



Stockholms  
universitet

# Skattning av dödligheten för Läns- försäkringar Livs bestånd med hjälp av Lee-Cartermodellen

Anastasia Miranovich

Kandidatuppsats 2014:1  
Matematisk statistik  
April 2014

[www.math.su.se](http://www.math.su.se)

Matematisk statistik  
Matematiska institutionen  
Stockholms universitet  
106 91 Stockholm

# Skattning av dödligheten för Länsförsäkringar Livs bestånd med hjälp av Lee-Cartermodellen

Anastasia Miranovich\*

April 2014

## Sammanfattning

Sedan lång tid tillbaka har dödligheten hos den svenska befolkningen minskat kontinuerligt. I takt med denna minskning har folk börjat leva allt längre. Detta har en stor påverkan på livförsäkringsbolagens reserver. Det är således mycket viktigt att göra dödlighetsprognoser för många år framåt. I föreliggande rapport tas en skattning fram av dödligheten för Länsförsäkringar Livs olika bestånd utifrån aktuella dataunderlag. Detta utförs enligt metodiken beskriven i Försäkringstekniska Forskningsnämndens dödlighetsutredning. Först skattas den aktuella dödligheten bland försäkrade med hjälp av Makehammodellen utifrån data för år 2010-2012. Eftersom försäkringsdatamaterialet är för litet för att modellera trenden i dödligheten används dödligheten hos den svenska befolkningen. Modellen som tillämpas för att ta hänsyn till trenden i dödligheten är den så kallade Lee-Cartermodellen. Trenden i befolkningsdödligheten enligt Lee-Cartermodellen skattas över samma tidsperiod som dödligheten bland försäkrade. Den skattade trenden överförs sedan till försäkringsdödligheten med hjälp av kvoter mellan den Makeham-anpassade försäkringsdödligheten i respektive bestånd och befolkningsdödligheten. Den framtida dödligheten för Länsförsäkringar Livs olika bestånd projiceras därefter genom att dessa kvoter sätts samman med en trendbaserad befolkningsdödlighet skattad utifrån data över tidsperioden 1985-2012. En efterföljande analys av de erhållna resultaten för varje bestånd görs såväl som en studie av de uppkomna skillnaderna mellan dessa.

---

\*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms universitet, 106 91, Sverige.  
E-post: [anastasiamiranovich@yahoo.se](mailto:anastasiamiranovich@yahoo.se). Handledare: Erland Ekheden.

## **Abstract**

Mortality in the Swedish population has declined continuously over the years. In line with this change longevity has increased. This has a major impact on the reserves of life insurance companies. It is therefore of great importance to make mortality projections for many years ahead.

This paper focuses on estimating the mortality of Länsförsäkringar Liv's population based on current data, with research conducted according to the methodology described in Försäkringstekniska Nämnden's mortality survey. We start with estimating mortality among the insured, using the Makeham's model for years 2010-2012. The insurance data, however, is inadequate when dealing with mortality trends. Therefore we use the mortality data for the Swedish population to estimate this trend. The model applied for this purpose is the so-called Lee-Carter model. It is based on mortality data over the same period as the data for the insured. The estimated trend for the Swedish population is then transferred to the Makeham-fitted mortality among insured by making ratios between them. Future mortality for Länsförsäkringar Liv's population is obtained by applying these ratios to the projected mortality of the Swedish population, based on the Lee-Carter model estimated from years 1985-2012. This is followed by the corresponding analysis and comparison of the results.

## **Förord**

Detta examensarbete motsvarar 15 högskolepoäng och leder till en kandidatexamen i matematisk statistik på Stockholms Universitet.

Examensarbetet har utförts på Länsförsäkringar Liv under vägledning av min handledare Erling Andersson. Jag vill rikta ett stort tack till Erling och alla aktuarier på avdelningen Aktuariell Teknik för all er hjälp, stöd och bemötande av alla mina frågor under arbetets gång samt också för chansen att få göra detta examensarbete hos er.

Jag vill också tacka för alla värdefulla insatser min handledare Erland Ekheden på matematiska institutionen på Stockholms Universitet.

Slutligen vill jag tacka min käraste familj och mina underbara vänner för ert stöd och tro på mig.

## INNEHÅLLSFÖRTECKNING

<b>1. INLEDNING</b> .....	<b>4</b>
1.1 INTRODUKTION .....	4
1.2 MÅL.....	5
<b>2. ANTAGANDEN OCH DATA</b> .....	<b>6</b>
2.1 ANTAGANDEN.....	6
2.2 BEFOLKNINGSDATA, GRUNDLÄGGANDE BEGREPP .....	6
2.3 FÖRSÄKRINGSDATA .....	8
<b>3. MODELLER FÖR SKATTNING AV DÖDLIGHETEN</b> .....	<b>10</b>
3.1 MAKEHAMMODELLEN.....	10
3.2 LEE-CARTERMODELLEN .....	11
<b>4. SKATTNINGAR OCH PREDIKTION</b> .....	<b>15</b>
4.1 SKATTNING AV DEN AKTUELLA FÖRSÄKRINGSDÖDLIGHETEN .....	15
4.2 SKATTNING AV BEFOLKNINGSDÖDLIGHETEN .....	18
4.3 SKATTNING AV DEN PREDIKTERADE FÖRSÄKRINGSDÖDLIGHETEN .....	23
<b>5. SAMMANFATTNING AV RESULTAT</b> .....	<b>29</b>
<b>6. DISKUSSION</b> .....	<b>31</b>
<b>REFERENSER</b> .....	<b>33</b>

# 1. Inledning

## 1.1 Introduktion

Vi står inför en extraordinär demografisk omvandling runt om i världen. Dödligheten bland befolkningen i industriländerna har minskat betydligt under de senaste 150 åren. En efterföljande längre livslängd för nya generationer har observerats. Det finns troligen flera orsaker till detta. De främsta orsakerna berörda i litteraturen är lifestyle-faktorerna samt socioekonomiska förutsättningar (McWilliam, 2011). De sista består bland annat av framsteg inom sjukvården samt förbättrade levnadsförhållanden.

I Sverige har dödligheten bland befolkningen minskat kontinuerligt sedan mitten av 1800-talet som framgår av SCB:s årliga rapport (SCB, 2012). I takt med dödlighetsminskningen har en ökning av medellivslängden bland befolkningen observerats. Det framgår dessutom av rapporten att minskningen av dödligheten bland äldre personer har blivit betydligt bidragande till dessa förändringar över tiden. Medellivslängden fortsätter att öka på grund av att allt fler personer når högre åldrar. Dessa demografiska förändringar beräknas leda till stora utmaningar för hela samhället. Motsvarande åtgärder inom pensions- och livförsäkringsområden måste vidtas för att bemöta framtida risker. För dessa ändamål behövs antaganden om den framtida utvecklingen av dödligheten/livslängden.

Antagandet om den framtida dödligheten spelar en väldigt stor roll för korrekta aktuariella beräkningar inom ett livförsäkringsbolag. För många tillämpningar är det därför viktigt att dödlighetsantagandet speglar verkliga förhållanden och inte enbart ger en ögonblicksbild. En metod som tar hänsyn till trendmässig livslängdsökning är den så kallade Lee-Cartermodellen för skattning av den framtida dödligheten. I den svenska livförsäkringsbranschen etablerades denna metod i samband med den senaste dödlighetsundersökningen av Försäkringstekniska Forskningsnämnden som under 2007 publicerade sin rapport (FTN, 2007). Vissa livförsäkringsbolag, bland andra Länsförsäkringar Liv, har därefter tagit fram egna dödlighetsskattningar med hjälp av Lee-Cartermodellen.

Sedan 2009 tillämpar Länsförsäkringar Liv en sådan dödlighetsmodell för beräkningen av försäkringstekniska avsättningar, FTA. I balansräkningen utgör FTA den enskilt största posten och det är därför av utomordentlig vikt att denna är så korrekt

som möjligt. Därför behövs det bland annat regelbundna uppdateringar av tillämpat dödlighetsantagande.

## **1.2 Mål**

I detta arbete avser vi att ta fram en förnyad skattning av Länsförsäkringar Livs FTA-dödlighet för olika delbestånd med hjälp av Lee-Cartermodellen. Huvudsyftet är dels att få en uppdatering med hänsyn till aktuella dataunderlag, dels ser vi detta även som en möjlighet att studera och kvalitetsgranska nuvarande modell. Vi ska även studera vilka skillnader som finns i dödligheten mellan olika försäkringsbestånd samt finna en ny förväntad livslängd för de försäkrade.



## 2. Antaganden och data

### 2.1 Antaganden

Det är praktiskt att först formulera en rad antaganden som föreslogs av Försäkringstekniska Forskningsnämnden (FTN, 2007), och som vi senare kommer att behöva i våra beräkningar:

- Individer föds/avlider likformigt under kalenderåret  $t$
- Individers livslängder är sinsemellan oberoende och likafördelade
- Åldersspecifika dödlighetsintensiteter är konstanta inom tidsindelningarna, men kan tillåtas att variera med avseende på ålder  $x$  och tidsindelning  $t$ . Mer specifikt, givet ålder  $x$  och kalenderår  $t$  (som båda antas vara heltal), kan det antas att  $\mu_{x+h}(t + \tau) = \mu_x(t)$  för  $(0 \leq h, \tau \leq 1)$

### 2.2 Befolkningsdata, grundläggande begrepp

I detta arbete kommer vi att använda oss av befolkningsdata för att modellera trenden i dödligheten med hjälp av Lee-Cartermodellen. Orsaken till det är att försäkringsunderlaget är för litet för att tillräckligt säkert kunna skatta denna trend. Befolkningsdata är hämtad både från Human Mortality Database och Statistiska Centralbyrås hemsidor ([www.mortality.org](http://www.mortality.org), [www.scb.se](http://www.scb.se)). Dataunderlaget innehåller Sveriges folkmängd samt antalet avlidna fördelade på ålder och kön för respektive år. Vi kommer i detta arbete att använda oss av data som avser tidsperioden år 1985-2012.

Lee-Cartermodellens parametrar baseras på dödlighetsintensiteter  $\mu_x$ , som även kallas för dödstal. Dödstalen  $\mu_x$  utgörs av kvoten mellan antal avlidna och risktiden i en viss ålder under tidsperioden  $t$ . Detta ges av följande uttryck

$$\hat{\mu}_x(t) = \frac{D_x(t)}{(N_{x-1}(t-1) + N_x(t))/2} \quad (2.1)$$

$D_x(t)$  = Antalet individer i åldern  $x$  som avlider under kalenderåret  $t$

$N_x(t)$  = Antalet individer som uppnått åldern  $x$  samt lever vid årsskiftet  $t$

$N_{x-1}(t-1)$  = Antalet individer som uppnått åldern  $x-1$  samt lever vid årsskiftet  $t-1$

Risktiden ges av uttrycket i nämnaren av formeln (2.1) och betecknas med  $R_x(t)$ . Den representerar genomsnittlig folkmängd för respektive ålder under en tidsperiod. För att skatta rishtiden är det då rimligt att anta att individer föds likformigt under ett kalenderår som i avsnitt 2.1. Detta medför att individer som ingår i populationen  $N_x(t)$  i genomsnitt är  $x+1/2$  år gamla. Individer i populationen  $N_{x-1}(t-1)$  i genomsnitt är  $x-1/2$  år gamla. På samma sätt är det då rimligt att anta att individer avlider likformigt.

I praktiken kan man behöva uttrycka sig i termer av både dödstal  $\mu_x$  och dödsrisker  $q_x$ . Dödsrisken ges av  $q_x(t) = P(T_x(t) \leq 1)$  och representerar sannolikheten att en  $x$ -årig individ, observerad vid tidpunkten  $t$ , avlider inom ett år. Beteckningen  $T_x(t)$  står här för återstående livslängd för individen vid tidpunkten  $t$ . För omvandling av dödstal till dödsrisker använder man sig av sambandet

$$q_x(t) = 1 - e^{-\mu_x(t)} \quad (2.2)$$

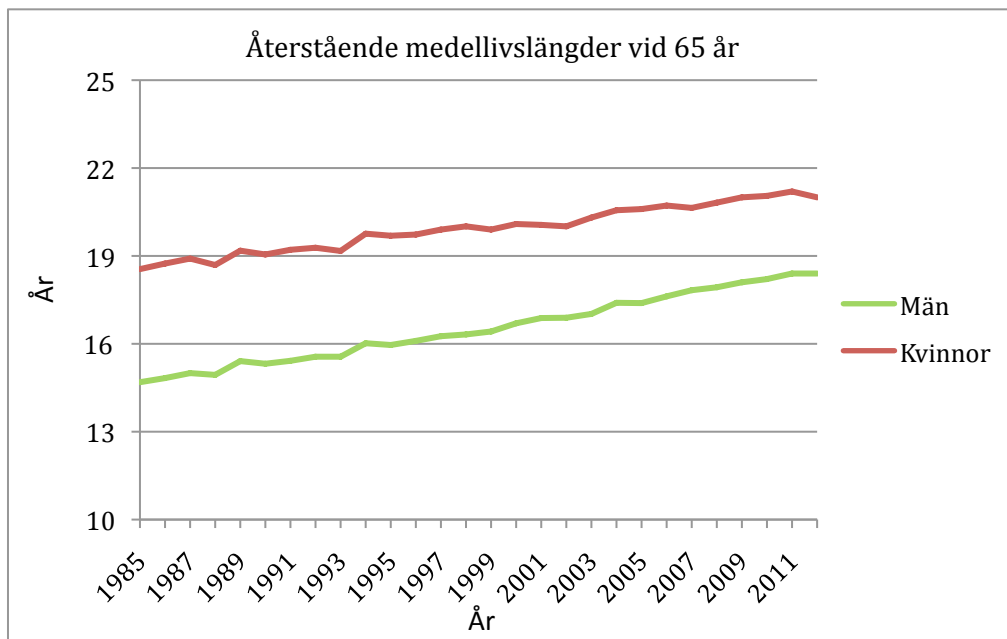
Det kan också vara av intresse att skatta överlevelsefunktionen  $l(x)$  samt den förväntade återstående livslängden  $e_x$ , som ges av uttryck (2.3)-(2.4) nedan. Den intresserade läsaren hänvisas till (Andersson, 2005) för att få en uppfattning om grundläggande begrepp inom livförsäkringsmatematik.

$$l(x) = l(x-1) * (1 - q_{x-1}) = \prod_{i=0}^{x-1} (1 - q_i) \quad (2.3)$$

där  $x=0,1,2,3\dots$  och  $l(0)=1$

$$e_x = E[T_x] = \int_0^{\infty} \frac{l(x+t)}{l(x)} dt \quad (2.4)$$

Figuren 2.1 illustrerar utvecklingen av medellivslängder i Sverige för både män och kvinnor under tidsperioden 1985-2012.



**Figur 2.1,** Återstående medellivslängder för män och kvinnor vid åldern 65 år, tidsperioden 1985-2012 (Datakälla: SCB)

### 2.3 Försäkringsdata

Inom den traditionella försäkringsrörelsen i Länsförsäkringar Liv finns en mängd olika dödligheter. Dödlighet i försäkringstekniska avsättningar (FTA-dödlighet) spelar en central roll för bildande av tillräckliga avsättningar för framtida utbetalningar. Dödligheten kan naturligtvis variera mellan olika produkter. Eftersom Länsförsäkringar Liv inte gör någon differentiering av dödligheten mellan olika produkter vid beräkning av FTA-dödlighet, avstår vi från detaljer om produkterna.

Framtagande och kontroll av försäkringsdata har varit en stor del av detta arbete. Dessa data har hämtats med hjälp av programpaketet SAS. Data avser antalet försäkringskontrakt år 2009-2012 samt antalet avlidna år 2010-2012 med avseende på kön och ålder. En individ kan förekomma flera gånger varje år beroende på hur många försäkringar hon har tecknat. Därför gör vi ett antagande om att en försäkring är en individ. Detta förutsätter att individers livslängder är sinsemellan oberoende och likafördelade som i avsnitt 2.1. Våra data organiseras således på så sätt att antalet försäkringskontrakt för ett visst kalenderår, säg år 2010, sedan kan beräknas som medelvärdet av ingående antal 2010 (d.v.s. antal 2009-12-31) och utgående antal 2010.

Den empiriska dödligheten bland försäkrade skattas sedan med hjälp av centrala dödskvoter, som i sin tur beräknas genom att antalet avlidna delas med antalet försäkringskontrakt (risktiden) för respektive ålder.

För framtagandet av den aktuella försäkringsdödligheten kommer antalsdödlighet att användas. Antalsdödligheten räknas som kvoten mellan antalet dödsfall och risktiden för respektive ålder. Risktiden här utgörs av antalet försäkringskontrakt för respektive ålder under tidsintervallet. Alla beräkningar med dödligheten bland försäkrade görs med uppdelningen i fyra försäkringsbestånd, nämligen man/kvinna respektive positiv/negativ risksumma. Hela försäkringsbeståndet omfattar flera hundra tusen försäkringskontrakt för respektive delbestånd.

Försäkringsrisksumma vid tidpunkten  $t$ ,  $R(t)$ , definieras som värdefunktionens diskontinuerliga förändring om den försäkrade avlider vid  $t$  (Andersson, 2005).

$$R(t) = S(t) - V(t) \quad (2.5)$$

$S(t)$  = Försäkringsbolagets utbetalningar enligt försäkringsavtalet vid dödsfall

$V(t)$  = Försäkringens värdefunktion

Försäkringens värdefunktionen ovan definieras som

$$V(t) = A(t) - B(t) \quad (2.6)$$

$A(t)$  = Kapitalvärdet av försäkringsgivarens framtida förpliktelser enligt försäkringsavtalet vid tidpunkten  $t$

$B(t)$  = Kapitalvärdet av försäkringstagarens framtida förpliktelser enligt försäkringsavtalet vid tidpunkten  $t$

I viss mån kan dödligheten skilja sig mellan de båda kollektiven positiva/negativa risksummor. Detta beror på att försäkringar med positiv risksumma oftare medför krav på hälsoprövning av den försäkrade. Därmed är det naturligt med en sådan uppdelning. Dessutom är det ofta lätt att klassificera efter risksumman, även om man måste välja när risksumman är 0. Det ska tilläggas att försäkringar med risksumman  $R(t)=0$  ingår i delbestånd för positiv risksumma.

Det är viktigt att påpeka att FTA-dödligheten för Länsförsäkringar Liv omfattar generationsdödlighet (d.v.s. individer födda under samma födelseårstionden) eftersom den förväntade livslängden inte är samma mellan generationer. Och således omfattar försäkringsdata individer i åldrarna 0-110 år.

### 3. Modeller för skattning av dödligheten

#### 3.1 Makehammodellen

Makeham introducerade sin modell för livslängden år 1860. I Sverige används sedan 1930-talet denna modell med stor framgång av många försäkringsbolag för utjämning av den observerade dödligheten. Länsförsäkringar Liv, bland andra, använder sig också av Makehammodell för att bestämma sin aktuella dödlighetsintensitet. Denna modell beskrivs av uttrycket

$$\mu(x) = \alpha + \beta * 10^{\gamma * x} \quad (3.1)$$

Parametrarna  $\alpha$ ,  $\beta$  och  $\gamma$  i modellen antas vara lika oavsett ålder samt uppfyller bivillkoren att  $\alpha + \beta > 0$ ,  $\beta > 0$  samt  $\gamma \geq 0$ . De skiljer dock sig för respektive försäkringsbestånd. Dessa parametrar skattas med hjälp av den modifierade minimum  $\chi^2$ -metoden. Denna metod går ut på att bestämma parametrarna  $(\alpha, \beta, \gamma)$  som minimerar en viktad kvadratsumma (3.2).

$$Q = \sum_{x_i} w_{x_i} * (\hat{\mu}_{x_i}^{obs} - \alpha - \beta * e^{\gamma * x_i})^2 \quad (3.2)$$

där  $w_{x_i}$  representerar lämpligt valda vikter

Vi ska enbart bestämma parameteruppsättningen  $(\beta, \gamma)$  eftersom Länsförsäkringar Liv använder sig av redan givna  $\alpha$ -värden, vilka antas vara samma för respektive kön. Detta görs på grund av att siffror över befolkningsdödligheten från Statistisk Årsbok, för åldrarna 0-24 år, är relativt stabila över tiden. Mot bakgrund av dessa siffror har  $\alpha$  fixerats till 0,0004 för män respektive 0,00025 för kvinnor.

Makehammodellen har trots allt sina svagheter. Det finns nämligen en viss osäkerhet i modellen för höga åldrar. Detta innebär att denna modell är mindre lämplig för höga åldrar och därför behöver justeras. Ett sätt att göra det är att använda Makehammodell med linjär justering för höga åldrar enligt (Lindbergson, 2001). Makehamformeln får då följande utseende

$$\mu(x) = \begin{cases} \alpha + \beta * 10^{\gamma * x}, & x < \omega \\ \mu(\omega) + \kappa * (x - \omega), & x \geq \omega \end{cases} \quad (3.3)$$

Trots att Makehamfördelningen kan ge en osäker anpassning till data även för låga åldrar ska det påpekas att låga åldrar är av ganska liten betydelse inom livförsäkring, eftersom individer i dessa åldrar inte tillhör de individer som främst bildar försäkringsbeståndet.

Det är värt att nämna att i vårt fall beskriver Makehamanpassningen dödligheten bland försäkrade idag. Detta innebär att modellen ger enbart en ögonblicksbild över dödligheten eftersom den inte tar hänsyn till den dödlighetstrend som faktiskt föreligger. I princip skulle man kunna ta hänsyn till föreliggande trendinformation genom att lägga till en tidsfaktor till Makehamformeln, men vi ska istället använda oss av en Lee-Cartermodell, som beskrivs i nästa avsnitt.

### 3.2 Lee-Cartermodellen

Lee-Cartermodellen introducerades år 1992 av Ronald D. Lee och Lawrence R. Carter och publicerades i 'Journal of the American Statistical Association'. Deras modell baserades på dödlighetsdata i USA och den började sedan i stor utsträckning användas i många olika länder. Denna metod går ut på att skatta dödlighetstrenden för observerade data, som sedan kan extrapoleras för framtidens dödlighetsutveckling.

Lee-Cartermodellen har getts olika formuleringar i litteraturen, men vi kommer att använda den formuleringen som Försäkringstekniska Forskningsnämnden tog fram, nämligen att dödlighetsintensiteten beskrivs av följande samband

$$\mu_x(t) = e^{\alpha_x + \kappa(t) * \beta_x} \quad (3.4)$$

$\alpha_x$  = Åldersspecifikt medelvärde av de logaritmerade dödstalen  $\mu_x(t)$  över observationsåren t

$\kappa(t)$  = Tidstrenden i dödstalen beroende av individers födelseår

$\beta_x$  = Åldersspecifik avvikelse från de logaritmerade dödstalen  $\mu_x(t)$  vid variation av  $\kappa(t)$

Med åren har Lee-Cartermodellen genomgått en rad olika utvidgningar och förbättringar. I detta arbete ska vi använda oss av en så kallad Poisson variant av Lee-Cartermodellen introducerad av Brouhns et al. För att kunna approximera antalet

avlidna med en Poissonfördelning ska förutsättningarna i avsnitt 2.1 vara uppfyllda enligt metodiken i (FTN, 2007). Under dessa uppfyllda förutsättningar kan vi anta att

$$D_x(t) \approx \text{Poisson}(R_x(t) * \mu_x(t)) \quad (3.5)$$

där dödlighetsintensiteten  $\mu_x(t)$  ges av formeln (3.4)

Här betraktas antalet avlidna som en Poissonfördelad stokastisk variabel  $D_x(t)$ , där dess väntevärde ges av produkten av risktiden och dödlighetsintensiteten, nämligen  $R_x(t) * \mu_x(t)$ .

Skattning av parametrarna i Lee-Cartermodellen (3.4) ska utföras på samma sätt som Försäkringstekniska Forskningsnämnden gjorde i sin studie. Modellens parametrar kommer nämligen att tas fram med hjälp av maximumlikelihoodmetoden samt under förutsättning att det finns linjära samband mellan parametrarna i modellen. Detta görs för att kunna införa normeringar av parametrarna enligt entydighetsvillkor. Detaljerna kring detta kan återfinnas i (FTN, 2007).

Först definierar vi parametervektorerna  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\kappa$  som

$$\alpha = \{\alpha_x ; x_{\min}, \dots, x_{\max}\}, \beta = \{\beta_x ; x_{\min}, \dots, x_{\max}\} \text{ och } \kappa = \{\kappa(t) ; t = t_{\min}, \dots, t_{\max}\}$$

Likelihoodfunktionen kan då skrivas som

$$L(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\kappa}) = \prod_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \prod_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} P(D_x(t) = d_x(t)) = \prod_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \prod_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} e^{-\lambda_x(t)} * \frac{\lambda_x(t)^{d_x(t)}}{d_x(t)!} \quad (3.6)$$

$d_x(t)$  = observerat värde av den stokastiska variabeln  $D_x(t)$

$\lambda_x(t)$  = förväntade värde av  $D_x(t)$ , d.v.s

$$\lambda_x(t) = E[D_x(t)] = R_x(t) * \mu_x(t) = R_x(t) * e^{\alpha_x + \kappa(t) * \beta_x} \quad (3.7)$$

Med hjälp av (3.7) får vi logaritmerade likelihoodfunktionen som

$$\begin{aligned} l(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\kappa}) &= \ln(L(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\kappa})) = \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} [-\lambda_x(t) + d_x(t) * \ln(\lambda_x(t))] + k = \\ &= \sum_{x,t} [-R_x(t) * \mu_x(t) + d_x(t) * \ln(R_x(t) * \mu_x(t))] + k = \\ &= \sum_{x,t} [-R_x(t) * e^{\alpha_x + \kappa(t) * \beta_x} + d_x(t) * (\alpha_x + \kappa(t) * \beta_x)] + k \end{aligned} \quad (3.8)$$

I sista likheten av (3.8) används uttrycket för  $\mu_x$  enligt formeln (3.4).  $R_x(t)$  står för risktiden samt  $k$  är en konstant.

Beräknad log-likelihoodfunktion (3.8) ska maximeras med hjälp av en iterativ teknik. Den iterativa metoden som vi kommer att använda kallas för Newton-Raphsonmetoden. Denna metod går ut på att man bildar gradientvektorn och andraderivatmatrisen för funktionen, och med Newton-Raphsonmetodik söker sig fram till maximipunkt. Den logaritmerade likelihoodfunktionen (3.8) har en komplicerad struktur och därför används en förenklad Newton-Raphsonsteknik. Den intresserade läsaren hänvisas till (FTN, 2007) för fler detaljer.

Vi börjar med att skatta dödlighetsintensiteten som

$$\hat{\mu}_x(t) = \frac{d_x(t)}{\hat{R}_x(t)} \quad (3.9)$$

Som iterationens startvärden av parametervektorerna  $\alpha$ ,  $\beta$  och  $\kappa$  är det lämpligt att välja följande

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_x^{(0)} &= \frac{1}{t_{\max} - t_{\min} + 1} * \sum_{t_{\min}}^{t_{\max}} \ln[\hat{\mu}_x(t)] \\ \hat{\beta}_x^{(0)} &= \frac{1}{x_{\max} - x_{\min} + 1} \\ \hat{\kappa}^{(0)}(t) &= \sum_{x_{\min}}^{x_{\max}} \hat{\beta}_x^{(0)} * z_x(t) \\ z_x(t) &= \ln[\hat{\mu}_x(t) - \hat{\alpha}_x^{(0)}] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dessa startvärden av parametrarna  $\alpha$ ,  $\beta$  och  $\kappa$  ska uppfylla följande entydighetsvillkor

$$\sum_t \kappa(t) = 0 \quad \sum_x \beta_x = 1 \quad (3.11)$$

Givet startvärdena  $\hat{\alpha}_x^{(0)}, \hat{\beta}_x^{(0)}, \hat{\kappa}^{(0)}(t)$  bildar man nya preliminära parametervärden. Enligt den allmänna Newton-Raphsonmetodiken itererar man en komponent i parametervariabeln i sänder, så att entydighetsvillkoren (3.11) uppfylls. Detta erhålls med hjälp av lämpligt valda normeringar av parametrarna. Samtliga iterationsuttryck ges av följande



$$\begin{aligned}
\alpha_x^{(v+1)} &= \alpha_x^{(v)} + h * \frac{\sum_t [d_x(t) - \lambda_x^{(v)}(t)]}{\sum_t \lambda_x^{(v)}(t)}, & \beta_x^{(v+1)} &= \beta_x^{(v)}, & \kappa^{(v+1)}(t) &= \kappa^{(v)}(t) \\
\kappa^{(v+2)} &= \kappa^{(v+1)}(t) + h * \frac{\sum_x [d_x(t) - \lambda_x^{(v+1)}(t)] * \beta_x^{(v+1)}}{\sum_x \lambda_x^{(v+1)}(t) * (\beta_x^{(v+1)})^2}, & \alpha_x^{(v+2)} &= \alpha_x^{(v+1)}, & \beta_x^{(v+2)} &= \beta_x^{(v+1)} \\
\beta_x^{(v+3)} &= \beta_x^{(v+2)} + h * \frac{\sum_t [d_x(t) - \lambda_x^{(v+2)}(t)] * \kappa(t)^{(v+2)}}{\sum_t \lambda_x^{(v+2)}(t) * (\kappa(t)^{(v+2)})^2}, & \alpha_x^{(v+3)} &= \alpha_x^{(v+2)}, & \kappa^{(v+3)}(t) &= \kappa^{(v+2)}(t)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

där  $\lambda_x^{(v)} = R_x(t) * e^{\alpha_x^{(v)} + \kappa^{(v)}(t) * \beta_x^{(v)}}$

I dessa iterationsuttryck har införts steglängdtparameter  $h$ . Orsaken till det är att den riktiga iterationen utnyttjar inversen av andraderivatsmatrisen. Den ger ett samlat värde på krökningen av den yta som representeras av den funktion som ska maximeras.

I detta arbete kommer vi att löpande uppdatera de skattade parametrarna en och en enligt (3.13), medan man i den allmänna modellen (3.12) gör uppdateringarna stegvis för alla parametrar. Med hjälp av de allmänna iterationsformlerna (3.12) får vi följande iterativa uttryck för modellens parametrar, som vi kommer att använda i våra beräkningar

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_x^{(v+1)} &= \hat{\alpha}_x^{(v)} - h * \frac{\sum_t [d_x(t) - \hat{R}_x(t) * \exp(\hat{\alpha}_x^{(v)} + \hat{\kappa}^{(v)}(t) * \hat{\beta}_x^{(v)})]}{-\sum_t [\hat{R}_x(t) * \exp(\hat{\alpha}_x^{(v)} + \hat{\kappa}^{(v)}(t) * \hat{\beta}_x^{(v)})]}, \\
\hat{\kappa}^{(v+1)}(t) &= \hat{\kappa}^{(v)}(t) - h * \frac{\sum_x [d_x(t) - \hat{R}_x(t) * \exp(\hat{\alpha}_x^{(v+1)} + \hat{\kappa}^{(v)}(t) * \hat{\beta}_x^{(v)})] * \hat{\beta}_x^{(v)}}{-\sum_x [\hat{R}_x(t) * \exp(\hat{\alpha}_x^{(v+1)} + \hat{\kappa}^{(v)}(t) * \hat{\beta}_x^{(v)})] * (\hat{\beta}_x^{(v)})^2}, \\
\hat{\beta}_x^{(v+1)} &= \hat{\beta}_x^{(v)} - h * \frac{\sum_t [d_x(t) - \hat{R}_x(t) * \exp(\hat{\alpha}_x^{(v+1)} + \hat{\kappa}^{(v+1)}(t) * \hat{\beta}_x^{(v)})] * \hat{\kappa}^{(v+1)}(t)}{-\sum_t [\hat{R}_x(t) * \exp(\hat{\alpha}_x^{(v+1)} + \hat{\kappa}^{(v+1)}(t) * \hat{\beta}_x^{(v)})] * (\hat{\kappa}^{(v+1)}(t))^2}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Vi kommer emellertid att använda steglängden  $h=1$  för enkelhets skull precis som i (FTN, 2007). Parametervärdena i (3.13) ska också uppfylla entydighetsvillkor (3.11). Som avbrottskriterium i iterationen kommer vi att använda oss av värdet  $10^{-10}$ , vilket kan anses som tillräckligt litet. Konvergensen är förhållandevis snabb och den uppnås enligt följande

$$\left| \frac{l^{(v+1)}(\hat{\alpha}^{(v+1)}, \hat{\beta}^{(v+1)}, \hat{\kappa}^{(v+1)})}{l^{(v)}(\hat{\alpha}^{(v)}, \hat{\beta}^{(v)}, \hat{\kappa}^{(v)})} \right| < 10^{-10} \tag{3.14}$$

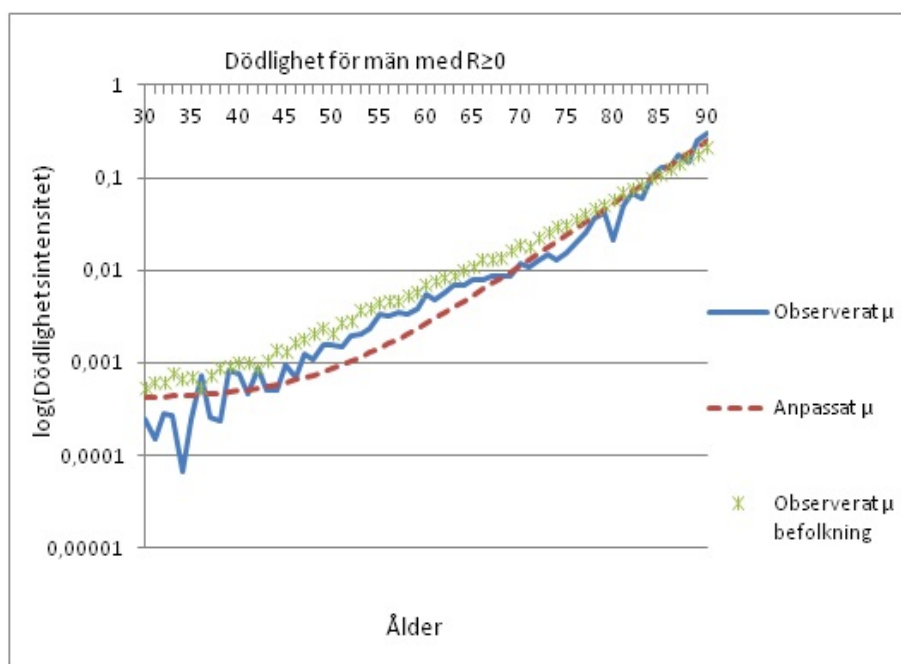
där  $l$  är log-likelihoodfunktionen enligt (3.8)

## 4. Skattningar och prediktion

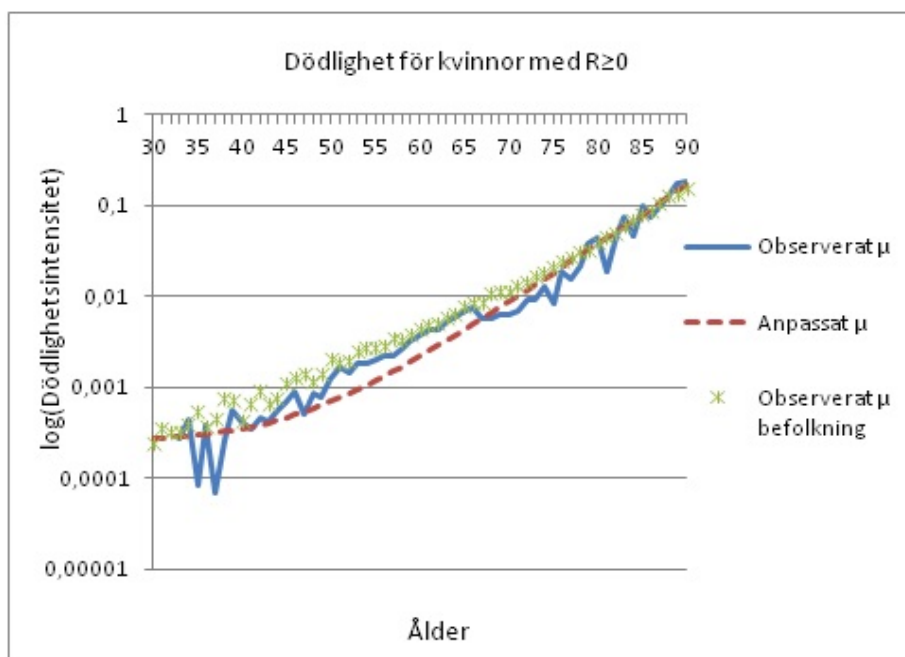
### 4.1 Skattning av den aktuella försäkringsdödligheten

I beräkningar av den aktuella försäkringsdödligheten använder Länsförsäkringar Liv sig av Makehammodell, vars parametrar  $\alpha$ ,  $\beta$  och  $\gamma$  skattas med hjälp av  $\chi^2$ -metoden som introducerades i avsnitt 3.1. Makehamfördelningen ger en dålig anpassning för höga åldrar och därför används Makehammodell med linjär justering för höga åldrar som ges av formeln (3.3). I vårt fall alltså blir  $\omega=95$  år samt värden på parameter  $\kappa$  för  $\omega \geq 96$  år för män är lika med 0,05 samt för kvinnor 0,03 oavsett risksummetecken. Det ska tilläggas att vi har valt att beräkna parameter  $\kappa$  som en utjämningsfaktor utifrån åldrarna 90 och 95 år.

På grund av otillräckliga data i Länsförsäkringar Livs bestånd för vissa åldrar kommer vi att använda åldrarna med den största exponeringen (risktiden) som huvudalternativ för beräkningarna. I vårt fall bygger vi våra skattningar på åldrarna 30-90 år för varje delbestånd. Detta utförs genom att man viktar varje observation mot exponeringen för denna åldersgrupp. Programpaketet Excel har använts för att ta fram skattningarna och resultatet för respektive försäkringsbestånd presenteras av figurerna nedan. Logaritmisk skala används för att få en bättre bild över dödligheten i olika åldrar.

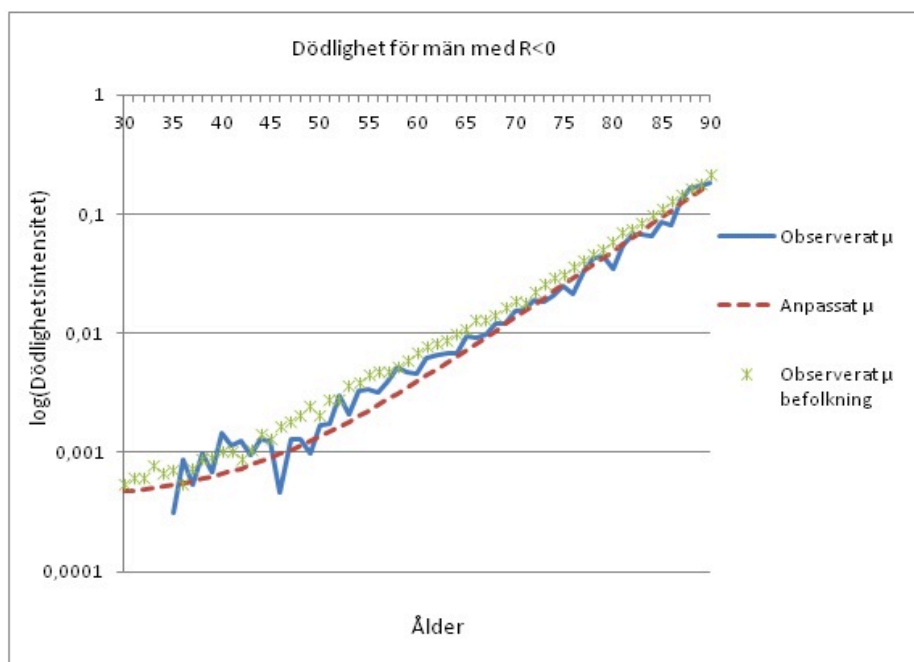


**Figur 4.1**, Aggregerad dödlighet för män med  $R \geq 0$  för år 2012, skattad utifrån åren 2010-2012

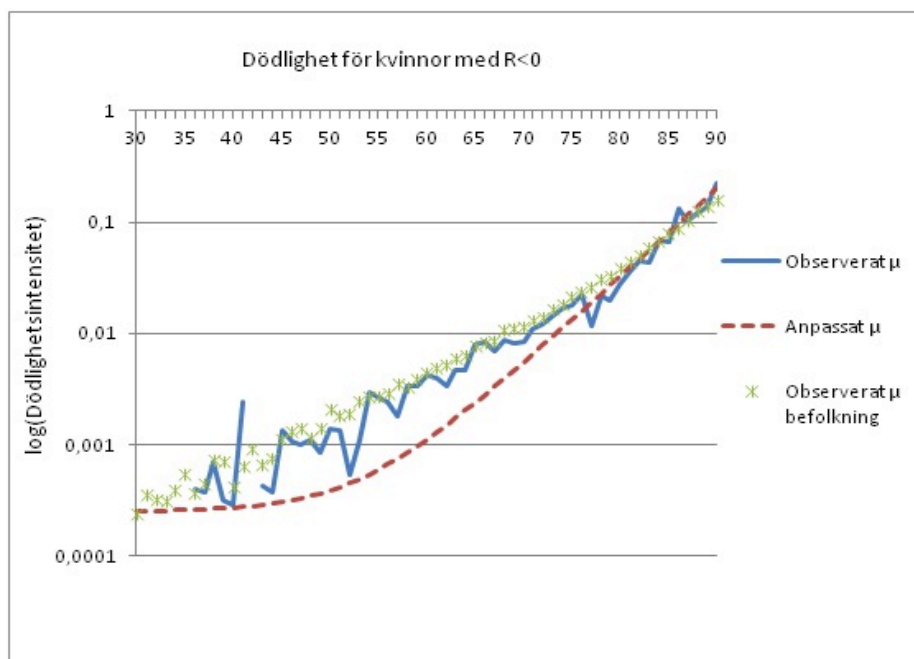


**Figur 4.2, Aggregerad dödlighet för kvinnor med  $R \geq 0$  för år 2012, skattad utifrån åren 2010-2012**

Figurerna 4.1 och 4.2 illustrerar den observerade samt Makeham-anpassade försäkringsdödligheten för bestånd med positiv risksumma samt den observerade befolkningsdödligheten för åldrarna 30-90 år. Vi ser i figurerna att den empiriska dödlighetsintensiteten hoppar upp och ner i åldrarna under 40-års ålder för båda könen. Det beror främst på att det inte finns tillräckligt med data för vissa åldrar i åldersintervallet 30-40 år. Samtidigt kan det också bero på att det sker få dödsfall i dessa åldrar. Makehamfördelningen ger således en osäker anpassning till den observerade försäkringsdödligheten både för män och kvinnor med positiv risksumma i detta åldersintervall. Som också framgår av figurerna underskattar Makehamanpassningen den observerade försäkringsdödligheten för åldrarna 37-67 år, medan den i stort sett överskattas för åldrarna över 67 år för båda könen. Vi ser också att den observerade försäkringsdödligheten i stort sett understiger befolkningsdödligheten för män och kvinnor. Det finns dock vissa hopp då den ligger över dödligheten för befolkningen. Detta sker främst för åldrarna över 85 år för män samt över 78 år för kvinnor. Detta är inte konstigt eftersom vi har skiftande observationer i beståndet för höga åldrar.



**Figur 4.3**, Aggregerad dödlighet för män med  $R < 0$  för år 2012, skattad utifrån åren 2010-2012



**Figur 4.4**, Aggregerad dödlighet för kvinnor med  $R < 0$  för år 2012, skattad utifrån åren 2010-2012

Som framgår av figurerna 4.3 och 4.4 saknas datamaterial för bestånd med negativ risksumma i åldersintervallet 30-43 år för försäkrade kvinnor samt för män i åldrarna under 35 år. Makehamanpassningen är i stort sett god för försäkrade mäns dödlighet i åldrarna över 46 år. Detta gäller dock inte anpassningen för de försäkrade kvinnornas dödlighet. Vi ser att den observerade försäkringsdödligheten för kvinnor är väldigt

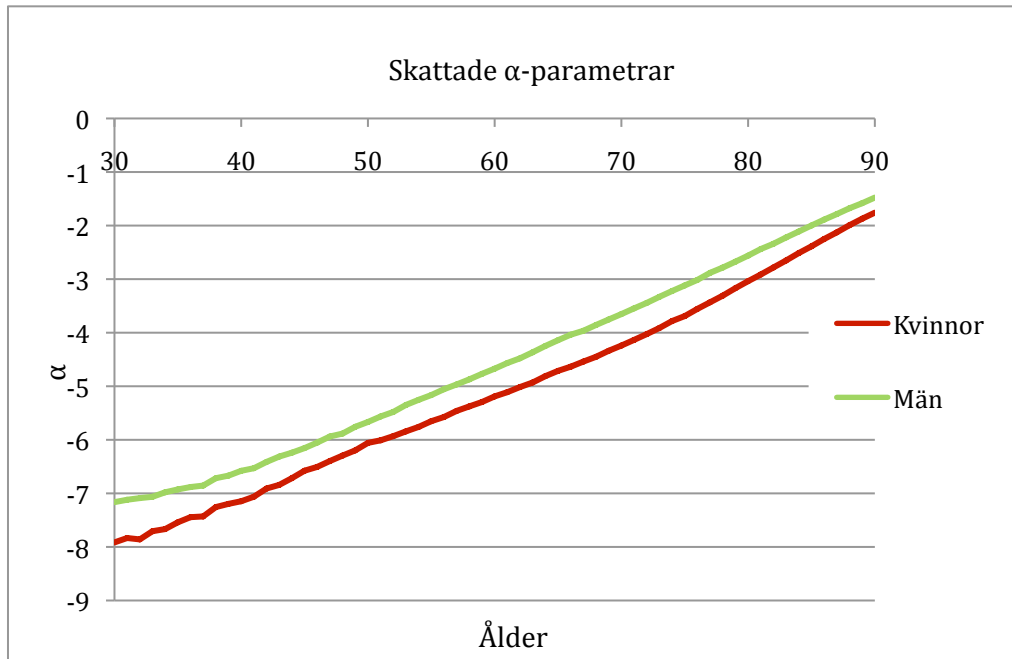
'hackig' i åldersintervallet 30-57 år. Detta samt data som saknas i åldersintervallet 30-43 år leder till att Makehamanpassningen i stort sett underskattar deras dödlighet t.o.m. 75-års ålder. I åldrarna över 75 år ligger Makeham-anpassad dödlighet för kvinnor över den observerade försäkringsdödligheten. Samma mönster för Makehamanpassningen i åldrarna över 75 år kan iakttagas även för män. Vi ser även i figurerna att de försäkrades observerade dödlighet för båda könen i stort sett understiger den för befolkningen i åldersintervallet 45-90 år. Det finns dock vissa hopp i försäkringsdödligheten i åldrarna 30-45 år för båda könen. I detta åldersintervall ligger den över observerad befolkningsdödlighet.

## 4.2 Skattning av befolkningsdödligheten

Lee-Cartermodellen som används i detta arbete kallas för Poisson-log-bilinjärmodell. Lee-Cartermodellens skattningar för parametrarna  $\alpha$ ,  $\beta$  och  $\kappa$  kommer vi att ta fram med hjälp av maximumlikelihoodmetoden, vilket introducerades i avsnitt 3.2.

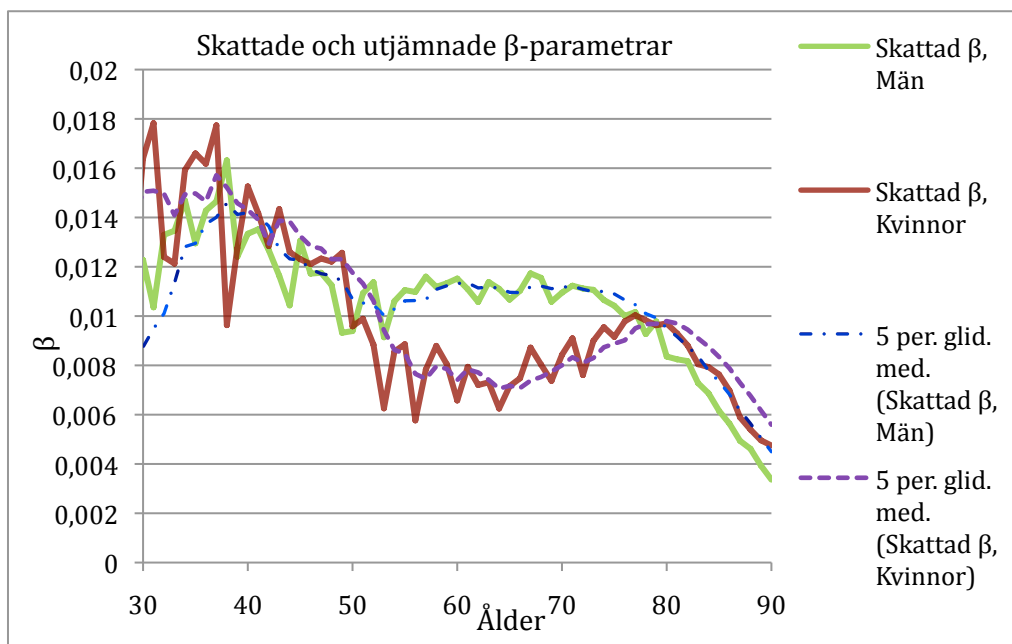
Modellens skattningar av befolkningsdödligheten bygger på svensk data för tidsperioden år 1985-2012 och avser individer i åldrarna 0-99 år. I studien av Försäkringstekniska Forskningsnämnden använder man data för individer födda i Norden för åldrarna över 90 år. Orsaken till det är otillräckligt datamaterial för skattning av  $\beta_x$ . Vi avstår från detta på grund av otillräckligt datamaterial för höga åldrar och fokuserar på åldrarna 0-90 år istället. Vissa utjämningsmetoder av modellens parametrar för höga åldrar kommer dock att företas enligt metodiken i (FTN, 2007).

I figurerna nedan (4.5-4.7) återfinns vi maximumlikelihood-skattningar av  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$  och  $\kappa$  för män och kvinnor i åldrarna 30-90 år för tidsperioden år 1985-2012. Alla skattningar utfördes i programverket R.



**Figur 4.5,** Skattningar av  $\alpha_x$  för män och kvinnor i åldrarna 30-90 år

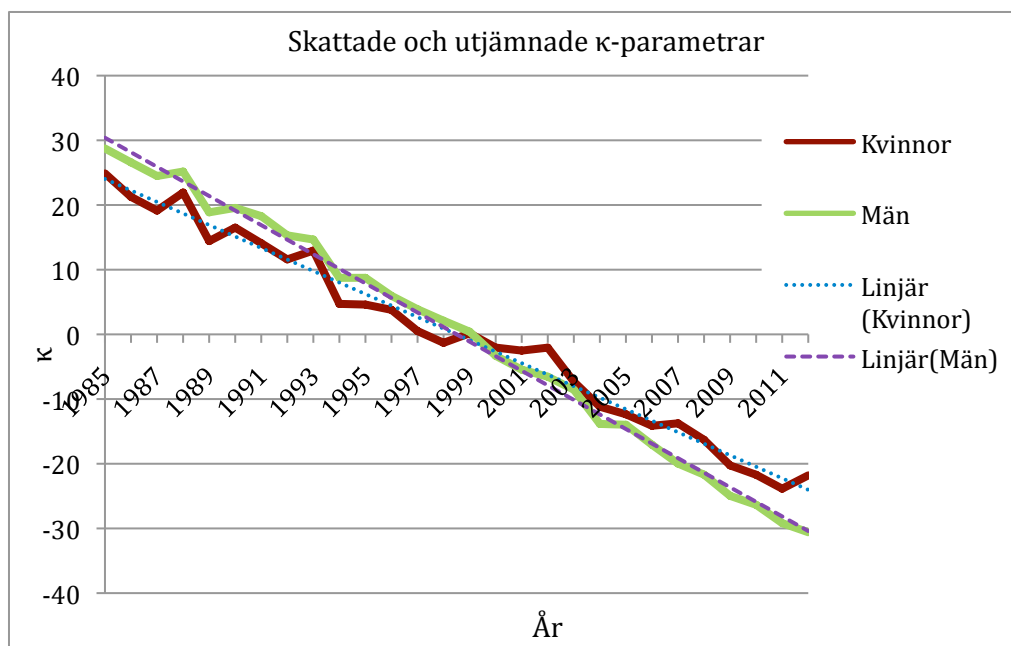
I figur 4.5 visas parametern  $\alpha_x$  för både män och kvinnor för tidsperioden år 1985-2012. Den representerar den logaritmerade medeldödlighetsintensiteten i respektive ålder under denna period. Man ser att den ligger högre för män än för kvinnor. Parametern  $\alpha_x$  är förhållandevis instabil fram till 50-årsåldern både för män och kvinnor. I åldrarna över 75-årsåldern ändras lutningen på  $\alpha_x$ -kurvan för kvinnor.



**Figur 4.6,** Skattningar av  $\beta_x$  för män och kvinnor i åldrarna 30-90 år

Figuren 4.6 illustrerar skattade och utjämnade  $\beta_x$ -parametrar för respektive ålder både för män och kvinnor. Vi ser att  $\beta_x$  är mer ojämn i lägre åldrar för båda könen samt att den varierar mer för kvinnor än för män. Denna  $\beta_x$ -parameter kan tolkas som genomslaget av trendfaktorn  $\kappa(t)$  i olika åldrar. Ju högre  $\beta_x$  desto större genomslag har trendfaktorn. Som också framgår av figuren avtar  $\beta_x$ -parametrar i åldrarna över 78 år för båda könen.

Vi kan se i figuren 4.7 att trenden också varierar både beroende på ålder och kön. Då  $\kappa(t)$  är avtagande som framgår av figuren kommer således dödlighetsintensiteten att minska mer över tiden i åldrar med höga  $\beta_x$ -värden än sådana med lägre. Därmed kommer dödlighetsintensiteten att minska mer för män i åldrarna 50-78 år än för kvinnor i samma åldersintervall. Vi ser även att trenden har ett mer jämnt genomslag för män än för kvinnor.

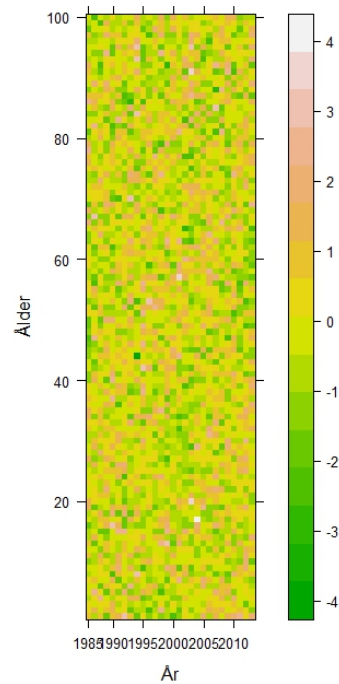


**Figur 4.7.** Skattningar av  $\kappa$  för män och kvinnor i åldrarna 30-90 år

Parametrarna i Lee-Cartermodellen behöver utjämnas, vilket erhålls med hjälp av metodiken beskriven i (FTN, 2007). Utjämnning av  $\beta_x$  görs med hjälp av glidande 5-års medelvärden för åldrarna 0-90 år som representeras i figur 4.6. För åldrarna 91-99 år antas  $\beta_x$ -parameter att avta linjärt och bli lika med noll vid 100-årsåldern eftersom dödlighetsintensiteten därefter inte antas förbättras över tiden. Trendparametern  $\kappa(t)$  utjämnas med hjälp av minsta-kvadratmetoden för en rät linje som figur 4.7 illustrerar. Parametern  $\alpha_x$  för åldrarna över 90 år skattas med hjälp av uttrycket för  $\alpha_x$  i (3.10).

För att avgöra hur väl modellen anpassas till data är det lämpligt att studera residualer från maximumlikelihood-skattningen av Lee-Cartermodellens parametrar för tidsperioden år 1985-2012, vilka återges i figurer 4.8-4.9. Som framgår av figurerna uppvisar residualerna för båda könen i stort sett inte något systematiskt mönster. Detta innebär därmed att erhållna skattningar inte heller innehåller några systematiska fel.

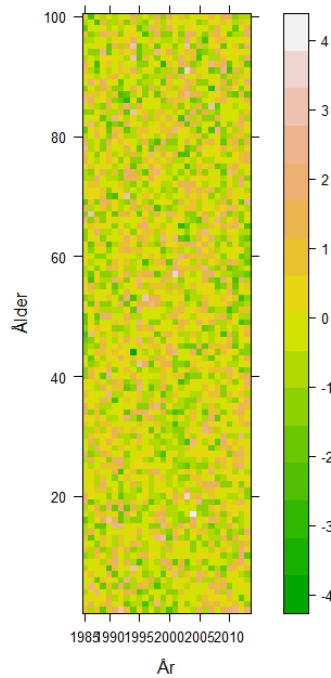
Residualer från MLE-skattningen av Lee-Cartermodellens parametrar, kvinnor



**Figur 4.8**, Residualer för skattningen, kvinnor

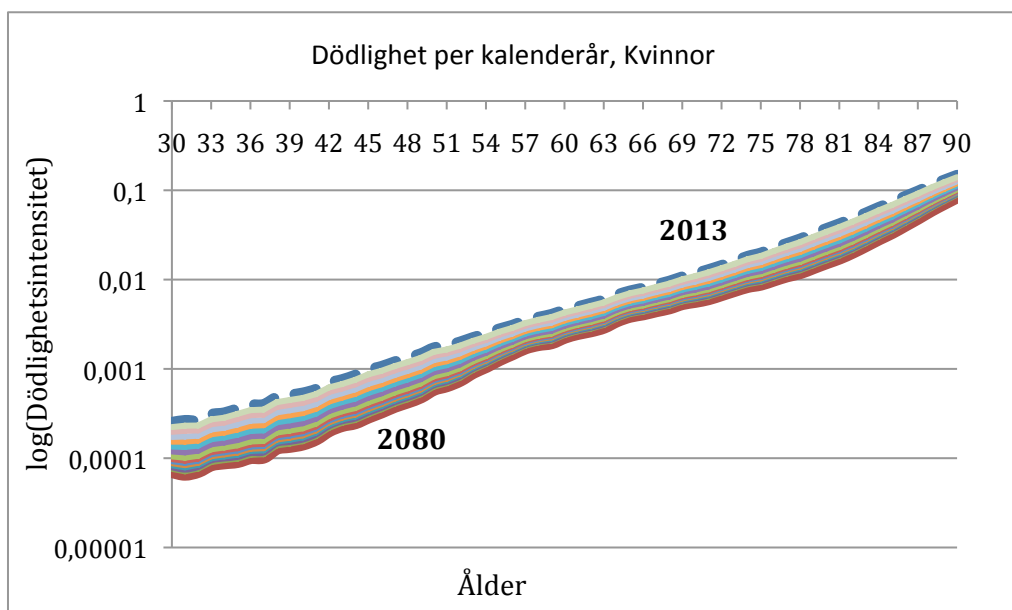


Residualer från MLE-skattningen av Lee-Cartermodellens parametrar, kvinnor

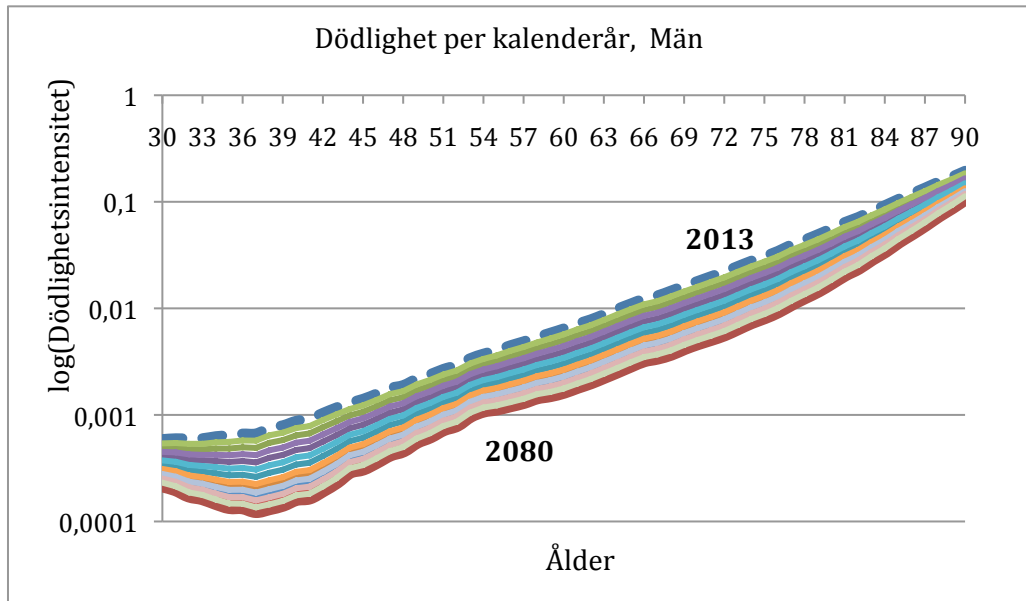


**Figur 4.9**, Residualer för skattningen, män

Skattningen av den framtida dödligheten görs med hjälp av  $\alpha_x$ -,  $\beta_x$ - och  $\kappa(t)$ -parametrar. En linjär trend skattas med minsta-kvadratmetoden utifrån den estimerade  $\kappa(t)$ -faktorn och den skrivs fram till år 2050. Därefter antas en halverad lutning för  $\kappa(t)$ -linjen fram till år 2080 som föreslogs i (FTN, 2007). Sedan sätts dessa utjämnade  $\beta_x$ ,  $\kappa(t)$  samt  $\alpha_x$  samman enligt Lee-Cartermodellen (3.4) och den predikterade dödligheten erhålls per kalenderår 2013-2080. Detta illustreras i figurer 4.10-4.11.



**Figur 4.10**, Predikterade dödligheten för kvinnor, tidsperioden 2013-2080



**Figur 4.11**, Predikterade dödligheten för män, tidsperioden 2013-2080

Som framgår av figurerna ovan syns trenden tydligast i åldrarna strax över 30 år. Vi ser även att dödligheten för kvinnor minskar minst i 55-60 årsåldern eftersom trendens inverkan på dödligheten där når ett minimum. För män i åldrarna 50-77 år för tidsperioden år 2013-2080 minskar dödligheten mer än dödligheten för kvinnor i samma åldersintervall. Detta orsakas av trendfaktorns genomslag. Vi ser även att minskningen av dödligheten avtar i höga åldrar.

### 4.3 Skattning av den predikterade försäkringsdödligheten

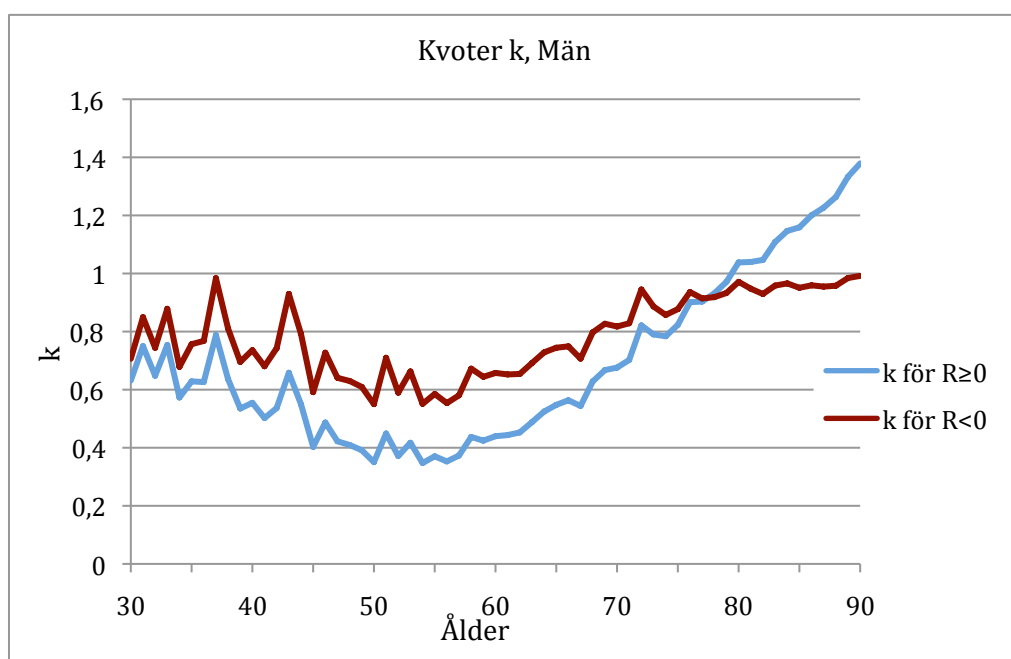
Som vi tidigare konstaterat går det inte att skatta den framtida försäkringsdödligheten med hjälp av enbart försäkringsdata, utan vi måste även ta befolkningsdödlighetsdata till hjälp. Dödligheten för befolkningen samt aktuella försäkringsdödligheten erhålls enligt metodiken i de föregående avsnitten.

Den framtida försäkringsdödligheten beräknas med hjälp av en kvot mellan den Makeham-anpassade dödlighetsintensiteten för respektive försäkringsbestånd,  $\mu_x^i$ , och dödlighetsintensiteten för befolkningen,  $\mu_x^B$ , över samma tidsperiod år 2010-2012. Metodiken bygger på att vi antar ett konstant förhållande mellan befolkningsdödligheten och den för respektive försäkringsbestånd i varje ålder över

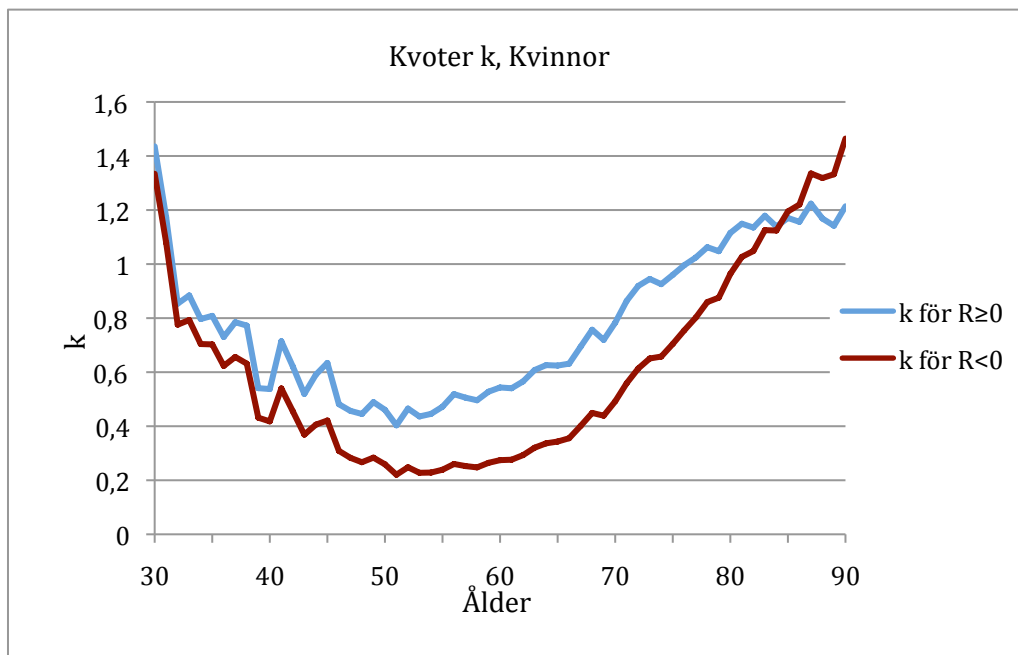
hela prognosperioden. Index "i" i termen  $\mu_x^i$  i (4.1) står för bestånd med positiv/negativ risksumma för respektive kön.

$$k_x^{i,B} = \frac{\mu_x^i}{\mu_x^B} \quad (4.1)$$

I figurerna 4.12-4.13 nedan ser man de erhållna kvoterna för respektive delbestånd för tidsperioden år 2010-2012. Då  $k_x^{i,B}=1$  är befolkningsdödligheten lika med försäkringsdödligheten. Vi ser i figur 4.12 att den manliga försäkringsdödligheten både för bestånd med positiva och negativa risksummor ligger under befolkningens förutom åldrarna över 79 år för bestånd med positiv risksumma. Dessutom ligger kvoten för försäkringsbestånd med negativ risksumma över den med positiv risksumma fram till 77-årsåldern. För kvinnor ligger försäkringsdödligheten både för bestånd med positiva och negativa risksummor i stort sett under befolkningsdödligheten. Dock finns det några hopp i åldrarna strax över 30 år samt i höga åldrar över 76 år för bestånd med positiv risksumma samt över 81 år för bestånd med negativ risksumma. Då sker det en successiv uppgång i dödligheten som illustreras i figur 4.13. Vi ser även i figurerna att dödligheten varierar i mellan olika åldrar. Den varierar dock med mest i åldrarna under 47 år för alla delbestånd. Variationerna i dödligheten bedöms till en viss del vara slumpmässiga och därför utjämnar man sedan kvoterna med hjälp av 5-års glidande medelvärden.



**Figur 4.12,** Kvoten  $k_x^{i,B}$  för män med  $R < 0$  och  $R \geq 0$ , tidsperioden år 2010-2012



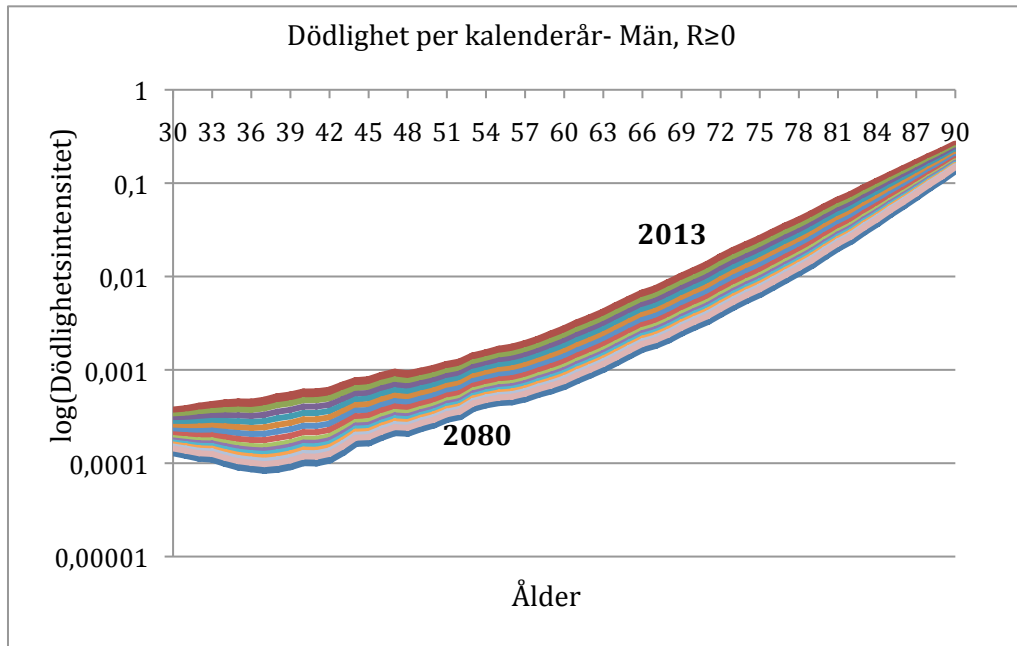
**Figur 4.13**, Kvoten  $k_x^{i,B}$  för kvinnor med  $R < 0$  och  $R \geq 0$ , tidsperioden år 2010-2012

Dessa kvoter enligt (4.1) appliceras sedan på den trendsattade dödlighetsintensiteten för befolkningen beräknad med hjälp av Lee-Cartermodellen från avsnitt 3.2. Därigenom fås den framtida försäkringsdödligheten för år 2013-2080 som

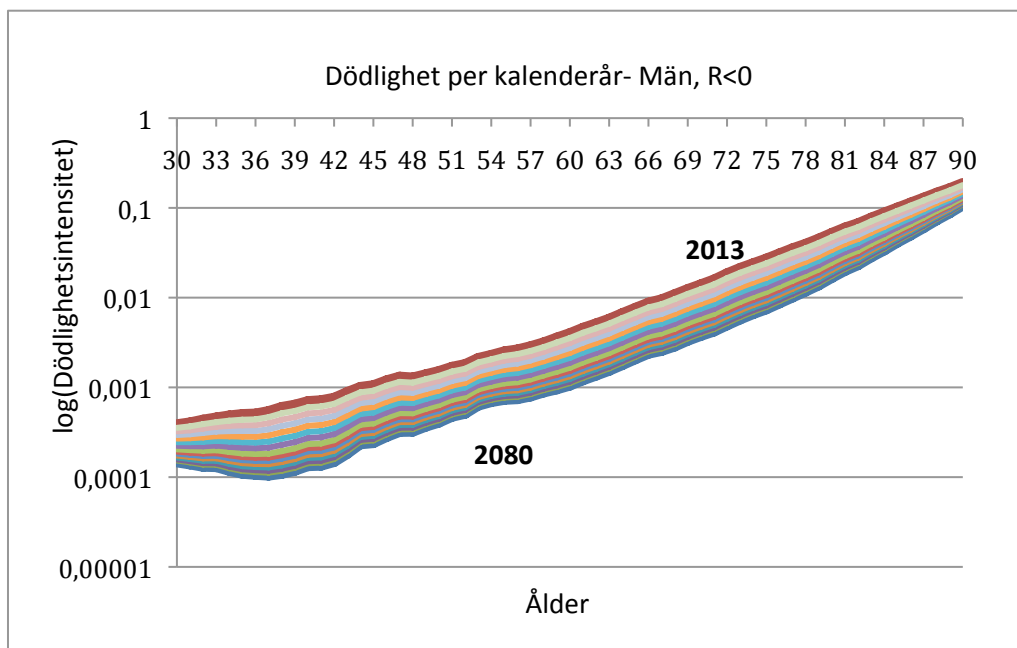
$$\mu_x^i(t) = k_x^{i,B} * \mu_x(t) \quad (4.2)$$

Metodiken bygger på att förhållandet mellan dödlighetsintensiteten för befolkningen och dödlighetsintensiteten för respektive försäkringsbestånd i varje ålder antas vara konstant över hela prognosperioden. Det ska återigen påpekas att dödlighetsintensiteten för befolkningen,  $\mu_x^B$ , i (4.1) inte är samma som i avsnitt 3.2. Här skattas befolkningsdödligheten  $\mu_x^B$  enligt samma Lee-Carterformel (3.4), dock för tidsperioden år 2010-2012.

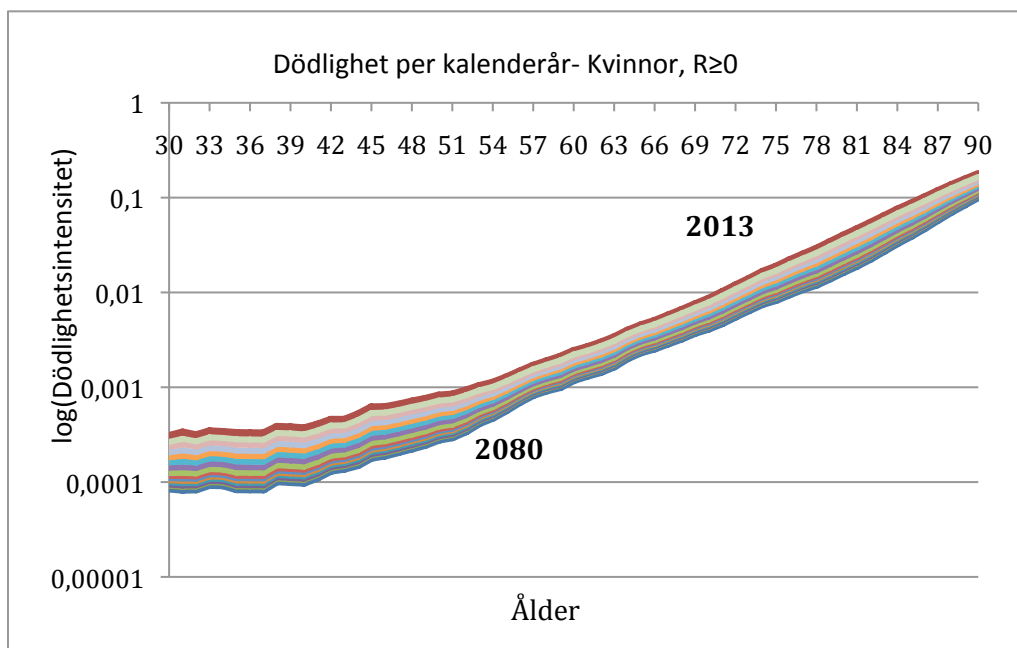
I figurerna 4.14-4.17 illustreras den predikterade försäkringsdödligheten för båda könen med respektive risksummetecken.



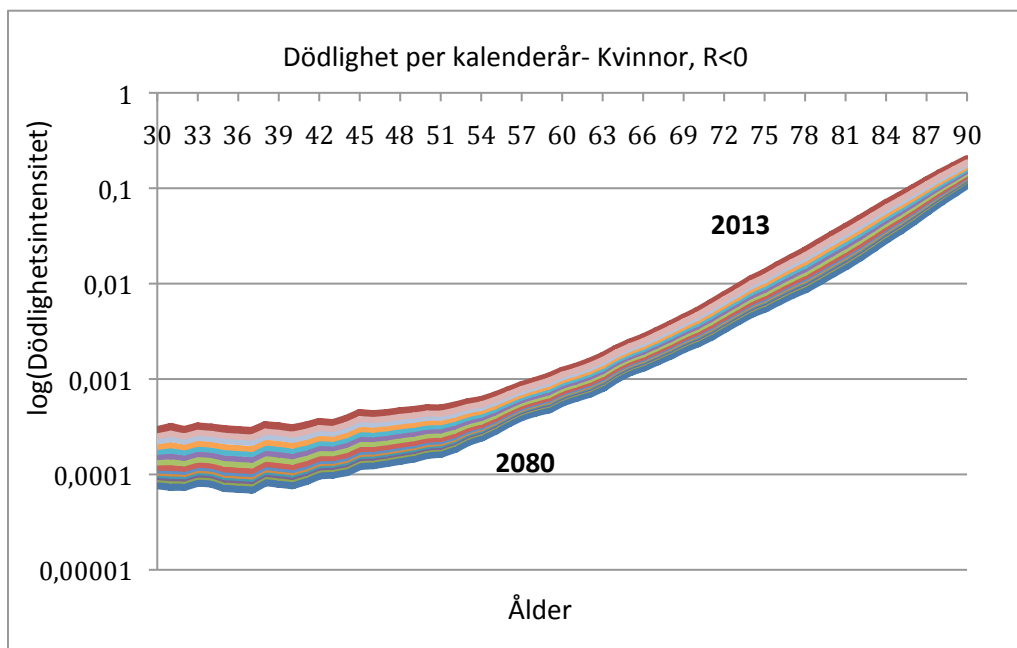
**Figur 4.14**, Predikterade dödligheten för män med  $R \geq 0$ , tidsperioden 2013-2080



**Figur 4.15**, Predikterade dödligheten för män med  $R < 0$ , tidsperioden 2013-2080



**Figur 4.16**, Predikterade dödligheten för kvinnor med  $R \geq 0$ , tidsperioden 2013-2080

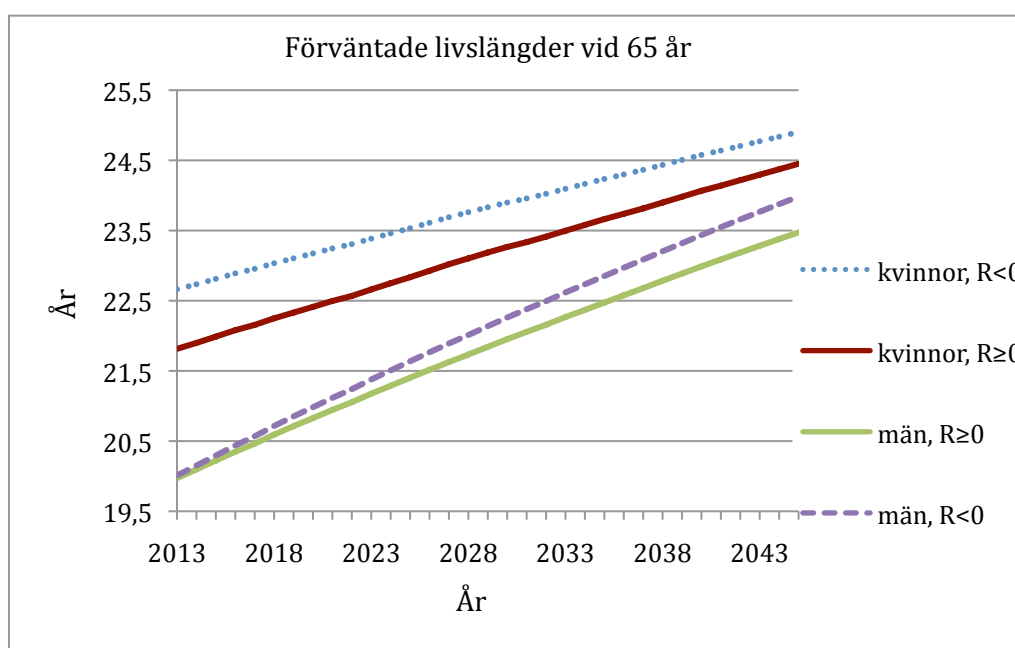


**Figur 4.17**, Predikterade dödligheten för kvinnor med  $R < 0$ , tidsperioden 2013-2080

Vi ser i figurerna ovan att den predikterade försäkringsdödligheten bär tydliga spår av befolkningsdödligheten. Nämligen minskar dödligheten för män i åldrarna över 50 år för tidsperioden år 2013-2080 mer än för kvinnor i samma åldersintervall. Detta orsakas av skillnader i trendfaktorns genomslag mellan könen. Utseendet på kurvorna skiljer dock sig lite från befolkningens predikterade dödlighet på grund av den

applicerade kvoten mellan försäkringsdödligheten och dödligheten för befolkningen, som är olika stor i olika åldrar. Då kvoten för varje försäkringsdelbestånd varierar mest i åldrarna under 46 år varierar även den predikterade försäkringsdödligheten för respektive delbestånd mest i just dessa åldrar. Vi ser även att dödligheten avtar i höga åldrar för varje försäkringsbestånd.

Utifrån den predikterade dödligheten kan vi även finna den förväntade livslängden. Detta erhålls med hjälp av formlerna 2.2-2.4 från avsnitt 2.2. Den förväntade livslängden vid 65 år för år 2013-2045 för alla fyra delbestånd illustreras i figuren nedan.



**Figur 4.18**, Förväntade livslängder för män och kvinnor vid 65 år

Den förväntade livslängden för kvinnor vid 65 år ligger högre än den för män vid samma ålder oavsett risksummetecken. Det faktum att dödligheten för män minskar mer än kvinnornas leder till att livslängden för män ökar mer än för kvinnor, vilket illustreras i figuren 4.18. Vi ser även att mäns livslängdsutveckling närmar sig kvinnornas längre fram i tiden. Det är viktigt att påpeka att skattningen för den förväntade livslängden baseras på åldrarna över 65 år. Våra befolkningsdata innefattar individer i åldrarna 0-99 år, men inkluderar inte individer födda i Norden som nämndes i avsnitt 4.2. Trots att beräkning av den förväntade livslängden baseras mest på de åldrar där dödsfallen är flest, kan en viss osäkerhet hos erhållna resultat för den förväntade livslängden uppstå på grund av att vi inte tagit hänsyn till åldrar över 99 år, samt ej använt nordiska data för åldrarna över 90 år.

## 5. Sammanfattning av resultat

Den observerade försäkringsdödligheten skiljer sig mellan könen, vilket framgår av figurerna 4.1-4.4. Det är svårt att avgöra huruvida den skiljer sig med avseende på risksummetecken på grund av skiftande observationer i delbestånden. Man anpassar Makehammodellen till försäkringsdata och dess parametrar baseras på åldrarna 30-90 år. Det ska påpekas att valet av åldersintervallet för skattning av parametrarna har stor påverkan på anpassningen. Och baserad på åldrarna 30-90 år har vi fått den bästa anpassningen av modellen till observerad data för de olika bestånden. Det är viktigt att poängtera att Makehamfördelningen ger en osäker anpassning samt i stort sett underskattar dödligheten för kvinnor med negativ risksumma på grund av någorlunda skiftande observationer. Anpassningen för detta bestånd blir inte heller bättre även om åldersintervallet för parameterskattning varierar.

Försäkringsdata är otillräckliga för att prediktera den framtida försäkringsdödligheten. Därför används kvoterna mellan försäkringsdödligheten i de olika delbestånden, samt dödligheten för befolkningen över samma tidsperiod. Dessa kvoter visas i figurerna 4.12-4.13. Som framgår av figurerna uppvisar kvoterna stora variationer för åldrarna under 47 år för alla delbestånd. Detta beror främst på otillräckliga data samt skiftande observationer i bestånden. Därför utjämnar man dessa empiriska kvoter med hjälp av 5-åriga glidande medelvärden. Ur dessa utjämnade kvoter, tillsammans med den predikterade befolkningsdödligheten, erhålls den predikterade försäkringsdödligheten som illustreras i figurerna 4.14-4.17. Som framgår av figurerna uppvisar dödligheten för respektive delbestånd samma egenskaper som den för befolkningen. Skillnader mellan försäkringsdödligheten och befolkningsdödligheten i olika åldrar påverkar dödlighetskurvans utseende, där de största variationerna syns för åldrarna under 46 år för alla delbestånd.

Dödlighetsutvecklingen för försäkringskollektivet påverkar direkt utvecklingen av den förväntade livslängden. Som framgår av figuren 4.18 ökar den förväntade livslängden för män mer än för kvinnor. På sikt närmar sig mäns livslängdsutveckling kvinnornas. Resultaten för den förväntade livslängden kan dock vara osäkra på grund av otillräckligt datamaterial för höga åldrar.

Det kan även vara av intresse att nämna att den predikterade dödligheten för försäkringskollektivet skiljer sig från de tidigare erhållna resultaten hos



Länsförsäkringar Liv. För vissa åldrar har den predikterade dödligheten ökat, medan den för vissa åldrar har minskat jämfört med de tidigare erhållna framskrivningarna för alla fyra delbestånd. Orsaken till detta är att dödligheten både för befolkningen samt försäkringskollektivet har förändrats med åren och således påverkat dödlighetsframskrivningar.

## 6. Diskussion

Sedan lång tid tillbaka lever folk allt längre (se figuren 2.1). Minskningen av dödligheten har en stor påverkan på livförsäkringsbolagens reserver. Därför är det viktigt att göra dödlighetsprognoser för många år framåt.

Om vi först tittar tillbaka på den observerade dödligheten i Länsförsäkringar Livs försäkringsbestånd (avsnitt 3.1) för de senaste tre åren så ligger den mest under befolkningens för alla fyra delbestånden. Den skiljer sig också mellan könen. Dock har vi skiftande observationer i beståndet för vissa åldrar, vilket leder till att den empiriska dödlighetsintensiteten blir väldigt ojämn, samt för vissa bestånd även överstiger dödlighetsintensiteten för befolkningen. Makehamanpassningen påverkas också av dessa skiftande observationer. Det är värt att nämna att just på grund av mycket skiftande observationer för kvinnor med negativ risksumma ger Makehamfördelningen en osäker anpassning samt underskattar den empiriska dödligheten. I detta fall måste en vidare studie av dödlighetsmodellen utföras för att finna någon lämpligare modell. Vi kan inte med säkerhet konstatera att det finns skillnader i försäkringsdödligheten efter risksummetecken på grund av skiftande observationer i bestånden. För att avgöra detta, samt för att få en mer tillförlitlig skattning av försäkringsdödligheten, kan det vara lämpligare att använda sig av längre observationsperioder än de senaste tre åren.

I detta arbete har vi gjort en prognos över dödligheten för Länsförsäkringar Liv med hjälp av Lee-Cartermodellen som baseras på Sveriges historiska befolkningsdata. Denna modell kombineras sedan med Makehammodellen för försäkringstagarnas dödlighet och den framtida försäkringsdödligheten för tidsperioden 2013-2080 erhålls således (se figurer 3.14-3.17). Det visar sig att dödlighetsintensiteten skiljer sig mellan män och kvinnor, samt minskar i höga åldrar för båda könen. Utifrån denna predikterade dödlighet har vi även beräknat den förväntade livslängden vid åldern 65 år. Den kan dock vara förhållandevis osäker på grund av otillräckligt datamaterial för höga åldrar. Den förväntade livslängden visar sig öka på sikt för alla fyra delbestånd. Längre fram i tiden kommer mäns livslängdsutveckling att närma sig kvinnornas. Frågan är dock hur bra prognosen kommer att överensstämma med verkligheten? De framtagna skattningarna av den predikterade försäkringsdödligheten för respektive delbestånd skiljer sig från de tidigare erhållna resultaten hos Länsförsäkringar Liv. Och därför kan

man dra en slutsats om att det är mycket viktigt att uppdatera sina antaganden om dödligheten med hänsyn till aktuella dataunderlag.

Lee-Cartermodellen har blivit en ledande statistisk modell för att uppskatta och prediktera befolkningsdödlighet. Den används med stor framgång i en rad olika länder. Trots detta har denna modell sina svagheter. Till exempel måste en viss utjämning av modellens parametrar företas för att tillförlitliga resultat ska erhållas. Detta har utförts enligt metodiken i (FTN, 2007). Dessa utjämningar har stor påverkan på dödlighetsutvecklingen och det kan därmed vara lämpligt att studera vilka utjämningar som egentligen bör göras och på vilket stadium i prognosen de ska företas.

En annan viktig fråga är hur långa tidsperioder som ska användas för att skatta parametrarna i Lee-Cartermodellen samt hur långt fram i tiden dödligheten kan projiceras med denna modell? Det kan även vara av intresse att undersöka osäkerheten av prognosen med hjälp av 95-procentiga prediktionsintervall.

## Referenser

1. Andersson, G. (2005): *Livförsäkringsmatematik*. Elanders Gotab AB.
2. Brouhns, N., Denouit, M. & Vermunt, J.K. (2002): A Poisson log-bilinear approach to the construction of projected lifetables. *Mathematics & Economics*, **31**, 373-393.
3. Försäkringstekniska Forskningsnämnden, Sveriges Försäkringsförbund (2007): *Försäkrade i Sverige – dödlighet och livslängder, prognoser 2007-2050*. Elanders Gotab AB.
4. Human Mortality Database. University of California, Berkeley (USA). Tillgänglig via [www.mortality.org](http://www.mortality.org)
5. Lee, R., Carter, L. (1992): Modelling and forecasting U.S. mortality, *Journal of the American Statistical Association*, **87**, 659-671.
6. Lindbergson, M. (2001): Mortality among elderly in Sweden, 1988-1997, *Scandinavian Actuarial Journal*, No. 1/2001, 79-94.
7. McWilliam, E. (2011): *Longevity Risk*. Risk Books, a Division of Inscive Media Investments Ltd.
8. Statistiska Centralbyrån (SCB). Tillgänglig via [www.scb.se](http://www.scb.se)
9. Statistiska Centralbyrån, (2012): Sveriges framtida befolkning 2012-2060, *Demografiska rapporter, 2012:2*.