Svensk version

16^{th} Baltic Way Mathematical Team Contest

November 5, 2005, Stockholm, Sverige

Tillåten tid: 4 timmar 30 minuter
Frågor får ställas under de första 30 minuterna.

1. Låt a_0 vara ett positivt heltal. Definiera talföljden $\{a_n\}_{n\geq 0}$ enligt följande: om

$$a_n = \sum_{i=0}^{j} c_i 10^i$$

där c_i är heltal med $0 \leq c_i \leq 9$, så är

$$a_{n+1} = c_0^{2005} + c_1^{2005} + \cdots + c_j^{2005}.$$

Kan man välja a_0 så att alla element i talföljden är olika?

2. Låt α, β och γ vara tre vinklar sådana att $0 \leq \alpha, \beta, \gamma < 90°$ och $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 1$. Visa att

$$\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma \geq \frac{3}{8}.$$

3. Betrakta talföljden $\{a_k\}_{k\geq 1}$ definierad av $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$,

$$a_{k+2} = a_k + \frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{4a_k a_{k+1}} \quad \text{för } k \geq 1.$$

Visa att

$$\frac{1}{a_1a_3} + \frac{1}{a_2a_4} + \frac{1}{a_3a_5} + \cdots + \frac{1}{a_{98}a_{100}} < 4.$$

4. Hitta tre olika polynom $P(x)$ med reella koefficienter sådana att $P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$ för alla reella tal x.

5. Låt a, b, c vara positiva reella tal sådana att $abc = 1$. Visa att

$$\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq 1.$$

6. Låt K och N vara positiva heltal sådana att $1 \leq K \leq N$. En kortlek med N olika kort blandas via ett upprepat förfarande: De K översta korten läggs i omvänd ordning underst i kortleken. Visa att korten åter är i ursprungsordningen efter inte mer än $4 \cdot N^2/K^2$ repetitioner av förfarandet.

7. En rektangulär matris har n rader 6 kolumner, där $n > 2$. Varje element i matrisen är antingen 0 eller 1. Varje rad i matrisen är olik varje annan rad. För varje två rader $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ och $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ finns raden $(x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, x_5y_5, x_6y_6)$ också i matrisen. Visa att det finns en kolumn i vilken minst hälften av elementen är nollor.

8. Betrakta ett rutnät av 25×25 enhetskvadrater. Rita, med en röd penna, kanterna av kvadrater av valfri storlek på rutnätet. Vad är det minimala antalet kvadrater vi måste rita för att färglägga alla linjer i rutnätet.

9. En rektangel delas in i 200×3 enhetskvadrater. Visa att antalet sätt att dela upp rektangeln i 1×2-rektanglar är delbart med 3.

10. Låt $m = 30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ och låt M vara mängden av de positiva delare till m som har exakt 2 primtalsfaktorer. Bestäm det minsta heltal n med följande egenskap: i varje val av n tal ur M finns 3 tal a, b, c som uppfyller $a \cdot b \cdot c = m$.

11. Låt punkterna D och E ligga på sidorna BC respektive AC i triangeln ABC, och uppfylla att $BD = AE$. Linjen som förbinder mittpunkterna på de omskrivna cirklarna till trianglarna ADC och BEC skär linjerna AC och BC i K respektive L. Visa att $KC = LC$.

12. Låt $ABCD$ vara en konvex fyrhörning sådan att $BC = AD$. Låt M och N vara mittpunkterna på AB respektive CD. Linjerna AD och BC skär linjen MN i P respektive Q. Visa att $CQ = DP$.

13. Vad är det minsta antalet cirklar med radie $\sqrt{2}$ som behövs för att övertäcka en rektangel

    (a) med sidlängderna 6 och 3?

    (b) med sidlängderna 5 och 3?

14. Låt medianerna i triangeln ABC skära varandra i M. Låt D och E vara olika punkter på linjen BC sådana att $DC = CE = AB$, och låt P och Q vara punkter på segmenten BD respektive BE sådana att $2BP = PD$ och $2BQ = QE$. Bestäm $\angle PMQ$.

15. Låt linjerna e och f vara vinkelräta och skära varandra i H. Låt A och B ligga på e, och C och D ligga på f, så att alla fem punkter A, B, C, D och H är olika. Låt linjerna b och d gå genom B respektive D vinkelräta mot AC; låt linjerna a och c gå genom A respektive C, vinkelrät mot BD. Låt a och b skära varandra i X, och c och d skära varandra i Y. Visa att XY går genom H.

16. Låt p vara ett primtal och låt n vara ett positivt heltal. Låt q vara en positiv delare till $(n+1)^p - n^p$. Visa att $q-1$ är delbart med p.

17. En talföljd $\{x_n\}_{n\geq 0}$ definieras enligt följande: $x_0 = a$, $x_1 = 2$ och $x_n = 2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ för $n > 1$. Hitta alla heltal a sådana att $2x_{3n} - 1$ är en heltalskvadrat för alla $n \geq 1$.

18. Låt x och y vara positiva heltal och antag att $z = 4xy/(x+y)$ är ett udda heltal. Visa att minst en av delarna till z kan skrivas på formen $4n-1$, där n är ett positivt heltal.

19. Är det möjligt att hitta 2005 olika positiva heltalskvadrater sådana att deras summa också är en heltalskvadrat?

20. Hitta alla positiva heltal $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ som delar $(p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_k+1)$, där $p_1 p_2 \cdots p_k$ är faktoriseringen av n i primtalsfaktorer (ej nödvändigtvis olika).