Föreläsning 4

Kapitel 3: Keno

Agenda

Målet med dagens föreläsning är

...att lära oss grunderna i kombinatorik

...att använda detta för att räkna på Keno

Keno-regler

Stockholms universitet

Spelaren väljer mellan 1 och 11 nummer från 1 till 70
Spelaren gör en insats på mellan 5 och 100:-
Kasinot drar 20 nummer och spelarens vinst beror på hur många rätt han har
Kommer från Kina
Spelas både på kasinon och t.ex. Svenska Spel

Vinstplan

Vinstplanen beror på antalet nummer och vilken insats spelaren väljer

För Keno 11, 5:- är vinstplanen

Antal rätt	Utdelning (kr)
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	5 (frispel)
6	10
7	30
8	300
9	3000
10	125000
11	5000000

Gynnsamma möjligheter

Antag att vi kan dela upp den säkra händelsen, Ω, i m stycken oförenliga och lika sannolika händelser A_1, A_2,…,A_m.
Antag också att

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_g$$

Då är

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_g\right) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}\left(A_g\right) \\ &= \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m} = \frac{g}{m} = \frac{\text{antal gynnsamma}}{\text{antal möjliga}}\end{aligned}$$

Gynnsamma möjligheter, exempel

Exempel (Kort)

Sannolikheten att översta kortet är ett Ess är 4/52.
Detta eftersom det finns 52 möjliga kort
Alla 52 är lika sannolika
4 kort är gynnsamma

Återstår att räkna ut möjliga och gynnsamma $\Rightarrow$ kombinatorik

Multiplikationsprincipen

Sats (Multiplikationsprincipen)

Att välja ut 1 element ur vart och ett av k stycken mängder med vardera n_1, n_2 till n_k stycken element kan göras på $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ sätt.

Exempel (Stryktipset)

I Stryktipset ska spelaren välja mellan 1X2 i 13 matcher. D.v.s. 3 element ska väljas ur 13 mängder och antalet sätt att göra det på är därför

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdots 3}_{\text{13 stycken}} = 3^{13} = 1594323$$

Multiplikationsprincipen, exempel I

Exempel (Stryktipset fortsättning)

Det finns bara ett sätt att få alla rätt så att sannolikheten för det är

$$\mathbb{P}(\{\text{alla rätt}\}) = \frac{g}{m} = \frac{1}{1594323}$$

Multiplikationsprincipen, exempel II

Exempel (Registreringsskyltar)

Registreringsskyltar är på formen ABC123.
23 bokstäver, 10 siffror
Totalt därför

$$23 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 12167000 \text{ stycken}$$

148 bokstavskombinationer ej tillåtna, totalt

$$148 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 148000$$

går därför bort.Alltså

$$12167000 - 148000 = 12019000$$

möjliga skyltar

Hästkapplöpning

På hur många sätt kan en hästkapplöpning med 10 hästar sluta?
På en registreringsskylt kan varje tecken vara med flera gånger, men en häst kan bara sluta på en plats
Häst nummer 1 kan sluta på 10 platser
Häst nummer 2 kan sluta på 9 platser
O.s.v.
Antalet sätt som loppet kan sluta på blir

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$$

Fakultet I

För att slippa skriva ut t.ex.

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

inför vi *fakultet*

Definition (Fakultet)

Låt n vara ett positivt heltal. Då låter vi $n!$ (läses ”n fakultet”) beteckna

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

Vi låter också speciellt $0! = 1$.

T.ex. kan alltså hästloppet sluta på $10!$ sätt.

Fakultet II

Stockholms universitet

n	$n!$
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800

Mer hästar

På hur många sätt kan prispallen i hästloppet se ut?
Första-platsen kan vara 10 olika hästar
Givet första-platsen kan andra-platsen vara 9 olika hästar
Givet första- och andra-platsen kan tredje-platsen vara 8 olika hästar
Totalt antal sätt är alltså

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10!}{7!}$$

Drag 3 hästar av 10 utan återläggning med ordning

Dragning utan återläggning med ordning

Sats

Antag att vi från n objekt drar k stycken. Om vi tar hänsyn till ordningen med vilken dessa dras kan detta göras på

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

I hästexemplet är alltså $n = 10$ och $k = 3$.
Om $k = n$ får vi

$$\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!,$$

som sig bör

Exempel, kortspel I

En vanlig kortlek kan blandas på 52! sätt.
I Texas Hold'em används bara de översta 27 korten, som kan blandas på

$$\frac{52!}{(52-27)!} = \frac{52!}{25!} \approx 5{,}2 \cdot 10^{42},$$

sätt ($n = 52$, $k = 27$)

Exempel, kortspel II

Vad är sannolikheten att de fyra översta korten är $\heartsuit E$, $\spadesuit E$, $\diamondsuit E$, $\clubsuit E$?
Antalet möjliga blandningar är $m = 52!$
För att vara gynnsam ska de första 4 korten var precis $\heartsuit E$, $\spadesuit E$, $\diamondsuit E$, $\clubsuit E$, vilket kan göras på 1 sätt
De övriga 48 korten kan vara blandade hur som helst
Så alla 48! blandningar av dem är OK.
Sannolikheten blir

$$\begin{aligned} \frac{g}{m} &= \frac{1 \cdot 48!}{52!} = \frac{48 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{1}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} = \frac{1}{6497400} \end{aligned}$$

Exempel, Black Jack

På hur många sätt kan en BJ-kortlek blandas?
Färg spelar ingen roll, 10, Kn, D, K räknas alla som 10
Om alla kort är unika finns det 52! blandningar
Alla 2:or är lika så att vi dubbelräknar $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ gånger
10-korten har vi dubbelräknat 16! gånger
Antalet sätt blir därför

$$\frac{52!}{(4!)^9 16!} \approx 1{,}4592 \cdot 10^{42}$$

Dragning utan återläggning utan ordning

Vi har hittills tagit hänsyn till ordningen
I Keno spelar det ingen roll i vilken ordning siffrorna dras
I poker spelar det ingen roll i vilken ordning man får sina kort
Det är därför intressant med dragning utan återläggning *utan* ordning

Välja Keno-siffror I

På hur många sätt kan man spela Keno 3?
D.v.s. på hur många sätt kan man välja 3 siffror från 70 när ordningen inte spelar roll
Om vi tar hänsyn till ordningen är antalet sätt

$$70 \cdot 69 \cdot 68 = \frac{70!}{(70-3)!}$$

Säg att vi (i ordning) valde $45, 4, 63$. Eftersom ordningen är oviktig är dessa lika för oss

$$\begin{array}{ccc} 4 & 45 & 63 \\ 4 & 63 & 45 \\ 45 & 4 & 63 \\ 45 & 63 & 4 \\ 63 & 4 & 45 \\ 63 & 45 & 4 \end{array}$$

Välja Keno-siffror II

Vi har alltså räknat varje rad $6 = 3!$ gånger
Antalet olika Keno 3-rader blir därför

$$\frac{70!}{3!(70-3)!} = 54740$$

I allmänhet

Sats (Dragning utan återläggning utan ordning)

Antag att vi från n objekt drar k stycken. Om vi inte tar hänsyn till ordningen med vilken dessa dras är antalet sätt detta kan göras på

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Binomialkoefficienten

$\binom{n}{k}$ kallas för binomialkoefficient och kan läsas ”n över k” eller ”n välj k”
Bara ett smidigare sätt att skriva just

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exempel, Lotto I

I svenska Lotto dras 7 siffror från 35
Vad är sannolikheten att få alla rätt?
Ordningen oviktig så antalet möjliga lottorader är antalet sätt att dra 7 av 35

$$
\begin{aligned}
m &= \binom{35}{7} = \frac{35!}{7!(35-7)!} = \frac{35 \cdot 34 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{7!(28 \cdot 27 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1)} \\
&= \frac{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\
&= 6724520
\end{aligned}
$$

För att få alla 7 rätt så ska 7 siffror av 7 dras. Antalet gynnsamma blir

$$
g = \binom{7}{7} = \frac{7!}{7!(7-7)!} = \frac{7!}{7!0!} = 1
$$

Exempel, lotto II

Sannolikheten att få 7 rätt blir därför

$$\frac{g}{m} = \frac{1}{6724520}$$

Keno, vinstsannolikheter I

Stockholms universitet

För att räkna ut sannolikheten att få ett visst antal rätt i Keno behöver vi m och g

Antalet möjliga är alltså antalet möjliga Keno-rader

Kasinot drar 20 av 70 siffror och ordningen är oviktig. Antalet möjliga rader är därför

$$m = \binom{70}{20}$$

Om vi spelar Keno 11 väljer vi 11 siffror av 70. Hur många av de m möjliga raderna gör att vi får alla rätt?

Keno, vinstsannolikheter II

Dela upp de 70 siffrorna i två grupper, de 11 vi valt och de 59 övriga

För att dragningen ska vara gynnsam ska 11 siffror dras från första gruppen. Antalet sätt som det kan göra på är

$$\binom{11}{11} = 1$$

Dessutom ska 9 siffror från den andra gruppen dras. Antalet sätt för det är

$$\binom{59}{9}$$

Multiplikationsprincipen säger att antalet sätt att göra dessa två dragningar tillsammans är

$$g = \binom{11}{11}\binom{59}{9}$$

Keno, vinstsannolikheter III

Låt X vara en slumpvariabel som betecknar antalet rätt. Då blir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 11) &= \frac{g}{m} = \frac{\binom{11}{11}\binom{59}{9}}{\binom{70}{20}} \\ &= \frac{12565671261}{161884603662657876} \approx 7{,}77621 \cdot 10^{-8}\end{aligned}$$

För att räkna slhen för 10 rätt är antalet möjliga fortfarande $\binom{70}{20}$
Antalet gynnsamma blir istället

$$g = \binom{11}{10}\binom{59}{10}$$

$$\mathbb{P}(X = 10) = \frac{\binom{11}{10}\binom{59}{10}}{\binom{70}{20}} = \dots$$

Keno, vinstsannolikheter IV

På samma sätt för $k = 1,2,\ldots,11$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{11}{k}\binom{59}{20-k}}{\binom{70}{20}}$$

X sägs vara hypergeometriskt fördelad.
Notera

$$\begin{aligned} 11 + 59 &= 70 \\ k + 20 - k &= 20 \end{aligned}$$

Keno, vinstsannolikheter V

Stockholms universitet

Antal rätt	Sannolikhet	Antal rätt	Sannolikhet
0	$\frac{\binom{11}{0}\binom{59}{20}}{\binom{70}{20}} \approx 0{,}01726$	6	$\frac{\binom{11}{6}\binom{59}{14}}{\binom{70}{20}} \approx 0{,}037952$
1	$\frac{\binom{11}{1}\binom{59}{19}}{\binom{70}{20}} \approx 0{,}09495$	7	$\frac{\binom{11}{7}\binom{59}{13}}{\binom{70}{20}} \approx 8{,}2505 \cdot 10^{-3}$
2	$\frac{\binom{11}{2}\binom{59}{18}}{\binom{70}{20}} \approx 0{,}21999$	8	$\frac{\binom{11}{8}\binom{59}{12}}{\binom{70}{20}} \approx 1{,}1410 \cdot 10^{-3}$
3	$\frac{\binom{11}{3}\binom{59}{17}}{\binom{70}{20}} \approx 0{,}28285$	9	$\frac{\binom{11}{9}\binom{59}{11}}{\binom{70}{20}} \approx 9{,}5086 \cdot 10^{-5}$
4	$\frac{\binom{11}{4}\binom{59}{16}}{\binom{70}{20}} \approx 0{,}22365$	10	$\frac{\binom{11}{10}\binom{59}{10}}{\binom{70}{20}} \approx 4{,}2692 \cdot 10^{-6}$
5	$\frac{\binom{11}{5}\binom{59}{15}}{\binom{70}{20}} \approx 0{,}11386$	11	$\frac{\binom{11}{11}\binom{59}{9}}{\binom{70}{20}} \approx 7{,}7621 \cdot 10^{-8}$

Keno, vinstsannolikheter VI

Sannolikheten att vinna något är

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{\text{Vinna något}\}) = \mathbb{P}(X \geq 5) \\
&= \mathbb{P}(X = 5) + \mathbb{P}(X = 6) + \mathbb{P}(X = 7) + \mathbb{P}(X = 8) \\
&+ \mathbb{P}(X = 9) + \mathbb{P}(X = 10) + \mathbb{P}(X = 11) \\
&\approx 0{,}16130
\end{aligned}
$$

Keno, väntevärde I

Inför slumpvariabeln U som betecknar utdelningen från ett Keno-spel

Då gäller att

$$\mathrm{E}\left[U\right] = \sum_x x\mathbb{P}(U = x)$$

Från vinstplanen ser vi att $U = 5$ precis då $X = 5$, så att $\mathbb{P}\left(U = 5\right) = \mathbb{P}\left(X = 5\right)$

P.s.s. är $U = 10$ precis då $X = 6$, så att $\mathbb{P}\left(U = 10\right) = \mathbb{P}\left(X = 6\right)$ o.s.v.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[U\right] &= 5 \cdot \mathbb{P}\left(X = 5\right) + 10 \cdot \mathbb{P}\left(X = 6\right) + 30 \cdot \mathbb{P}\left(X = 7\right) \\
&\quad + 300 \cdot \mathbb{P}\left(X = 8\right) + 3000 \cdot \mathbb{P}\left(X = 9\right) \\
&\quad + 125000 \cdot \mathbb{P}\left(X = 10\right) + 5000000 \cdot \mathbb{P}\left(X = 11\right) \approx 2{,}746
\end{aligned}$$

Keno, väntevärde II

Nu satte vi värdet på ett frispel till 5:-
Man kan också tänka sig att ett frispel bara är värt $\mathrm{E}[U]$
Vi får då istället

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[U] &= \mathrm{E}[U]\cdot\mathbb{P}(X=5)+10\cdot\mathbb{P}(X=6)+30\cdot\mathbb{P}(X=7)\\ &\quad+300\cdot\mathbb{P}(X=8)+3000\cdot\mathbb{P}(X=9)\\ &\quad+125000\cdot\mathbb{P}(X=10)+5000000\cdot\mathbb{P}(X=11)\end{aligned}$$

Som vi vill lösa för $\mathrm{E}[U]$

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[U](1-\mathbb{P}(X=5))=10\cdot\mathbb{P}(X=6)+30\cdot\mathbb{P}(X=7)\\ &+300\cdot\mathbb{P}(X=8)+3000\cdot\mathbb{P}(X=9)\\ &+125000\cdot\mathbb{P}(X=10)+5000000\cdot\mathbb{P}(X=11)\end{aligned}$$

Keno, väntevärde III

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[U] &= \frac{1}{1-\mathbb{P}(X=5)}[10\cdot\mathbb{P}(X=6)+30\cdot\mathbb{P}(X=7)\\ &\quad +300\cdot\mathbb{P}(X=8)+3000\cdot\mathbb{P}(X=9)\\ &\quad +125000\cdot\mathbb{P}(X=10)+5000000\cdot\mathbb{P}(X=11)]\approx 2{,}456\end{aligned}$$

Istället för 2,746
Spelet kostar 5:-, så vinsten V blir

$$V = U - 5$$

så att

$$\mathrm{E}[V] = \mathrm{E}[U-5] = E[U] - 5 = 2{,}456 - 5 = -2{,}544$$

Konsten att välja

Det spelar ingen roll om man väljer

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11

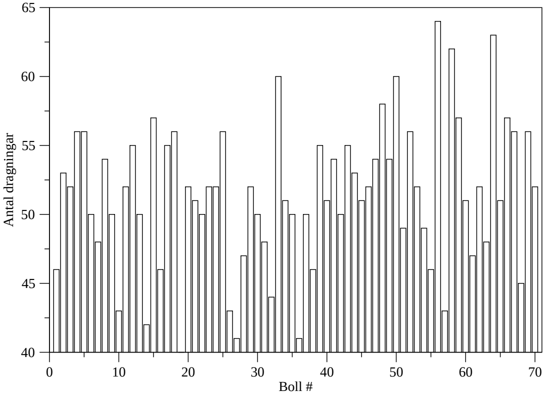
eller

2,3,12,15,17,20,54,55,59,64,66

Lotto är däremot ett skicklighetsspel!

Heta bollar

Några av Keno-bollarna har kanske högre sannolikhet att dras?



χ^2-statistikan I

Hur mycket avviker det vi observerat från det förväntade?
Vi räknar ut en storhet som är stor om avvikelsen är stor och annars liten
Kallas *statistika*, speciellt χ^2-statistikan

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

O_i är antalet gånger som boll i dragits i observationen
E_i är antalet gånger som boll i förväntas dras

$$\chi^2 = \frac{(46 - 51{,}43)^2}{51{,}43} + \frac{(53 - 51{,}43)^2}{51{,}43} + \ldots \approx 36{,}69$$

Är det mycket eller lite?

χ^2-statistikan II

Vad är $\mathbb{P}\left(\chi^2 \geq 36{,}69\right)$ om alla bollarna är lika sannolika?
Om den sannolikheten är liten tycker vi att något är skumt och säger att skillnaden är statistiskt signifikant
Det visar sig att

$$\mathbb{P}\left(\chi^2 \geq 36{,}69\right) \approx 0{,}95$$

D.v.s. vi kommer de allra flesta gångerna få en χ^2-statistika som är 36,69 eller större

Den bästa bollen I

Kanske finns det ändå någon boll som har högre sannolikhet?
Låt X_i vara antalet gånger boll i dragits
Vi har observerat $X_{56} = 64$, är det mycket?

$$\mathbb{P}(X \leq 64) \approx 0{,}025$$

Ganska mycket
Men ointressant!

Den bästa bollen II

Bättre är att räkna ut

$$\mathbb{P}\left(\max\left\{X_1, X_2, \ldots, X_{70}\right\} \geq 64\right) \approx 0{,}85$$

Alltså inte konstigt att den mest dragna bollen dragits 64 gånger

Testa tärningar I

Stockholms universitet

Vi kan använda samma metod för att testa om en tärning är korrekt.

Kasta tärningen många gånger, t.ex. K=100

Notera antalet gånger den landar på sida i och kalla det för O_i

Beräkna

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{6}{K} \sum_{i=1}^{6} (O_i - K/6)^2$$

Om vi observerar t.ex. $\chi^2 = 10{,}88$ så frågan är om $\mathbb{P}\left(\chi^2 \geq 10{,}88\right)$ är stor eller liten

Testa tärningar II

Vi kan göra en tabell över sannolikheterna

Sannolikhet	Kritisk gräns
0,1	9,2
0,05	11,0
0,01	15,1

Avvägning mellan risken att slänga en välgjord och behålla en felaktig

Sannolikheten i tabellen är sannolikheten att vi slänger en välgjord

Sannolikheten att behålla en felaktig är okänd