



# Föreläsning 4 och 5

## Kapitel 4 och 5

# Målet med dagens föreläsning är...

- ...bestämna sannolikheten att vinna ett visst antal spel när vi spelar flera gånger
- ...att undersöka vad som händer då vi spelar många spel
- ...lära oss några bra och några dåliga spelstrategier

# Hur många spel vinner vi?

Vi kommer betrakta spel där man antingen

vinner, med sannolikhet  $p$

eller förlorar, med sannolikhet  $1 - p$

Vi tänker oss att vi spelar spelet flera gånger.

# Hur många spel vinner vi?

## Exempel (Singla slant)

Antag att Patrik och Per singlar slant. Om det blir krona ger Per 1 krona till Patrik, och annars tvärtom

Vi är nu intresserade av sannolikheten att Patrik vinner fler än 1 av 3 spel

Låt  $X$  vara antalet spel som Patrik vinner och låt  $V$  beteckna vinst och  $F$  förlust

Om vi antar att myntet inte är skevt, så bör det vara lika stor sannolikhet att Patrik får  $VFV$  som  $VVF$  och  $FVV$ , d.v.s.

$$\mathbb{P}(\{VFV\}) = \mathbb{P}(\{VVF\}) = \mathbb{P}(\{FVV\}) = p^2(1 - p)$$

Men, vi är intresserade av *antalet* vinster inte *ordningen*

# Hur många spel vinner vi?

## Exempel (Forts. Singla slant)

T.ex. så

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{VFV\} \cup \{VVF\} \cup \{FVV\}) = 3p^2(1 - p)$$

Men på hur många sätt kan man göra 2 vinster och 1 förlust på 3 spel? Jo, på

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$$

sätt, d.v.s.

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{3}{2} p^2(1 - p)$$

# Hur många spel vinner vi?

## Exempel (Forts. Singla slant)

Om vi gör på samma sätt för 3 av 3 vinster får vi

$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}\{VVV\} = \binom{3}{3} p^3 = p^3$$

Sannolikheten att Patrik vinner fler än 1 av 3 spel blir alltså

$$\mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}(X \geq 2) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = 3p^2(1-p) + p^3$$

Eftersom vi antar att myntet inte är skevt, så är  $p = 1/2$  och vi får

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$$

Alternativt hade vi kunnat använda  $\mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1)$

# Hur många spel vinner vi?

Mer allmänt gäller följande

## Sats

*Låt  $X$  vara en slumpvariabel som beskriver hur många spel som har vunnits av totalt  $n$  spel. Sannolikheten att vinna  $x$  av  $n$  spel ges då av*

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x},$$

*för  $x = 0, 1, \dots, n$ , och en slumpvariabel vars sannolikheter uppfyller detta samband sägs vara Binomial-fördelad med parametrar  $n$  och  $p$ .*

**Kommentar:** En slumpvariabel  $X$  som är binomialfördelad med parametrar  $n = 1$  och  $p$  sägs vara *Bernoulli-fördelad*

# Hur många spel vinner vi?

## Exempel (Roulette)

Vad är sannolikheten att vi vinner fler än 3 av 10 spel om vi spelar Roulette och satsar på nummer 3?

Om vi låter  $X$  beteckna antalet vinster, så söker vi

$$\mathbb{P}(X > 3) = \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) + \dots + \mathbb{P}(X = 10).$$

Lättare är

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 3) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 3) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) - \mathbb{P}(X = 3)\end{aligned}$$

# Hur många spel vinner vi?

## Exempel (Forts. Roulette)

Enligt satsen har vi

$$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{10}{0} (1 - p)^{10} \approx 0,7603$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \binom{10}{1} p(1 - p)^9 \approx 0,2112$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{10}{2} p^2(1 - p)^8 \approx 0,0264$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{10}{3} p^3(1 - p)^7 \approx 0,0020$$

vilket ger oss

$$\mathbb{P}(X > 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3) \approx 1 - 0,9999 = 0,0001$$

# Hur många spel vinner vi?

Om vi spelar 10 likadana spel, hur många förväntas vi vinna?

I varje spel vinner vi med sannolikhet  $p$  oberoende av alla tidigare spel

Låt  $X_i$  vara slumpvariabeln som registrerar om vi vinner spel  $i$

Vid vinst låter vi  $X_i = 1$  och annars 0

Antalet vunna spel blir då  $X_1 + X_2 \dots + X_{10}$

Det ger oss att

$$E[X_i] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

Från våra räkneregler om väntevärden av summor av slumpvariabler vet vi att

$$E[X_1 + X_2 + \dots + X_{10}] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_{10}] = 10p$$

# Hur många spel vinner vi?

Vi kan göra på liknande sätt för variansen av antal spel som vi vinner

Eftersom vart och ett av våra 10 spel är oberoende och identiska får vi från våra räkneregler för variansen av summor av slumpvariabler att

$$V(X_1 + \dots + X_{10}) = V(X_1) + \dots + V(X_{10}) = 10V(X_1)$$

För att kunna räkna ut  $V(X_1)$  beräknar vi först  $E[X_1^2]$  som blir

$$E[X_1^2] = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1 - p) = p$$

Definitionen av varians ger oss sedan

$$V(X_1) = E[X_1^2] - E[X_1]^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

D.v.s.

$$V(X_1 + \dots + X_{10}) = 10p(1 - p)$$

# Hur många spel vinner vi?

Dessa samband gäller för alla binomialfördelade slumpvariabler

## Sats

*Låt  $X$  vara en binomialfördelad slumpvariabel med parametrar  $n$  och  $p$ . Då gäller att*

$$E[X] = np,$$

*samt att*

$$V(X) = np(1 - p).$$

# Hur många spel vinner vi?

## Exempel (Roulette)

Hur många spel av 10 förväntas vi vinna om vi spelar Roulette?  
och vad blir variansen?

För att besvara frågan använder vi vår sats med  $n = 10$  och  
 $p = 1/37$  och låter  $X$  beteckna antal vinster.

Vi får då att

$$E[X] = np = 10 \cdot \frac{1}{37} \approx 0,2703$$

$$V(X) = np(1 - p) = 10 \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{36}{37} \approx 0,2630$$

Med andra ord är det inte orimligt med variationer på ca  
 $\pm Sd(X) \approx \pm 0,5128$  kring väntevärdet

Det finns några problem med det vi gjort hittills

- Fungerar bara för enkla spel
- Svårt att dra kvalitativa slutsatser
- Svårt att beräkna (även med dator)

Säg att vi vill beräkna sannolikheten att vinna 80 av 180 spel  
Då behöver vi kunna räkna ut binomialkoefficienter av typen

$$\binom{180}{80} = \frac{180!}{100!80!},$$

men  $180!$  är ett oerhört stort tal!

Min dator klarar inte mer än  $170! \approx 7,257 \cdot 10^{306}$  vilket är att jämföra med antalet atomer i universum som uppskattas vara ungefär  $10^{80}$

Vi börjar med att tänka på vad som händer med vår genomsnittliga vinst, när vi spelar många gånger.

Låt  $X_i$  beteckna vinsten i omgång  $i$ .

Vi antar att omgångarna är oberoende och att  $E[X_i] = \mu$  och

$$V[X_i] = \sigma^2 > 0$$

Vår genomsnittliga vinst efter  $n$  spelade omgångar blir då

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Frågan är vad som händer när  $n$  växer

Låt oss spela på rött på rouletten 1000 gånger.

Sannolikheten för vinst är  $18/37 \approx 0,486$

Film

Slutsats: När man spelat många gånger kommer andelen vinster vara nära sannolikheten för vinst

Om  $X_i = 1$  vid vinst och 0 annars så blir

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

andelen vinster och  $E[X_i] = \mathbb{P}(\text{vinst})$ .

Vi spelar nu istället på ett nummer på rouletten 1000 gånger.  
Om  $X_i$  betecknar vinsten i omgång  $i$  så är

$$E[X_i] = 35 \frac{1}{37} + (-1) \frac{36}{37} = -\frac{1}{37}$$

Låt oss se vad som händer med medelvinsten (Film)  
Slutstats: Genomsnittliga vinsten närmar sig väntevärdet

Vad är det som händer? Låt oss räkna

$$E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

$$V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} nV(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Väntevärdet för genomsnittet påverkas inte av antalet omgångar. Variansen minskar dock.

Därför:  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \approx \mu$

Detta är Stora talens lag

Det är viktigt att STL *inte* betyder att

$$\sum_{i=1}^n X_i \approx n\mu$$

Vi har ju nämligen att

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = nV(X_i) = n\sigma^2$$

Så att  $\sum_{i=1}^n X_i$  går inte att approximera med något icke slumpmässigt, oavsett hur stort  $n$  är

Stora talens lag är mycket användbar men för spelaren är det den faktiska vinsten som är intressant inte den genomsnittliga. Antag att vi satsar 1:- på röd/svart 100 gånger. Hur stor blir vinsten/förlutsen?

Film

Centrala gränsvärdessatsen = histogrammet kommer "alltid" följa klock-kurvan

# Den faktiska vinsten - ett annat spel

Vi tänker oss att vi istället spelar 1:- på 1-12 på roulette. Hur betar sig den faktiska vinsten då?

Samma väntevärde, ingen skillnad i STL. Annan varians

Film

Vad händer om vi spelar mer än 100 gånger?

Film

Utseendet på kurvan skiljer sig åt beroende på väntevärde, varians och antalet omgångar.

För att kunna formulera en sats som gäller för alla spel behöver vi en storhet som inte påverkas av väntevärde, varians och antalet omgångar

# Den faktiska vinsten - normaliserad storhet

Förslag: Betrakta istället

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nE[X_1]}{\text{Sd}(X)\sqrt{n}}$$

Då är nämligen

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nE[X_1]}{\text{Sd}(X)\sqrt{n}}\right] &= \frac{1}{\text{Sd}(X_1)\sqrt{n}} E\left[\sum_{i=1}^n X_i - nE[X_1]\right] \\ &= \frac{1}{\text{Sd}(X_1)\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n E[X_i] - nE[X_1]\right) = 0 \\ V\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nE[X_1]}{\text{Sd}(X)\sqrt{n}}\right) &= \frac{1}{V(X_1)n} V\left[\sum_{i=1}^n X_i - nE[X_1]\right] \\ &= \frac{1}{V(X_1)n} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{nV(X_1)}{V(X_1)n} = 1 \end{aligned}$$

Histogrammen och skalningen motivererar oss att formulera:

## Sats (Centrala gränsvärdessatsen)

Låt  $X_1, \dots, X_n$  vara oberoende likafördelade slumpvariabler med ändligt väntevärde  $E[X]$  och ändlig varians  $V(X)$ . Då gäller att

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nE[X]}{Sd(X)\sqrt{n}} \leq x\right) \approx \mathbb{P}(Z \leq x) = \Phi(x),$$

där  $\Phi(x)$  är fördelningsfunktionen till en normalfördelad slumpvariabel  $Z$  med väntevärde 0 och varians 1.

Längst bak i boken finns Tabell A (see Appendix A) över utvalda värden som  $\Phi(x)$  kan anta

## Exempel (Craps)

Vad är sannolikheten att vi vinner fler än 80 av 180 spel i Craps?

För att ge ett approximativt svar till denna fråga använder vi Centrala gränsvärdesatsen

Låt  $Y = \sum_{i=1}^{180} X_i$  beteckna antalet omgångar som vi vinner av totalt 180 spel, där alla  $X_i$  är slumpvariabler med väntevärde  $p$  och varians  $p(1 - p)$

Vill bestämma  $\mathbb{P}(Y > 80)$ , för att göra detta skriv om enligt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{180} X_i > 80\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{180} X_i \leq 80\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{180} X_i - 180p \leq 80 - 180p\right)\end{aligned}$$

## Exempel (Forts. Craps)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{180} X_i > 80\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{180} X_i - 180p}{\sqrt{180p(1-p)}} \leq \frac{80 - 180p}{\sqrt{180p(1-p)}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{80 - 180p}{\sqrt{180p(1-p)}}\right) \approx 1 - \Phi(-1,3011)\end{aligned}$$

I Tabell A nästan längst bak i boken ser vi att  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ , d.v.s.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{180} X_i > 80\right) &\approx 1 - \Phi(-1,3011) = 1 - (1 - \Phi(1,3011)) \\ &= \Phi(1,3011) \approx 0,9032\end{aligned}$$

Det föregående exemplet är så viktigt att vi sammanfattar resultatet i en följsats

## Följsatsats

*Låt  $X_1, \dots, X_n$  vara oberoende likafördelade slumpvariabler med ändligt väntevärde  $E[X]$  och ändlig varians  $V(X)$ . Då gäller att*

$$\mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n X_i \leq x \right) \approx \Phi \left( \frac{x - nE[X]}{Sd(X)\sqrt{n}} \right),$$

*där  $\Phi(x)$  är fördelningsfunktionen till en normalfördelad slumpvariabel med väntevärde 0 och varians 1.*

Vad händer med sannolikheten att gå med vinst när vi ökar antalet spel?

Film

Slutsats: Spelar man ett spel med negativt väntevärde tillräckligt länge kommer sannolikheten att gå med vinst närma sig 0

# Spelstrategier

Vi ska nu börja med att undersöka en strategi med vilken det faktiskt är möjligt att slå banken

*Men* vi ska se att denna strategi bygger på att vi redan har oändligt med tid och pengar

Anledningen till att vi ändå går igenom den är för att

- den är klassisk! och vanligt förekommande...
- det är lätt att förstå hur den fungerar (eller inte fungerar)

Hur går våra kasinospel till?

Vi vinner med sannolikhet  $p$  ( $p$  vanligtvis *mindre* än  $1/2$ )

Eller så förlorar vi med sannolikhet  $1 - p$

Vid vinst så vinner vi  $v$  kronor om vi satsar 1 krona

Från och med nu kommer vi endast att räkna på fallet med  $v = 1$  för att underlätta uträkningarna

Exempel på sådana spel är t.ex. Craps och amerikansk Roulette

Hur ska man göra för att slå banken?

Att slå banken är att lyckas att vända ett ofördelaktigt spel till ett fördelaktigt spel

Vi ska undersöka en strategi med vilken man kan göra en *säker* vinst om 1 krona

Hur kan man göra en säker vinst?

Om vi börjar spela och vill tjäna 1 krona i ett spel som vid vinst ger 1 krona är det naturligt att först satsa 1 krona

## **Omgång 1**

Vinner vi då vi satsar 1 krona så har vi tjänat vår krona

Förlorar vi går vi till omgång 2

## Omgång 2

Om vi förlorar vårt första spel måste vi i den andra omgången satsa så att vi i händelse av vinst

- (a) täcker vår tidigare förlust
- (b) dessutom gör 1 kronas vinst

I omgång 2 ligger vi back 1 krona och vi vill fortfarande tjäna in 1 krona

Vi måste alltså satsa 2 kronor

Om vi misslyckas i omgång 2 så går vi vidare till nästa omgång

## **Omgång 3**

I omgång 3 ligger vi back 1 krona från omgång 1 och 2 kronor från omgång 2

D.v.s. totalt 3 kronor back

Vi måste alltså satsa 4 kronor

# Hur man slår banken — Martingalstrategin

Om vi misslyckas i omgång 3 så går vi vidare till omgång 4

I omgång 4 behöver vi sedan satsa 8 kronor

Ser ni mönstret?

I omgång  $i$  behöver vi satsa  $2^{i-1}$  kronor för att vid vinst tjäna 1 krona

Eftersom vi förr eller senare kommer att vinna kommer vi med *säkerhet* kunna tjäna 1 krona

# Vad är haken?

I omgång  $i$ , d.v.s. då vi förlorat de  $i - 1$  första omgångarna, satsar vi  $2^{i-1}$  kronor

I praktiken innebär detta att vi satsar enligt

Omgång	1	5	10	15	20	30
Kronor	1	16	512	16384	524288	536870912

För att strategin ska fungera måste vi alltså redan från början ha en oändlig kassa och att kasinot tillåter obegränsade insatser. Annars finns det alltid en risk för bankrutt

## Sats ("Conservation of Fairness")

*Antag att spelaren spelar ett spel där banken har en positiv förväntad vinst, d.v.s.  $p \leq 1/2$ , och där det inte är tillåtet att göra en oändlig insats i en enskild spelomgång. Då går det inte att vända denna situation till en positiv förväntad vinst för spelaren genom att justera satsningarna eller genom att avbryta spelet.*

# Spel till spelarens nackdel

Går det att inse att det är på detta vis?

Tänk dig att du startar med en förmögenhet på  $F_0$  kronor

I första spelomgången satsar du sedan  $B_1$  kronor, där  $B_1 \geq 0$

Om  $X_1$  är utfallet av första spelomgången gäller alltså att

$$F_1 = F_0 + B_1 X_1,$$

om vi tänker oss att  $B_1$  och  $F_0$  är bestämda så gäller alltså

$$E[F_1] = E[F_0 + B_1 X_1] = F_0 + B_1 E[X_1]$$

Kom nu ihåg att spelet är till spelarens nackdel (eller som bäst rättvist), d.v.s.  $E[X_1] \leq 0$ :

$$E[F_1] \leq F_0$$

Med liknande (men mer invecklade resonemang) kan man sedan visa att det alltid gäller att

$$E[F_i] \leq F_0$$

för alla  $i$

Nyckelingrediensen är att  $E[X_i] \leq 0$  för alla  $i$

Film

# Är allt kört?

Nja...

Om vi ändå vill spela, så kan vi alltid försöka att hitta en strategi som maximerar sannolikheten att nå vårt mål

Eller om vi så vill: Minimerar sannolikheten att gå bankrutt

Sannolikheten att misslyckas är det som ofta kallas **ruinsannolikheten**

Vi kommer att se att det går att hitta strategier där sannolikheten att öka förmögenhet är *större* än  $1/2$

Trots det kommer spelet att ha negativ förväntad vinst, för i händelse av förlust kommer förlusten att vara så pass mycket större än en eventuell vinst

# Martingalstrategin med ändlig kassa

Vad är sannolikheten att vi lyckas att öka vårt kapital med 1 krona om vi har 70 kronor och spelar enligt Martingalstrategin?

Först: Hur många spel kan vi som mest förlora innan vi är bankrutt

I omgång  $i$  satsar vi  $2^{i-1}$  kronor, så efter  $t$  omgångar har vi satsat  $\sum_{i=1}^t 2^{i-1}$  kronor.

Vi har att

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^t 2^{i-1} &= 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{t-1}) \\ &= 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^t = \sum_{i=1}^t 2^{i-1} + 2^t - 1 \end{aligned}$$

# Martingalstrategin med ändlig kassa

Så att

$$\sum_{i=1}^t 2^{i-1} = 2^t - 1$$

Vi kan därför inte förlora fler omgångar än att

$$2^t - 1 \leq 70$$

Det största  $t$  som uppfyller denna olikhet är  $t = 6$

Konsekvens: Om vi förlorar  $2^6 - 1 = 63$  kronor, så har vi 7 kronor kvar

Sannolikheten att nå 71 kronor då vi startar med 7 kronor och spelar enligt Martingalstrategin är mycket liten, och vi bortser från möjligheten att lyckas med detta

# Martingalstrategin med ändlig kassa

Sannolikheten att öka vårt kapital med 1 krona då vi startar med 70 kronor ges därför av

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{\text{öka kapitalet med 1 då vi startar med 70 kronor}\}) \\ & \approx 1 - \mathbb{P}(\{\text{Förlora 6 gånger}\}) = 1 - (1 - p)^6 \end{aligned}$$

För att underlätta notationen inför vi

$$\mathbb{P}(\{\text{öka kapitalet med } m \text{ då vi startar med } k \text{ kronor}\}) = \mathbb{P}(\{k \rightarrow k+m\})$$

Om vi spelar Craps gäller att  $p = 244/495$

$$\mathbb{P}(\{70 \rightarrow 71\}) \approx 1 - (1 - p)^6 \approx 0,983,$$

vilket är mycket större än  $1/2$

# Martingalstrategin med ändlig kassa

Hur går detta ihop? För att undvika förvirring så utgår vi från att vårt startkapital är exakt 63 kr, d.v.s.  $2^6 - 1 = 63$

Vad kan hända? Endera vinner vi 1 krona med sannolikhet 0,983

*Eller* så förlorar vi 63 kronor med sannolikhet 0,017

D.v.s. vi gör en förväntad vinst som är

$$0,983 + (-63) \cdot 0,017 = -0,088$$

En annan fråga vi kan ställa oss är: Hur stort kapital behöver vi minst ha för att sannolikheten att tjäna 1 krona ska vara minst 0,99 i ett spel där sannolikheten att vinna en omgång är  $p$ ?

Vi vill alltså hitta det minsta  $t$  sådant att  $(1 - p)^t \leq 0,01$

Om vi tänker oss att vi spelar Craps, d.v.s.  $p = 244/495$ , så får vi att  $t = 7$

Detta motsvarar ett startkapital på  $2^7 - 1 = 127$  kronor

Om vi istället vill att sannolikheten att gå bankrutt inte får överstiga 0,001 så skulle vi istället få  $t = 11$  och startkapitalet skulle behöva vara *minst*  $2^{11} - 1 = 2047$  kronor

# Martingalstrategin med ändlig kassa

Nu har vi undersökt vad som händer om vi har 70 kronor och vill öka vår kassa med 1 krona

Men hur ser det ut om vi istället skulle vilja öka vår kassa med 30 kronor?

Detta motsvarar att vi spelar enligt Martingalstrategin och tjänar ihop 1 krona åt gången, trettio gånger i rad

Om vi bara vill öka vårt kapital med 1 krona och vi startar med 70 kronor så kan vi som mest förlora  $t = 6$  spel

Om vi istället skulle starta med 99 kronor och vill öka vårt kapital med 1 krona så kan vi fortfarande som mest förlora  $t = 6$  spel

# Martingalstrategin med ändlig kassa

Med andra ord så gäller

$$\mathbb{P}(\{70 \rightarrow 71\}) \approx \mathbb{P}(\{71 \rightarrow 72\}) \approx \dots \approx \mathbb{P}(\{99 \rightarrow 100\}) \approx 1 - (1 - p)^6$$

Att öka vårt kapital med 30 kronor motsvarar alltså att vi ska spela (och vinna) 30 likadana spel där sannolikheten för vinst är  $1 - (1 - p)^6$

D.v.s. sannolikheten att öka kapitalet med 30 kronor blir

$$\mathbb{P}(\{70 \rightarrow 100\}) \approx (\mathbb{P}(\{70 \rightarrow 71\}))^{30} \approx (1 - (1 - p)^6)^{30}$$

För Craps får vi att denna sannolikhet blir

$$\mathbb{P}(\{70 \rightarrow 100\}) \approx 0,983^{30} \approx 0,598,$$

vilket fortfarande är större än  $1/2$  (men den förväntade vinsten är fortfarande negativ)

# En försiktigare strategi

## Samma satsning varje gång

Vi tänker oss att vi fortfarande spelar samma spel, d.v.s. satsar vi 1 krona och vinner, så vinner vi 1 krona

En annan klassisk, mer försiktig, strategi är "Gamblers ruin"

I denna strategi satsar spelaren *alltid* 1 krona tills dess att

pengarna är slut

spelaren har ökat sitt kapital med önskat belopp

Vi ska nu undersöka hur denna strategi betar sig jämfört med Martingalstrategin

# En försiktigare strategi

## Samma satsning varje gång

Låt oss börja med den enklaste situationen och frågan: Vad är sannolikheten att lyckas öka sitt kapital från 1 krona till 3 kronor då vi hela tiden satsar 1 krona?

I termer av vår tidigare notation så söker vi  $\mathbb{P}(\{1 \rightarrow 3\})$

Men om vi startar med 1 krona och satsar den, vad kan hända?

Endera har vi tjänat 1 krona och har totalt 2 kronor eller så har vi gått bankrutt

Enligt Lagen om total sannolikhet gäller alltså

$$\mathbb{P}(\{1 \rightarrow 3\}) = p \cdot \mathbb{P}(\{2 \rightarrow 3\}) + (1-p) \cdot \mathbb{P}(\{0 \rightarrow 3\}) = \mathbb{P}(\{2 \rightarrow 3\}) \cdot p$$

# En försiktigare strategi

## Samma satsning varje gång

Om vi istället startar med 2 kronor och vill nå 3 kronor får vi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{2 \rightarrow 3\}) &= p \cdot \mathbb{P}(\{3 \rightarrow 3\}) + (1 - p) \cdot \mathbb{P}(\{1 \rightarrow 3\}) \\ &= p + (1 - p) \cdot \mathbb{P}(\{1 \rightarrow 3\})\end{aligned}$$

Vi har alltså följande samband

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{1 \rightarrow 3\}) &= \mathbb{P}(\{2 \rightarrow 3\}) \cdot p \\ \mathbb{P}(\{2 \rightarrow 3\}) &= p + \mathbb{P}(\{1 \rightarrow 3\}) \cdot (1 - p)\end{aligned}$$

Kombinerar vi dessa får vi att

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{1 \rightarrow 3\}) &= \frac{p^2}{1 - p + p^2} = \frac{1 - \frac{1-p}{p}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^3} \\ \mathbb{P}(\{2 \rightarrow 3\}) &= \frac{p}{1 - p + p^2} = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^3}\end{aligned}$$

# En försiktigare strategi

## Samma satsning varje gång

Vi ser alltså att vi får  $\mathbb{P}(\{2 \rightarrow 3\})$  på köpet!  
Om vi spelar Craps får vi att

$$\mathbb{P}(\{1 \rightarrow 3\}) \approx 0,324$$

$$\mathbb{P}(\{2 \rightarrow 3\}) \approx 0,657$$

### Sats (Samma satsning)

*Antag att spelaren spelar ett spel som vid vinst ger tillbaka två gånger insatsen och att spelaren hela tiden satsar 1 krona. Sannolikheten att öka kassan med  $k$  kronor då kassan vid spelets start är  $m$  kronor ges då som*

$$\mathbb{P}(\{m \rightarrow m+k\}) = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^m}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{m+k}} & \text{om } p \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{m}{m+k} & \text{om } p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Om vi vill tjäna en summa som är stor relativt vår förmögenhet, t.ex. dubblera den, är det inte bra att göra många små satsningar.

Ett alternativ är att satsa hela förmögenheten i varje omgång.  
Vad händer då?

Vi tänker oss som tidigare att vi tjänar 1 krona per satsad krona vid vinst, vilket inträffar med sannolikhet  $p$

## Exempel (Gå från 2 till 6 kronor i Craps)

Vad blir sannolikheten att öka vårt kapital från 2 till 6 kronor i Craps om vi i varje omgång satsar allt?

Om vi vinner den första omgången har vi  $2 \cdot 2 = 4$  kronor

Om vi sedan vinner den andra omgången har vi  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$  kronor vilket är mer än 6 kronor och vi är framme

Sannolikheten att lyckas är alltså  $p^2 = (244/495)^2 \approx 0,243$

Vi ser att som för Martingalstrategin får vi svårt att "pricka" det önskade beloppet

Allmänt gäller följande

## Sats (Allt på ett kort)

*Sannolikheten att öka kapitalet från  $m$  till  $m + k$  kronor då spelaren i varje spel satsar hela sitt kapital ges som*

$$\mathbb{P}(\{m \rightarrow m + k\}) = p^t$$

*där  $t$  är det minsta tal sådant att*

$$2^t m \geq m + k$$

# Avvägd satsning — "Bold-Play"

Om vi hela tiden satsar allt så ser vi att vi ganska snabbt tar onödiga risker

I exemplet där vi ville öka vårt kapital från 2 till 6 kronor så såg vi redan där att det var dumt

Efter första spelomgången hade det räckt att satsa 2 kronor för att nå upp till 6 kronor

Principen för Bold-Play är följande

fram tills dess att förmögenheten är mindre än hälften så stor som den önskade förmögenheten så satsa allt  
annars satsar man precis det som krävs för att komma till den önskade förmögenheten

## Exempel (Gå från 2 till 6 kronor i Craps)

Vad är sannolikheten att öka förmögenheten från 2 till 6 kronor om vi spelar Craps och spelar Bold-Play?

**Omgång 1:** Satsa allt, vid vinst så har vi 4 kronor, annars 0, d.v.s.

$$\mathbb{P}(\{2 \rightarrow 6\}) = p \cdot \mathbb{P}(\{4 \rightarrow 6\}) + (1-p) \cdot \mathbb{P}(\{0 \rightarrow 6\}) = p \cdot \mathbb{P}(\{4 \rightarrow 6\})$$

**Omgång 2:** Satsa det som krävs, alltså 2 kronor

Vid vinst har vi 6 kronor, annars är vi tillbaka på 2 kronor, d.v.s.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{4 \rightarrow 6\}) &= p \cdot \mathbb{P}(\{6 \rightarrow 6\}) + (1-p) \cdot \mathbb{P}(\{2 \rightarrow 6\}) \\ &= p + (1-p) \cdot \mathbb{P}(\{2 \rightarrow 6\})\end{aligned}$$

## Exempel (Gå från 2 till 6 kronor i Craps)

Kombinerar vi dessa får vi att

$$\mathbb{P}(\{2 \rightarrow 6\}) = \frac{p^2}{1 - p + p^2} \approx 0,324$$

vilket är att jämföra med

Martingal	Samma satsning	Allt på ett kort
0,269	0,315	0,243

Eftersom Bold-Play bygger på att man hela tiden håller koll på hur den nuvarande kassanivåns förhållande till den förmögenhet man vill nå blir denna strategi mer invecklad att analysera

Om man tar fram liknande relationer som de som vi tog fram i exemplet ovan är det relativt enkelt att räkna ut de sökta sannolikheterna med hjälp av en dator

## Sats ("Bold-Play")

*Ingen strategi är bättre än "Bold-Play", d.v.s. sannolikheten att lyckas blir aldrig högre än för "Bold-Play", då vinstsannolikheten i en enskild spelomgång är mindre eller lika med  $1/2$ .*