3y' + 2y = x$, och får $0 - 3B + 2(Bx + C) = x$, vilket ger $B = \frac{1}{2}$ och $C = \frac{3}{2}B = \frac{3}{4}$, och alltså $y_{p2} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$.
Svar: $\underline{y = \frac{1}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + C_1e^x + C_2e^{2x}}$; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2. (1): *Randundersökning*: $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ undersöks lättast genom att man övergår till polära koordinater. Sätt därför $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2(\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta) = r^2(1 + \cos\theta\sin\theta)$. På ∂D är $r = 1$; så vi söker maximum och minimum av $h(\theta) := g(\theta, \theta) = 1 + \cos\theta\sin\theta$. $h'(\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, så $h'(\theta) = 0 \iff \cos\theta = \pm\sin\theta$, vilket ger θ-värdena $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ och $\frac{7\pi}{4}$, d. v. s. punkterna $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ (i vanliga x- och $y$koordinater) att undersöka.
Eftersom $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{2}$, och $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$, är minsta respektive största värdet på randen $\frac{1}{2}$ respektive $\frac{3}{2}$.
(2): *Undersökning av det inre*: f är differentierbar överallt i det inre av D, så eventuella extremvärden kan bara antas där de partiella derivatorna är 0. Eftersom
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y\ ,$$
så gäller detta precis när $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$, d. v. s. när $x = y = 0$. Punkten $(0, 0)$ ligger också i det inre av D, och $f(0, 0) = 0$ är alltså ett möjligt extremvärde.
Svar: Största värdet är $\frac{3}{2}$, och minsta värdet är 0.

3. Man ser att området $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 2 \le x \le 4,\ x + 2 \le y \le x^2$. (Av datatekniska skäl utgår tyvärr bilden.) Alltså kan integralen skrivas som
$$\int_2^4 \Big(\int_{x+2}^{x^2} \frac{x+1}{(y-1)^2}\, dy \Big) dx = \int_2^4 \Big[-\frac{x+1}{y-1} \Big]_{y=x+2}^{x^2} dx = \int_2^4 -\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{x+1}{x+1} dx = \int_2^4 1 - \frac{1}{x-1} dx =$$
$$= \Big[x - \ln(x-1) \Big]_2^4 = 4 - \ln 3 - 2 + \ln 1 = \underline{2 - \ln 3}\,.$$

4. Låt $s = s(x)$ vara längden av kurvstycket från $(1, \frac{1}{4})$ till (x, y), där $1 \le x \le 2$ och $y = y(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 2\ln x)$. Då är
$$\Big(\frac{ds}{dx}\Big)^2 = \Big(\frac{dx}{dx}\Big)^2 + \Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 = 1 + \big(\tfrac{1}{2}(x - \frac{1}{x})\big)^2 = \frac{4x^2 + (x^4 - 2x^2 + 1)}{4x^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2}\ ,$$

(*V.G.V.*)

och alltså $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$.

a) Längden av kurvstycket är $\int_1^2 \frac{ds}{dx} dx = \frac{1}{2}\int_1^2 x + \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{2}[\frac{x^2}{2} + \ln x]_1^2 = \frac{1}{2}(2 + \ln 2 - \frac{1}{2}) = \underline{\frac{3+2\ln 2}{4}}$ $(= \frac{3}{4} + \ln\sqrt{2})$.

b) Ytans area är

$$\int_1^2 2\pi y(x)\frac{ds}{dx}\, dx = \frac{\pi}{4}\int_1^2 (x^2 - 2\ln x)(x + \frac{1}{x})\, dx = \frac{\pi}{4}\int_1^2 x^3 + x - 2x\ln x - \frac{2\ln x}{x}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^2 - (x^2\ln x - \tfrac{1}{2}x^2) - (\ln x)^2\right]_1^2 = \underline{\left(\tfrac{27}{16} - \ln 2 - \tfrac{(\ln 2)^2}{4}\right)\pi}\,.$$

5. Vi använder att $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$, $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^5)$, och $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$, och får

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1 + x^3 - \sin(e^x - 1)}{e^x - 1 - x\sqrt{1+x}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+(x-\frac{1}{6}x^3+\mathcal{O}(x^5))+\frac{1}{2}(x+\mathcal{O}(x^3))^2+\frac{1}{6}(x+\mathcal{O}(x^3))^3+\mathcal{O}(x^4)-1+x^3-(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\mathcal{O}(x^4))+\frac{1}{6}\left(x+\mathcal{O}(x^2)\right)^3}{1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\mathcal{O}(x^4)-1-x(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\mathcal{O}(x^3))} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - 1 + x^3 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^4)}{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \mathcal{O}(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + \mathcal{O}(x^4)}{\frac{7}{24}x^3 + \mathcal{O}(x^4)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\mathcal{O}(x)}{\frac{7}{24}+\mathcal{O}(x)} = \underline{\frac{24}{7}}\,.$$

6. f är differentierbar; och $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (e^{2x} + e^y) + (x+y)\cdot 2e^{2x}$, och $\dfrac{\partial f}{\partial y} = (e^{2x} + e^y) + (x+y)e^y$. Alltså är $\nabla f = (8e^2, 5e^2)$ i punkten $(x, y) = (1, 2)$. Eftersom gradienten är vinkelrät mot tangenten till nivåkurvan genom punkten, har tangenten en riktningsvektor $(5, -8)$ och alltså en ekvation $5x - 8y + c = 0$. Insättning av $(x, y) = (1, 2)$ ger $c = 11$.
Svar: T. ex. $5x - 8y + 11 = 0$.