STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, PWA,ML

MT1002
Tenta
22 september 2011

Lösningsförslag

Tentamen Slumpmässighet och spel

22 september 2011, kl 16-20

Uppgift 1

- Nej, $\mathsf{P}(B|C) = \mathsf{P}(B \cap C)/\mathsf{P}(C) = 0.25/0.5 = 0.5 = \mathsf{P}(B)$.
- Ja, $\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A \cap B)/\mathsf{P}(B) = 0.5/0.5 = 1 \neq \mathsf{P}(A)$.
- Ja, vi ser att B och C är oberoende, eftersom $\mathsf{P}(B \cap C) = \mathsf{P}(B) \cdot \mathsf{P}(C)$. Händelserna A och B är ej oberoende. Vi kan ej avgöra om A och C är oberoende, man behöver mer information än givet för att avgöra det.

Uppgift 2

Det finns totalt $4^4 = 256$ utfall. För att summan skall bli 6, måste något av följande inträffa:

- Vi får tre 1:or och en 3:a.
- Vi får två 1:or och två 2:or.

(Inget mer kan inträffa, har vi bara en 1:a, är summan av övriga tärningar mer än 6, och vi kan inte ha fler än tre 1:or.)

Fall 1: En av de 4 tärningarna måste vara en 3:a, så vi får $\binom{4}{1} = 4$ gynnsamma händelser.

Fall 2: Två av de 4 tärningarna måste vara en 2:a, så vi får $\binom{4}{2} = 6$ gynnsamma händelser.

Totalt har vi då 10 gynnsamma händelser, vilket ger oss sannolikheten $10/256 \approx 0.04$.

Uppgift 3

Låt X var slumpvariabeln som betecknar antalet kronor man får tillbaka. Vi har 36 utfall totalt, varav 30 av dessa ger en vinst på bara 1 krona. Vi har också sex fall där man får tillbaka $2, 4, 6, 8, 10$ resp. 12 kronor.

Vi får då

$$\begin{cases} \mathsf{P}(X = 1) = 30/36 \\ \mathsf{P}(X = 2) = 1/36 \\ \mathsf{P}(X = 4) = 1/36 \\ \mathsf{P}(X = 6) = 1/36 \\ \mathsf{P}(X = 8) = 1/36 \\ \mathsf{P}(X = 10) = 1/36 \\ \mathsf{P}(X = 12) = 1/36 \end{cases}$$

Väntevärdet på antal kronor vi får tillbaka blir då

$$E[X] = \frac{30}{36} + \frac{1}{36}(2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12) = \frac{72}{36} = 2$$

Väntevärdet när vi tar med avgiften i beräkningen blir då $2 - 3 = -1$.

Uppgift 4

Från boken vet vi att marginalen, r, för ett spelbolag ges enligt

$$r = 1 - \frac{1}{\sum_i \frac{1}{O_i}},$$

där O_i är det satta oddset för möjlighet i. Använder vi detta samband får vi att

Bolag 1: $r = 1 - 1/(1/1,85 + 1/1,85) \approx 0,075$
Bolag 2: $r = 1 - 1/(1/1,95 + 1/1,85) \approx 0,051$
Bolag 3: $r = 1 - 1/(1/1,70 + 1/2,00) \approx 0,081$

För att hitta arbitrage kombinerar vi det högsta oddset för varje alternativ, oavsett hos vilket bolag det ges. Vi får då att det högsta oddset för att det blir en flicka är 1,95 och det högsta oddset för att det blir en pojke är 2,00. Detta spel skulle ge en marginal på

$$r = 1 - 1/(1/1,95 + 1/2,00) \approx 0,013,$$

vilket fortfarande är större än 0, d.v.s. till spelarens nackdel. Med andra ord finns det inget arbitrage att finna.

Uppgift 5

a) För att lyckas med din uppgift måste du vinna 4 gånger i rad, d.v.s. du måste öka ditt kapital enligt $50 \to 100 \to 200 \to 400 \to 800$. Sannolikheten för detta, ges p.g.a. oberoende enligt

$$P(\text{öka kapital från 50:- till 800:-}) = p \cdot p \cdot p \cdot p = p^4 \approx 0,06,$$

d.v.s. din chans att lyckas är ca 6%.

b) Kuggfråga: i denna situation sammanfaller “Bold-play” med föregående strategi.

Uppgift 6

Från boken vet vi att Hi-Lo systemets poäng är 1 för alla valörer $2, \ldots, 6$, 0 poäng för 7,8,9, samt -1 för 10 och Ess, d.v.s.

Valör	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Ess	
Antal	4	2	9	14	3	10	8	11	3	4	$\sum = 68$
Poäng	4	2	9	14	6	0	0	0	-3	-4	$\sum = 25$

Vidare så vet vi att det finns $N = 6 \cdot 52 = 312$ kort och $n = 68$ är spelade.

a) Från tabellen ovan kan vi utläsa att den löpande poängen är 25.

b) Eftersom den löpande poängen är 25, blir enligt boken den sanna poängen

$$\frac{25}{\frac{N-n}{52}} \approx 5,33.$$

c) Enligt Hi-Lo systemet vet vi att spelets väntevärde i denna situation bör vara större än 0, eftersom den sanna poängen är större än 1, vilket motsvarar en fördel för spelaren.

d Nej, skulle vi byta alla 10:or och Ess mot 3:or skulle vi endast öka den löpande poängen till $25 + 7 = 32$, vilket skulle ge den sanna poängen

$$\frac{32}{\frac{N-n}{52}} \approx 6,82.$$