Komandinė „Baltijos kelio" matematikos olimpiada

Rašymo laikas: 4 val. 30 min.
Klausimus galima uždaoti per pirmąsias 30 min.

Stokholmas, 2005 11 05

1. a_0 yra teigiamas sveikasis skaičius. Seka $\{a_n\}_{n\geq 0}$ yra apibrėžiama taip:

$$\text{Jei } a_n = \sum_{i=0}^{j} c_i 10^i, \quad 0 \leq c_i \leq 9,$$

tai

$$a_{n+1} = c_1^{2005} + c_2^{2005} + \ldots + c_j^{2005}$$

Ar galima a_0 parinkti taip, kad visi sekos nariai būtų skirtingi?

2. Kampai α, β ir γ yra tokie, kad $0 \leq \alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$ ir $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 1$. Įrodykite, kad

$$tg^2\alpha + tg^2\beta + tg^2\gamma \geq \frac{3}{8}.$$

3. Seka $\{a_n\}$ apibrėžiama taip: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$ ir

$$a_{k+2} = a_k + \frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{4a_k a_{k+1}}, \text{ jei } k \geq 1.$$

Įrodykite, kad

$$\frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{98} a_{100}} < 4.$$

4. Raskite 3 tokius daugianarius $P(x)$, kurių koeficientai yra realieji skaičiai ir kurie su visais realiaisiais x tenkina sąlygą

$$P(x^2+1) = (P(x))^2 + 1.$$

5. a, b ir c yra tokie teigiami realieji skaičiai, kad $abc = 1$. Įrodykite, kad

$$\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq 1.$$

6. K ir N yra teigiami sveikieji skaičiai, tokie, kad $1 \le K \le N$. Iš N skirtingų kortų kaladės imame K viršuje gulinčių kortų ir pakeitę jų eilę į atvirkščią buvusiai, dedame jas į kaladės apačią. Įrodykite, kad po ne daugiau kaip $(4N^2)/K^2$ tokių operacijų kortų kaladė vėl bus sudėta tokia pačia eile, kaip buvo pradžioje.

7. Stačiakampėje lentelėje yra n eilučių ir 6 stulpeliai $(n > 2)$. Į kiekvieną tos lentelės langelį įrašome nulį arba vienetą taip, kad visos lentelės eilutės yra skirtingos. Dar yra žinoma, kad ir kokias dvi lentelės eilutes $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ ir $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ bepaimtume, lentelėje yra ir eilutė $(x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, x_5y_5, x_6y_6)$. Įrodykite, kad tada atsiras toks eilutės stulpelis, kuriame ne mažiau negu pusė įrašytųjų skaičių yra nuliai.

8. Kvadratinė 25×25 lentelė sulinijuota vienetiniais kvadratėliais. Raudona spalva galima apibrėžti bet kurių matmenų kvadratą, kurio kraštinės sutampa su lentelės linijomis (kvadratas negali išeiti už lentelės kraštų). Kiek mažiausiai kvadratų reikėtų apibrėžti, kad visos pradinės lentelės linijos būtų apibrėžtos raudona spalva?

9. Stačiakampė 200×3 lentelė suskirstyta vienetiniais kvadratėliais. Įrodykite, kad visų galimų pradinės lentelės suskirstymų į 1×2 matmenų stačiakampėlius skaičius dalijasi iš 3.

10. Tegu M yra tokia skaičiaus $m = 30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ daliklių aibė, kurios kiekvienas elementas yra 2 skaičiaus M pirminių daliklių sandauga. Koks yra pats mažiausias sveikasis skaičius n, kad būtų tenkinama tokia sąlyga: kad ir kokius n iš aibės M elementų bepaimtume, tarp jų visada atsiras trys tokie skaičiai a, b ir c, kad jų sandauga $a \cdot b \cdot c$ yra lygi m?

11. Trikampio ABC kraštinėse BC ir AC pažymėti taškai D ir E taip, kad $BD = AE$. Tiesė, einanti per apie trikampius ADC ir BEC apibrėžtų apskritimų centrus, kerta tiesę AC taške K ir tiesę BC taške L. Įrodykite, kad $KC = LC$.

12. Iškilojo keturkampio $ABCD$ kraštinės BC ir AD yra lygios. M ir N yra atitinkamai kraštinių AB ir CD vidurio taškai. Tiesės AD ir BC kerta tiesę MN atitinkamai taškuose P ir Q. Įrodykite, kad $CQ = DP$.

13. Kiek reikia mažiausiai ~~apskritimų~~ skritulių, kurių spindulys lygus $\sqrt{2}$ ir su kuriais galima uždengti:

a) 6×3 stačiakampį?

b) 5×3 stačiakampį?

14. Trikampio ABC pusiaukraštinės kertasi taške M. Tiesėje BC pažymėti taškai D ir E taip, kad $DC = CE = AB$. Atkarpose BD ir BE pažymėti atitinkamai taškai P ir Q taip, kad $2BP = PD$ ir $2BQ = QE$. Raskite kampą $\angle PMQ$.

15. Dvi statmenos tiesės e ir f susikerta taške H. Taškai A ir B priklauso tiesei e, o taškai C ir D – tiesei f (visi 5 taškai A, B, C, D ir H yra skirtingi). Tiesės b ir d, einančios atitinkamai per taškus B ir D yra statmenos tiesei AC. Tiesės a ir c, einančios atitinkamai per taškus A ir C, yra statmenos tiesei BD. Tiesės a ir b kertasi taške X, o tiesės c ir d – taške Y. Įrodykite, kad tiesė XY eina per tašką H.

16. Tegu p – pirminis skaičius, n – teigiamas sveikasis skaičius, o q – teigiamas sveikasis skaičiaus $(n+1)^p - n^p$ daliklis. Įrodykite, kad $q-1$ dalijasi iš p.

17. Skaičių seka $\{x_n\}$ apibrėžta taip: $x_0 = a$, $x_1 = 2$ ir $x_n = 2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ kai $n > 1$.

Suraskite visus sveikuosius skaičius a, su kuriais skaičius $2x_{3n} - 1$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas su visais $n \geq 1$.

18. Duoti du tokie teigiami sveikieji skaičiai, su kuriais skaičius $z = 4xy/(x+y)$ yra nelyginis. Įrodykite, kad bent vieną iš skaičiaus z daliklių galima išreikšti pavidalu $4n-1$ (n teigiamas sveikasis skaičius).

19. Ar egzistuoja 2005 skirtingi natūraliųjų (sveikųjų teigiamų) skaičių kvadratai, kurių suma taip pat būtų lygi natūraliojo skaičiaus kvadratui?

20. Suraskite visus sveikuosius teigiamus skaičius $n = p_1 p_2 \dots p_k$, kur $p_1, p_2, \dots, p_k$ pirminiai nebūtinai skirtingi skaičiai tokius, kad skaičius

$$(p_1+1)(p_2+1)\cdot\ldots\cdot(p_k+1)$$

dalijasi iš n.