Övningsuppgifter 4

Per Alexanderson, per@math.su.se

9 augusti 2010

Uppgift 4.2 *Tänk dig att du har en kortlek och drar översta kortet för att se om det är ett ess eller inte. Vi blandar och upprepar 10 gånger. Vad är sannolikheten för att vi har sett minst tre ess under våra totalt 11 dragningar?*

Lösning. Att det dyker upp ett ess sker med sannolikhet $p = 1/13$. Sannolikheten att vi ser exakt k ess under 11 dragningar ges av uttrycket

$$\binom{11}{k} p^k (1-p)^{11-k}.$$

k	Sannolikhet att se k ess
0	0.414588
1	0.380039
2	0.15835
3	0.0395874
4	0.0065979
5	0.000769755
6	0.0000641463
7	$3.81823 \cdot 10^{-6}$
8	$1.59093 \cdot 10^{-7}$
9	$4.41925 \cdot 10^{-9}$
10	$7.36541 \cdot 10^{-11}$
11	$5.57986 \cdot 10^{-13}$

Vi summerar för $k = 3, 4, \ldots, 11$ och får sannolikheten 0.0470232. □

Uppgift 4.3 *Du och en kompis kastar tärning. Om du lyckas kasta en trea* (minst) *sex gånger av 15 kast så får du två kronor av din kompis. Om du misslyckas blir du däremot tvungen att ge din kompis en krona.*

- *Vad är din förväntade vinst?*

- *Variansen för din vinst?*
- *Sannolikheten att du vinner?*

Lösning. Att få exakt k treor på 15 kast inträffar med sannolikhet

$$\binom{15}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{15-k}$$

k	Sannolikhet att slå exakt k treor
0	0.06490547151887446
1	0.19471641455662342
2	0.2726029803792728
3	0.23625591632870308
4	0.14175354979722185
5	0.06237156191077761
6	0.02079052063692587
7	0.005346133878066653
8	0.0010692267756133304
9	0.00016632416509540697
10	0.000019958899811448836
11	$1.8144454374044395 \cdot 10^{-6}$
12	$1.2096302916029598 \cdot 10^{-7}$
13	$5.582909038167507 \cdot 10^{-9}$
14	$1.595116868047859 \cdot 10^{-10}$
15	$2.1268224907304786 \cdot 10^{-12}$

Sannolikheten att vinna ges av

$$\sum_{k=6}^{15}\binom{15}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{15-k} \approx 0.0273941.$$

Väntevärdet $E(X)$ blir $2 \cdot 0.0273941 - 1 \cdot (1 - 0.0273941) \approx -0.917818$. Vidare så är $E(X^2) = 2^2 \cdot 0.0273941 + (-1)^2 \cdot (1 - 0.0273941) \approx 1.08218$. Variansen blir då $E(X^2) - (E(X))^2 = 0.239793$. □

Uppgift 4.4 *Vi skall göra ett slantsinglingsexperiment där vi singlar slant 30 gånger. Låt X_i vara 1 om du får krona i kast i och 0 annars. Det vi är intresserade av är att jämföra*

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

för $n = 5, 10, 30$ och 50. Det teoretiska väntevärdet $E[X_1] = 1/2$.

Hur stort måste n vara för att $\bar{X}_n$ inte skall avvika mer än 0.1 från $E[X_1]$? Hur stor skillnad är det mellan $\bar{X}_{30}$ och $\bar{X}_{50}$ för din serie slantsinglingar. Skiljer sig dessa åt med mer än 0.05?

Lösning. Det rör sig om ett experiment, så vi kan inte säga något med säkerhet.

Sannolikheten för att exakt k kast av n kast blir krona ges av $\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. För att avvika maximalt 0.1, frän väntevärdet $1/2$, så måste vi ha att $|k/n - 1/2| \leq 0.1$.

För $n = 30$, så måste vi slå mellan 12 och 18 kronor för att $\bar{X}_n$ skall avvika maximalt 0.1 från $1/2$. Summerar vi sannolikheterna för $n = 30, k = 12, 13, \ldots, 17, 18$ får vi ungefär 0.799512.

Gör vi detta för $n = 50$ istället, måste $20 \leq k \leq 30$ och detta sker med en sannolikhet på 0.88108. Vi kanske bör kräva att $n \geq 30$ för att det skall vara en god chans att avvikelsen är mindre än 0.1. □

Uppgift 4.6 *Om vi gör en normalapproximation av sannolikheten att vinna i Uppgift 4.3. Hur mycket skiljer sig sannolikheterna åt? Är tumregeln $np(1-p) > 5$ uppfylld?*

Lösning. Låt X_k vara slumpvariabeln vid kast k, där $X_k = 1$ om vi kastar en trea vid kast k och $X_k = 0$ för alla andra kast. Vi får då att $E(X_1) = 1 \cdot 1/6 + 0 \cdot 5/6 = 1/6$. Vi har vidare att $E(X_1^2) = 1^2 \cdot 1/6 + 0^2 \cdot 5/6 = 1/6$.

Då får vi att variansen $V(X) = (1/6) - (1/6)^2 = 5/36$, och standardavvikelsen $Sd(x)$ är $\sqrt{5}/6$. Vi har nu den information som krävs för att använda följdsats 4.7:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{15} X_i \leq 5\right) \approx \Phi\left(\frac{5 - 15 \cdot (1/6)}{\sqrt{5}/6 \cdot \sqrt{15}}\right) = \Phi(\sqrt{3}) \approx \Phi(1.732)$$

Vi har att vänsterledet beräknar sannolikheten att *förlora*, så vi är intresserade av $1 - \Phi(1.732)$. Vi använder tabellen och får att $\Phi(1.732) \approx 0.9582$, så sannolikheten att vinna är 0.0418.

Den här approximativa metoden säger alltså att vinstchansen är ca 50% mer än vad den faktiskt är.

Tumregeln att $np(1-p) \geq 5$ blir i vårt fall $15 \cdot (1/6) \cdot (5/6) \approx 2$ så det stämmer alltså inte. □

Uppgift 4.7 *Antag att du spelar 100 omgångar Roulette, och att man i varje omgång satsar en krona på nummer 7. Beräkna följande approximativa sannolikheter:*

- *att du efter 100 omgångar inte gått med förlust.*

- *att din vinst efter 100 omgångar ligger mellan -10 och 0 kronor.*

Lösning. Låt X_k vara slumpvariabeln som bestämmer vinsten i omgång k. Det gäller då att $X_k = 35$ om vi träffar nummer 7, och $X_k = -1$ för alla andra nummer.

Att vinna i en omgång sker med sannolikhet $1/37$, och detta ger 35 kronor. Väntevärdet är alltså $35/37 - 36/37 = -1/37$, vilket vi kände till sedan tidigare från kapitlet om Roulette.

Vidare så är $E(X^2) = 35^2 \cdot \frac{1}{37} + (-1)^2 \cdot \frac{36}{37} \approx 34.0811$ och vi får att

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \approx 34.0804 \Rightarrow Sd(X) = 5.83784.$$

Att inte ha gått med förlust ges av sannolikheten $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 0\right)$ vilket enligt följdsats 4.7 uppskattas som

$$1 - \Phi\left(\frac{0 - 100 \cdot (-1/37)}{5.834 \cdot \sqrt{100}}\right) \approx 1 - \Phi(0.0463) \approx 1 - 0.52 = 0.48.$$

Att vinsten ligger mellan -10 och 0 kronor ges av

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 0\right) - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq -10\right)$$

Vi beräknar på samma sätt som ovan och får då

$$\Phi\left(\frac{0 - 100 \cdot (-1/37)}{5.834 \cdot \sqrt{100}}\right) - \Phi\left(\frac{-10 - 100 \cdot (-1/37)}{5.834 \cdot \sqrt{100}}\right)$$

Detta blir $\Phi(0.0462963) - \Phi(-0.125)$ som skrivs om som $\Phi(0.0462963) + \Phi(0.125) - 1 = 0.517 + 0.547 - 1 = 0.064$.

Vi kan sluta oss till att om vi gått med förlust, så är det väldigt stor sannolikhet att vi förlorat mer än 10 kronor. □

Uppgift 4.8 *Antag att du kastar en tärning. Låt X_{1000} beteckna antalet gånger som vi av 1000 kast som tärningen visat en fyra. Vad är den approximativa sannolikheten att du får fler än $1000 \cdot E[Y]$, där Y är antalet fyror vid ett kast?*

Lösning. Låt $Y_k = 1$ om kast k var en fyra, och $Y_k = 0$ om vi ej fick en fyra. Vi har då att $X_{1000} = Y_1 + Y_2 + ... + Y_{1000}$. Vi har att $E[Y_1] = 1/6$ och att $Sd(Y) = \sqrt{1/6 - 1/36} \approx 0.372678$. Vi vill uppskatta

$$\mathbb{P}\left(X_{1000} \geq \frac{1000}{6}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{1000} Y_k \geq \frac{1000}{6}\right)$$

Vi använder centrala gränsvärdessatsen och får att detta är exakt

$$1 - \Phi\left(\frac{\frac{1000}{6} - 1000 \cdot \frac{1}{6}}{0.372678 \cdot \sqrt{1000}}\right) = 1/2$$

vilket var vad vi väntade oss: sannolikheten att vi får mer än väntevärdet bör ju vara samma som sannolikheten för att få mindre än väntevärdet. $\square$

Uppgift 5.2 *Antag att du har 200 kronor. Hur många omgångar kan du som mest spela om du*

- *om du hela tiden satsar hela ditt kapital, och vill nå upp till 800?*
- *om du spelar "Bold Play", och vill nå upp till 800?*

Lösning. För båda strategierna gäller det följande:

Första omgången kan sluta på två sätt, antingen förlorar vi och spelet tar slut, eller så når vi 400. Om vi klarar oss, så satsar vi allt igen och vi uppnår 800 eller förlorar allt. Så efter två omgångar är vi antingen bankrutt eller har 800. $\square$