Matematisk statistik
Stockholms universitet

Prevalens och förväntad återstående livslängd som funktion av incidens och mortalitet. Utveckling och tillämpning av en modell för demens i en population

Tommy Andersson

Examensarbete 2007:19

Postal address:

Matematisk statistik
Dept. of Mathematics
Stockholms universitet
SE-106 91 Stockholm
Sweden

Internet:

http://www.math.su.se/matstat

Matematisk statistik
Stockholms universitet
Examensarbete **2007:19**,
http://www.math.su.se/matstat

Prevalens och förväntad återstående livslängd som funktion av incidens och mortalitet. Utveckling och tillämpning av en modell för demens i en population

Tommy Andersson*

November 2007

Sammanfattning

Föreliggande rapport ger en redogörelse för hur man kan konstruera en modell som beskriver prevalens (andel sjuka personer vid en viss tidpunkt) som resultat av incidens (andel friska personer som insjuknar under en viss tidsperiod) och mortalitet (andel personer som avlider under en viss tidsperiod). Dessutom beskrivs hur man kan konstruera en modell som skattar återstående livslängd uppdelat på friska och sjuka år. Avslutningsvis görs ett försök att beskriva en modell som, under vissa antaganden, säger något om framtiden.

*Postal address: Matematisk statistik, Stockholms universitet, SE-106 91, Stockholm, Sweden. E-mail: tommy@rumsventilation.se. Handledare: Anders Björkström

Abstract

This report gives an account of the creation of a model that describes prevalence (the share of ill persons at a certain point in time) as a result of incidence (the share of persons who becomes ill during a defined time interval) and mortality (the share of persons who dies during a defined time interval). Furthermore, it describes how to construct a model that estimates life expectancy divided into healthy and ill years. Finally, it makes an attempt to describe a model that, under certain assumptions, can tell us something about the future.

Förord

Denna rapport utgör mitt examensarbete för en magisterexamen i matematisk statistik på Stockholms Universitet.

Initiativtagare till detta arbete är Mårten Lagergren, docent på Stiftelsen Stockholms Läns Äldrecentrum, och till honom vill jag rikta ett stort tack. Mårten har under arbetets gång lärt mig otroligt mycket och utan honom hade denna rapport aldrig blivit av.

I arbetet tar jag även hjälp av modellerna från två andra examensarbeten som är skrivna av Sofia Qvarnström och Malin Düring och de båda förtjänar ett tack.

Min handledare Anders Björkström förtjänar också slutligen ett stort tack för att han outtröttligt har svarat på alla mina frågor.

Innehåll

1. Inledning

Den här rapporten är skriven på uppdrag av Stiftelsen Stockholms Läns Äldrecentrum. Stiftelsen har till uppgift att "initiera och genomföra forskning samt att verka för att praktiskt omsätta erfarenheter och forskningsresultat inom områden av särskild betydelse för äldres situation i samhället"[1]. Mårten Lagergren, docent på Äldrecentrum, har bidragit med det datamaterial som har använts och det är även han som har formulerat problemet.

2. Målsättning

I den här rapporten tittar vi på tre storheter:

Prevalens – Andel sjuka personer vid en viss tidpunkt.
Alltså antalet personer som är sjuka vid en viss tidpunkt i förhållande till alla som lever vid motsvarande tidpunkt.

Incidens – Andel personer som insjuknar under en viss tidsperiod.

Mortalitet – Andel personer som dör under en viss tidsperiod.

Vi vill göra en prevalens, incidens och mortalitetsmodell där vi beskriver hur prevalensen beror på incidensen och mortaliteten, med avseende på ålder. Denna modell kallar vi hädan efter för en PIM-modell. Vi vill även göra det möjligt att se hur en förändring av incidens och mortalitet skulle påverka prevalensen.

Från dessa storheter ska vi också göra en modell som ger återstående livslängd uppdelat på friska och sjuka år.

Tanken är också att vi ska försöka tillämpa modellerna på Sverige och under vissa antaganden se hur många sjuka personer vi kan komma att ha i varje åldersgrupp i framtiden. Med samma antaganden ska vi också få ut förväntat återstående friska och sjuka år för dessa.

Som grund till modellen för prevalens används Sofia Qvarnströms rapport "Modellering av prevalens som resultat av incidens och mortalitet"[2] och som grund till modellen för återstående livslängd används Malin Dürings rapport "Kommer en längre livslängd innebära fler friska år?"[3].

Båda dessa modeller har även i denna rapport utvecklats för att på ett bättre sätt stämma överens med verkligheten.

---

[1] Mer information om Äldrecentrum finns på http://www.aldrecentrum.se/
[2] Qvarnström S, *Modellering av prevalens som resultat av incidens och mortalitet,* Examensarbete 2006:4, Matematisk statistik, Stockholms Universitet
[3] Düring M, *Kommer en längre livslängd att innebära fler friska år?*, Examensarbete 2006:9, Matematisk statistik, Stockholms Universitet

3. Data

De data som den här rapporten är baserad på kommer från Kungsholmsprojektet[4] som hade syftet att studera förekomsten av sjukdomar bland en stor grupp av äldre personer. Projektet pågick mellan 1987 och 2000 och alla personer som var födda före 1913 och bosatta i Kungsholms församling i Stockholm var inbjudna att delta. Senare utökades datasetet till att även omfatta alla personer över 90 år som var bosatta i S:t Görans församling, som är ett angränsande område. Dessa inkluderades för att undvika att det skulle bli för få observationer i de högre åldrarna. De 2368 personer som var med från början kom både från eget och institutionaliserat boende och varje individ fick först genomgå en omfattande klinisk undersökning. Den första undersökningen följdes sedan upp av ytterligare fyra undersökningar. Totalt skulle alltså varje individ genomföra 5 undersökningar så länge de inte under projektets gång avlidit eller av annan anledning avbrutit projektet. Tiden mellan undersökningarna är olika och oberoende och till största delen slumpmässiga.

Deltagarna blev intervjuade av sjuksköterskor och undersökta av läkare som mätte blodtryck, längd och vikt och de blev undersökta av en psykolog som även gjorde en omfattande bedömning av minnet. En familjeintervju genomfördes med en nära anhörig eller närstående. Under den intervjun behandlades deltagarens tidigare och nuvarande hälsa, samt utvalda riskfaktorer för de vanligaste kroniska neurodegenerativa sjukdomarna (t.ex. Alzheimers eller Parkinsons sjukdom).

Information samlades också in om särskilda ämnen, som till exempel detaljerade uppgifter om yrkesliv, vårdgivarnas börda och användningen av hemsjukvård och hemtjänst.

I det dataset som vi har tillgång till ingår bland annat variabler som beskriver fysisk funktionsförmåga utifrån aktiviteter i dagliga livet (ADL), boendeform (eget, hemtjänst eller heldygnsomsorg) samt demens. För demensvariabeln, som vi ska titta på, existerar ingen data för den sista undersökningen så vi går tyvärr miste om mycket information om de högre åldrarna.

Det ingår alldeles för få män i det datasetet som samlades in för att vi ska kunna säga något realistiskt om dem, därför tittar vi bara på kvinnorna. För att utöka antalet observationer skulle man kunna använda en modell som behandlar datasetet oberoende av kön, men eftersom vi av erfarenhet vet att kvinnor i snitt lever längre än män skulle den modellen inte bli realistisk, varför det alternativet uteslutits.

Vi har dessutom alldeles för få observationer på personer över 95 år så vi nöjer oss med att titta på åldrarna mellan 75 och 95 år.

Vi använder även ett dataset från Statistiska Centralbyrån som innehåller Sveriges befolkningsmängd för olika åldrar, kön och årtal.

[4] Mer fakta om Kungsholmsprojektet finns på www.aldrecentrum.se/kungs.html

4. Modell och Metod

4.1 Övergångssannolikheter

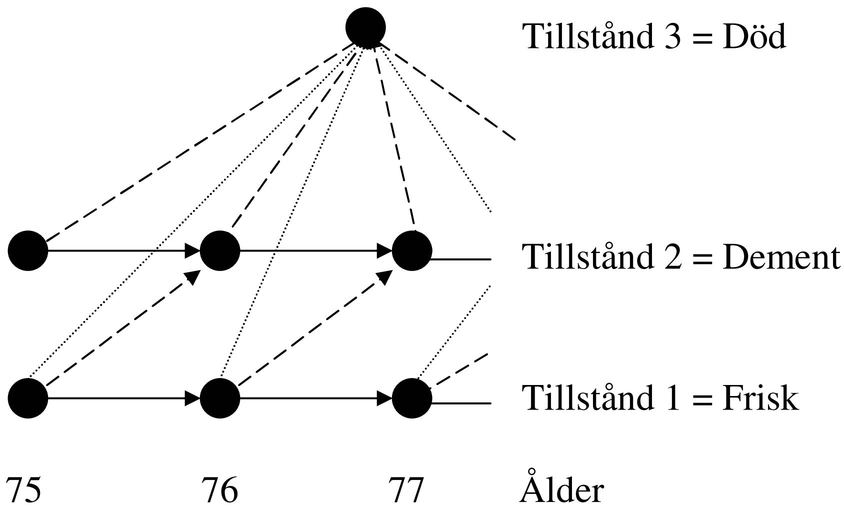
Vi börjar med att konstatera att demensvariabeln har 3 tillstånd:

Tillstånd 1 = Frisk

Tillstånd 2 = Dement

Tillstånd 3 = Död

För att beräkna prevalensen och förväntad återstående livstid som frisk respektive sjuk behöver vi skatta sannolikheten att, givet en viss ålder, gå från ett tillstånd till ett annat. Åldern räknas i år och vi behandlar den som en diskret variabel. Vårt dataset börjar vid 75 års ålder och för den åldern har vi individer i både tillstånd 1 och 2. Vi kan konstatera att en person inte kan gå från sjuk till frisk, eftersom demens är en sjukdom som ej går att bota, och att en död person förblir död. Om man vill använda den här modellen till någon annan sjukdomsvariabel måste man givetvis anta att endast dessa övergångar är möjliga. Detta kan betraktas som en markovkedja med 43 tillstånd. Ett friskt tillstånd för varje ålder, ett dement tillstånd för varje ålder och det absorberande tillståndet död.



Vi definierar $p_{ij}(x)$ som sannolikheten att gå till tillstånd j vid åldern $x+1$ givet att man befinner sig i tillstånd i vid åldern x.

Exempelvis är $p_{12}(80)$ sannolikheten för en frisk 80-åring att vara sjuk vid 81 års ålder.

Vi antar att $p_{12}(x)$, $p_{13}(x)$ och $p_{23}(x)$ varierar med åldern x enligt.

$$\log(p_{ij}(x)) = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \cdot x \ , \ \forall \ \ i < j \quad i = 1,2 \quad j = 2,3$$

där α_{ij} och β_{ij} är okända parametrar som kan skattas från data.

För att nu skatta $p_{ij}(x)$ vill vi beräkna antalet personer i datamaterialet som insjuknar respektive dör vid varje ålder. Vi vet personernas ålder vid varje undersökningstillfälle och vi vet också vilken ålder varje person har när de dör. Vi vet dock inte vid vilken ålder personerna blir sjuka. Det enda vi vet är att om en person är frisk vid en undersökning och sjuk vid nästa har personen blivit sjuk vid någon tidpunkt där emellan.

Vi kommer därför att räkna med två olika antaganden:

Antagande 1: Individerna blir sjuka precis efter den sista undersökningen där de observerades vara i tillstånd 1 och har då fortfarande samma ålder som vid undersökningen.

Antagande 2: Individerna blir sjuka precis före den första undersökningen där de observerades vara i tillstånd 2 och har vid insjuknandet samma ålder som vid den undersökningen.

Under antagande 1 adderar vi, för varje ålder x, antalet personer som vid åldern x observerades vara i tillstånd 1 och vid nästa undersökning observerades vara i tillstånd 2. Vi får då summan av antalet personer som antas insjukna vid åldern x.

Under antagande 2 adderar vi, för varje ålder x, antalet personer som vid åldern x observerades vara i tillstånd 2 och vid undersökningen innan observerades vara i tillstånd 1. Även här får vi summan av antalet personer som antas insjukna vid åldern x, men eftersom detta görs under ett annat antagande kommer vi få ett annorlunda resultat. Slutligen gör vi ett medelvärdesantagande för dessa två.

Vi säger att $A_{ij}(x)$ är antalet personer som enligt vårt medelvärdesantagande går från tillstånd i vid åldern x till tillstånd j vid åldern $x+1$.

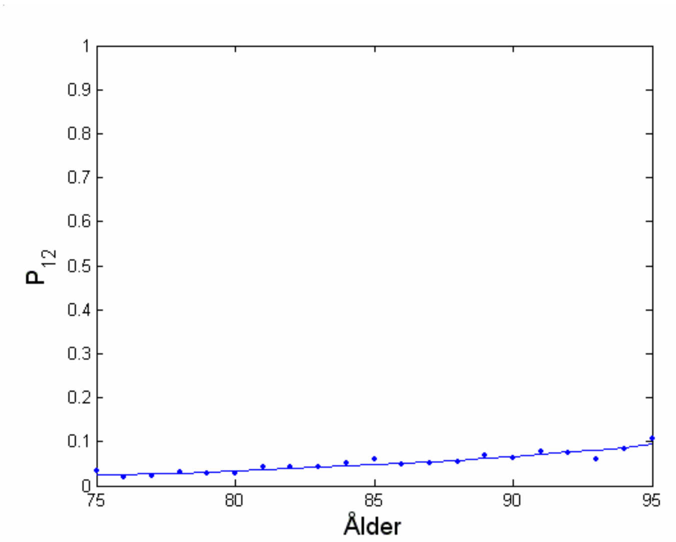
Vi betraktar $A_{ij}(x)$ som $Bin(\sum_{j=1}^{3} A(x)_{ij}, p_{ij}(x))$ $, \forall \ i \le j \quad i = 1,2 \quad j = 1,2,3$

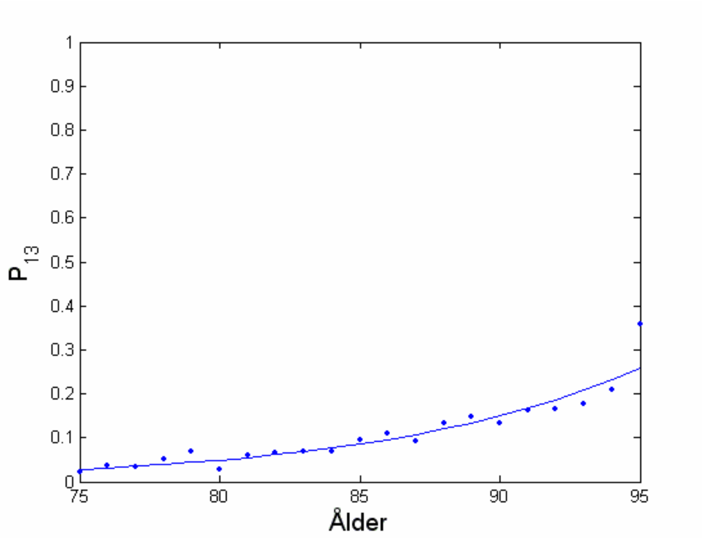
och skattar $p_{ij}(x)$ genom att sätta

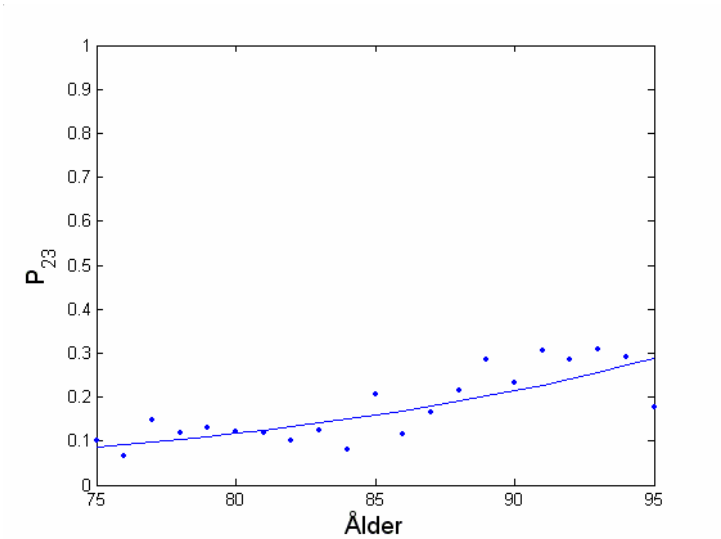
$$\hat{p}_{ij}(x) = \frac{A_{ij}(x)}{\sum_{j=1}^{3} A(x)_{ij}} \quad , \forall \ i \le j \quad i = 1,2 \quad j = 1,2,3$$

Observera att när dessa skattas tas det inte hänsyn till hur länge en person har befunnit sig i tillstånd i.

Om vi nu plottar dessa skattade övergångssannolikheter ser vi att $\hat{\hat{p}}_{12}(x)$ och $\hat{\hat{p}}_{13}(x)$ faktiskt verkar öka exponentiellt med avseende på åldern. Om vi tittar på $\hat{\hat{p}}_{23}(x)$ så är den betydligt mer oregelbunden. Vi vill dock hålla modellen så enkel som möjligt och antar därför att även den ökar exponentiellt.







Med hjälp av minsta kvadratmetoden utjämnar vi de ettåriga övergångssannolikheterna med avseende på åldern. Vi skattar alltså linjen $\alpha_{ij} + \beta_{ij} \cdot x$ så att summan av kvadraterna på avstånden mellan linjen och observationernas logaritmerade värden minimeras. Observera här att det alltså är det vertikala avståndet vi menar.

De nya skattningarna av övergångssannolikheterna blir nu en exponentiell kurva.

$$\hat{p}_{ij}(x) = e^{\hat{\alpha}_{ij} + \hat{\beta}_{ij} \cdot x} \ , \ \forall \ i < j \ \ i = 1,2 \ \ j = 2,3$$

Givetvis gäller $\sum_{j=i}^{3} p_{ij}(x) = 1$, $\forall \ \ i = 1,2$ och denna formel används för att skatta $p_{11}(x)$ och $p_{22}(x)$.

Här skiljer sig vår modell från Sofia Qvarnströms på så sätt att hon gör följande skattningar

$$\hat{p}_{ij}(x) = \hat{\alpha}_{ij} + \hat{\beta}_{ij} \cdot x \ , \ \forall \ \ i \leq j \ \ i = 1,2 \ \ j = 1,2,3$$

och hon får då att $\hat{p}_{13}(x)$ blir större än 0 först efter 75 års ålder vilket givetvis är fullkomligt orimligt. Samma sak gäller även för $\hat{p}_{12}(x)$ och hon hanterar det genom att säga att $\hat{p}_{ij}(x)$ är skattningar som gäller givet att individen är frisk vid 75 års ålder.

Detta känns inte som en modell som är realistisk och därför har vi istället gjort en exponentiell utjämning enligt ovan.

Incidensen motsvaras här av $\hat{p}_{12}(x)$ och mortaliteten av $\hat{p}_{13}(x)$ och $\hat{p}_{23}(x)$ och med dessa ska vi nu skatta prevalensen.

4.2 Prevalens

Färre än 1 % av Sveriges 65-åringar lider av demens[5] så vi börjar med att göra en approximation och säger att 0 % av de 65-åriga kvinnorna är dementa. Detta kommer inte påverka vårt resultat nämnvärt eftersom vi tittar på intervallet 75-95 år.

Vi definierar sannolikheten att vara frisk respektive sjuk vid åldern x, givet att man var frisk när man var 65, som $p_1(x)$ respektive $p_2(x)$.

$\hat{p}_1(x)$ får vi ut genom att titta på sannolikheten att vara frisk året innan och multiplicera den med sannolikheten att stanna kvar i det friska tillståndet.

$\hat{p}_2(x)$ får vi ut på liknande sätt, men här tar vi hänsyn till att man kan befinna sig i antingen det friska eller det sjuka tillståndet året innan.

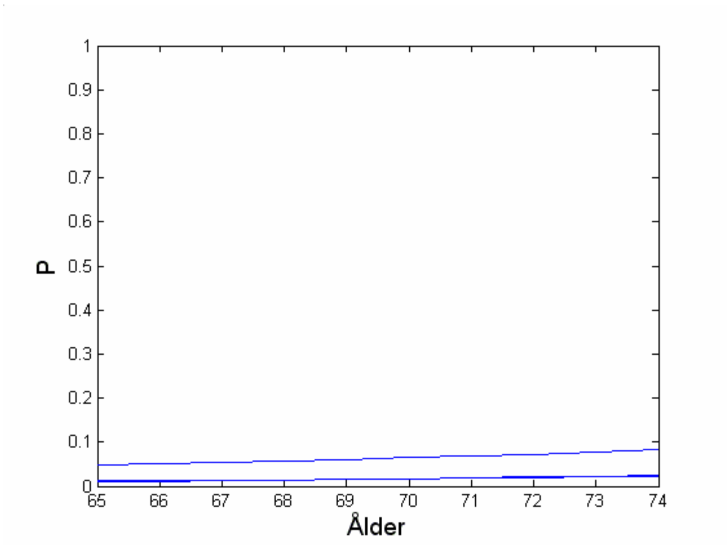
Vi skriver:

$$\hat{p}_1(x) = \hat{p}_1(x-1) \cdot \hat{p}_{11}(x-1)$$

$$\hat{p}_2(x) = \hat{p}_1(x-1) \cdot \hat{p}_{12}(x-1) + \hat{p}_2(x-1) \cdot \hat{p}_{22}(x-1)$$

[5] Läs mer om demens på ”http://www.apoteket.se/content/1/c4/78/27/Psykiatri_6.pdf”.

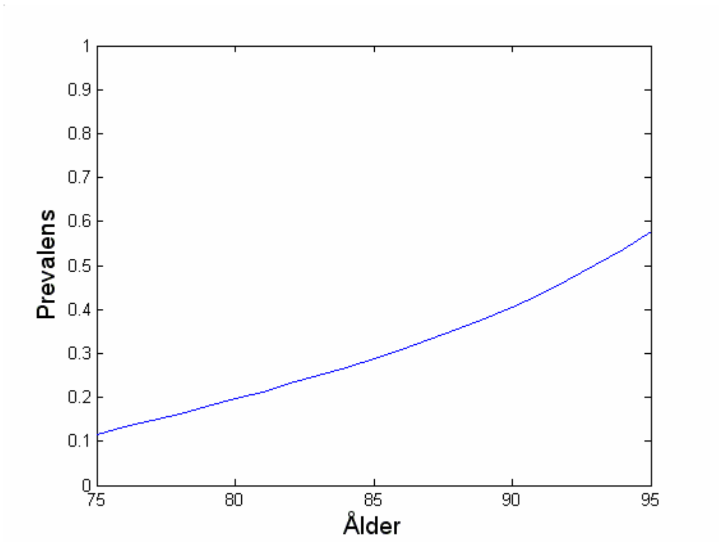
Vi sätter enligt vår tidigare approximation $\hat{p}_1(65) = 1$ och givetvis $\hat{p}_2(65) = 0$. Eftersom vi endast har data för intervallet 75 - 95 år så gör vi ett antagande om att kurvorna för övergångssannolikheterna i intervallet 65 - 75 år har samma parametrar som de i intervallet 75 - 95 år.



Den övre kurvan visar här $\hat{p}_{23}(x)$ och under den finns $\hat{p}_{12}(x)$ och $\hat{p}_{13}(x)$ och nu kan vi alltså stega oss fram för att få ut alla värden på $\hat{p}_1(x)$ och $\hat{p}_2(x)$.

Prevalensen definieras som andelen av de levande personerna som är sjuka vid en specifik ålder. Denna kan beskrivas med hjälp av sannolikheten att vara sjuk delat med sannolikheten att vara levande. Vi betecknar prevalensen vid åldern x som $prev(x)$.

$$p\hat{r}ev(x) = \frac{\hat{p}_2(x)}{\hat{p}_1(x) + \hat{p}_2(x)}$$



4.3 Återstående livslängd.

Vi börjar med att konstatera att den återstående livslängden består av antalet återstående friska och sjuka år samt att dessa givetvis beror på i fall man är frisk eller sjuk vid tidpunkten som vi vill skatta för.

Vi definierar storheterna som:

$f_1(x) =$ förväntat antal återstående friska år för en frisk x-årig individ.

$s_1(x) =$ förväntat antal kommande sjuka år för en frisk x-årig individ.

$s_2(x) =$ förväntat antal återstående sjuka år för en sjuk x-årig individ.

Observera att vi givetvis inte heller här tar hänsyn till hur länge en person har befunnit sig i ett tillstånd, i.

Antag nu att vi kan skatta $\hat{f}_1(95)$, $\hat{s}_1(95)$ och $\hat{s}_2(95)$. Med hjälp av de skattade övergångssannolikheterna kan vi nu skriva en rekursiv formel för att baklänges få fram återstående livslängd för de tidigare åldrarna.

Om en individ är frisk vid $x+1$ års ålder har hon varit frisk ett år längre än vid åldern x. Sannolikheten för att en individ som är frisk vid x års ålder ska vara frisk vid $x+1$ är $\hat{p}_{11}(x)$.

Vi får alltså:

$$\hat{f}_1(x) = \hat{p}_{11}(x) \cdot (1 + \hat{f}_1(x+1))$$

Om en individ är sjuk vid $x+1$ års ålder har hon varit sjuk ett år längre än vid åldern x. Sannolikheten för att en individ som är sjuk vid x års ålder ska vara sjuk vid $x+1$ är $\hat{p}_{22}(x)$.

Vi får alltså:

$$\hat{s}_2(x) = \hat{p}_{22}(x) \cdot (1 + \hat{s}_2(x+1))$$

Motsvarande resonemang förs för $\hat{s}_1(x)$. Här tas dock hänsyn till att en person vid nästa ålder antingen kan vara fortsatt frisk eller ha övergått till sjuk.

Vi får alltså:

$$\hat{s}_1(x) = \hat{p}_{11}(x) \cdot (0 + \hat{s}_1(x+1)) + \hat{p}_{12}(x) \cdot (1 + \hat{s}_2(x+1))$$

Frågan är nu bara, hur ska vi skatta våra startvärden?

Vi börjar med att skatta $f_1(95)$ och sedan kan man på analogt vis skatta $s_1(95)$ och $s_2(95)$ [6].

Vi kan börja med att konstatera att det finns individer som blir äldre än 95 år och således är $f_1(95) > 0$.

Vi kan också konstatera att en 95-åring har färre förväntat återstående friska år än en 94-åring, alltså $f_1(95) < f_1(94)$.

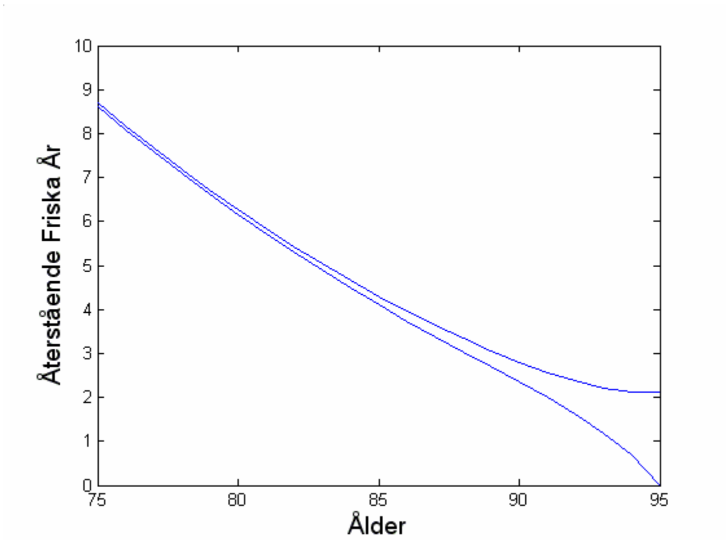
Den övre gränsen för $f_1(95)$ är alltså mindre än värdet vi får om vi sätter $f_1(95) = f_1(94)$ och om vi sätter in den likheten i formeln för $f_1(x)$ får vi $f_1(94) = p_{11}(94) \cdot (1 + f_1(94)) \Rightarrow f_1(94) = \dfrac{p_{11}(94)}{(1 - p_{11}(94))}$

Vi vet alltså att:

$$0 < f_1(95) < \frac{p_{11}(94)}{(1 - p_{11}(94))}$$

och vi sätter då givetvis

$$0 < \hat{f}_1(95) < \frac{\hat{p}_{11}(94)}{(1 - \hat{p}_{11}(94))}$$



Ett problem som vi dock ställs inför är att vi inte kan veta exakt hur stor $\hat{f}_1(95)$ ska vara, men under något lämpligt antagande så borde vi ändå kunna komma nära sanningen.

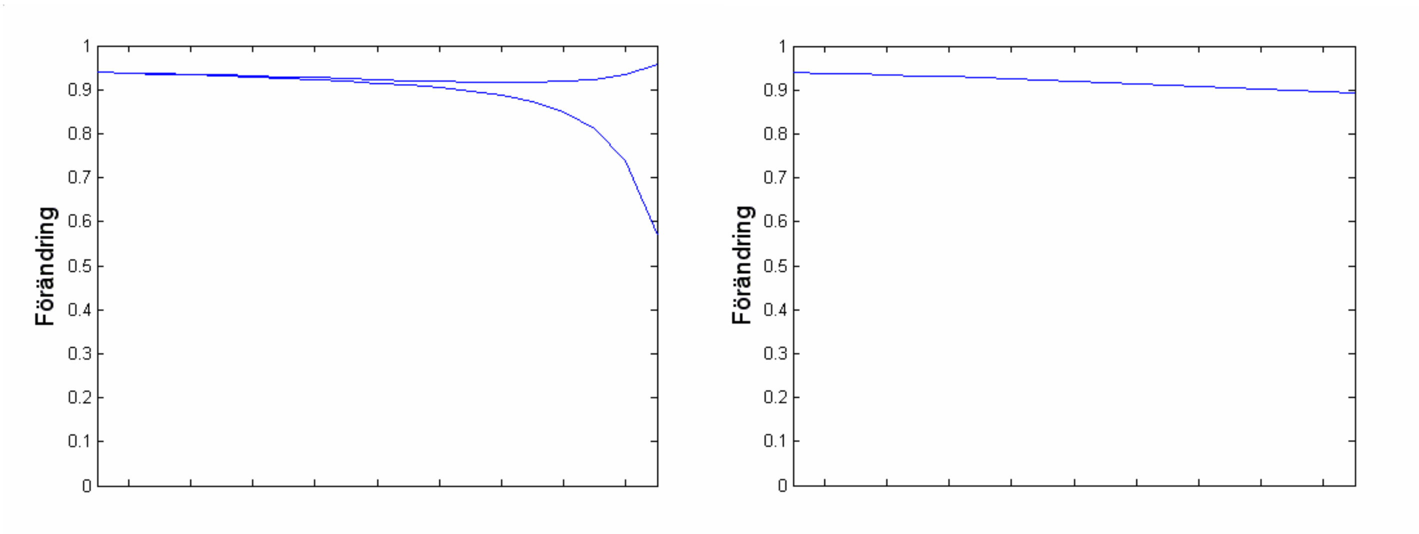
---

[6] Dessa uträkningar finns i appendix A.

Om vi tittar på plotten för återstående friska år så borde den, eftersom $\hat{p}_{11}(x)$ minskar med tiden, ha en avtagande negativ lutning och gå mot 0. Dock vet ingen idag exakt hur gammal en människa egentligen kan bli och således vet vi ej om det finns eller i så fall vid vilken ålder som det förväntade antal återstående friska åren är 0.
För att hantera detta tittar vi på den årliga förändringen, med avseende på ålder, av antalet återstående friska år. Detta kan vi göra med hjälp av att rekursivt ta fram $\hat{f}_1(x)$ dels med hjälp den undre och dels med den övre gränsen av $\hat{f}_1(95)$. Den skattade förändringen är alltså $\hat{f}_1(x+1)/\hat{f}_1(x)$. Resultatet för de båda gränserna visar vi i en plot där vi till exempel ser att de förväntade återstående friska åren för en 76-åring är strax under 95% av antalet för en 75-åring.

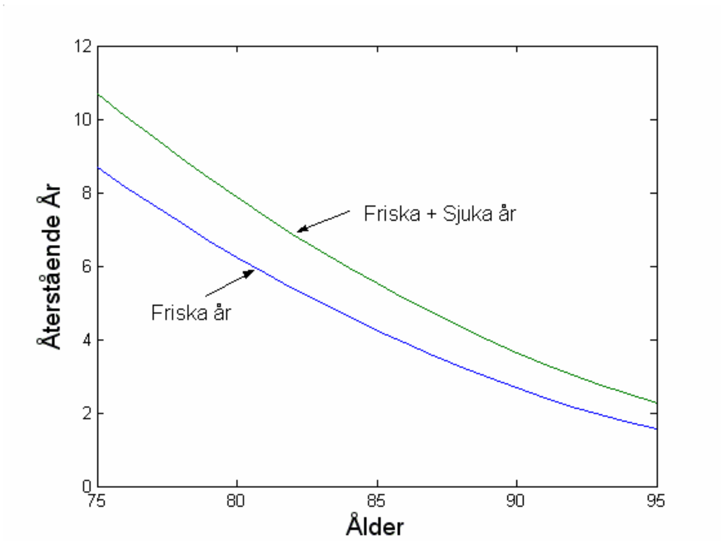
Avståndet mellan förändringskurvorna är litet för de lägre åldrarna och förändringen verkar vara linjär där. Detta skulle kunna vara ett lämpligt antagande, men för att förenkla lite skattar vi $\hat{f}_1(95)$ med ett värde som ger

$$\frac{\hat{f}_1(95)}{\hat{f}_1(94)} \approx \frac{\hat{f}_1(94)}{\hat{f}_1(93)}$$



Eftersom vi dels inte vet det exakta värdet på $f_1(95)$ utan snarare är ute efter att komma nära sanningen räcker det gott med att dessa förändringar ligger nära varandra. Dessutom är det inte helt avgörande vilket antagande vi väljer eftersom det kommer att röra sig om ett fåtal dagar mellan det linjära antagandet och det antagande som vi nu gör.

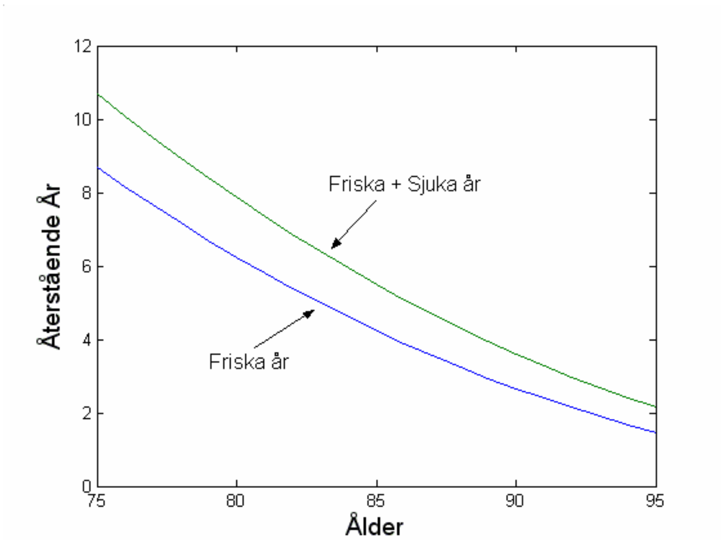
Med samma antagande för $\hat{s}_1(95)$ och $\hat{s}_2(95)$ som för $\hat{f}_1(95)$ kan vi nu skatta återstående friska och sjuka år för de olika åldrarna.



Man skulle kunna tänka sig att man istället gör ett antagande om att det, även för åldrar över 95 år, gäller att

$$\hat{p}_{ij}(x) = e^{\hat{\alpha}_{ij} + \hat{\beta}_{ij} \cdot x}, \forall \ i < j \ \ i = 1,2 \ \ j = 2,3$$

Vi prövar nu att göra det antagandet i stället och för att lagen om total sannolikhet ska gälla säger vi att om $\sum_{j=1}^{3} \hat{p}_{1j}(x) > 1$ så gäller att $\hat{p}_{12}(x) = 1 - \hat{p}_{13}(x)$ och om $\hat{p}_{13}(x) > 1$ så sätter vi att $\hat{p}_{13}(x) = 1$. Under detta antagande får vi alltså en ålder där $\hat{f}_1(x) = 0$ och det värdet kan vi alltså sätta in i vår rekursionsformel och vi skattar på samma sätt som tidigare återstående livslängd uppdelat på friska och sjuka år.



Om man tittar på plottarna för de två olika antagandena så ser man att de ligger väldigt nära varandra för de höga åldrarna och att de är näst intill identiska för de lägre. Exempel på resultat under det första antagandet är $\hat{f}_1(75) = 8.68$ år och $\hat{f}_1(95) = 1.55$ år som kan jämföras mot $\hat{f}_1(75) = 8.68$ år och $\hat{f}_1(95) = 1.47$ år under det andra antagandet. Vi ser alltså att det inte är helt avgörande vilket antagande vi väljer. Detta verkar rimligt eftersom vi använder samma skattningar på övergångssannolikheterna i de båda fallen. För de högre åldrarna kan det skilja lite, men för de lägre kommer vi att få samma värden.

Malin Düring konstaterade i sin rapport att $f_1(95) < \dfrac{p_{11}(94)}{(1 - p_{11}(94))}$.

Dock sattes där värdet på $\hat{f}_1(95)$ så att det låg så nära $\hat{f}_1(94)$ som möjligt.

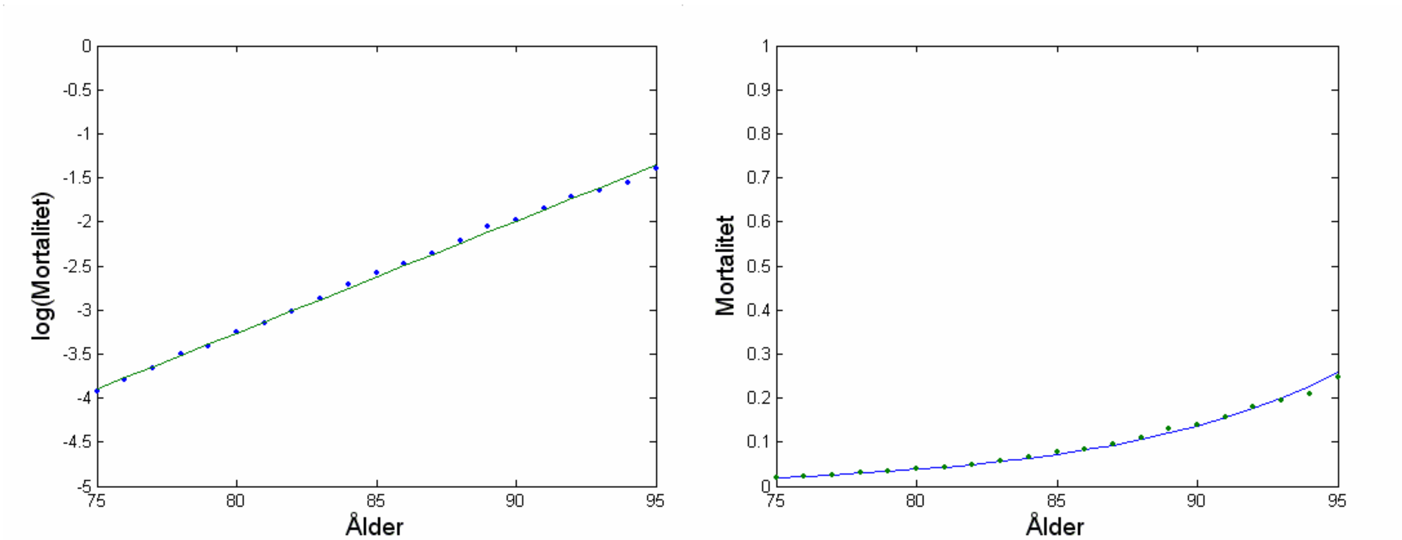
5. Tillämpning, av modellen, på Sverige

5.1 PIM-modellen

Vi vill alltså nu försöka använda denna modell för att göra det möjligt att säga något om antalet dementa kvinnor i Sverige i dag. Vi vill även säga något om hur det kan komma att utvecklas i framtiden.

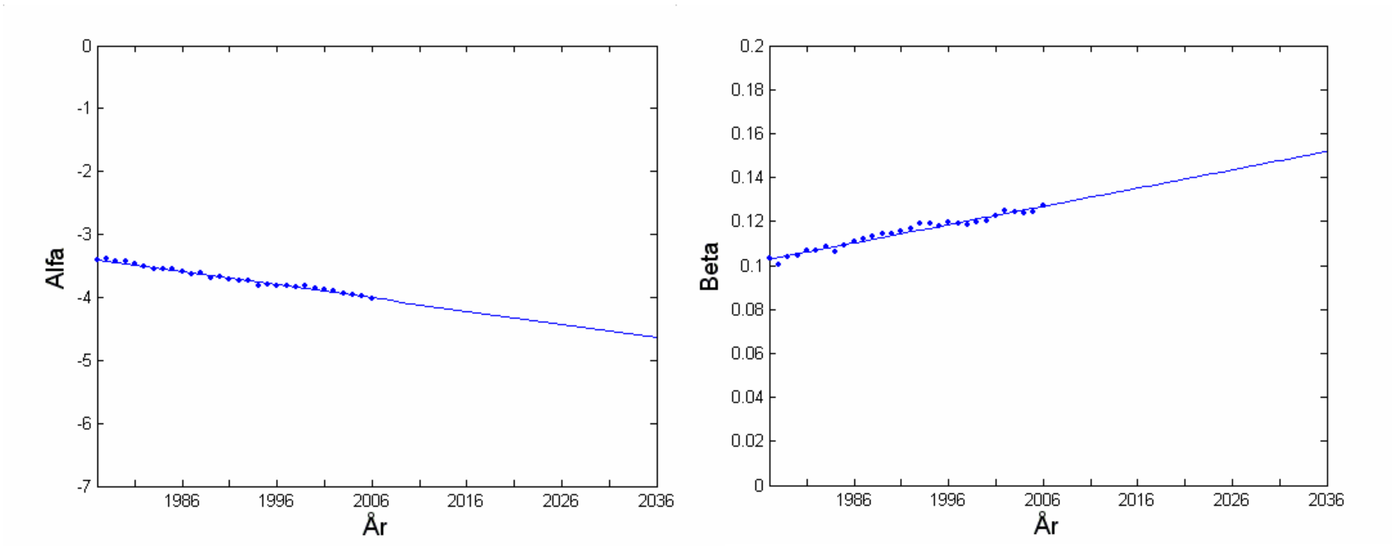
Problemet vi har är att det inte är helt självklart att det går att jämföra Sveriges äldre kvinnor i dag med de i Kungsholmsprojektet. Kungsholmsprojektet sträcker sig lite över ett decennium och under den perioden kan incidensen och mortaliteten ha förändrats och dessutom har det, om man tittar på Sverige i dag, gått ytterligare 7 år sedan projektet avslutades. Vi har också problemet med den geografiska skillnaden mellan Kungsholmen och Sverige. Om man jämför inkomstfördelningen för de två regionerna kan man dock finna stöd för att Kungsholmsprojektet är representativt för Sverige[7].

För Sverige har vi data för antalet levande personer i varje åldersgrupp och årtal, således kan vi få ut dödssannolikheterna för dessa[8]. Vi tittar på mortaliteten för individer i Sverige mellan 75 och 95 år de senaste 30 åren. Om vi logaritmerar dessa värden så verkar de, för varje år, vara linjära med avseende på åldern. Precis som tidigare jämnar vi ut kurvorna med minsta kvadrat metoden. Nedan har vi som exempel plottat mortaliteten för år 2006.



[7] För ytterligare läsning se Hallberg D, Lagergren M, *Moving in and out of public geriatric care in Sweden*, Working Paper 2007:11, Department of Economics, Uppsala Universitet.
[8] Här finns hela datasetet http://www.scb.se/statistik/BE/BE0101/2006A01/Be0101Folkmängd1860-2006.xls

Tanken är nu att vi ska titta på den skattade kurvans parametrar och se om de verkar bero på tiden och i så fall hur de förändras. Genom att plotta parametrarna för varje år ser vi att α verkar vara linjär med avseende på tiden och verkar ha en negativ lutning medan β verkar vara linjär med en positiv lutning[9].



För det första måste man diskutera i fall det är rimligt att lutningen på β är positiv, eftersom detta medför att kurvorna för mortaliteten, för olika årtal, kommer att skära varandra. Om vi nöjer oss med att inte titta längre än 20-30 år fram i tiden kommer det dock att ske utanför det åldersintervall vi tittar på. Vi tänker oss därför att denna utveckling av parametrarna gäller i intervallet 75-95 år och vi extrapolerar dessa parameterkurvor för att vi kan få fram mortaliteten för en viss ålder ett visst framtida år.

När vi tidigare gjorde vår PIM-modell gjordes den med antagande om att övergångssannolikheterna ej beror på årtal men den mortalitet vi har i Sverige visar att de beror på både ålder och årtal.

Vi definierar dödssannolikheten för en godtycklig person vid en viss ålder, x, och ett visst år, t, som $p_{g3}(x,t)$ och eftersom vi har skattat de värdena kan vi under vissa antagande ta fram en formel som ger oss prevalensen för olika åldrar och årtal.

Vi börjar med att konstatera att

$$\hat{p}_{g3}(x,t) = \hat{p}_{13}(x,t) \cdot (1 - p\hat{r}ev(x,t)) + \hat{p}_{23}(x,t) \cdot p\hat{r}ev(x,t) \qquad (*)$$

och här använder vi oss alltså av samma beteckningar som tidigare, men vi har nu också infört beroendet av årtal.

---

[9] observera här att $P_{g3}(x,t) = e^{\alpha + \beta \cdot x}$ och värdena på x är 1 till 60 dvs x=1 motsvarar år 1976

Vi har, enligt samma resonemang som i modellen, formlerna

$$\hat{p}_1(x,t) = \hat{p}_1(x-1,t-1)\cdot \hat{p}_{11}(x-1,t-1)$$

$$\hat{p}_2(x,t) = \hat{p}_2(x-1,t-1)\cdot \hat{p}_{22}(x-1,t-1) + \hat{p}_1(x-1,t-1)\cdot \hat{p}_{12}(x-1,t-1)$$

Kom ihåg att vi sätter $\hat{p}_1(65,t) = 1$ och följaktligen $\hat{p}_2(65,t) = 0$.

Om vi nu gör antaganden om hur $\hat{p}_{12}(x,t)$ samt $\hat{p}_{23}(x,t)$ ser ut kan vi således skatta prevalensen för olika åldrar och årtal. För att leda oss i rätt riktning om vilka antaganden vi ska göra kan vi titta på $\hat{p}_{g3}(x,t)$.

Observera här att vi för varje steg i rekursionen måste gå tillbaka till $(*)$ för att lösa ut $\hat{p}_{13}(x,t)$.

Vi får även ut $\hat{p}_{11}(x,t)$ och $\hat{p}_{22}(x,t)$ eftersom

$\hat{p}_{11}(x,t) + \hat{p}_{12}(x,t) + \hat{p}_{13}(x,t) = 1$ och

$$\hat{p}_{22}(x,t) + \hat{p}_{23}(x,t) = 1$$

Precis som tidigare, fast nu även med beroende på tiden, gäller givetvis att

$$p\hat{r}ev(x,t) = \frac{\hat{p}_2(x,t)}{\hat{p}_1(x,t) + \hat{p}_2(x,t)}$$

Vi vet hur många personer som i dag finns i varje åldersgrupp och vi har skattat mortaliteten för framtiden så från det kan vi direkt skatta antalet personer i en viss åldersgrupp ett visst framtida år. Med hjälp av den skattade prevalensen kan vi alltså då även skatta antalet dementa kvinnor i varje åldersgrupp vid ett visst framtida årtal.

5.2 Återstående livslängd

Under antaganden för $\hat{p}_{12}(x,t)$ samt $\hat{p}_{23}(x,t)$ kan vi också, precis som tidigare, få ut förväntad återstående livslängd för en viss åldersgrupp ett visst framtida år. Återigen måste vi ta hänsyn till årtal och vi konstaterar att en person som till exempel var 85 år i början på 2006 var 84 år i början på 2005.

Vi får då rekursionsformlerna:

$$\hat{f}_1(x,t) = \hat{p}_{11}(x,t) \cdot (1 + \hat{f}_1(x+1,t+1))$$

$$\hat{s}_2(x,t) = \hat{p}_{22}(x,t) \cdot (1 + \hat{s}_2(x+1,t+1))$$

$$\hat{s}_1(x,t) = \hat{p}_{11}(x,t) \cdot (0 + \hat{s}_1(x+1,t+1)) + \hat{p}_{12}(x,t) \cdot (1 + \hat{s}_2(x+1,t+1))$$

5.2 Antagande om $\hat{p}_{12}(x,t)$ och $\hat{p}_{23}(x,t)$

För att se skillnad på data för Sverige och för Kungsholmsprojektet börjar vi med att lägga till ett k i index hos data från Kungsholmsprojektet.

Vi kan konstatera att vi inte vet hur, eller om, $p_{12}(x,t)$ förändras med tiden. Men vi har $\hat{p}_{k12}(x)$ från Kungsholmsprojektet, som avslutades år 2000. Vi börjar därför med att anta att $\hat{p}_{k12}(x)$ gäller för år 2000 och alla årtal innan det.

$$\hat{p}_{12}(x,t) = \hat{p}_{k12}(x), \quad \forall \quad t \leq 2000$$

För att göra något antagande om åren efter år 2000 sätter vi en konstant, c_{12}, som representerar en årlig förändring av incidensen. Vi sätter här samma konstant för alla åldrar för att göra modellen enkel.

$$\hat{p}_{12}(x,t) = \hat{p}_{k12}(x) \cdot c_{12}{}^{t-2000}, \quad \forall \quad t > 2000$$

När det gäller $\hat{p}_{23}(x,t)$ så angriper vi den på samma sätt med en motsvarande konstant c_{23}.

Vilka värden som är rimliga att sätta på konstanterna kan vara svårt att veta eftersom vi inte har någon som helst data för deras förändring med tiden.

Mårten Lagergren menar att ett lämpligt antagande är att mortalitetsförändringen för dementa är proportionell mot förändringen för en godtycklig individ och att incidensen är konstant med avseende på tiden.

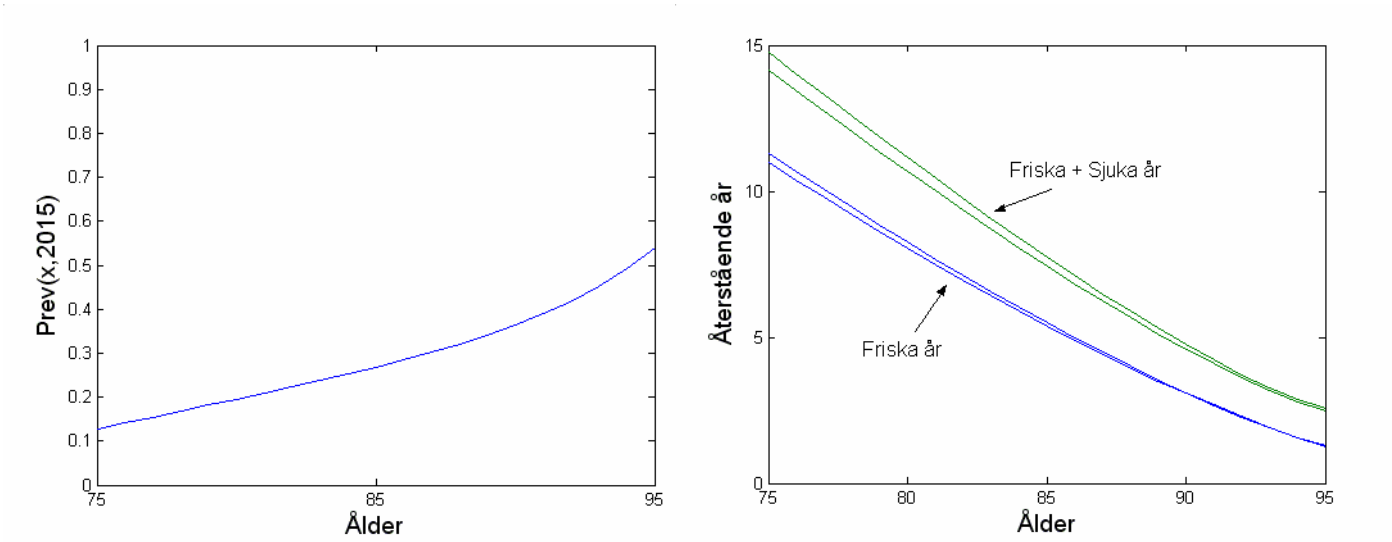
Vi har ju för enkelhetens skull antagit att c_{23} är lika för alla åldrar. Dock har vi konstaterat att förändringen av $p_{g3}(x,t)$ är beroende av åldern. För att hantera detta gör vi antagandet att c_{23} är lika med medelförändringen, av alla åldrar, för $p_{g3}(x,t)$.

$$c_{g3} = \frac{\sum_{x=75}^{95} \frac{p_{g3}(x,t+1)}{p_{g3}(x,t)}}{21} \text{, för något } t$$

Med våra antaganden om $p_{g3}(x,t)$ får vi att mortaliteten för dementa minskar med 1.2% per år, $c_{23} = 0.988$. Vi säger också att incidensen är konstant med avseende på tiden, alltså $c_{12} = 1$.

Egentligen innebär antagandet om att mortalitetsförändringen för dementa är proportionellt mot förändringen av friska att vår konstant beror på åldern. Men att sätta *en* konstant för alla åldrar gör det lättare att tolka modellen och att jämföra olika antaganden om c_{23}.

Det går givetvis här att göra andra antaganden om c_{12} och c_{23}, till exempel för att se hur en eventuell medicin skulle kunna påverka antalet sjuka personer, men vi nöjer oss med dessa. Med dem kan vi beräkna prevalensen, antal sjuka individer och det förväntade antalet återstående friska och sjuka år[10].



[10] Här har vi till vänster plottat förväntad prevalens för år 2015 och till höger förväntat återstående friska och sjuka år för 2007 (undre linjer) samt 2015 (övre linjer). Exempel på tabeller över förväntat antal dementa kvinnor finns i appendix B.

6. Resultat

Målet med den här rapporten var att göra en prevalens, incidens och mortalitets modell för Kungsholmsprojektet samt en modell för återstående livslängd uppdelad på friska och sjuka år. Den första modellen gjordes och som resultat fick vi ut en plot som visar den skattade prevalensen för dementa kvinnor i projektet. Från resultatet till den andra modellen kan vi till exempel se att en frisk 75-årig kvinna från datasetet kunde förväntas leva i nästan 11 år till och av dem skulle hon vara dement i ungefär 2 år.

Sedan skulle vi tillämpa dessa modeller på Sverige och försöka säga något om framtiden. Om alla övergångssannolikheter vore konstanta med avseende på tiden skulle förmodligen resultaten från kungsholmprojektet kunna tillämpas direkt på Sverige. Men när vi tittade på hur antalet personer i olika åldersgrupper förändrades med tiden konstaterade vi att mortaliteten beror på tiden. Alltså gick inte Kungsholmsprojektet att tillämpa direkt på Sverige. Tyvärr så visste vi inte hur incidensen och mortaliteten för en sjuk individ förändras med tiden utan fick nöja oss med att göra antaganden om dessa.

Om mortaliteten minskar kommer kvinnor att leva längre och den förväntade extra livslängden kommer att bestå av både friska och sjuka år. Så länge inte incidensen minskar kommer vi alltså att med tiden få fler och fler dementa kvinnor i Sverige. Här skulle vi ha kunnat göra olika antaganden för att se hur mycket det påverkar resultatet, men vi nöjde oss med att titta på det antagande som Mårten Lagergren ansåg att var mest troligt.

I plotten på sid 23 kan vi se vilket resultat våra antaganden får på återstående livslängd. Som exempel jämför vi år 2007 och 2015 och vi ser att den förväntade återstående livslängden ökar med både friska och sjuka år.

I tabell 1 i Appendix B kan vi se det förväntade antalet dementa kvinnor vid åren 2007 och 2015. Med en minskad mortalitet kommer vi på sikt att få fler kvinnor och därför även fler dementa kvinnor.

För att få fram riktigt bra resultat skulle vi helst vilja ha ett dataset som innehåller antal personer i varje åldersgrupp, för varje år, och som även är uppdelat på friska och dementa personer. Med ett sådant dataset skulle man kunna titta på hur incidensen och mortaliteten har förändrats de senaste åren och sedan göra antaganden om framtiden på samma sätt som vi har gjort med $p_{g3}(x,t)$.

7. Appendix A, Formler

Beräkning av förväntad återstående livstid för en dement.

Förväntade antalet sjuka år givet att man är sjuk är större än 0, $\hat{s}_2(95) > 0$

Sambandet $\hat{s}_2(94) = \dfrac{\hat{p}_{22}(94)}{(1-\hat{p}_{22}(94))}$ får vi genom att sätta $\hat{s}_2(95) = \hat{s}_2(94)$

men vi vet ju att $s_2(95) < s_2(94)$ så alltså får vi

$$0 < \hat{s}_2(95) < \frac{\hat{p}_{22}(94)}{(1-\hat{p}_{22}(94))}$$

och vi skattar $s_2(95)$ genom att sätta dess värde så att $\dfrac{\hat{s}_2(95)}{\hat{s}_2(94)} \approx \dfrac{\hat{s}_2(94)}{\hat{s}_2(93)}$

Beräkning av förväntat antal återstående dementa år för en frisk.

Förväntade antalet sjuka år givet att man är frisk är större än 0, $\hat{s}_1(95) > 0$

Om vi skulle sätta $\hat{s}_1(95) = \hat{s}_1(94)$ så skulle vi få

$$\hat{s}_1(94) = \hat{p}_{11}(94)\cdot(0+\hat{s}_1(94)) + \hat{p}_{12}(94)\cdot(1+\hat{s}_2(95)) \Rightarrow \hat{s}_1(94) = \frac{\hat{p}_{12}(94)\cdot(1+\hat{s}_2(95))}{1-\hat{p}_{11}(94)}$$

men vi vet ju att $s_1(95) < s_1(94)$ och alltså gäller

$$0 < \hat{s}_1(95) < \frac{\hat{p}_{12}(94)\cdot(1+\hat{s}_2(95))}{1-\hat{p}_{11}(94)}$$

och skattar $s_1(95)$ genom att sätta dess värde så att $\dfrac{\hat{s}_1(95)}{\hat{s}_1(94)} \approx \dfrac{\hat{s}_1(94)}{\hat{s}_1(93)}$

9. Appendix B, Tabeller

Tabell 1: Förväntade antalet dementa kvinnor i åldrarna 75-95 år.

	ÅR 2007		ÅR 2015	
Ålder	Antal Sjuka	Antal Personer	Antal Sjuka	Antal Personer
75	4522	35861	5223	40886
76	4913	35304	5748	40715
77	5397	35441	5942	38412
78	5556	33584	6033	35857
79	6039	33799	6220	34191
80	6129	31921	6154	31439
81	6437	31327	6291	29998
82	6711	30623	6328	28264
83	6821	29256	6700	28101
84	6823	27564	6754	26654
85	6726	25632	6894	25631
86	7049	25355	6593	23109
87	7054	23955	6644	21955
88	5460	17495	6230	19395
89	4974	15017	6015	17613
90	4579	13001	5726	15731
91	4023	10710	5265	13528
92	3443	8561,8	4712	11272
93	2989	6906,1	4098	9077
94	2501	5338,2	3725	7581
95	2063	4032,9	3165	5866
Totalt	110207	480684	120457	505275

Tabell 2: Återstående friska respektive sjuka år.

År 2015				
Ålder	Friska år givet frisk	Sjuka år givet frisk	Totala år givet frisk	Sjuka år givet sjuk
75	11,29	3,48	14,76	8,58
76	10,67	3,37	14,03	8,25
77	10,05	3,25	13,30	7,93
78	9,44	3,14	12,58	7,62
79	8,84	3,02	11,86	7,32
80	8,25	2,90	11,15	7,02
81	7,67	2,77	10,45	6,74
82	7,11	2,65	9,76	6,46
83	6,55	2,52	9,08	6,19
84	6,01	2,40	8,41	5,93
85	5,48	2,27	7,75	5,68
86	4,97	2,14	7,11	5,43
87	4,48	2,02	6,49	5,20
88	4,00	1,89	5,89	4,97
89	3,54	1,77	5,31	4,75
90	3,10	1,65	4,75	4,53
91	2,68	1,54	4,22	4,33
92	2,28	1,44	3,72	4,13
93	1,91	1,36	3,27	3,95
94	1,58	1,31	2,89	3,77
95	1,30	1,26	2,56	3,60

Tabell 3: Återstående friska och sjuka år för en godtycklig individ.

År 2015			
Ålder	Friska år	Sjuka år	Totala år
75	9,85	4,13	13,97
76	9,16	4,06	13,21
77	8,49	3,98	12,47
78	7,85	3,89	11,74
79	7,23	3,80	11,03
80	6,64	3,71	10,34
81	6,06	3,61	9,67
82	5,52	3,50	9,02
83	4,99	3,40	8,39
84	4,49	3,29	7,78
85	4,01	3,19	7,19
86	3,55	3,08	6,63
87	3,12	2,98	6,10
88	2,71	2,88	5,59
89	2,33	2,79	5,12
90	1,97	2,70	4,67
91	1,64	2,63	4,26
92	1,33	2,57	3,89
93	1,05	2,53	3,58
94	0,80	2,52	3,32
95	0,60	2,52	3,12

10. Referenser

Mer information om Äldrecentrum finns på http://www.aldrecentrum.se/

Qvarnström S, *Modellering av prevalens som resultat av incidens och mortalitet*, Examensarbete 2006:4, Matematisk statistik, Stockholms Universitet

Düring M, *Kommer en längre livslängd att innebära fler friska år?,* Examensarbete 2006:9, Matematisk statistik, Stockholms Universitet

Mer fakta om Kungsholmsprojektet finns på www.aldrecentrum.se/kungs.html

Läs mer om demens på http://www.apoteket.se/content/1/c4/78/27/Psykiatri_6.pdf

Hallberg D, Lagergren M, *Moving in and out of public geriatric care in Sweden*, Working Paper 2007:11, Department of Economics, Uppsala Universitet.

Här finns hela datasetet med Sverieges befolkningsmängd i olika åldrar http://www.scb.se/statistik/BE/BE0101/2006A01/Be0101Folkmängd1860-2006.xls