16^{th} Baltic Way Mathematical Team Contest

5. November 2005, Stockholm, Schweden

Arbeitszeit: 4 1/2 Stunden
Fragen können während der ersten 30 Minuten gestellt werden.

1. Sei a_0 eine positive ganze Zahl. Die Folge $\{a_n\}_{n\geq 0}$ sei folgendermaßen definiert: Wenn
$$a_n = \sum_{i=0}^{j} c_i 10^i,$$
wobei die c_i ganze Zahlen mit $0 \leq c_i \leq 9$ sind, dann ist
$$a_{n+1} = c_0^{2005} + c_1^{2005} + \cdots + c_j^{2005}.$$
Ist es möglich, a_0 so zu wählen, dass alle Folgenglieder paarweise verschieden sind ?

2. Es seien α, β und γ drei Winkel mit $0 \leq \alpha, \beta, \gamma < 90°$ und $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 1$. Man beweise, dass
$$\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma \geq \frac{3}{8}.$$

3. Die Folge $\{a_k\}_{k\geq 1}$ sei definiert durch $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_{k+2} = a_k + \frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{4a_k a_{k+1}}$ für $k \geq 1$. Man beweise:
$$\frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \frac{1}{a_3 a_5} + \cdots + \frac{1}{a_{98} a_{100}} < 4.$$

4. Man gebe drei verschiedene Polynome $P(x)$ mit reellen Koeffizienten an, so dass für alle reellen x gilt:
$$P(x^2+1) = P(x)^2 + 1.$$

5. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $abc = 1$. Man beweise:
$$\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq 1.$$

6. Es seien K und N positive ganze Zahlen mit $1 \leq K \leq N$. Ein Stapel von N verschiedenen Spielkarten wird durch folgende Operation gemischt: Es werden jeweils die obersten K Karten in ihrer Reihenfolge umgekehrt, und dann werden diese K Karten unter den Reststapel gelegt. Man beweise, dass die ursprüngliche Ordnung des Stapels nach einer Anzahl von solchen Operationen, die nicht größer als $4 \cdot N^2/K^2$ ist, wieder hergestellt wird.

7. Eine rechteckige Tabelle habe n Zeilen und 6 Spalten, wobei $n > 2$. In jeder Zelle steht entweder eine 0 oder eine 1. Die Zeilen der Tabelle sind paarweise verschieden. Weiterhin gilt: Mit je zwei Zeilen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ und $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ taucht auch die Zeile $(x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, x_5y_5, x_6y_6)$ in der Tabelle auf. Man beweise, dass es eine Spalte gibt, in der mindestens die Hälfte aller Zellen mit Nullen belegt sind.

8. Gegeben sei ein Gitter aus 25×25 Einheitsquadraten. Mit einem roten Stift können Quadrate beliebiger Größe auf den Gitterlinien gezeichnet werden. Man bestimme die kleinste Anzahl solcher Quadrate, die man zeichnen muss, um alle Gitterlinien zu färben.

9. Ein Rechteck bestehe aus 200×3 Einheitsquadraten. Man zeige, dass die Anzahl der Möglichkeiten, dieses Rechteck in Rechtecke der Größe 1×2 aufzuteilen, durch 3 teilbar ist.

10. Es sei $m = 30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, und M sei die Menge solcher positiven Teiler von m, die genau 2 Primfaktoren aufweisen. Man bestimme die kleinste ganze Zahl n mit folgender Eigenschaft: Unter je n Zahlen aus M gibt es drei Zahlen a, b, c mit $a \cdot b \cdot c = m$.

11. Gegeben sei ein Dreieck ABC. Die Punkte D und E liegen auf den Seiten BC bzw. AC, und es gilt $|BD| = |AE|$. Die Gerade durch die Umkreismittelpunkte der Dreiecke ADC und BEC schneidet die Geraden AC und BC in K bzw. L. Man beweise: $|KC| = |LC|$.

12. Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $|BC| = |AD|$. Seien M und N die Mittelpunkte von $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$. Die Geraden AD und BC schneiden die Geraden MN in P bzw. Q. Man beweise: $|CQ| = |DP|$.

13. Was ist die kleinste Anzahl von Kreisen mit dem Radius $\sqrt{2}$, die benötigt werden, um ein Rechteck

    (a) der Größe 6×3

    (b) der Größe 5×3

    zu überdecken ?

14. Es sei M der Schnittpunkte der Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC. D und E seien verschiedene Punkte auf BC so, dass $|DC| = |CE| = |AB|$. Weiterhin seien P und Q die Punkte auf den Strecken $\overline{BD}$ bzw. $\overline{BE}$, die $2|BP| = |PD|$ und $2|BQ| = |QE|$ erfüllen. Man bestimme $\sphericalangle PMQ$.

15. Die Geraden e und f stehen zueinander senkrecht und schneiden sich in H. Die Punkte A und B liegen auf e, und C und D liegen auf f, so dass alle fünf Punkte A, B, C, D und H verschieden sind. Die Geraden b und d sind senkrecht zu AC und gehen durch B bzw. D. Entsprechend sind die Geraden a und c senkrecht zu BD und gehen durch A bzw. C. Der Schnittpunkt von a und b sei X und der von c und d sei Y. Man beweise: XY geht durch H.

16. Es seien p eine Primzahl und n eine positive ganze Zahl; q sei ein positiver Teiler von $(n+1)^p - n^p$. Man zeige: $q - 1$ ist durch p teilbar.

17. Eine Folge $\{x_n\}_{n\geq 0}$ ist folgendermaßen definiert:
    $x_0 = a$, $x_1 = 2$ und $x_n = 2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1$ für $n > 1$.
    Man bestimme alle ganzen Zahlen a mit: $2x_{3n} - 1$ ist für alle $n \geq 1$ eine Quadratzahl.

18. Es seien x und y positive ganze Zahlen und

$$z = \frac{4xy}{x+y}$$

    sei eine ungerade Zahl. Man beweise: Mindestens ein Teiler von z kann in der Form $4n - 1$ ausgedrückt werden, wobei n eine positive ganze Zahl ist.

19. Ist es möglich, 2005 paarweise verschiedene positive Quadratzahlen zu finden, deren Summe ebenfalls eine Quadratzahl ist?

20. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, die $(p_1 + 1)(p_2 + 1) \cdots (p_k + 1)$ teilen, wobei $p_1 p_2 \cdots p_k$ die Faktorisierung von n in (nicht notwendigerweise verschiedene) Primfaktoren ist.