

ISSN: 1401-5617



**En plattas vridning och translation
under inverkan av en partikel med
given bana**

Niclas Larson

RESEARCH REPORTS IN MATHEMATICS
NUMBER 6, 2004

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
STOCKHOLM UNIVERSITY

Electronic versions of this document are available at
<http://www.math.su.se/reports/2004/6>

Date of publication: May 21, 2004

2000 Mathematics Subject Classification: Primary 70E18.

Keywords: Mekanik, dynamik, algebra, komplexa tal, didaktik.

Postal address:

Department of Mathematics

Stockholm University

S-106 91 Stockholm

Sweden

Electronic addresses:

<http://www.math.su.se/>

info@math.su.se

Två uppsatser med anknytning till linjär algebra

Filosofie licentiatavhandling

av

Niclas Larson

Uppsats 1

En plattas vridning och translation under inverkan

av en partikel med given bana

eller

“Myra på villovägar”

Detta är första delen i licentiatavhandlingen “Två uppsatser med anknytning till linjär algebra”. Avhandlingen kommer att presenteras vid ett seminarium måndagen den 14 juni 2004 klockan 10.15 i sal 306, hus 6, matematiska institutionen, Stockholms universitet, Kräftriket. Opponent är Hans Thunberg, universitetslektor vid Kungliga tekniska högskolan.

Innehåll

1	Förord	3
2	Inledning och problemformulering	4
I	Allmän lösning	4
3	Problemet angripet med vektorer	4
3.1	Införande av matematisk modell	4
3.2	Differentialekvationen	9
4	Problemet angripet med komplexa tal	12
4.1	Modellen på komplex form	12
4.2	Differentialekvationen med komplexa tal som grund	14
5	Reglering av myrans hastighet	16
II	Exempeldel	18
6	Myran går i en cirkel med plattans masspunkt i centrum	18
6.1	Det allmänna fallet	18
6.2	Platta med bestämd massa	21
6.3	Små modifieringar av den bestämda plattan	22
7	Cirkelformad rörelse med plattans masspunkt på randen	24
7.1	Allmän lösning i det givna fallet	24
7.2	Platta med bestämda egenskaper	30
8	Myran går rätlinjigt	31
9	Elliptisk rörelse	33
9.1	Beskrivning av det allmänna fallet	33
9.2	Plattor med speciella egenskaper	37
10	Sammanfattning	38

1 Förord

Bakgrunden till detta verk är att jag som gymnasielärare i Stockholms stad tillsammans med 19 andra lärare erbjöds att ägna mig åt forskarstudier under halva delen av min arbetstid i fyra år. Vad min avhandling skulle omfatta var då okänt. Vid ett tillfälle kom jag i kontakt med Jan-Erik Björk, som vid upplysningen om att jag var idrottslärare genast började prata om matematiska problem inom idrotten. Vi talades vid med jämna mellanrum och vid en av våra sammankomster nämndes det problem som är bakgrunden till denna uppsats om myran.

Efter diskussion med mina huvudhandledare, inleddes Jan-E i handledargruppen och vi beslutade oss för att börja arbeta med problemet. Det största målet har för mig varit att beskriva problemet och dess lösning så utförligt som möjligt, för att göra avhandlingen läsbar för en större grupp. Eftersom jag har lärarbakgrund såg jag det som en viktig del av arbetet. Vi har dessutom tittat på olika sätt att lösa problemet och jämfört de olika svårigheter som då dyker upp. Dessa didaktiska jämförelser präglar arbetet. Det har varit fascinerande att se hur det jag inledningsvis trodde var ett svårt fysikaliskt problem i själva verket visade sig vara nästan helt matematiskt. I början av problemet krävs vissa kunskaper i fysik, men sedan utvecklas det till ren matematik. Uppsatsen visar på användningsområden för linjär algebra och komplexa tal.

Så småningom inleddes också arbetet med avhandlingens andra del. I detta fall handlade det om två problem med redan väl kända lösningar, nämligen hur man beräknar volym i \mathbf{R}^n för kroppar av olika dimension samt att Pythagoras sats har en motsvarighet för areor och volymer. Gemensamma nämnare för avhandlingens båda delar är det flitiga användandet av linjär algebra samt de didaktiska aspekterna.

Det finns många personer som bör framhållas för sitt stöd vid skrivandet av denna uppsats. Jag nämner här, utan hänsyn till ordning, de som jag för tillfället kan minnas. Mina handledare Christian Gottlieb och Torbjörn Tambour för ovärderlig hjälp med de matematiska problemen och formuleringarna. Biträdande handledaren Jan-Erik Björk har varit en stor idéspruta samt behjälplig med den mekaniska teorin. Hans Thunberg på KTH har ställt upp som opponent. Mikael Nilsson på NADA hjälpte till med simuleringarna i programmet Graphing Calculator. Mina rumskamrater Anders Göransson, Samuel Lundqvist, Kirsti Nordström och Mattias Ringkvist har agerat bollplank samt gett tips om konsten att skriva i \LaTeX . Min pappa Anders Larson har som vanligt hjälpt till med korrekturläsning. Slutligen vill jag framhålla min fru Jenny Larson för sitt moraliska stöd och önska henne lycka till med sin doktorsavhandling inom omvårdnad samt tacka våra katter Molle och Moses för sin uppiggande närvaro även om framför allt den sistnämnda ibland obstruerat arbetet genom att lägga sig på böcker och papper.

Den jag emellertid främst vill tillägna avhandlingen är Pepsi, som aldrig fick uppleva slutförandet av den.

Stockholm och Norrtälje den 21 maj 2004

Niclas Larson

2 Inledning och problemformulering

Ett mekaniskt problem associeras nog oftare med ämnet fysik snarare än med matematik. Ofta är dock betydligt mer matematik än fysik inblandat i mekaniken. För att förstå nedanstående problem behövs endast elementära kunskaper i fysik, medan relativt goda kunskaper i linjär algebra är nödvändiga.

Även om detta problem i sig inte är särskilt meningsfullt, ger det ändå en inblick i vilken nytta man kan ha av linjär algebra. En målsättning är att beskriva problemet ur olika infallsvinklar och jämföra dessa. Genom detta får texten en didaktisk prägel, vilket är något jag eftersträvar.

Problemet formuleras enligt följande. Vi har en jämntjock, masshomogen platta (kallad K), som ligger på ett fast underlag. Mellan plattan och underlaget råder ingen friktion. På plattan befinner sig ett föremål, som man kan tänka sig vara en liten myra. För att modellen ska vara giltig, krävs det att föremålet kan anses som punktförmigt. Därför är till exempel en myra lämplig.

Vad händer när myran börjar vandra längs en på plattan förutbestämd väg?

Myran kommer naturligtvis att relativt plattan följa sin bestämda väg. Men även plattan sätts i rörelse av reaktionskraften från myran. Plattan kommer att få en rörelse, som är sammansatt av en translations- och en rotationsrörelse. (Rotationsrörelse uppkommer ej om myran vandrar rätlinjigt mot eller från plattans masscentrum.)

Del I

Allmän lösning

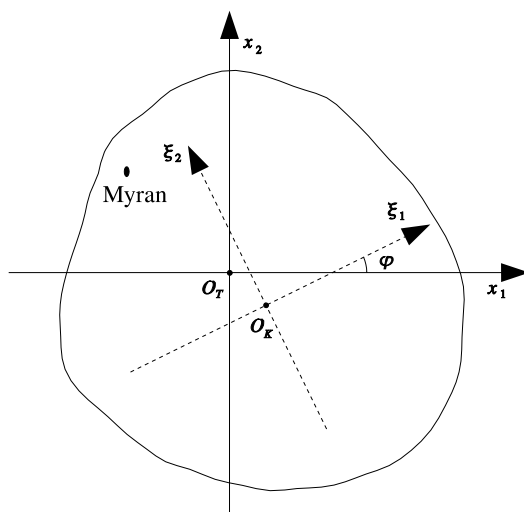
3 Problemet angripet med vektorer

Vi ska först se på hur lösningen av problemet ser ut, om man använder vektorer för att beskriva de olika rörelserna.

3.1 Införande av matematisk modell

Vi tittar på problemet i två olika koordinatsystem och låter dessa vara tredimensionella, eftersom vi senare kommer att behöva räkna med vektorprodukten och då behövs tre dimensioner. Dels har vi ett fast (x_1, x_2, x_3) -system i

rummet och dels ett (ξ_1, ξ_2, ξ_3) -system som följer plattan med origo i plattans masscentrum \mathbf{O}_K . Vi kommer även att använda \mathbf{O}_K som beteckning på koordinaterna för plattans masscentrum.



Istället för att arbeta med vektorer, kan man tänka sig att beskriva myrans rörelse med hjälp av komplexa tal. Detta kommer att göras i ett separat avsnitt och vi kommer att jämföra de två angreppssätten. I det fallet använder man det vanliga komplexa talplanet, som ju är ett tvådimensionellt koordinatsystem.

De två olika typerna av rörelser som plattan gör kan beskrivas som följer:

1. Translationsrörelsen kan tänkas som att masspunkten \mathbf{O}_K förflyttar sig i det fasta koordinatsystemet.
2. Då plattan börjar rotera, uppkommer en vinkel $\varphi = \varphi(t)$ mellan x_1 -axeln i det fasta systemet och ξ_1 -axeln i plattans koordinatsystem.

Sambanden mellan basvektorerna i de båda systemen kan skrivas:

$$\begin{aligned} e_{\xi_1} &= e_{x_1} \cos \varphi(t) + e_{x_2} \sin \varphi(t) \\ e_{\xi_2} &= -e_{x_1} \sin \varphi(t) + e_{x_2} \cos \varphi(t) \\ e_{\xi_3} &= e_{x_3} \end{aligned}$$

vilket med $\varphi(0) = 0$ ger $e_{x_1} = e_{\xi_1}$ och $e_{x_2} = e_{\xi_2}$ för $t = 0$. Vi låter plattans och myrans gemensamma masspunkt, kallad \mathbf{O}_T , sammanfalla med origo för det fasta koordinatsystemet. Detta är lämpligt eftersom \mathbf{O}_T kommer att ligga still oavsett hur myran rör sig. \mathbf{O}_T kommer också att användas som beteckning på koordinaterna för den gemensamma masspunkten i det fasta systemet, det vill säga det fasta systemets origo.

Målsättningen är att bestämma $\varphi(t)$, vilket görs med hjälp av en differentialekvation.

Eftersom plattans koordinatsystem roterar, kommer en vektor som ligger i plattan att få varierande koordinater i det fasta systemet. Sambandet mellan dessa koordinater ges av en matris vi kallar A_t , som är en funktion av tiden med nedanstående utseende:

$$A_t = \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) & -\sin \varphi(t) & 0 \\ \sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

För en vektor \mathbf{u} med koordinaterna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

i plattans fasta respektive rörliga koordinatsystem, blir sambandet då $\mathbf{x} = A_t \boldsymbol{\xi}$. Eftersom en vektor är oberoende av translationsrörelser behöver man för vektorer inte ta hänsyn till plattans förflyttningar i planet. För en fast punkt i plattan måste emellertid detta tas med. Därför blir koordinatsambandet för en punkt

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{O}_K(t) + A_t \boldsymbol{\xi}(t) \quad (1)$$

där $\mathbf{O}_K(t)$ är positionen hos plattans masspunkt sett i det fasta koordinatsystemet.

Låter vi så en myra vandra på plattan och koordinaterna för dess vandring beskrivas av $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t)$ blir myrans hastighet i fasta koordinatsystemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{O}'_K + A'_t \boldsymbol{\xi} + A_t \boldsymbol{\xi}' \quad (2)$$

enligt produktregeln för derivering. Myrans hastighet i det fasta koordinatsystemet blir alltså sammansatt av tre olika hastigheter:

1. \mathbf{O}'_K vilket är hastigheten som orsakas av plattans translationsrörelse.
2. $A'_t \boldsymbol{\xi}$ är hastigheten, orsakad av rotationen, hos den punkt som myran står på.
3. $A_t \boldsymbol{\xi}'$ är myrans hastighet mot plattan transformerad till fasta systemet.

Vi kallar nu plattans massa för M samt betecknar myrans massa med m . Enligt hävstångslagen får vi då koordinaterna för den gemensamma tyngdpunkten \mathbf{O}_T i det fasta systemet genom sambandet

$$\mathbf{O}_T = \frac{M\mathbf{O}_K + m\mathbf{x}}{M + m}$$

Eftersom den gemensamma masspunkten ligger i det fasta systemets origo gäller

$$\mathbf{0} = \frac{M\mathbf{O}_K + m\mathbf{x}}{M + m}$$

eller enklare

$$\mathbf{0} = M\mathbf{O}_K + m\mathbf{x} \quad (3)$$

\mathbf{O}_K är ju plattans masscentrum och därmed också en beskrivning av plattans translationsrörelse. Från (3) får vi $\mathbf{x}(t) = -M\mathbf{O}_K(t)/m$, som tillsammans med (1) ger

$$\mathbf{O}_K(t) = -\frac{m}{M+m}A_t\xi(t) \quad (4)$$

vilket alltså är ett uttryck för translationsrörelsen.

Deriverar vi (3) får vi

$$\mathbf{0} = M\mathbf{O}'_K + m\mathbf{x}'$$

Sätts detta in i (2) kan man eliminera \mathbf{O}'_K och erhålla

$$\mathbf{x}' = -\frac{m}{M}\mathbf{x}' + A'_t\xi + A_t\xi'$$

eller

$$\left(1 + \frac{m}{M}\right)\mathbf{x}' = A'_t\xi + A_t\xi'$$

vilket också kan skrivas

$$\frac{M+m}{M}\mathbf{x}' = A'_t\xi + A_t\xi'$$

Vi sätter nu

$$Q = \frac{M}{M+m} \quad \text{och} \quad q = \frac{m}{M+m}$$

Q är då förhållandet mellan plattans massa och den sammanlagda massan av plattan och myran, medan q är förhållandet mellan myrans massa och den sammanlagda massan. Det sista sambandet kan därmed skrivas

$$\mathbf{x}' = Q(A'_t\xi + A_t\xi') \quad (5)$$

och ekvation (4) kan skrivas

$$\mathbf{O}_K(t) = -qA_t\xi(t) \quad (6)$$

Vi vill nu skriva om (5) genom att ersätta A'_t med ett annat uttryck.

Sats 1. För en vektor \mathbf{u} gäller $A'_t\mathbf{u} = A_t(\boldsymbol{\varphi}' \times \mathbf{u})$, där vi sätter

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$$

Bevis. För alla vektorer $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$ gäller

$$A'_t \mathbf{u} = (A_t A_t^{-1}) A'_t \mathbf{u} = (A_t A_t^*) A'_t \mathbf{u} = A_t (A_t^* A'_t) \mathbf{u}$$

Detta samband gäller för att vi har $A_t^{-1} = A_t^*$, eftersom A_t är en basbytesmatris mellan två ON-baser och därmed en ortogonal matris.¹

Enligt definitionen av A_t blir

$$A_t^* = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad A'_t = \varphi' \begin{pmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Därmed får vi också

$$A_t^* A'_t = \varphi' \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

För $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ får vi då

$$A_t^* A'_t \mathbf{u} = \varphi' \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \varphi' \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukten är

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a & d \\ c & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

vilket ger

$$\varphi' \times \mathbf{u} = \varphi' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \varphi' \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi har alltså $A_t^* A'_t \mathbf{u} = \varphi' \times \mathbf{u}$ eller genom multiplikation av A_t från vänster $A'_t \mathbf{u} = A_t (\varphi' \times \mathbf{u})$ och satsen är bevisad. \square

Enligt (5) gäller för myrans hastighet i det fasta systemet

$$\mathbf{x}' = Q(A'_t \boldsymbol{\xi} + A_t \boldsymbol{\xi}')$$

¹Med A_t^* menas den transponerade matrisen av A_t .

Sätt in sambandet från Sats 1 i denna ekvation. Vi erhåller då

$$\mathbf{x}' = Q(A_t(\boldsymbol{\varphi}' \times \boldsymbol{\xi}) + A_t \boldsymbol{\xi}') \quad (7)$$

Derivera nu (7) med avseende på tiden. Vi får

$$\mathbf{x}''(t) = Q(A_t'(\boldsymbol{\varphi}' \times \boldsymbol{\xi}) + A_t(\boldsymbol{\varphi}'' \times \boldsymbol{\xi}) + A_t(\boldsymbol{\varphi}' \times \boldsymbol{\xi}') + A_t' \boldsymbol{\xi}' + A_t \boldsymbol{\xi}'')$$

Tillämpa Sats 1 på detta:

$$\mathbf{x}'' = Q(A_t(\boldsymbol{\varphi}' \times (\boldsymbol{\varphi}' \times \boldsymbol{\xi})) + A_t(\boldsymbol{\varphi}'' \times \boldsymbol{\xi}) + A_t(\boldsymbol{\varphi}' \times \boldsymbol{\xi}') + A_t(\boldsymbol{\varphi}' \times \boldsymbol{\xi}') + A_t \boldsymbol{\xi}'')$$

Förenkla nu de termer där A_t är inblandad.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}' \times (\boldsymbol{\varphi}' \times \boldsymbol{\xi}) &= \boldsymbol{\varphi}' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left(\boldsymbol{\varphi}' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \boldsymbol{\varphi}' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \boldsymbol{\varphi}' \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -(\boldsymbol{\varphi}')^2 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -(\boldsymbol{\varphi}')^2 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = -(\boldsymbol{\varphi}')^2 \boldsymbol{\xi} \end{aligned}$$

Den näst sista likheten gäller eftersom $\xi_3 \equiv 0$.

Vi får då

$$\mathbf{x}'' = QA_t[-(\boldsymbol{\varphi}')^2 \boldsymbol{\xi} + 2(\boldsymbol{\varphi}' \times \boldsymbol{\xi}') + (\boldsymbol{\varphi}'' \times \boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\xi}''] \quad (8)$$

3.2 Differentialekvationen

Om vår platta utsätts för en kraft \mathbf{F} , som inte är riktad rakt mot eller från dess masscentrum \mathbf{O}_K , kommer plattan alltså att få en vridrörelse. Om vi uttrycker \mathbf{F} på tredimensionell vektorform, kommer dess tredje koordinat att vara 0.

Vridningen kommer också att bero på hävarmen \mathbf{h} från \mathbf{O}_K till angreppspunkten för \mathbf{F} . Då \mathbf{h} uttrycks på vektorform, kommer tredje koordinaten att vara 0 även där.

Varje kropp har ett så kallat tröghetsmoment, betecknat J . Storleken av J beror på hur stor massa kroppen har samt på massans fördelning i kroppen. För en platta som utsätts för en kraft enligt ovanstående säger då rörelsemomentlagen

$$J\boldsymbol{\varphi}'' = \mathbf{h} \times \mathbf{F}$$

På sidan 14 kommer vi att betrakta en alternativ form av rörelsemomentlagen.

Vi definierar \mathbf{F} som reaktionskraften på K från myran och $-\mathbf{F}$ som reaktionskraften på myran från K samt J som plattans tröghetsmoment, vilket är bestämt av plattans fysiska egenskaper och därför anses vara känt.

Enligt Newtons andra lag har vi då:

$$\mathbf{F} = -m\mathbf{x}''$$

Sätt in (8) i denna. Vi får

$$\mathbf{F} = -mQA_t[-(\varphi')^2\xi + 2(\varphi' \times \xi') + (\varphi'' \times \xi) + \xi'']$$

Rörelsemomentlagen säger att

$$J\varphi'' = (\mathbf{x}(t) - \mathbf{O}_K(t)) \times \mathbf{F} = A_t\xi \times \mathbf{F}$$

vilket resulterar i

$$J\varphi'' = -Qm(A_t\xi \times A_t[-(\varphi')^2\xi + 2(\varphi' \times \xi') + (\varphi'' \times \xi) + \xi''])$$

Eftersom A_t är en ortogonal matris med determinant 1 gäller att för två vektorer \mathbf{u} och \mathbf{v} är $A_t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = A_t\mathbf{u} \times A_t\mathbf{v}$. Därför har vi sambandet

$$\begin{aligned} & A_t\xi \times A_t[-(\varphi')^2\xi + 2(\varphi' \times \xi') + (\varphi'' \times \xi) + \xi''] \\ &= A_t(\xi \times [-(\varphi')^2\xi + 2(\varphi' \times \xi') + (\varphi'' \times \xi) + \xi'']) \\ &= A_t[2(\xi \times (\varphi' \times \xi')) + (\xi \times (\varphi'' \times \xi)) + (\xi \times \xi'')] \end{aligned}$$

Den sista likheten gäller eftersom den första termen försvinner i och med att $\xi \times \xi = \mathbf{0}$.

I det fasta systemet får vi därför

$$J\varphi'' = -QmA_t[2(\xi \times (\varphi' \times \xi')) + (\xi \times (\varphi'' \times \xi)) + (\xi \times \xi'')]$$

eller i det rörliga systemet:

$$J\varphi'' = -Qm(2(\xi \times (\varphi' \times \xi')) + (\xi \times (\varphi'' \times \xi)) + (\xi \times \xi''))$$

Det sista är en differentialekvation i $\varphi(t)$, vilket var uppgiften att finna.

Betraktar man den erhållna differentialekvationen, ser man att båda leden består av kolonnmatriser med tre rader. Emellertid är de båda första raderna 0 i samtliga fall. Vi har nämligen

$$VL = J\varphi'' = J\varphi'' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

För första termen innanför parentesen i högra ledet gäller (om man bortser från faktorn 2 framför):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi} \times (\boldsymbol{\varphi}' \times \boldsymbol{\xi}') &= \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \left(\boldsymbol{\varphi}' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \boldsymbol{\varphi}' \begin{pmatrix} -\xi'_2 \\ \xi'_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\varphi}' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_1 \xi'_1 + \xi_2 \xi'_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Tar vi skalärprodukten av $\boldsymbol{\xi}$ och $\boldsymbol{\xi}'$ ser vi att detta blir samma som tredje koordinaten ty

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}' = (\xi_1, \xi_2, 0) \cdot (\xi'_1, \xi'_2, 0) = \xi_1 \xi'_1 + \xi_2 \xi'_2$$

Denna term kan därmed skrivas

$$\boldsymbol{\varphi}' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}' \end{pmatrix}$$

Nästa term innanför parentesen blir

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi} \times (\boldsymbol{\varphi}'' \times \boldsymbol{\xi}) &= \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \left(\boldsymbol{\varphi}'' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \boldsymbol{\varphi}'' \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{\varphi}'' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\varphi}'' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\boldsymbol{\xi}|^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

och sista termen

$$\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\xi}'' = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi''_1 \\ \xi''_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_1 \xi''_2 - \xi_2 \xi''_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{\xi} \cdot \widehat{\boldsymbol{\xi}}'' \end{pmatrix}$$

om vi gör definitionen

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}} = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ -\xi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

det vill säga $\widehat{\boldsymbol{\xi}}$ är en vridning 90° medurs av $\boldsymbol{\xi}$.

Differentialekvationen blir alltså

$$\begin{aligned}J\varphi'' &= -Qm(2\boldsymbol{\varphi}' \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}' + \varphi'' |\boldsymbol{\xi}|^2 + \boldsymbol{\xi} \cdot \widehat{\boldsymbol{\xi}}'') \\ J\varphi'' &= -Qm((\boldsymbol{\varphi}' |\boldsymbol{\xi}|^2)' + \boldsymbol{\xi} \cdot \widehat{\boldsymbol{\xi}}'') \\ (J\varphi' + Qm\varphi' |\boldsymbol{\xi}|^2)' &= -Qm \cdot \boldsymbol{\xi} \cdot \widehat{\boldsymbol{\xi}}''\end{aligned}$$

Tittar man på den sista delen av högra ledet, ser man att den är en derivata. Eftersom ξ och $\hat{\xi}$ är ortogonala har vi nämligen

$$(\xi \cdot \hat{\xi}') = \xi' \cdot \hat{\xi} + \xi \cdot \hat{\xi}'' = 0 + \xi \cdot \hat{\xi}'' = \xi \cdot \hat{\xi}''$$

Därför kan differentialekvationen skrivas

$$(J\varphi' + Qm\varphi'|\xi|^2)' = -Qm(\xi \cdot \hat{\xi}')'$$

eller

$$-\left[\left(\frac{J}{Qm} + |\xi|^2\right)\varphi'\right]' = (\xi \cdot \hat{\xi}')'$$

Eftersom termen J/Qm kommer att dyka upp ständigt i den kommande texten, inför vi här beteckningen H enligt

$$H = \frac{J}{Qm} \quad \left(= \frac{J(M+m)}{Mm} \right)$$

vilket slutligen leder fram till följande

Sats 2. *Vi har en platta K med massan M och tröghetsmomentet J . Då en myra med massan m rör sig på K enligt ekvationen $\xi(t)$ kommer plattans vridning $\varphi(t)$ i ett fast koordinatsystem att beskrivas av differentialekvationen*

$$-(H + |\xi|^2)\varphi'(t) = \xi \cdot \hat{\xi}' + C$$

där $\hat{\xi}$ definieras som ovan och C är en integrationskonstant.

4 Problemet angripet med komplexa tal

Vi ska nu titta på hur lösningen utvecklas om man använder sig av komplexa tal istället för av vektorer.

4.1 Modellen på komplex form

Ett alternativ till att arbeta med vektorer är att arbeta med komplexa tal. Vi ersätter då vårt (ξ_1, ξ_2) -system i plattans plan med ett liknande komplext talplan. Vi får en bijektion mellan de olika systemen, nämligen

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \xi_1 + i\xi_2 = \xi$$

Med denna bijektion gäller då också

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \boldsymbol{\xi} \longleftrightarrow i\xi \quad \text{och} \quad A_t \boldsymbol{\xi} \longleftrightarrow e^{i\varphi(t)} \xi$$

Observera att $\boldsymbol{\xi}$ (fet stil) är en vektor och ξ (normal stil) är ett (komplext) tal.

På det viset skulle vi istället för

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{O}_K(t) + A_t \boldsymbol{\xi}(t)$$

få

$$x(t) = O_K(t) + e^{i\varphi(t)} \xi(t)$$

vilket med hjälp av (3) också kan skrivas

$$x = Q e^{i\varphi} \xi$$

Detta ger

$$x' = Q(e^{i\varphi} \varphi' i \xi + e^{i\varphi} \xi') \quad (9)$$

Jämför det med (5).

Gör man ytterligare en iakttagelse, nämligen genom att kombinera

$$\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\xi} = \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

samt

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2 \implies i\xi = -\xi_2 + i\xi_1$$

får vi det intressanta sambandet att $\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\xi}$ motsvaras av $\varphi i \xi$. Detta ger nämligen att

$$\mathbf{x}' = Q(A_t(\boldsymbol{\varphi}' \times \boldsymbol{\xi}) + A_t \boldsymbol{\xi}')$$

motsvaras av

$$x' = Q(e^{i\varphi} \varphi' i \xi + e^{i\varphi} \xi')$$

vilket antyddes redan genom jämförelsen mellan (9) och (5).

Går man ytterligare ett steg genom att ta andraderivatan, får man med det komplexa synsättet

$$\begin{aligned} x'' &= Q(i\varphi' e^{i\varphi} \varphi' i \xi + e^{i\varphi} \varphi'' i \xi + e^{i\varphi} \varphi' i \xi' + i\varphi' e^{i\varphi} \xi' + e^{i\varphi} \xi'') \\ &= Q e^{i\varphi} [(i\varphi')^2 \xi + i\varphi'' \xi + 2i\varphi' \xi' + \xi''] \\ &= Q e^{i\varphi} [-(\varphi')^2 \xi + 2i\varphi' \xi' + i\varphi'' \xi + \xi''] \end{aligned}$$

Det sista uttrycket motsvaras då av (8) i det tidigare synsättet. Med hjälp av komplexa tal kan man alltså verifiera (8) utan att använda Sats 1.

4.2 Differentialekvationen med komplexa tal som grund

Även rörelsemomentlagen kan uttryckas med hjälp av komplexa tal. Lämpligen görs då detta med tal skrivna på polär form. Då får man

$$h = re^{i\alpha} \quad \text{och} \quad F = Ce^{i\beta}$$

Om vi tänker oss de komplexa talen som vektorer, kan F delas upp i komponenter så att den ena är parallell med h och den andra är vinkelrät mot h .

$$F = Ae^{i\alpha} + Be^{i(\alpha + \frac{\pi}{2})}$$

Då kommer endast den komponent, som är vinkelrät mot h , att påverka plattans vridning. Storleken på h och F anges av faktorn framför de exponentiella faktorerna. Rörelsemomentlagen får då utseendet

$$J\varphi'' = rB$$

Om vi så uttrycker $\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$ på polär form, blir det

$$\xi(t) = r(t)e^{i\alpha(t)}$$

där $r = |\xi| = \sqrt{(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2}$ och $\alpha = \arg(\xi)$, det vill säga argumentet för ξ .

Eftersom rotationsmatrisen A_t motsvaras av $e^{i\varphi(t)}$ i det komplexa talplanet, får vi i det fasta systemet

$$x(t) = O_K(t) + e^{i\varphi(t)} \cdot r(t)e^{i\alpha(t)}$$

vilket kan jämföras med (1). Sätts detta ihop med (3) får vi

$$x(t) = Qr(t)e^{i\varphi(t)}e^{i\alpha(t)} = Qr(t)e^{i(\varphi(t)+\alpha(t))}$$

Derivatan av x blir

$$\begin{aligned} x' &= Q \left(r'e^{i(\varphi+\alpha)} + r(\varphi' + \alpha')ie^{i(\varphi+\alpha)} \right) \\ &= Q \left(r'e^{i(\varphi+\alpha)} + r(\varphi' + \alpha')e^{i(\frac{\pi}{2}+\varphi+\alpha)} \right) \end{aligned}$$

Andraderivatan blir

$$\begin{aligned} x'' &= Q(r''e^{i(\alpha+\varphi)} + 2r'(\alpha' + \varphi')e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha+\varphi)} + r(\alpha'' + \varphi'')e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha+\varphi)} \\ &\quad - r(\alpha' + \varphi')^2e^{i(\alpha+\varphi)}) \\ &= Q(r'' - r(\alpha' + \varphi')^2)e^{i(\alpha+\varphi)} + Q(2r'(\alpha' + \varphi') + r(\alpha'' + \varphi''))e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha+\varphi)} \end{aligned}$$

Då kan x'' skrivas på formen

$$x'' = Ae^{i(\alpha+\varphi)} + Be^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha+\varphi)}$$

där A och B är funktioner av t . Om F som förut är reaktionskraften på K från myran, ger detta uttryck insatt i Newtons andra lag

$$F = -m \left(A e^{i(\alpha+\varphi)} + B e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha+\varphi)} \right)$$

Hävarmen som F verkar på är

$$h = e^{i\varphi} \cdot r e^{i\alpha} = r e^{i(\alpha+\varphi)}$$

Genom att betrakta exponenterna i uttrycken för F och h , ser man att den termen i F som är parallell med h är den som innehåller A och att termen med B är ortogonal mot h . Därmed är det endast termen med B som påverkar plattans vridning och detta gör den med h som hävarm. Enligt rörelsemomentlagen får vi därför

$$\begin{aligned} -J\varphi'' &= rmB \\ -J\varphi'' &= rmQ(2r'(\alpha' + \varphi') + r(\alpha'' + \varphi'')) \\ -J\varphi'' &= Qm(r^2(\alpha' + \varphi'))' \\ -J\varphi' &= Qmr^2(\alpha' + \varphi') + C_1 \end{aligned}$$

vilket leder fram till

Sats 3. Om myran rör sig på plattan enligt ekvationen $\xi(t) = r(t)e^{i\alpha(t)}$, kommer plattans vridning att beskrivas av differentialekvationen

$$-(H + (r(t))^2) \varphi'(t) = (r(t))^2 \alpha'(t) + C$$

Sats 3 är ekvivalent med Sats 2, de är bara uttryckta på olika sätt. Dessutom är bevisen för dem oberoende av varandra. Likheten ser man genom att vi i vänstra ledet har r^2 , som motsvaras av $|\xi|^2$ och i högra ledet har r , som är absolutbeloppet av ξ samt $r\alpha'$ som motsvaras av $\widehat{\xi}'$. De två första likheterna är relativt uppenbara. Den sista kräver emellertid en förklaring.

Vi har

$$\begin{aligned} \xi &= r e^{i\alpha} \\ \xi' &= r' e^{i\alpha} + i r \alpha' e^{i\alpha} \\ \widehat{\xi}' &= -i \xi' = r' e^{i(\alpha-\frac{\pi}{2})} + r \alpha' e^{i\alpha} \end{aligned}$$

Den första termen i $\widehat{\xi}'$ är ortogonal mot ξ och faller därför bort vid skalärmultiplikation. Skalärprodukten ges av faktorerna framför $e^{i\alpha}$ och vi får då

$$\xi \cdot \widehat{\xi}' \longleftrightarrow r \cdot r \alpha'$$

vilket motiverar den tredje likheten. Man kan därför säga att med det komplexa synsättet är Sats 3 vad Sats 2 är för angreppssättet med vektorer.

5 Reglering av myrans hastighet

För att beskriva myrans rörelse, väljer vi ofta först en så enkel parametrisering som möjligt av $\xi(t)$. För att sedan kunna studera olika hastighetsvariationer hos myran, kan man införa en regleringsfunktion $f(t)$, som är en godtycklig deriverbar funktion. Därefter låter man myrans rörelse beskrivas av $\xi(f(t))$. Myran kommer då att gå i samma spår, som när dess rörelse beskrevs av $\xi(t)$, men f kan användas för att reglera hastigheten.

Då myrans rörelse beskrivs av ekvationen $\xi(f(t)) = r(f(t)) \cdot e^{i\alpha(f(t))}$, kommer differentialekvationen att få utseendet

$$-(H + [r(f(t))]^2) \varphi'(t) = [r(f(t))]^2 \frac{d\alpha(f(t))}{dt} + C_1$$

Emellertid räcker det att lösa

$$-(H + (r(t))^2) \varphi'(t) = (r(t))^2 \alpha'(t)$$

som är differentialekvationen från Sats 3 med integrationskonstanten $C = 0$, under förutsättning att det naturliga bivillkoret som nämns i den kommande Sats 4 är uppfyllt. De två nyss nämnda ekvationerna är identiska, om man i den första av dem sätter $f(t) = t$. Då man hittat en specifik lösning till den sista ekvationen, sätter man in $f(t)$ i denna lösning och erhåller därmed lösningen till den förra ekvationen enligt följande sats.

Sats 4. *Antag att $f(t)$ är en godtycklig kontinuerligt deriverbar funktion där $f'(t) = 0$ för något värde på t . Differentialekvationen*

$$-(H + [r(f(t))]^2) \varphi'(t) = [r(f(t))]^2 \frac{d\alpha(f(t))}{dt} + C_1$$

med bivillkoret att för något t gäller

$$\varphi'(t) = \frac{d\alpha(f(t))}{dt} = 0$$

har om $C_1 = 0$ lösningen

$$\varphi(t) = \varphi_0(f(t)) + C_2$$

där $\varphi_0(t)$ är en godtycklig specifik lösning till differentialekvationen

$$-(H + (r(t))^2) \varphi'(t) = (r(t))^2 \alpha'(t)$$

Om $C_1 \neq 0$ saknar ekvationen lösning.

Bivillkoret betyder att både plattans och myrans vinkelhastighet är noll vid någon tidpunkt. Detta uppfylls till exempel om både myran och plattan är stilla vid försökets start. Därför är det ett mycket naturligt bivillkor.

Bevis. Ansatsen

$$\varphi(t) = \varphi_0(f(t)) + C_2$$

ger

$$\varphi'(t) = \varphi'_0(f(t)) \cdot f'(t)$$

Insatt i bivillkoret gäller då att eftersom det finns ett t sådant att $f'(t) = 0$, får vi för detta t

$$\varphi'(t) = \varphi'_0(f(t)) \cdot f'(t) = \varphi'_0(f(t)) \cdot 0 = 0$$

och

$$\frac{d\alpha(f(t))}{dt} = \alpha'(f(t)) \cdot f'(t) = \alpha'(f(t)) \cdot 0 = 0$$

Därmed är bivillkoret i satsen uppfyllt. Bivillkoret leder också till att $C_1 = 0$ måste gälla.

Sätts ansatsen in i differentialekvationen från Sats 4 får vi för de olika leden:

$$VL = - (H + [r(f(t))]^2) \varphi'_0(f(t)) \cdot f'(t)$$

samt

$$HL = [r(f(t))]^2 \frac{d\alpha(f(t))}{dt} = [r(f(t))]^2 \cdot \alpha'(f(t)) \cdot f'(t)$$

Att de båda leden är lika, inses genom att man sätter in den specifika lösningen $\varphi_0(f(t))$ i ekvationen från Sats 3 (med $C = 0$), ersätter t med $f(t)$ på övriga ställen i Sats 3 samt multiplicerar båda leden med $f'(t)$. Då kommer respektive led i ekvationen från Sats 3 att vara identiska med ovanstående. Detta avslutar beviset. \square

Ett vanligt problem med de enklaste parametreringarna av myrans rörelse är att varken $\xi'(0)$ eller $\varphi'(0)$ är 0. Det vill säga en enkel parametrering leder till att både myran och plattan är i rörelse vid försökets start, vilket är något man vill undvika. Ett sätt att lösa detta, men som ändå mestadels ger $\xi(t)$ ett enkelt utseende, är att låta f innehålla en så kallad testfunktion. En testfunktion är en funktion som på ett lämpligt sätt växer från funktionsvärde 0 till funktionsvärde 1. I vårt fall är en lämplig funktion $f(t)$, en som uppfyller kraven

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(t) &= t \quad t \geq 1 \\ f'(0) &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Beskriver vi därefter myrans rörelse med ekvationen

$$\xi(t) = r(f(t))e^{i\alpha(f(t))} \tag{11}$$

kommer myran att stå still för $t = 0$. Därefter accelererar myran för $0 \leq t \leq 1$ och har för $t \geq 1$ en parametrering som överensstämmer med $\xi(t) = r(t) \cdot e^{i\alpha(t)}$. Eftersom $f'(0) = 0$ enligt (10) och vi söker en lösning med $\varphi'(0) = 0$, kan vi använda Sats 4.

Tittar vi nu på lösningen av differentialekvationen i Sats 4 och kombinerar den med det önskvärda att plattan inte ska ha någon vridning vid $t = 0$, får vi med villkoret $f(0) = 0$

$$\varphi(0) = \varphi_0(f(0)) = 0$$

vilket ger $C_2 = 0$. Detta ger den mycket intressanta likheten

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) \quad \text{för} \quad t \geq 1$$

vilket innebär att plattans vridning då $t \geq 1$ inte påverkas av utseendet på f för $t < 1$. Hur myran accelererar för $0 \leq t \leq 1$ har alltså ingen betydelse för plattans vridning senare.

Eftersom translationsrörelsen (6) med det komplexa synsättet beskrivs av ekvationen

$$O_K = -q \cdot r e^{i(\alpha + \varphi)} \tag{12}$$

innebär det att även translationsrörelsen är opåverkad av hur myran genomför sin inledande acceleration.

Del II

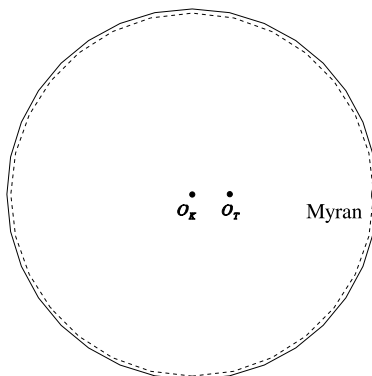
Exempeldel

6 Myran går i en cirkel med plattans masspunkt i centrum

Så till några praktiska exempel. Vi kommer att betrakta detta fall både allmänt sett och när plattan har en bestämd massa och tröghetsmoment. Emellertid låter vi plattan alltid ha radien 1.

6.1 Det allmänna fallet

Låt myran gå längs randen på en cirkel med radien 1 och centrum i \mathbf{O}_K .



Myrans rörelse beskrivs då av ekvationen

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} \cos f(t) \\ \sin f(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Använder vi det komplexa synsättet och beskriver rörelsen med $\xi(t) = r(t)e^{i\alpha(t)}$, får vi enligt (13) $r(t) \equiv 1$ och $\alpha(t) = f(t)$. Väljer vi en lämplig funktion f med egenskapen $f'(0) = 0$ och ställer kravet $\varphi'(0) = 0$, är bivillkoret i Sats 4 uppfyllt. Enligt satsen räcker det då med att lösa den enklare ekvationen med $\xi(t) = e^{it}$. Eftersom vi då får $\alpha(t) = t$ ger detta $\alpha' = 1$. Insatt i den enklare differentialekvationen från Sats 3 med utseendet

$$-(H + (r(t))^2) \varphi_0'(t) = (r(t))^2 \alpha'(t)$$

får vi då

$$-(H + 1) \varphi_0'(t) = 1$$

det vill säga

$$\varphi_0(t) = -\frac{t}{H+1} + C_1$$

$$\varphi_0(0) = 0 \quad \text{ger} \quad C_1 = 0$$

och därmed

$$\varphi_0(t) = -kt \quad \text{där} \quad k = \frac{1}{H+1}$$

Sats 4 ger nu

$$\varphi(t) = -kf(t) + C$$

En av anledningarna till införandet av funktionen f är att myran ska få en lämplig acceleration från hastigheten 0 vid $t = 0$. Om vi valt myrans rörelse enligt den enklare ekvationen $\xi(t) = e^{it}$ får vi $\xi'(0) = 1$, vilket inte är bra. Därför väljer vi att istället låta myran vandra enligt $\xi(t) = e^{if(t)}$, där f är en funktion som uppfyller villkoren i (10). Eftersom vi har $\xi'(t) = e^{if(t)} f'(t)$,

kommer myran att stå still för $t = 0$, men efter $t = 1$ ha en rörelse som beskrivs av den enklare ekvationen $\xi(t) = e^{it}$ eller på vektorform

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ett exempel på en funktion som uppfyller de önskade villkoren är

$$f(x) = (|1-x| + 1-x)(x-1) + 2 + (|1-x| + 1-x)(x-1) + 2) \frac{x}{4} \quad (14)$$

Eftersom vi även har $f(0) = 0$, innebär detta $C = 0$, så plattans rörelse beskrivs av ekvationen

$$\varphi(t) = -kf(t)$$

eller för $t \geq 1$ den enklare ekvationen

$$\varphi(t) = -kt$$

där k endast beror av m , M och J (ty H beror ju av dessa tre). Som tidigare nämnts är ju utseendet på $f(t)$ för $0 \leq t < 1$ ointressant för plattans vridning då $t \geq 1$. Det betyder att k inte påverkas av hur plattan gjort sin inledande acceleration.

Värdet på k avgör alltså hur mycket plattan vrider sig i förhållande till myrans rörelse på plattan för $t \geq 1$. Myran går ett varv på plattan för varje $\Delta t = 2\pi$ och plattan snurrar då följaktligen $2\pi k$ varv åt andra hållet. Eftersom $H > 0$ och

$$k = \frac{1}{H+1}$$

innebär detta att $0 < k < 1$. För varje varv myran rör sig kommer alltså plattan att vridas mellan noll och ett varv åt andra hållet.

Vi ska nu betrakta translationsrörelsen, som ju beskrivs med ekvation (6). Därmed får man, då myran rör sig enligt (13) och med $f(t)$ enligt (14), för $t \geq 1$

$$\mathbf{O}_K(t) = -q \begin{pmatrix} \cos(1-k)t \\ \sin(1-k)t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

vilket innebär att plattans masscentrum rör sig i en cirkel runt det gemensamma masscentrat. Hastigheten på denna förflyttning är beroende av värdet på k . Ett k nära 0 innebär en snabbare translationsrörelse än ett k nära 1. Detta innebär att om plattan roterar långsamt i jämförelse med myrans rörelse (k nära 0), kommer translationsrörelsen att vara relativt snabb. Detta kan också inses genom att en liten rotation av plattan innebär att myran förflyttar sig mer sett i det fasta systemet och eftersom \mathbf{O}_T ligger still, måste \mathbf{O}_K röra sig i samma tempo som myran. En snabb rotation innebär att myran nästan står still i det fasta systemet och då kommer även \mathbf{O}_K att få en långsam rörelse.

Detta ser man också om man använder det komplexa synsättet. Translationsrörelsen ges då av (12). Eftersom vi här har $\varphi = -kt$ och $\alpha = t$, beskrivs rörelsen i detta fall av

$$O_K = -q \cdot e^{(1-k)it}$$

vilket tydligt visar att translationsrörelsen är cirkulär samt att dess hastighet är större då k är nära 0 än då k är nära 1.

6.2 Platta med bestämd massa

Vi ska nu betrakta fallet då myran går längs randen på en cirkelformad platta med radien 1 och massan 1.

Vi tänker oss först en cirkulär platta med radien R och masstätheten $\rho(\xi_1, \xi_2)$, där $\rho(\xi_1, \xi_2)$ är masstätheten i punkten (ξ_1, ξ_2) . Vi får plattans massa genom dubbelintegralen

$$\iint_K \rho(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

där $K = \{(\xi_1, \xi_2) : 0 \leq (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 \leq R^2\}$. Vi gör substitutionen

$$\begin{cases} \xi_1 = r \cos \varphi \\ \xi_2 = r \sin \varphi \end{cases}$$

vilket ger ² $\mathfrak{J}(r, \varphi) = r$. Då gäller att om $\rho(\xi_1, \xi_2) = \rho$ är konstant, så är plattans massa

$$M = \iint_K \rho d\xi_1 d\xi_2 = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \rho \cdot r d\varphi \right) dr = \pi R^2 \rho$$

På liknande sätt får man tröghetsmomentet

$$J = \iint_K \rho r^2 d\xi_1 d\xi_2 = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \rho r^2 \cdot r d\varphi \right) dr = \frac{\pi R^4 \rho}{2} = \frac{MR^2}{2}$$

I vårt fall har vi $M = 1$ och $R = 1$, vilket ger $J = 1/2$. Då gäller

$$k = \frac{1}{H+1} = \frac{1}{\frac{J(M+m)}{Mm} + 1} = \frac{1}{\frac{1+m}{2m} + 1} = \frac{2m}{3m+1}$$

Ur detta kan man göra en del intressanta iakttagelser.

² $\mathfrak{J}(r, \varphi)$ är Jacobis determinant, det vill säga

$$\mathfrak{J}(r, \varphi) = \frac{d(\xi_1, \xi_2)}{d(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial r} & \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial r} & \frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

- $m = M = 1$ ger $k = 1/2$ och därmed $\varphi = -t/2$. Det innebär att då myran gått ett varv på plattan ($t = 2\pi$), så har plattan roterat ett halvt varv åt andra hållet.
- Om $m \rightarrow 0$ så gäller även $k \rightarrow 0$, vilket innebär att en mycket lätt myra kommer att vrida plattan väldigt lite.
- Om $m \rightarrow \infty$ får man $k \rightarrow 2/3$. Detta innebär att denna plattas maximala vridning är $2/3$ av ett varv för varje varv myran går och detta inträffar då myran är oändligt tung.

Eftersom plattans translationsrörelse ges av (15), innebär detta att plattans masspunkt \mathbf{O}_K i samtliga dessa fall kommer att röra sig i en cirkel runt den gemensamma masspunkten \mathbf{O}_T . Rotationsriktningen på denna rörelse kommer att vara densamma som riktningen på myrans vandring. Detta verkar rimligt, då \mathbf{O}_K alltid måste finnas på motsatt sida av \mathbf{O}_T jämfört med myran och på konstant avstånd från \mathbf{O}_T .

6.3 Små modifieringar av den bestämda plattan

Det kan vara intressant att undersöka vad som händer med $\varphi(t)$ om man låter myran gå på en platta vars masstäthet varierar. Vi fortsätter att undersöka en platta med $R = 1$ och $M = 1$ där vi låter myran gå längs kanten på denna. Masstätheten ändras däremot så att den varierar med avståndet från plattans centrum. Låt därför

$$\rho(r) = p(1-r)^n$$

där p är en konstant. Vi får då

$$\begin{aligned} M &= \iint_K \rho(r) d\xi_1 d\xi_2 = p \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1-r)^n \cdot r d\varphi \right) dr \\ &= 2\pi p \left(\left[\frac{r(1-r)^{n+1}}{n+1} \right]_1^0 + \int_0^1 \frac{(1-r)^{n+1}}{n+1} dr \right) \\ &= \frac{2\pi p}{n+1} \left[\frac{(1-r)^{n+2}}{n+2} \right]_1^0 = \frac{2\pi p}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

vilket med $M = 1$ ger

$$p = \frac{(n+1)(n+2)}{2\pi}$$

och därmed

$$\rho(r) = \frac{(n+1)(n+2)(1-r)^n}{2\pi}$$

Plattans tröghetsmoment blir

$$J = \frac{(n+1)(n+2)}{2\pi} \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1-r)^n \cdot r^2 \cdot r d\varphi \right) dr = \frac{6}{(n+3)(n+4)}$$

$n = 1$ ger nu $J = 3/10$, så om vi tittar på samma fall som i förra avsnittet får vi här

- $m = M = 1$ ger $k = 5/8$ och $\varphi = -5t/8$. Det innebär att då myran gått ett varv på plattan, så har plattan roterat $5/8$ varv åt andra hållet. Jämför detta med förra avsnittet. Vi ser att plattan roterat mer då tröghetsmomentet minskat.
- Om $m \rightarrow 0$ så gäller även här $k \rightarrow 0$.
- Om $m \rightarrow \infty$ får man $k \rightarrow 10/13$. Detta innebär att plattans maximala vridning i detta fall är $10/13$ av ett varv för varje varv myran går.

Låter man $n \rightarrow \infty$ i

$$\rho(r) = \frac{(n+1)(n+2)(1-r)^n}{2\pi} \quad \text{och} \quad J = \frac{6}{(n+3)(n+4)}$$

innebär detta att plattans massa koncentreras mot centrum och att $J \rightarrow 0$. Detta ger $k \rightarrow 1$, vilket i sin tur innebär att då myran går ett varv på plattan kommer plattan att snurra ett varv åt andra hållet. Resultatet av detta är att myran kommer att stå still sett i det fasta koordinatsystemet. Detta fall är emellertid orimligt, eftersom det är praktiskt omöjligt för plattan att ha all massa koncentrerad i centrum.

Om man istället låter masstätheten variera enligt

$$\rho(r) = pr^n$$

kommer man med samma resonemang att för $M = 1$ och $R = 1$ få

$$J = \frac{n+2}{n+4}$$

$n = 0$ innebär att ρ är konstant och det ger som väntat $J = 1/2$. Låter man $n \rightarrow \infty$, vilket innebär att plattans massa koncentreras mot periferin, får man $J \rightarrow 1$. Det innebär i sin tur att

$$k = \frac{m}{1+2m}$$

Samma exempel som förut ger nu

- $m = 1$ ger $k = 1/3$.
- $m \rightarrow 0$ ger $k \rightarrow 0$.
- $m \rightarrow \infty$ ger $k \rightarrow 1/2$.

7 Cirkelformad rörelse med plattans masspunkt på randen

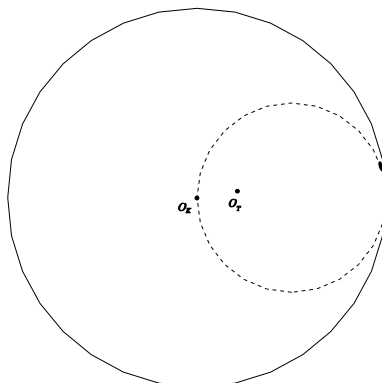
Här har plattan i samtliga fall en bestämd form och storlek. Först kommer vi att betrakta problemet utan att ge myran och plattan någon speciell massa. Därefter kommer vi att undersöka vad som händer under vissa speciella omständigheter.

7.1 Allmän lösning i det givna fallet

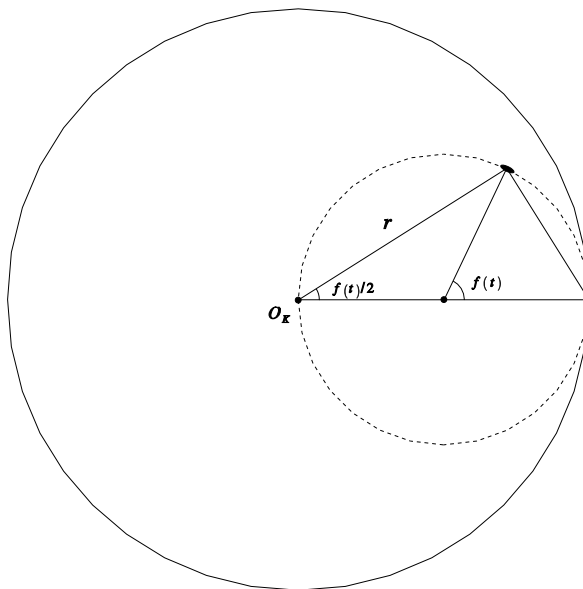
Låter man myran gå i en cirkel vars medelpunkt inte är densamma som plattans masspunkt blir situationen mer komplicerad. Låt till exempel

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} 1 + \cos f(t) \\ \sin f(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

vilket innebär att myran rör sig i en cirkel vars rand går genom plattans masspunkt.



Väljer man istället att beskriva myrans rörelse med det komplexa synsättet, så kan man betrakta denna figur.



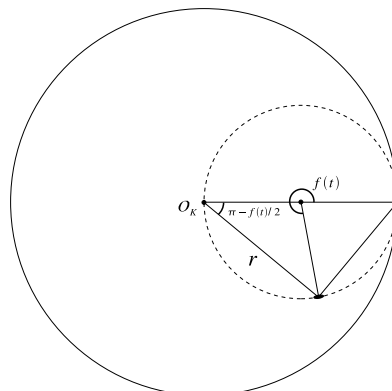
Randvinkelsatsen ger för $0 \leq f(t) \leq \pi$ att då myran rört sig vinkeln $f(t)$ sett från medelpunkten på sin cirkel, har den rört sig vinkeln $f(t)/2$ sett från \mathbf{O}_K . Randvinkelsatsen säger också att för den största triangeln är vinkeln vid myran rät, eftersom den står på en halvcirkelbåge. Myrans cirkel har diametern 2 och därmed får man genom enkel trigonometri

$$r = 2 \cos \frac{f(t)}{2}$$

I detta intervall har vi $\alpha = f(t)/2$, varför myrans promenad beskrivs av

$$\xi = 2 \cos \frac{f(t)}{2} \cdot e^{i \frac{f(t)}{2}}$$

För $\pi < f(t) < 2\pi$ blir förhållandena enligt nedanstående bild



Eftersom det i detta intervall gäller att

$$\cos\left(\pi - \frac{f(t)}{2}\right) = -\cos\frac{f(t)}{2}$$

får vi för radien här uttrycket

$$r = -2 \cos \frac{f(t)}{2}$$

Enligt figuren ser vi också att vinkeln vid \mathbf{O}_K räknas medsols från ξ_1 -axeln, vilket innebär att den ska anges med minustecken framför. Vi får därför

$$\alpha = -\left(\pi - \frac{f(t)}{2}\right) = \frac{f(t)}{2} - \pi$$

Parametriseringen av myrans promenad i intervallet $\pi < f(t) < 2\pi$ blir därmed

$$\begin{aligned} \xi &= -2 \cos \frac{f(t)}{2} \cdot e^{i\left(\frac{f(t)}{2} - \pi\right)} = 2 \cos \frac{f(t)}{2} \cdot e^{i\pi} \cdot e^{i\left(\frac{f(t)}{2} - \pi\right)} \\ &= 2 \cos \frac{f(t)}{2} \cdot e^{i\frac{f(t)}{2}} \end{aligned}$$

Detta uttryck är emellertid identiskt med den polära framställningen av myrans promenad för $0 \leq f(t) \leq \pi$, varför uttrycket kan väljas som parametrisering för myrans färd oavsett värde på $f(t)$.

Sålunda gäller att myrans promenad i det aktuella fallet beskrivs av ekvationen

$$\xi = 2 \cos \frac{f(t)}{2} \cdot e^{i\frac{f(t)}{2}}$$

Insatt i Sats 3 blir differentialekvationen därmed

$$-\left(H + 4 \cos^2 \frac{f(t)}{2}\right) \varphi' = \frac{f'(t)}{2} \cdot 4 \cos^2 \frac{f(t)}{2} + C$$

Genom att välja $f(t)$ enligt (14) och ställa kravet $\varphi'(0) = 0$, blir bivillkoret i Sats 4 uppfyllt. Då är det tillräckligt att lösa ekvationen

$$-\left(H + 4 \cos^2 \frac{t}{2}\right) \varphi'_0 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cos^2 \frac{t}{2}$$

eller omskrivet

$$\varphi'_0 = -\frac{2 \cos^2 \frac{t}{2}}{H + 4 \cos^2 \frac{t}{2}}$$

Nu får vi lösningen till differentialekvationen genom den obestämda integralen

$$\varphi_0 = -\int \frac{2 \cos^2 \frac{t}{2}}{H + 4 \cos^2 \frac{t}{2}} dt$$

Detta kan skrivas som

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= -\frac{1}{2} \int \frac{H + 4 \cos^2 \frac{t}{2} - H}{H + 4 \cos^2 \frac{t}{2}} dt = -\frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{H}{H + 4 \cos^2 \frac{t}{2}} \right) dt \\ &= -\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{H}{H + 4 \cos^2 \frac{t}{2}} dt\end{aligned}$$

Den återstående integralen kan lösas genom att man gör substitutionen $s = \tan \frac{t}{2}$. Detta ger

$$\arctan s = \frac{t}{2} \quad \implies \quad dt = \frac{2}{1+s^2} ds$$

Av detta får man även

$$\cos^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{1+s^2}$$

Därmed har vi allt som behövs för att lösa differentialekvationen. Substitutionen gäller emellertid endast i intervall av typen $n\pi < t < (n+2)\pi$, eftersom $\tan t$ inte är definierat för $t = \frac{n\pi}{2}$ där n är ett udda heltal. Detta leder till att man måste modifiera lösningen för att den ska gälla kontinuerligt för alla $t \geq 0$. Det görs (som vi senare kommer att se) bland annat genom att man låter integrationskonstanten vara styckvis konstant, det vill säga låter den vara olika i olika tidsintervall.

Vi har alltså

$$\frac{1}{2} \int \frac{H}{H + 4 \cos^2 \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{H}{4}}{\frac{H}{4} + \cos^2 \frac{t}{2}} dt$$

som är ett uttryck på formen

$$\frac{1}{2} \int \frac{B}{B + \cos^2 \frac{t}{2}} dt$$

Lemma 1. Om $B > 0$ och n är ett udda heltal gäller

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2} \int \frac{B}{B + \cos^2 \frac{t}{2}} dt \\ &= \begin{cases} \sqrt{\frac{B}{B+1}} \left(\arctan \left(\sqrt{\frac{B}{B+1}} \tan \frac{t}{2} \right) + \left[\frac{t+\pi}{2\pi} \right] \pi \right) + C & \text{om } t \neq n\pi \\ \frac{n\pi}{2} \sqrt{\frac{B}{B+1}} + C & \text{om } t = n\pi \end{cases}\end{aligned}$$

där $[x]$ är den så kallade heltalsvärdesfunktionen, det vill säga $[x]$ betyder det heltal som är närmast mindre än eller lika med x .

Bevis. Vi inleder med fallet då $t \neq n\pi$ och gör den tidigare beskrivna substitutionen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{B}{B + \cos^2 \frac{t}{2}} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{B \frac{2}{1+s^2}}{B + \frac{1}{1+s^2}} ds = B \int \frac{1}{\left(B + \frac{1}{1+s^2}\right) (1+s^2)} ds \\ &= B \int \frac{1}{B+1 + Bs^2} ds = \frac{B}{B+1} \int \frac{1}{1 + \frac{B}{B+1} s^2} ds \\ &= \frac{B}{B+1} \sqrt{\frac{B+1}{B}} \arctan \left(s \sqrt{\frac{B}{B+1}} \right) + C(t) \\ &= \sqrt{\frac{B}{B+1}} \arctan \left(\sqrt{\frac{B}{B+1}} \tan \frac{t}{2} \right) + C(t) \end{aligned}$$

Integrationskonstanten $C(t) = C_1(t) + C$ är styckvis konstant, vilket i detta fall innebär att den är konstant inom varje intervall $n\pi < t < (n+2)\pi$ där n som tidigare är ett udda heltal.

Eftersom vänstra ledet i Lemma 1 är kontinuerligt för alla värden på t är målsättningen att även högra ledet ska kunna anses vara det. Det första steget är därför att för $t = n\pi$ göra tolkningen

$$\arctan \left(\sqrt{\frac{B}{B+1}} \tan \frac{n\pi}{2} \right) = \lim_{t \rightarrow n\pi^+} \arctan \left(\sqrt{\frac{B}{B+1}} \tan \frac{t}{2} \right) = -\frac{\pi}{2}$$

Eftersom vi har

$$\lim_{t \rightarrow n\pi^-} \arctan \left(\sqrt{\frac{B}{B+1}} \tan \frac{t}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

innebär detta att det skiljer π mellan höger- och vänstergränsvärdet då $t \rightarrow n\pi$ i detta uttryck. Vi har dessutom faktorn

$$\sqrt{\frac{B}{B+1}}$$

framför uttrycket. Detta innebär att vi måste lyfta upp funktionen $\sqrt{\frac{B}{B+1}} \cdot \pi$ steg vid varje $t = n\pi$ för att få

$$\lim_{t \rightarrow n\pi^-} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow n\pi^+} \varphi(t)$$

vilket är vad vi önskar. Detta åstadkommes genom att sätta

$$C_1(t) = \sqrt{\frac{B}{B+1}} \left[\frac{t+\pi}{2\pi} \right] \pi$$

Därmed har vi för $t \neq n\pi$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{B}{B + \cos^2 \frac{t}{2}} dt &= \sqrt{\frac{B}{B+1}} \arctan \left(\sqrt{\frac{B}{B+1}} \tan \frac{t}{2} \right) + C_1(t) + C \\ &= \sqrt{\frac{B}{B+1}} \left(\arctan \left(\sqrt{\frac{B}{B+1}} \tan \frac{t}{2} \right) + \left[\frac{t+\pi}{2\pi} \right] \pi \right) + C \end{aligned}$$

För $t = n\pi$ har vi

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{B}{B+1}} \arctan \left(\sqrt{\frac{B}{B+1}} \tan \frac{t}{2} \right) + C_1(t) + C \\
&= \sqrt{\frac{B}{B+1}} \left(-\frac{\pi}{2} + \left[\frac{t+\pi}{2\pi} \right] \pi \right) + C \\
&= \sqrt{\frac{B}{B+1}} \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi + \pi}{2} \right) + C \\
&= \frac{n\pi}{2} \sqrt{\frac{B}{B+1}} + C
\end{aligned}$$

vilket avslutar beviset. \square

Använd nu Lemma 1 på det tidigare uttrycket där $B = \frac{H}{4}$. (Eftersom $H > 0$, gäller $B > 0$, så det är möjligt att använda Lemma 1.) Vi får då

$$\begin{aligned}
\varphi_0(t) &= -\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{\frac{H}{4}}{\frac{H}{4}+1}} \left(\arctan \left(\sqrt{\frac{\frac{H}{4}}{\frac{H}{4}+1}} \tan \frac{t}{2} \right) + \left[\frac{t+\pi}{2\pi} \right] \pi \right) + C \\
&= -\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{H}{H+4}} \left(\arctan \left(\sqrt{\frac{H}{H+4}} \tan \frac{t}{2} \right) + \left[\frac{t+\pi}{2\pi} \right] \pi \right) + C
\end{aligned}$$

Eftersom φ_0 kan vara valfri lösning till differentialekvationen, kan vi sätta $C = 0$. Därmed får vi enligt Sats 4

$$\varphi(t) = -\frac{f(t)}{2} + \sqrt{\frac{H}{H+4}} \left(\arctan \left(\sqrt{\frac{H}{H+4}} \tan \frac{f(t)}{2} \right) + \left[\frac{f(t)+\pi}{2\pi} \right] \pi \right) + C_1$$

Vi väljer nu en funktion $f(t)$ enligt (14). Eftersom $f(0) = 0$ och vi vill ha $\varphi(0) = 0$, får vi $C_1 = 0$. Ekvationen som beskriver plattans vridning blir därmed

$$\varphi(t) = -\frac{f(t)}{2} + \sqrt{\frac{H}{H+4}} \left(\arctan \left(\sqrt{\frac{H}{H+4}} \tan \frac{f(t)}{2} \right) + \left[\frac{f(t)+\pi}{2\pi} \right] \pi \right) \quad (16)$$

Man kan undersöka hur mycket plattan vrids för varje varv myran går. Det gör man genom att beräkna $\varphi(t+2\pi) - \varphi(t)$ för något $t \geq 1$, ty då gäller $f(t) = t$. Denna differens är oberoende av t , eftersom trappstegsfunktionen i (16) ökar lika mycket med intervallet 2π och tangens är periodisk med perioden π , det vill säga

$$\tan \left(\frac{t+2\pi}{2} \right) = \tan \left(\frac{t}{2} \right)$$

Detta innebär att för varje varv myran promenerar, det vill säga $\Delta t = 2\pi$, kommer plattan att vrida sig

$$\frac{2\pi}{2} - \pi \sqrt{\frac{H}{H+4}} = \left(1 - \sqrt{\frac{H}{H+4}} \right) \pi$$

åt andra hållet. Förhållandet mellan antalet varv myran går och antalet varv plattan snurrar kommer alltså att bli

$$k = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{H}{H+4}} \right)$$

där man enkelt kan se att $0 < k < 1/2$.

Det innebär att plattans vridning är helt styrd av värdet på H , som ju beror på plattans tröghetsmoment, plattans massa och myrans massa, vilka samtliga tre är kända. Det kan därför vara intressant att undersöka plattans vridning för några olika värden på dessa.

7.2 Platta med bestämda egenskaper

Vi inleder med en platta som har $M = 1$ och massan fördelad så att $J = 1/2$. Då gäller

$$H = \frac{J(M+m)}{Mm} = \frac{1+m}{2m}$$

- $m = 1$ ger $H = 1$, vilket innebär $k = (5 - \sqrt{5})/10 \approx 0,28$. Plattan kommer alltså att snurra 0,28 varv i motsatt riktning för varje varv myran går.
- $m \rightarrow 0$ ger $H \rightarrow \infty$, vilket innebär $k \rightarrow 0$. En mycket lätt myra kommer alltså att vrida plattan väldigt lite.
- $m \rightarrow \infty$ ger $H \rightarrow 1/2$, vilket innebär $k \rightarrow 1/3$. Detta är plattans maximala vridning med gällande J och M och den är alltså $1/3$ varv per varv myran promenerar.

Om vi fortfarande har plattans massa $M = 1$, men koncentrerar massans fördelning mot masscentrat, kommer vi att få $J \rightarrow 0$. Detta resulterar också i $H \rightarrow 0$ och därmed $k \rightarrow 1/2$, som ju är det maximala värdet på k . Från det kan man utläsa att om plattan har ett väldigt litet tröghetsmoment, kommer myran att vrida den ett halvt varv i motsatt riktning för varje varv den själv går. Detta är också det maximala förhållandet mellan plattans och myrans vridning.

Translationsrörelsen som beskrivs av

$$O_K = -q \cdot r e^{i(\alpha+\varphi)}$$

får ett mer komplicerat uttryck. Vi beskriver den för en platta med $M = 1$, $J = 1/2$ och en myra med $m = 1$, vilket ger $q = 1/2$ och $H = 1$. För $t \geq 1$ får vi $\alpha = t/2$ och $r = 2 \cos \frac{t}{2}$. (16) ger då

$$O_K = -\cos \frac{t}{2} \cdot e^{-\frac{i}{\sqrt{5}} \left(\arctan \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \tan \frac{t}{2} \right) + \left[\frac{t+\pi}{2\pi} \right] \pi \right)}$$

Ett intressantare fall uppkommer om man för ovanstående platta koncentrerar massan mot masscentrat så att $J \rightarrow 0$. Vi får då $H \rightarrow 0$, vilket gör att plattans vridning enligt (16) blir $\varphi = -t/2$. Eftersom $\alpha = t/2$ (för $t \geq 1$), får vi då

$$e^{i(\alpha+\varphi)} = e^0 = 1$$

Translationsrörelsen blir därmed

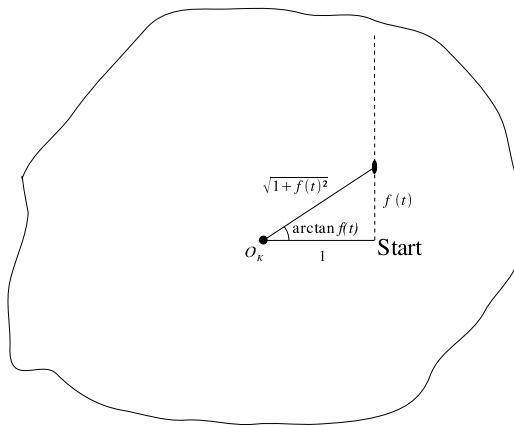
$$O_K = -\cos \frac{t}{2}$$

O_K rör sig alltså fram och tillbaka längs en horisontell linje. Detta innebär att även myran, sett i det fasta systemet, endast kommer att röra sig horisontellt trots att den i det rörliga systemet har en cirkulär rörelse.

8 Myran går rätlinjigt

Ett annat intressant fall är när myran rör sig rätlinjigt på plattan. Uttrycket för dess rörelse kan då till exempel vara

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$



Väljer man den komplexa versionen, får man istället via Pythagoras sats och enkel trigonometri

$$r(f(t)) = \sqrt{1+f(t)^2} \quad \text{och} \quad \alpha(f(t)) = \arctan f(t)$$

Myrans promenad beskrivs då med

$$\xi(t) = \sqrt{1+f(t)^2} \cdot e^{i \cdot \arctan f(t)}$$

Väljer vi åter f på lämpligt sätt och ser till att bivillkoren i Sats 4 är uppfyllda, kan vi först lösa differentialekvationen

$$-(H + r(t)^2) \varphi_0' = r(t)^2 \cdot \alpha'(t)$$

Vi har

$$r^2 = 1 + t^2 \quad \text{och} \quad \alpha' = \frac{1}{1 + t^2}$$

och insättning i differentialekvationen ger

$$\varphi_0' = -\frac{1}{H + 1 + t^2}$$

Förenkla skrivsättet genom att sätta

$$A = \frac{1}{\sqrt{H + 1}}$$

Ekvationen blir då

$$\varphi_0' = -\frac{A^2}{1 + (At)^2}$$

Lösningen till denna ekvation är

$$\varphi_0 = -A \arctan At + C$$

och ekvationen för plattans vridning blir därmed

$$\varphi = -A \arctan(A \cdot f(t)) + C$$

Villkoret $\varphi(0) = 0$ ger även här $C = 0$. För $t \geq 1$ beskrivs då plattans vridning av

$$\varphi = -A \arctan At$$

Eftersom vi har $H > 0$, får vi $0 < A < 1$. Då gäller för varje värde på A att $\arctan At$ går asymptotiskt mot $\pi/2$ när $t \rightarrow \infty$, vilket innebär att rotationsrörelsen avstannar allt mer. Plattans vridning kommer därmed att avstannande närma sig $\varphi = -A\pi/2$.

Translationsrörelsen ges som bekant av $O_K = -qre^{i(\alpha+\varphi)}$, som i detta fall (för $t \geq 1$) innebär

$$O_K(t) = -q\sqrt{1 + t^2} \cdot e^{i(\arctan t - A \arctan At)}$$

Vi ska nu betrakta rotations- och translationsrörelsen i två speciella fall och vi gör detta för stora värden på t . Som förberedelse konstaterar vi att för stora värden på t gäller (för varje värde på A)

$$\arctan t - A \arctan At \approx (1 - A) \frac{\pi}{2}$$

I det första fallet låter vi $A \rightarrow 0$. Detta inträffar då $H \rightarrow \infty$, vilket sker då myran är väldigt liten ($m \rightarrow 0$). Då får vi även $q \rightarrow 0$, eftersom det är förhållandet mellan myrans massa och den sammanlagda massan.

För $A \approx 0$ får vi rotationsrörelsen

$$\varphi = -A \arctan At \approx 0$$

det vill säga en mycket liten rotation av plattan.

Translationsrörelsen blir i detta fall

$$O_K \approx -q\sqrt{1+t^2} \cdot e^{i\pi/2}$$

Eftersom q är nära 0, kommer även translationsrörelsen att bli väldigt liten. Faktorn $e^{i\pi/2}$ i uttrycket visar att den (minimala) translation som finns kommer att ske vertikalt, vilket är parallellt med myrans väg (fast i motsatt riktning). Detta är rimligt eftersom \mathbf{O}_T ska ligga fast och nästan ingen rotation äger rum.

För $A \approx 1$, vilket uppstår då $J \rightarrow 0$, blir läget det motsatta. Rotationsrörelsen blir

$$\varphi = -A \arctan At \approx -\frac{\pi}{2}$$

vilket är den maximala rotationen plattan kan få vid denna promenad. Translationsrörelsen blir

$$O_K \approx -q\sqrt{1+t^2} \cdot e^{i \cdot 0} = -q\sqrt{1+t^2}$$

Detta innebär att \mathbf{O}_K kommer att förflyttas i stort sett horisontellt för stora värden på t . Då gäller $O_K \approx -qt$, vilket stämmer bra med att rotationen närmar sig $-\pi/2$ och att myran går rätlinjigt med konstant fart allt längre från utgångspositionen nära \mathbf{O}_K .

9 Elliptisk rörelse

Även här förenklar vi problemet genom att göra vissa begränsningar i variationen av plattans form och storlek. Däremot kommer vi att först betrakta problemet utan att ge myran och plattan någon speciell massa. Därefter undersöker vi vad som händer under vissa speciella omständigheter.

9.1 Beskrivning av det allmänna fallet

Låt nu myran gå längs randen på en ellips med halvaxlarna a och b . Vid starten låter vi halvaxeln med längden a sammanfalla med x_1 -axeln och där låter vi

även myran starta sin promenad. Om man vill att myran ska vandra ett varv runt ellipsen på 2π sekunder, kan myrans rörelse då beskrivas av

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} a \cos f(t) \\ b \sin f(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

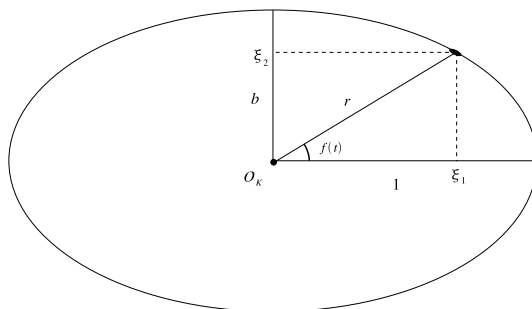
där $f(t)$ är funktionen (14).

Detta innebär att för myrans rörelse gäller

$$\frac{(\xi_1)^2}{a^2} + \frac{(\xi_2)^2}{b^2} = 1$$

som ju är ekvationen för just en ellips.

För enkelhets skull betraktar vi nu en ellips med $a = 1$ samt $0 < b \leq 1$ och framställer där myrans färd på den komplexa formen.



Vi får

$$\xi_1 = r \cos f(t) \quad \text{och} \quad \xi_2 = r \sin f(t)$$

Detta ger

$$\frac{r^2 \cos^2 f(t)}{1^2} + \frac{r^2 \sin^2 f(t)}{b^2} = 1$$

Lös ut r ur detta

$$r^2 = \frac{b^2}{b^2 \cos^2 f(t) + \sin^2 f(t)} = \frac{b^2}{1 + (b^2 - 1) \cos^2 f(t)}$$

Myrans promenad beskrivs därmed av

$$\xi = \frac{b}{\sqrt{1 + (b^2 - 1) \cos^2 f(t)}} \cdot e^{i \cdot f(t)}$$

Ser vi till att villkoren i Sats 4 är uppfyllda ska vi alltså först lösa differentialekvationen

$$-\left(H + \frac{b^2}{1 + (b^2 - 1) \cos^2 t}\right) \varphi'_0 = \frac{b^2}{1 + (b^2 - 1) \cos^2 t}$$

Efter ett antal mer eller mindre komplicerade omskrivningar samt substitutionen $t = s/2$, kommer man fram till

$$\varphi_0 = A \cdot \frac{1}{2} \int \frac{B}{B + \cos^2 \frac{s}{2}} ds$$

där

$$A = -\frac{b^2}{H + b^2} \quad \text{och} \quad B = \frac{b^2 + H}{H(b^2 - 1)}$$

Här används med fördel Lemma 1, varvid man erhåller

$$\varphi_0 = \begin{cases} A\sqrt{\frac{B}{B+1}} \left(\arctan \left(\sqrt{\frac{B}{B+1}} \tan \frac{s}{2} \right) + \left[\frac{s+\pi}{2\pi} \right] \pi \right) + C & \text{om } s \neq n\pi \\ \frac{n\pi}{2} A\sqrt{\frac{B}{B+1}} + C & \text{om } s = n\pi \end{cases}$$

Sätt in uttrycken för A och B , gör substitutionen $s/2 = t$ och några omskrivningar samt ställ kravet $\varphi_0(0) = 0$. Om vi valt $f(t)$ så att de tre kraven i (10) är uppfyllda, vilket till exempel kan åstadkommas med (14), så erhålles för $t \geq 1$ enligt Sats 4

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{b^2}{H+b^2} \sqrt{\frac{H+b^2}{Hb^2+b^2}} \left(\arctan \left(\sqrt{\frac{H+b^2}{Hb^2+b^2}} \cdot \tan t \right) + \left[\frac{2t+\pi}{2\pi} \right] \pi \right) & \text{om } t \neq \frac{n\pi}{2} \\ -\frac{n\pi b^2}{2(H+b^2)} \sqrt{\frac{H+b^2}{Hb^2+b^2}} & \text{om } t = \frac{n\pi}{2} \end{cases} \quad (17)$$

Först kan vi göra noteringen att om ellipsen är en cirkel har vi $b = 1$, vilket leder till $b^2 = 1$. Då gäller

$$\frac{b^2}{H + b^2} = \frac{1}{H + 1} \quad \text{och} \quad \sqrt{\frac{H + b^2}{Hb^2 + b^2}} = 1$$

vilket insatt i (17) efter några omskrivningar kan igenkännas som formeln för cirkelns vridning.

Om vi undersöker plattans vridning för $\Delta t = 2\pi$ då $t \geq 1$, innebär detta att vi ser hur mycket plattan vrider sig för varje varv myran går. Absolutbeloppet av detta förhållande kallar vi k . Vi har alltså

$$k = \left| \frac{\varphi(t + 2\pi) - \varphi(t)}{2\pi} \right| \quad \text{för godtyckligt } t \geq 1$$

Eftersom vi för alla t har

$$\tan(t + 2\pi) - \tan t = 0 \quad \text{och} \quad \left[\frac{2(t + 2\pi) + \pi}{2\pi} \right] \pi - \left[\frac{2t + \pi}{2\pi} \right] \pi = 2\pi$$

innebär det att k är lika med faktorerna framför parentesen i (17), det vill säga

$$k = \frac{b^2}{H + b^2} \sqrt{\frac{H + b^2}{Hb^2 + b^2}}$$

Detta visar att k är helt styrd av längden b på ellipsens halvaxel, plattans tröghetsmoment samt plattans och myrans massor.

Vi ska strax undersöka plattans vridning i några speciella fall, men först ska vi se hur man beräknar massa och tröghetsmoment för en elliptisk platta med halvaxlarna a och b .

För massan på den elliptiska plattan gäller att den är

$$\iint_K \rho(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

där

$$K = \{(\xi_1, \xi_2) : \frac{(\xi_1)^2}{a^2} + \frac{(\xi_2)^2}{b^2} \leq 1\}$$

Vi gör substitutionen

$$\begin{cases} \xi_1 = as \cos \varphi \\ \xi_2 = bs \sin \varphi \end{cases}$$

där $0 \leq s \leq 1$. Substitutionen ger $\mathfrak{J}(s, \varphi) = abs$. Om ρ är konstant får vi då

$$M = \iint_K \rho d\xi_1 d\xi_2 = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho abs d\varphi \right) ds = \pi ab\rho$$

Med samma metod får vi plattans tröghetsmoment

$$\begin{aligned} J &= \iint_K \rho r^2 d\xi_1 d\xi_2 = \iint_K \rho((\xi_1)^2 + (\xi_2)^2) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho(a^2 s^2 \cos^2 \varphi + b^2 s^2 \sin^2 \varphi) abs d\varphi \right) ds \\ &= \int_0^1 \frac{\rho abs^3}{2} \left(\int_0^{2\pi} (a^2(1 + \cos 2\varphi) + b^2(1 - \cos 2\varphi)) d\varphi \right) ds \\ &= \int_0^1 \frac{\rho abs^3}{2} (a^2 + b^2) \cdot 2\pi ds = \frac{\rho ab(a^2 + b^2)\pi}{4} = \frac{M(a^2 + b^2)}{4} \end{aligned}$$

Detta innebär att för en masshomogen platta (det vill säga en med konstant ρ) som har massan $M = 1$ och ena halvaxeln $a = 1$, kommer vi att få

$$J = \frac{1 + b^2}{4}$$

9.2 Plattor med speciella egenskaper

Emellertid vet vi sedan tidigare att vi delvis kan styra J genom att låta ρ variera för olika ställen på plattan. För att jämföra med cirkelfallet anpassar vi därför plattan så att den har $J = 1/2$ för $M = 1$ och $b = 1/2$. Det innebär alltså att denna elliptiska platta har samma massa och tröghetsmoment som det första exemplet på den cirkulära rörelsen. Värdet på b kan väljas godtyckligt i intervallet $0 < b \leq 1$, men här har vi alltså valt $b = 1/2$ och får då $b^2 = 1/4$, vilket ger följande iakttagelser.

- $m = M = 1$ ger $k = 1/\sqrt{10}$, vilket innebär att plattan vrids knappt $1/3$ varv i motsatt riktning för varje varv myran går.
- $m \rightarrow 0$ ger $k \approx 0$, så en mycket lätt myra ger en väldigt liten vridning av plattan.
- $m \rightarrow \infty$ ger $k \approx \sqrt{2}/3$, vilket är denna plattas maximala vridning.

Vad händer med vridningen om plattans form ändras, men tröghetsmomentet och massan är desamma? Vi behåller alltså $m = M = 1$ och $J = 1/2$.

- $b = 1/4$ ger $k = 1/\sqrt{34}$, vilket innebär att plattan snurrar drygt $1/6$ varv åt andra hållet för varje myrvarv.
- $b = 3/4$ ger $k = 3/(5\sqrt{2}) \approx 0,42$.

Det visar sig att rotationen blir större, ju mer lik en cirkel ellipsen blir. Vi har nämligen

$$\begin{aligned} k &= \frac{b^2}{H+b^2} \sqrt{\frac{H+b^2}{Hb^2+b^2}} = \frac{b^2}{H+b^2} \sqrt{\frac{H+b^2}{b^2} \cdot \frac{1}{H+1}} \\ &= \sqrt{\frac{b^2}{H+b^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{H+1}} = \sqrt{1 - \frac{H}{H+b^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{H+1}} \end{aligned}$$

som växer då b ökar.

Uttrycket för ellipsens translationsrörelse blir synnerligen komplicerat. Minns att rörelsen beskrivs av

$$O_K = -q \cdot r e^{i(\alpha+\varphi)}$$

Här har vi

$$\begin{aligned} r &= \frac{b}{\sqrt{1 + (b^2 - 1) \cos^2 f(t)}} \\ \alpha &= t \\ \varphi &= -\frac{b^2}{H+b^2} \sqrt{\frac{H+b^2}{Hb^2+b^2}} \left(\arctan \left(\sqrt{\frac{H+b^2}{Hb^2+b^2}} \cdot \tan t \right) + \left[\frac{2t + \pi}{2\pi} \right] \pi \right) \end{aligned}$$

Det överlämnas till läsaren att utreda detaljerna för denna rörelse, men en simulering i programmet Graphing Calculator visar att den normalt inte är elliptisk.

10 Sammanfattning

De två centrala målsättningarna med detta arbete var att hitta en differentialekvation som beskriver myrans rörelse och att jämföra de två angreppssätten där man använder vektorer respektive komplexa tal.

Differentialekvationens utseende presenteras i Sats 2 och Sats 3. Efter alla förenklingar återstår endast en integration för att lösa ekvationen. Emellertid är det för de flesta rörelsebanor hos myran omöjligt att analytiskt utföra denna integration. Vi presenterade ett antal exempel där en sådan lösning fanns. I dessa fall var det oftast enklare att hitta lösningen om man använde sig av metoden med komplexa tal. Lösningen blev både kortare och mer lättförståelig. Därför väljer vi också uteslutande att arbeta med den metoden i fallet med ellipsen.

En nackdel med den komplexa metoden är att den fungerar endast i två dimensioner. Vill man utvidga vårt problem till högre dimensioner (till exempel genom att låta myran vandra på ytan av en sfär), kan man alltså inte använda denna metod.

Referenser

- [1] V. I. Arnold: *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, 1978.
- [2] J-E. Björk, professor i matematik vid Stockholms universitet: *Personlig kommunikation*
- [3] V. W. Ekman: *Mekanik*, Svenska Bokförlaget, P. A. Norstedt & söner, 1949.