Lösningsförslag till (nästan alla) övningar i Kapitel 6–8

Ö.6.1

Det finns 49 kort kvar i leken, varav 16 är 10-kort. Spelaren vinner 2 enheter om nästa kort är en 10:a och förlorar annars 1 enhet. Väntevärdet blir därför

$$E_{\text{försäkring}} = 2 \cdot \frac{16}{49} - 1 \cdot \frac{49-16}{49} \approx -0{,}0204.$$

Ö.6.2

Med 3 lekar kvar finns det $3 \cdot 52 = 156$ kort kvar. Om vi låter x beteckna antalet av dessa som är 10-kort blir väntevärdet

$$E_{\text{försäkring}} = 2 \cdot \frac{x}{156} - 1 \cdot \frac{156-x}{156} > 0,$$

som vi alltså vill ska vara större än 0. Räkningarna fortsätter

$$\begin{aligned} 2x - 156 + x &> 0 \\ 3x &> 156 \\ x &> \frac{156}{3} = 52 \end{aligned}$$

Det måste finnas mer än 52 stycken 10-kort kvar i leken för att det ska vara fördelaktigt att ta försäkring.

Ö.6.3

Stanna:
Vi har summan 15 och om vi stannar vinner vi bara om croupiern spricker. Från Tabell 5.2 får vi därför att

$$\mathbb{P}(\{\text{vinst}\}) = 0{,}229242$$

och

$$E_{\text{stanna}} \approx 0{,}229 - (1 - 0{,}229) = -0{,}542.$$

För att räkna ut det exakt behöver vi justera Tabell 5.2 för att en 7:a och en 8:a fattas i leken. Gör man det får man att

$$E_{\text{stanna}} = -0{,}5422.$$

Vår approximation är alltså bra

Ett kort till:
Tar vi ett kort till får vi en total summa med sannolikheter enligt tabellen nedan, eftersom t.ex. 24 av de 309 kvarvarande korten är Ess och resulterar i summan 16.

Värde	< 17	17	18	19	20	21
Sannolikhet	$\frac{24}{309}$	$\frac{24}{309}$	$\frac{24}{309}$	$\frac{24}{309}$	$\frac{24}{309}$	$\frac{165}{309}$

Vi använder nu Lagen om Total Sannolikhet och betingar på summan efter tre kort. Om vi t.ex. får summan 18 så vinner vi om croupiern får 17 eller spricker och förlorar om croupiern får 19, 20 eller 21. Från Tabell 5.2 får vi då att

$$\mathbb{P}(\{\text{vinna}\}\,|18) \approx 0{,}120310 + 0{,}229242 = 0{,}349552$$
$$\mathbb{P}(\{\text{förlora}\}\,|18) \approx 0{,}351854 + 0{,}120368 + 0{,}060877 = 0{,}533099$$

Gör vi på samma sätt för de övriga slutsummorna och sätter in i Ekvation (5.1) får vi att

$$E_{\text{kort}} \approx -0{,}4690.$$

En exakt uträkning ger vid handen att

$$E_{\text{kort}} \approx -0{,}4670$$

och vår approximation verkar alltså fungera bra även här. Slutligen ser vi att $E_{\text{stanna}} < E_{\text{kort}}$ och vi tar därför ett kort till.

Ö.6.4

Vi använder att

$$\begin{aligned} E_{x_1,x_2,\ldots,x_n} &\approx \mu + \frac{\beta}{N-n}\left(c_{x_1} + c_{x_2} + \cdots + c_{x_n}\right) \\ &= \mu + \frac{\beta}{52}\frac{c_{x_1} + c_{x_2} + \cdots + c_{x_n}}{\frac{N-n}{52}} \\ &= -0{,}0028 + \frac{0{,}2688}{52}\frac{6}{3} \approx +0{,}75\%. \end{aligned}$$

Väntevärdet är positivt, d.v.s. vi har fördel mot kasinot och väljer därför att göra en stor insats.

Ö.7.1

Vi vill beräkna sannolikheten att vi får en hand som är värd *mer* än ett par i damer då vi vänder ytterligare tre kort, givet att vi redan har ett par i damer.

Vi kan få en hand som är värd mer än ett par i damer om vi med hjälp av de tre återstående korten får

(i) precis triss i damer
(ii) precis fyrtal i damer
(iii) två par
(iv) kåk

vilket alla utgör oförenliga händelser.

(i) Sannolikheten att vi får precis triss i damer motsvarar att vi väljer 1 av de 2 återstående damerna, samt två kort i olika valörer (bland de återstående 12) i valfri färg:

$$\mathbb{P}(\{\text{triss i damer}\}) = \frac{\binom{2}{1}\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{50}{3}} \approx 0{,}10776$$

(ii) Sannolikheten att få precis ett fyrtal motsvarar att vi får båda resterande damer samt ett valfritt kort:

$$\mathbb{P}(\{\text{fyrtal i damer}\}) = \frac{\binom{2}{2}\binom{48}{1}}{\binom{50}{3}} \approx 0{,}0024490$$

(iii) Sannolikheten att få två par innebär att vi får ett par i någon av de 12 återstående valörerna samt ett kort i någon av de därefter återstående 11 valörerna:

$$\mathbb{P}(\{\text{två par}\}) = \frac{\binom{12}{1}\binom{4}{2}\binom{11}{1}\binom{4}{1}}{\binom{50}{3}} \approx 0{,}16163$$

(iv) Sannolikheten att få kåk motsvarar att vi får triss i någon av de resterande 12 valörerna:

$$\mathbb{P}(\{\text{kåk}\}) = \frac{\binom{12}{1}\binom{4}{3}}{\binom{50}{3}} \approx 0{,}0024490$$

Sannolikheten att vi får en hand som är värd mer än ett par blir alltså

$$\mathbb{P}(\{\text{triss i damer}\}) + \mathbb{P}(\{\text{fyrtal i damer}\}) + \mathbb{P}(\{\text{två par}\}) + \mathbb{P}(\{\text{kåk}\}) \approx 0{,}27429$$

Ö.7.2

(a) Det finns totalt 22 svarta kort kvar och 48 okända kort. Sannolikheten att det sista kortet är svart blir alltså $22/48 = 11/24$.

(b) Det finns totalt 4 kort som gör att handen blir en kåk. Sannolikheten att handen var en kåk blir alltså $4/48 = 1/12$.

Ö.7.4

Det finns totalt 9 kort kvar som är spader och 46 kort som är okända. Sannolikheten att du får färg i spader är alltså $p = 9/46$. Det ger oss att

$$\frac{1-p}{p} = \frac{37}{9} \approx 4$$

vilket är lägre än

$$\frac{k}{s} = 5.$$

Om du tror på din hand och spelar enligt pott-odds, så bör du alltså fortsätta spelet.

Ö.8.1

Vi använder Ekvation (8.2) som säger att

$$O_i = \frac{K(1-r)}{K_i},$$

där vi tolkar K_i/K som andelen av insatserna som spelats på häst i och r är bookmakerns marginal, d.v.s. $r = 0{,}1$. Vi får då

$$O_1 = \frac{1}{K_1/K}(1-r) = \frac{1}{1/2}0{,}9 = 2 \cdot 0{,}9 = 1{,}8,$$
$$O_\mathrm{X} = \frac{1}{K_\mathrm{X}/K}(1-r) = \frac{1}{1/3}0{,}9 = 3 \cdot 0{,}9 = 2{,}7,$$
$$O_2 = \frac{1}{K_2/K}(1-r) = \frac{1}{1/6}0{,}9 = 6 \cdot 0{,}9 = 5{,}4.$$

Ö.8.2

(a) Enligt Ekvation (8.1) gäller att $O = Q + 1$ så att kvotoddsen ges av

$$\begin{aligned} Q_1 &= O_1 - 1 = 3 - 2 = 2 = 2/1, \\ Q_\mathrm{X} &= O_\mathrm{X} - 1 = 3{,}1 - 1 = 2{,}1 = 21/10, \\ Q_2 &= O_2 - 1 = 2{,}3 - 1 = 1{,}3 = 13/10. \end{aligned}$$

(b) Vi använder Ekvation (8.9) och får att

$$r = 1 - \frac{1}{\sum_i 1/O_i} = 1 - \frac{1}{1/3 + 1/3{,}1 + 1/2{,}3} \approx 0{,}083,$$

som är bookmakerns marginal. Eftersom marginalen är positiv för bookmakern är den negativ för spelaren och det finns alltså inget arbitrage.

(c) Vi använder nu Ekvation (8.10) och får att

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= \frac{1-r}{O_1} = \frac{1 - 0{,}083}{3} \approx 0{,}30, \\ \hat{p}_\mathrm{X} &= \frac{1-r}{O_\mathrm{X}} = \frac{1 - 0{,}083}{3{,}1} \approx 0{,}30, \\ \hat{p}_2 &= \frac{1-r}{O_2} = \frac{1 - 0{,}083}{2{,}3} \approx 0{,}40. \end{aligned}$$

Ö.8.3

(a)

$$r = 1 - \frac{1}{\sum_i 1/O_i} = 1 - \frac{1}{1/2 + 1/3{,}9 + 1/4{,}6} \approx -0{,}027.$$

Eftersom marginalen är negativ så är spelarens marginal positiv och det finns därför arbitrage.

(b) Ekvation (8.11) ger att

$$\begin{aligned} \frac{K_1}{K} &= \frac{1-r}{2{,}0} \approx 0{,}52, \\ \frac{K_\mathrm{X}}{K} &= \frac{1-r}{3{,}9} \approx 0{,}26, \\ \frac{K_2}{K} &= \frac{1-r}{4{,}6} \approx 0{,}22. \end{aligned}$$

Där alltså K_1/K är andelen av insatsen som ska spelas på alternativ 1, o.s.v.

Ö.8.4

Enligt Ekvation (8.16) är den Kelly-optimala andelen

$$a^* = \frac{\mathsf{E}[X]}{O-1}.$$

Väntevärdet av spelet är $\mathsf{E}[X] = 0{,}51 - 0{,}49 = 0{,}02$ och eftersom vi dubblar vår insats vid vinst är $O = 2$. Vi får alltså att

$$a^* = \frac{0{,}02}{1} = 0{,}02.$$