Matematisk statistik i praktiken: asset-liability management i ett försäkringsbolag

Andreas N. Lagerås

AFA Försäkring
Kapitalförvaltning
Investeringsanalys

Docentföreläsning SU 2010-11-10

Asset liability management

- Definition: Att välja tillgångar som passar till de försäkringsåtaganden man har.
- Översikt
  (a) Försäkringsverksamhet fungerar tack vare diverse gränsvärdessatser från sannolikhetsteorin.
  (b) Att minska ränterisk.
  (c) Att minska andra risker approximativt.
  (d) Skillnad mellan marknadsrisker och försäkringsrisker.

Försäkring – så funkar det

$$X_i := \text{kostnad för försäkrad nr } i.$$

$$Y_n := \text{total kostnad} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\text{CGS} \Rightarrow Y_n \overset{\text{appr.}}{\sim} N(\underbrace{\mathbb{E}[Y_n]}_{=O(n)}, \underbrace{\text{Var}(Y_n)}_{=O(n)})$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma(Y_n)}{\mathbb{E}[Y_n]} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\sigma(\widehat{\mathbb{E}[Y_n]}) = O(\sqrt{n}) \Rightarrow \frac{\sigma(Y_n)}{\widehat{\mathbb{E}[Y_n]}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

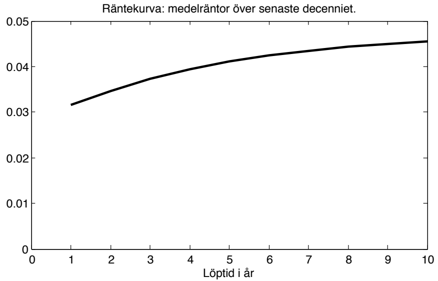
Nuvärde – marknadsvärdet idag av framtida betalningar

Idag	Om 1 år	Om två år
100 kr	$(1+r)100$ kr	$(1+r)^2 100$ kr
$\frac{1}{1+r}100$ kr	100 kr	
$\frac{1}{(1+r)^2}100$ kr		100 kr

Nuvärde – marknadsvärdet idag av framtida betalningar

Idag	Om 1 år	Om två år
100 kr	$(1+r_1)100$ kr	$(1+r_2)^2 100$ kr
$\frac{1}{1+r_1}100$ kr	100 kr	
$\frac{1}{(1+r_2)^2}100$ kr		100 kr

Olika löptider ger olika räntor.



Nuvärde – marknadsvärdet idag av framtida betalningar

Idag	Om 1 år	Om två år
100 kr	e^{r_1}100 kr	e^{2r_2}100 kr
e^{-r_1}100 kr	100 kr	
e^{-2r_2}100 kr		100 kr

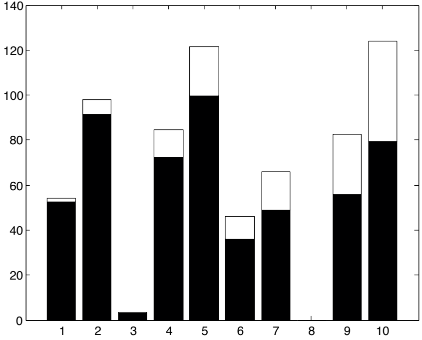
Exponentialfunktioner är lättare att hantera.

Nuvärde – marknadsvärdet idag av framtida betalningar

Nuvärdet för flera betalningar vid olika tidpunkter:

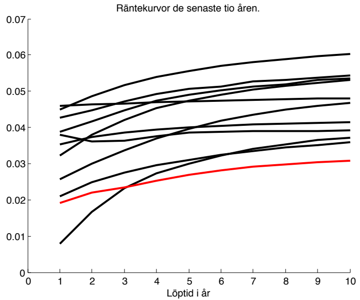
$$N := \sum_i c_i e^{-t_i r_{t_i}}$$

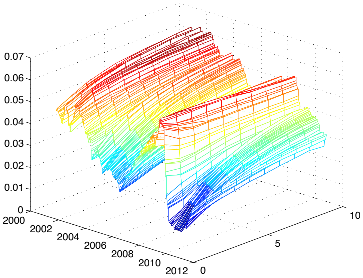
Nuvärdet $N <$ nominella värdet $\sum_i c_i$.
Exempel inspirerat av statsskulden: Nuvärde 539 miljarder (svart).
Nominellt värde 681 miljarder (svart+vitt).



Räntekurvans dynamik

Räntekurvan, och därmed nuvärdet, förändras hela tiden





Principalkomponentanalys

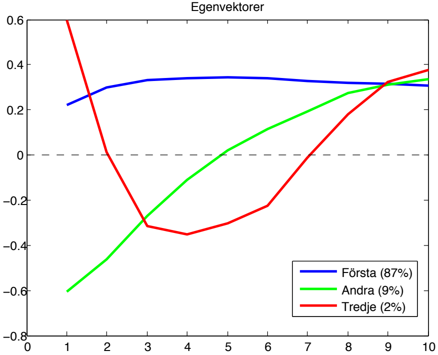
- Låt X vara en kolumnvektor med stokastiska variabler.
- Mål: Förstå (sam)variationen för komponenterna i X.
- Specifikt: Hitta stokastisk vektor Y med okorrelerade komponenter, och en matris A så att $X = \mathbb{E}[X] + AY$, dvs $X_i = \mathbb{E}[X_i] + \sum_j a_{ij} Y_j$.

$$\mathrm{Cov}(X) = \mathrm{Cov}(AY) = A\mathrm{Cov}(Y)A' = ADA'$$

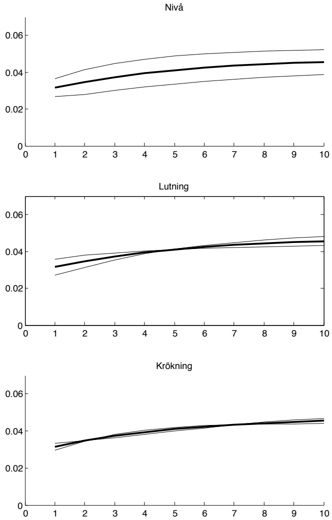
  där D är en diagonalmatris $\mathrm{diag}(\mathrm{Var}(Y_1), \ldots, \mathrm{Var}(Y_n))$.
- D består av egenvärdena för $\mathrm{Cov}(X)$ och kolumnerna i A är motsvarande egenvektorer.

Räntekurvans dynamik

Principalkomponentanalys av räntekurvan visar att den mesta variationen förklaras av de två, tre, första faktorerna.



Räntekurvans dynamik



Figur: Medelräntekurvan ± 2 standardavvikelser med de tre första egenvektorerna.

Parallellskiften av räntekurvan

- Om $r_t \to r_t + \epsilon$ så
$$N = \sum_i c_i e^{-t_i r_{t_i}} \to N^\epsilon := \sum_i c_i e^{-t_i (r_{t_i} + \epsilon)} = \sum_i c_i e^{-t_i r_{t_i}} e^{-t_i \epsilon}.$$
- Låt $w_i := \frac{c_i e^{-t_i r_{t_i}}}{N}$.
- Då är
$$\begin{aligned}\frac{\Delta N}{N} &:= \frac{N^\epsilon - N}{N} = \sum_i \frac{c_i e^{-t_i r_{t_i}}}{N} e^{-t_i \epsilon} - 1 \\ &= \sum_i w_i e^{-t_i \epsilon} - 1 = \sum_i w_i \underbrace{\left(e^{-t_i \epsilon} - 1\right)}_{= -t_i \epsilon + O(\epsilon^2)} \\ &= -\epsilon \underbrace{\sum_i w_i t_i}_{=:\text{Duration}} + O(\epsilon^2).\end{aligned}$$
- Obs: Durationen för en enskild betalning om t år är alltid lika med t.

Parallellskiften av räntekurvan

- $r_t \to r_t + \epsilon \Rightarrow N \to N^\epsilon = N - \epsilon DN + O(\epsilon^2)$.
- Tillgångar: N', D', skulder: N'', D''.

$$\Delta(N' - N'') = -\epsilon(D'N' - D''N'') + O(\epsilon^2)$$

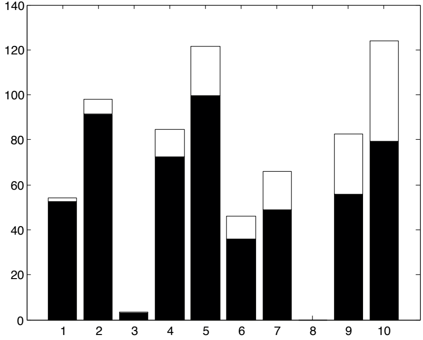
- Om $N' = N'' = N$ och dessutom $D' = D''$ så är

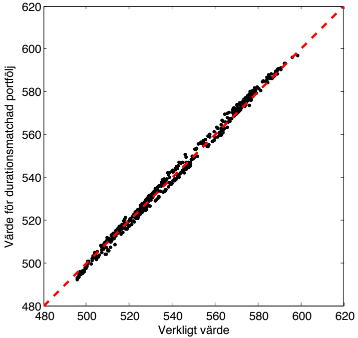
$$\Delta(N' - N'') = O(\epsilon^2)$$

(*durationsmatchning*).

Parallellskiften av räntekurvan

Exempel, forts. Betalflödet till vänster har nuvärde 539 miljarder kr och duration 5,4 år med medelräntekurvan det senaste decenniet. Till höger jämför vi de resulterande nuvärdena med vad de skulle ha blivit om alla betalningar var samlade vid 5,4 år.





Parallellskiften av räntekurvan

- Tillgångar: N', D', skulder: N'', D''.

$$\Delta(N' - N'') = -\epsilon(D'N' - D''N'') + O(\epsilon^2)$$

- Om $N' > N''$ så är

$$\Delta(N' - N'') = O(\epsilon^2)$$

om $D' = \frac{N''}{N'}D'' < D''$.

Värdesäkring

- Många typer av försäkring som ger kompensation för inkomstbortfall, t.ex. sjukförsäkring eller pension, är kopplade till den allmänna prisinflationen i samhället.
- Det finns obligationer (lån) vars ränta är kopplad till inflationen. På så sätt kan man göra nuvärdesberäkningar av dessa betalflöden utan att veta vad den faktiska inflationen (π) kommer att bli.

Idag	Om 1 år
$e^{-\tilde{r}}100$ kr	$(1+\pi)100$ kr

- Eftersom man får inflationsskydd med lånet så är räntan $\tilde{r}$ (realräntan) lägre än den vanliga räntan r (nominella räntan).
- Differensen $i = r - \tilde{r}$ är marknadens skattning av framtida inflation.

Värdesäkring

- Tyvärr finns det inte tillräckligt med reala lån på marknaden för att matcha alla åtaganden.
- Nominella tillgångar: N, D, inflationsskyddade skulder: $\tilde{N}, \tilde{D}$.
  Antag $N = \tilde{N}$.
  Då $r_t \to r_t + \epsilon$ och $\tilde{r}_t \to \tilde{r}_t + \tilde{\epsilon}$ så är

  $$\Delta(N - \tilde{N}) \approx -\epsilon D N + \tilde{\epsilon}\tilde{D}\tilde{N} = -(\epsilon D - \tilde{\epsilon}\tilde{D})N$$

  Eftersom ϵ och $\tilde{\epsilon}$ inte är perfekt korrelerade så går det inte att hitta ett D som sätter uttrycket till noll.
- Alternativt mål: Hitta D som minimerar $\mathrm{Var}(\epsilon D - \tilde{\epsilon}\tilde{D})$.
- Låt $D = \beta\tilde{D}$.

  $$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\epsilon\beta\tilde{D} - \tilde{\epsilon}\tilde{D}) &= \tilde{D}^2\mathrm{Var}(\epsilon\beta - \tilde{\epsilon}) \\ &= \tilde{D}^2(\beta^2\mathrm{Var}(\epsilon) + \mathrm{Var}(\tilde{\epsilon}) - 2\beta\mathrm{Cov}(\epsilon, \tilde{\epsilon})),\end{aligned}$$

  så det optimala $\beta = \frac{\mathrm{Cov}(\epsilon,\tilde{\epsilon})}{\mathrm{Var}(\epsilon)}$ (regressionskoefficient).

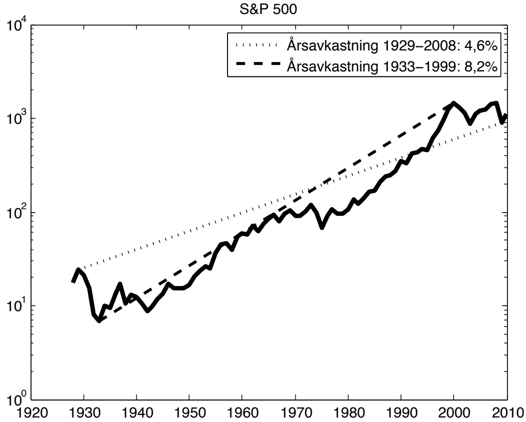
Förväntad avkastning

- Privata pensionskassor i många länder har använt en förväntad avkastning på aktier (eller bostadsobligationer) i stället för nominella räntor för att nuvärdesberäkna sina skulder.
- Om den förväntade avkastningen är högre än vanliga nominella räntan så blir nuvärdet på detta vis lägre.
- Tyvärr leder detta också till att man måste lyckas tjäna in denna avkastning *hela tiden* för att konsolideringsgraden i bolaget inte ska sjunka.

Riskpremien

- Historiskt har aktier gett betydligt större avkastning än statsobligationer om man betraktar tidsspann som är flera decennier långa.
- Denna överavkastning kallas ofta riskpremien.
- Problemet är att den årliga standardavvikelsen för aktieavkastning är cirka 20%.
- Över ett sekel så är standardavvikelsen för tillväxten $20\%\sqrt{100} = 200\%$, vilket ger en standardavvkelse för den årliga tillväxten över ett sekel på 2%.
- Det är mycket med tanke på att tillväxten är i storleksordningen 5% i snitt.

Riskpremien



Figur: En skattning av den årliga tillväxten i aktiemarknaden har en osäkerhet som är i samma storleksordning som skattningen själv.

Skillnaden mellan marknadsrisker och försäkringsrisker

- Om man måste skatta parametrarna en modell så vill man ha mycket oberoende data. För "vanliga" försäkringsrisker går det lätt att få tag i om man bara har ett tillräckligt stort kollektiv.
- För marknadsrisker är det annorlunda. Många marknader och finansiella tillgångars värden är högt korrelerade eftersom världsekonomin är så globaliserad och integrerad. Det finns bara en historia att se tillbaka på.
- Därför är det viktigt att i största mån matcha sina försäkringsåtaganden, så att den finansiella osäkerheten inte kan påverka möjligheten att klara av dem.

Tack för uppmärksamheten!

`andreas.lageras@afaforsakring.se`